Mathematik für Informatiker I: Analysis

Aufgabenserie 9 zum 7.1.03

1. Stellen Sie fest, ob die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ stetige Fortsetzungen auf $\mathbb{R}$ besitzen und geben Sie in diesem Fall den Funktionswert $f(a)$ der Fortsetzungen an.

   (1) $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x-1}, \; a = 1$

   (2) $f(x) = \dfrac{-8x^3 + 22x^2 - 32x + 15}{-4x^3 - x^2 - 13x + 12}, \; a = \dfrac{3}{4}$

   (3) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}, \; a = 0$

   Hinweis: Es werden (wie immer) sorgfältige Begründungen erwartet!

2. Durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   wird eine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert. Ist f im Punkt $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ stetig?

3. Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung auf dem Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$. Beweisen Sie: Wenn f injektiv ist, so ist f auch streng monoton.

   Anleitung: Schließen Sie indirekt unter Verwendung des Zwischenwertsatzes.

4. Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

   a) $\dfrac{2x^2 + x + 2}{x^2 - 2x + 3}$

   b) $\sqrt{e^{\cos(x)}}$

   c) $x - \sqrt[3]{x \cdot \sin(x)}$

   d) $\sin(\sqrt[3]{2nx + e^{nx}}), \; n \in \mathbb{N}$

5.* f und g seien Abbildungen $]a,b[\to \mathbb{R}$, die im offenen Intervall $]a,b[$ n-mal differenzierbar sind. Beweisen Sie, dass $f \cdot g$ ebenfalls n-mal differenzierbar ist und für die n-te Ableitung gilt

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} f^{(\nu)} \cdot g^{(n-\nu)}.$$