HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, 10099 Berlin

Berlin, den 05.07.2023

Übungsaufgaben zur Vorlesung Mathematik II
Serie 11

Diskussion: in Übungen der Woche 10.07.-16.07.2023

---

1. **Gebietsintegration [5 P]:** Berechnen Sie

   a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{1} f\left(x,y\right)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$ für $f\left(x,y\right)=\begin{cases}\sqrt{x^2-y^2} & \text{falls } x^2\geq y^2\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$.

   b) $\displaystyle\int_G y\cdot\exp\left(x\right)\,\mathrm{d}(x,y)$ mit $G=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq x\leq y\leq 1\right\}\subseteq\mathbb{R}^2$.

2. **Koordinatenwechsel [5 P]:** Berechnen Sie

   a) $\displaystyle\int_{B_r} f\left(x,y,z\right)\,\mathrm{d}(x,y,z)$ für $f\left(x,y,z\right)=z$ und $f\left(x,y,z\right)=z^2$ mit

   $$B_r=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\leq r^2\right\}\subseteq\mathbb{R}^3,\quad r\in[0,\infty).$$

   b) $\displaystyle\int_G x\cdot y\cdot z\,\mathrm{d}(x,y,z)$ mit $G=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\leq 1\wedge 0\leq z\leq 2\right\}\subseteq\mathbb{R}^3$.

3. **Volumen [3 P]:** Berechnen Sie das Volumen $V=\displaystyle\int_G \mathrm{d}(x,y,z)$ von

   $$G=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\leq x\leq 1\wedge 0\leq y\leq x\wedge -y^2\leq z\leq x^2\right\}\subseteq\mathbb{R}^3.$$

4. **Kugeloktant [7 P]:** Sei

   $$K=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x\geq 0\wedge y\geq 0\wedge z\geq 0\wedge x^2+y^2+z^2\leq 1\right\}\subseteq\mathbb{R}^3$$

   ein Kugeloktant mit konstanter Dichte $\rho(x,y,z)=7$ für alle $(x,y,z)\in K$.

   a) Berechnen Sie die Masse $M=\displaystyle\int_K \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z)$ von K.

   b) Berechnen Sie das Volumen von K.

   c) Berechnen Sie den Schwerpunkt

   $$\left(x_S,y_S,z_S\right)=\frac{1}{M}\left(\int_K \rho\cdot x\,\mathrm{d}(x,y,z),\int_K \rho\cdot y\,\mathrm{d}(x,y,z),\int_K \rho\cdot z\,\mathrm{d}(x,y,z)\right)\in\mathbb{R}^3$$

   von K.