Mathematik für Informatiker I: Analysis

Aufgabenserie 12 zum 28.1.03

1. Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

   (1) $f(x) := \begin{cases} x^6 + 1 & \text{für } x > 0 \\ 1 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$

   (2) $f(x) := \begin{cases} e^x & \text{für } x > 0 \\ x + 1 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$

2. Bestimmen Sie die hundertste Ableitung $f^{(100)}(x)$ für die Funktion $f(x) := \sin(cx)$, wenn $c \in \mathbb{R}$ eine gegebene Zahl ist.

3. Wie verläuft die Kurve $f(x) = x^x$ für $x \in]0, \infty[$?

4. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

   (1)* $\int x^n \cdot e^{-x^n} \mathrm{d}x$, wobei $x > 0$, $n \in \mathbb{N}$ ist,

   (2) $\int \frac{1}{x \cdot \ln^2 x} \mathrm{d}x$.

   Hinweis. Beim Aufschreiben dieser Aufgabe gab es leider in beiden Fällen Schreibfehler. Dadurch ist (2) leichter geworden und (1) offenbar sehr schwer. Lösen Sie (2), damit erfüllen Sie die Anforderungen. Wer Lust hat, kann sich auch an (1) versuchen - aber außer Konkurrenz (möglicherweise ist kein geschlossener Ausdruck zu finden).

5.* Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die folgende Funktion:

   $$f(x) := \begin{cases} x^3 \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$

   Zeigen Sie:

   (1) f ist auf $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar (d.h. $f'(x)$ existiert und ist ebenfalls stetig) sowie $f'(0) = 0$.

   (2) $f(x)$ ist in keiner Umgebung von 0 monoton.

Hinweise:

Diese Serie ist die letzte Aufgabenserie. Bitte beachten Sie die Informationen zur minimalen Punktzahl für einen Übungsschein (Vorlesung) und melden Sie sich rechtzeitig bei Ihrer Studienabteilung für die Klausur an.

Klausurtermin ist Montag, der 17.2.2003, 10.15, Kinosaal