Mathematik für Informatiker I: Analysis

Aufgabenserie 7 zum 10.12.02

1. Beweisen Sie, dass für jede komplexe Zahl α die Reihe
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n^n}$ konvergiert.

2. Beweisen Sie, dass für $q \in \mathbb{R}$, $q \leq -1$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ divergiert.

3. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:
   (1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$
   (2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2}{(n+1) \cdot 3^n}$

4. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei eine monoton fallende Folge positiver Zahlen.
Beweisen Sie, dass $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} a_n$ konvergiert.

5.* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei eine Folge positiver reeller Zahlen, die eine der folgenden Voraussetzungen erfüllt.
   (i) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, $a := \lim_{n \to \infty} a_n$.
   (ii) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert bestimmt gegen $+\infty$.
   (1) Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Reihe
   $$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{a_n} \right)^n$$
   für eine beliebige reelle Zahl x, wobei im Fall (i) zusätzlich noch $x \neq a$ vorausgesetzt wird.
   (2) Zeigen Sie, dass im Fall (i) für $x = a$ sowohl Konvergenz als auch Divergenz auftreten kann (in Abhängigkeit von der gewählten positiven Zahlenfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$).

Hinweis: Bitte beachten Sie, dass sich einige der Immatrikulations-Nummern bisher nicht zuordnen lassen (Liste unter Goya, aktuelle Aufgaben). Dies ist aber eine Voraussetzung für die Bewertung der Aufgaben.