Mathematik für Informatiker I: Analysis

Aufgabenserie 10 zum 14.1.03

1. Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf Differenzierbarkeit:

$$f_1(x) := \sin(|x|) \qquad\qquad f_2(x) := x \cdot \sin(|x|)$$

2. Bestimmen Sie die Bilder (d.h. die „genauen Wertebereiche“) der folgenden Abbildungen:

(1) $f_1 :]-1, 1[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

(2) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}}$

Hinweis: Die Lösung erfordert nicht mehr als Kenntnis des Zwischenwertsatzes sowie einfacher Eigenschaften stetiger Funktionen und Grenzwerte.

3. Bestimmen Sie für $f(x) = x + x^2 + 3\cos(x)$ die Taylorreihe an der Stelle $x = 0$ bis zum 5. Glied sowie das 5-te Restglied nach Lagrange.

4. Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ an der Stelle $x = 0$ nach dem Taylorschen Satz so weit, dass sie damit die Zahl $\sqrt[3]{9}$ bis auf 8 Stellen nach dem Komma errechnen können.

5.* $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ sei eine stetige Abbildung, die im Intervall $]a, b[$ differenzierbar ist. Falls f in a differenzierbar ist (d.h. der Grenzwert des Differenzenquotienten für $x \to a + 0$ existiert), so bezeichnen wir diese Ableitung mit $f'_+(a)$ (*rechtsseitige Ableitung in* $a+0$) und nennen f in a *rechtsseitig differenzierbar.*

Beweisen Sie: Falls $\lim_{x\to a+0} f'(x)$ existiert, so ist f in a rechtsseitig differenzierbar sowie

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a+0} f'(x).$$