HUMBOLDT–UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Institut für Mathematik
PD Dr. C. Puhle

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, 10099 Berlin

Berlin, den 10.05.2023

Übungsaufgaben zur Vorlesung Mathematik II
Serie 4

Diskussion: in Übungen der Woche 15.05.-21.05.2023

---

1. **Fehlerabschätzung [3* P]:** Zeigen Sie, dass das Restglied
$$R_{n+1}(x) := \exp(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}, \quad n \in \mathbb{N}$$
für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \leq 1 + \frac{n}{2}$ die folgende Ungleichung erfüllt:
$$|R_{n+1}(x)| \leq 2\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

2. **Funktionenfolgen [3 P]:** Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die Abbildung $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ über die nachstehende Abbildungsvorschrift definiert. Bestimmen Sie damit jeweils $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ für alle $x \in [0,1]$:
$$\text{a)} \quad f_n(x) = \frac{1}{1+nx}, \qquad \text{b)} \quad f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}, \qquad \text{c)} \quad f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}.$$
Kann damit eine reellwertige Funktion f definiert werden? Wenn ja, konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise oder gleichmäßig gegen f?

3. **Funktionenreihen [2 P]:** Untersuchen Sie, ob die Funktionenreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{1}{1+n^2x^2}$ gleichmäßig konvergent ist.

4. **Grenzwerte [2 P]:** Bestimmen Sie die nachstehenden Grenzwerte, sofern diese existieren (Begründung):
   a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n - 1}{x-1}$ für $n \in \mathbb{N}$.
   b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{(x+a)(x+b)} - x\right)$ für $a, b \in \mathbb{R}$.

5. **Stetigkeit [2 P]:** Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch die Zuordnung
$$f(x) := \begin{cases} \frac{x^4-10x^2+9}{x^2-4x+3} & \text{falls } x \neq 1 \wedge x \neq 3 \\ \alpha & \text{falls } x = 1 \\ \beta & \text{falls } x = 3. \end{cases}$$
Können die reellen Zahlen α und β so gewählt werden, dass f auf $\mathbb{R}$ stetig ist? Begründen Sie ihre Antwort.