Lineare Algebra individuell
Online-Fassung, Ver. 0.42
Internes Material, **25.4.2004**

W. Pohl, D.Popescu, R. Laza

Kapitel 5

Endomorphismen von Vektorräumen

$V \neq \mathbf{0}$ sei ein Vektorraum über dem Körper K und $n = \dim_K(V) < \infty$. Die Endomorphismen $\varphi : V \to V$ werden bezüglich einer Basis $\mathcal{B}$ von V durch die zugeordnete Matrix $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ beschrieben; variiert $\mathcal{B}$, so entstehen (im Allgemeinen) unterschiedliche Matrizen. Die Fragestellung nach einer Normalform trat implizit schon im 18. Jahrhundert auf. Sie wurde in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts durch C. Jordan (zunächst über den Körpern $\mathbb{F}_p$, dann über $\mathbb{C}$) behandelt und später durch M. Hamburger in geschlossener Form dargestellt. Ein wichtiges Motiv war die Untersuchung linearer Differenzialgleichungen.

Dieses Kapitel gibt eine Einführung in die Klassifikation der Endomorphismen eines Vektorraumes. Die Aufgabenstellung ist äquivalent zum Auffinden eines Systems von Normalformen der hier als Ähnlichkeit bezeichneten Äquivalenzrelation $\approx$ auf der Menge $\mathrm{M}(n;K)$ quadratischer Matrizen über K. Es ist nahe liegend, nach „möglichst einfachen“ Repräsentanten der Klassen zu suchen.

5.3 Nilpotente Endomorphismen

Die Klassifikation wird zunächst für Endomorphismen ausgeführt, deren höhere Potenzen verschwinden. Beispiele dafür ergeben sich nach dem folgenden 5/3/1

Lemma. *Für eine obere Dreiecksmatrix*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ & 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \mathbf{0} & & 0 & a_{n-1\,n} \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(n;K)$$

mit Nullen auf der Hauptdiagonale ist $A^n = 0$.
Entsprechend gilt $B^n = 0$ *für jede untere Dreiecksmatrix* $B \in \mathrm{M}(n;K)$*, deren Hauptdiagonale aus Nullen besteht.*

Beweis. Mit φ wird der Endomorphismus des Standardraumes K^n bezeichnet, für den $\mathrm{M}(\varphi) = A$ ist. $(U_0, U_1, \dots, U_n)$ sei die Fahne, die durch die kanonische Basis definiert wird, $U_i = K\cdot \boldsymbol{e}_1 + \dots + K\cdot \boldsymbol{e}_i$ für $i = 1, \dots, n$ sowie $U_i := \mathbf{0}$ für $i \leq 0$. Dann ist $\varphi(\boldsymbol{e}_i)$ (aufgrund der speziellen Gestalt der Matrix A) Linearkombination der Vektoren $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_{i-1}$, d.h. $\varphi(U_i) \subseteq U_{i-1}$. Induktiv folgt leicht $\varphi^j(U_i) \subseteq U_{i-j}$ $(i \leq n,\ j \geq 1)$. Wir erhalten daher $\varphi^n(V) = \varphi^n(U_n) \subseteq U_0 = \mathbf{0}$, d.h. φ^n ist die Nullabbildung, also $A^n = \mathrm{M}(\varphi^n) = 0$. ❏

Der Beweis lässt sich natürlich auch ganz elementar ausführen.

Definition. Ein Endomorphismus $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ heißt *nilpotent*, falls ei- 5/3/2

ne Zahl $m \in \mathbb{N}$ existiert, für die φ^m die Nullabbildung ist. Die kleinste natürliche Zahl m mit dieser Eigenschaft heißt *Nilpotenzindex des Endomorphismus.*
Entsprechend heißt eine Matrix $A \in \mathrm{M}(n;K)$ *nilpotent*, falls eine natürliche Zahl m existiert, für die $A^m = 0$ ist; die kleinste Zahl $m \in \mathbb{N}$, für die $A^m = 0$ ist, heißt *Nilpotenzindex der Matrix.*

Satz. *Ist $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus des n-dimensionalen K-Vektorraumes V, so sind die folgenden Bedingungen äquivalent.* 5/3/3

(1) *φ ist nilpotent.*

(2) $\chi_\varphi = X^n$.

(3) *Es existiert eine Basis $\mathcal{B}$ von V mit folgender Eigenschaft*: $\mathrm{M}_\mathcal{B}(\varphi)$ *ist eine obere Dreiecksmatrix, deren Hauptdiagonale aus Nullen besteht.*

(4) *φ^n ist die Nullabbildung, d.h. der Nilpotenzindex von φ ist $\leq n$.*

Das Studium der nilpotenten Endomorphismen wird sich als wesentlicher Schritt zur Klassifikation im allgemeinen Fall erweisen.

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2): Die Voraussetzung ist unabhängig von Skalarerweiterungen (vgl. 4/4/10 (2)), daher kann o.B.d.A. angenommen werden, dass χ_φ Produkt linearer Polynome ist. λ sei ein Eigenwert von φ, dann existiert ein Vektor $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$, für den $\varphi(\boldsymbol{v}) = \lambda\cdot\boldsymbol{v}$ ist. Induktiv folgt $\varphi^t(\boldsymbol{v}) = \lambda^t\boldsymbol{v}$ für $t \geq 1$. Ist nun $\varphi^m = \mathbf{0}$, so ergibt sich $\mathbf{0} = \lambda^m\boldsymbol{v}$, woraus wegen $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ offenbar $\lambda = 0$ folgt. Da die Eigenwerte von φ (im vorliegenden Fall) genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind, bedeutet dies $\chi_\varphi = X^n$.
Die Implikation (2) $\Rightarrow$ (3) folgt aus Satz 5/2/16 , nach dem eine Basis $\mathcal{B}$ existiert, für die $A = \mathrm{M}_\mathcal{B}(\varphi)$ eine obere Dreiecksmatrix ist; ihre Hauptdiagonale enthält die Eigenwerte.
(3) $\Rightarrow$ (4) ergibt sich nach dem vorhergehenden Lemma.
(4) $\Rightarrow$ (1) ist trivial. ❑

In der Sprache der Matrizenrechnung ergibt sich das folgende 5/3/4

Korollar. (*Charakterisierung nilpotenter Matrizen*)
Für eine Matrix $A \in \mathrm{M}(n;K)$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent.

(1) *A ist nilpotent.*

(2) $\chi_A = X^n$.

(3) *A ist einer oberen Dreiecksmatrix mit Nullen auf der Hauptdiagonale ähnlich.*

(4) *A^n ist die Nullmatrix, d.h. der Nilpotenzindex von A ist $\leq n$.*

Hier wird der Satz nur noch einmal mit anderen Worten aufgeschrieben. Dies ist durch die funktorielle Beziehung zwischen Matrizen und linearen Abbildungen gerechtfertigt.

Vertauschbare nilpotente Endomorphismen weisen die folgende Gemeinsamkeit mit den halbeinfachen auf. 5/3/5

Bemerkung. Sind $\varphi, \psi \in \mathrm{End}_K(V)$ nilpotent sowie $\varphi\cdot\psi = \psi\cdot\varphi$, dann ist $\varphi + \psi$ nilpotent.
Ein Beweis ergibt sich, indem im Ring $\mathrm{End}_K(V)$ auf $(\varphi+\psi)^{2n}$ die binomische Formel angewendet wird. ❑

Satz. (*Klassifikation nilpotenter Endomorphismen*) 5/3/6

$\varphi : V \to V$ sei ein nilpotenter Endomorphismus. Dann ist V eine direkte Summe $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_p$ von φ-invarianten Unterräumen $U_1, \ldots, U_p$, wobei jeder der Unterräume U_i eine Basis

Dieser Satz ist das Hauptergebnis des vorliegenden Abschnitts. Er ist Spezialfall und gleichzeitig entscheidender Schritt zum Beweis des allgemeinen Resultats über die jordansche Normalform (vgl. 5/4/10).

$$\mathcal{B}_i = (\boldsymbol{v}_{i1}, \dots, \boldsymbol{v}_{in_i}) \quad mit\ \varphi(\boldsymbol{v}_{ik}) = \boldsymbol{v}_{i\,k+1}\ für\ k < n_i\ und\ \varphi(\boldsymbol{v}_{in_i}) = \boldsymbol{0}$$

besitzt. Werden die Unterräume U_i nach absteigender Dimension angeordnet, d.h. $n_1 \geq \dots \geq n_p \geq 1$, so sind die Zahlen p, $n_1, \dots, n_p$ dadurch eindeutig bestimmt.

Beweis. Es sei $V_i = \ker(\varphi^i)$ für $i \in \mathbb{N}$. Aus $\boldsymbol{x} \in V_i$ folgt wegen $\varphi^i(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ offenbar auch $\varphi^{i+1}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$, daher $\boldsymbol{x} \in V_{i+1}$; also ist

$$\boldsymbol{0} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \dots \subseteq V_i \subseteq V_{i+1} \subseteq \dots$$

eine aufsteigende Kette von Unterräumen. Aus $\dim(V) < \infty$ folgt, dass nur für endlich viele Indizes $V_i \neq V_{i+1}$ gelten kann. q bezeichne die kleinste Zahl, für die $V_q = V_{q+1}$ ist. Dann folgt

(1) $$V_q = V_{q+i} \quad \text{für alle } i \geq 1.$$

Das lässt sich leicht sehen: Der Fall $i = 1$ entspricht der Wahl von q. Nun wird induktiv angenommen $V_q = V_{q+i}$ für eine gegebene natürliche Zahl $i \geq 1$. Es sei $\boldsymbol{x} \in V_{q+i+1}$. Dann ist $\boldsymbol{0} = \varphi^{q+i+1}(\boldsymbol{x}) = \varphi^{q+i}(\varphi(\boldsymbol{x}))$, d.h. $\varphi(\boldsymbol{x}) \in V_{q+i}$ und daher (gemäß Induktionsannahme) $\varphi(\boldsymbol{x}) \in V_q$, d.h. $\varphi^{q+1}(\boldsymbol{x}) = \varphi^q(\varphi(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{0}$, also $\boldsymbol{x} \in V_{q+1} \subseteq V_{q+i}$. Damit ist $V_{q+i+1} \subseteq V_{q+i}$, womit (1) folgt.

Da φ nilpotent ist, muss $\ker(\varphi^i) = V$ sein für hinreichend große Exponenten i. Es ergibt sich

(2) $$\boldsymbol{0} = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_{q-1} \subset V_q = V.$$

Wir beweisen die Existenz von Unterräumen W_i mit

(3) $$\begin{cases} V_i = V_{i-1} \bigoplus W_i \quad \text{für } i = 1, \dots, q\,, \\ \varphi(W_i) \subseteq W_{i-1} \quad \text{für } i = 1, \dots, q\,, \\ \varphi|_{W_i} \quad \text{ist injektiv für } i = 2, \dots, q \end{cases}$$

(insbesondere folgt $V_i = W_1 \bigoplus \dots \bigoplus W_i$ für $i = 1, \dots, q$).

Die Räume W_i werden folgendermaßen absteigend induktiv gewonnen:

Für V_{q-1} wird ein Komplementärraum W_q in $V = V_q$ gewählt, $V_{q-1} \bigoplus W_q = V_q$. Da im Fall $q = 1$ nichts zu beweisen ist, beschränken wir uns auf $q \geq 2$ und zeigen zunächst

(a) $$\varphi(W_q) \cap V_{q-2} = \boldsymbol{0}\,.$$

Dazu wird ein Vektor $\boldsymbol{x} \in \varphi(W_q) \cap V_{q-2}$ gewählt. Aus $\boldsymbol{x} \in \varphi(W_q)$ folgt $\boldsymbol{x} = \varphi(\boldsymbol{y})$ mit einem geeigneten Vektor $\boldsymbol{y} \in W_q$. Wegen $\boldsymbol{x} \in V_{q-2}$ ist $\boldsymbol{0} = \varphi^{q-2}(\boldsymbol{x}) = \varphi^{q-2}\big(\varphi(\boldsymbol{y})\big) = \varphi^{q-1}(\boldsymbol{y})$ und folglich $\boldsymbol{y} \in V_{q-1}$, also $\boldsymbol{y} \in V_{q-1} \cap W_q = \boldsymbol{0}$, daher $\boldsymbol{x} = \varphi(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$.

Dieser Schluss zeigt weiter, aus $\boldsymbol{y} \in W_q$ und $\varphi(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$ folgt $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$; daher gilt: Die Einschränkungsabbildung

(b) $$\varphi|_{W_q} \quad \text{ist injektiv.}$$

Nun ist offensichtlich $\varphi(V_q) \subseteq V_{q-1}$. Nach (a), (b) kann durch Basisergänzung ein Komplementärraum W_{q-1} zu V_{q-2} in V_{q-1} gefunden werden, der $\varphi(W_q)$ enthält.

Das bisherige Vorgehen ist bereits repräsentativ für den allgemeinen Fall, der nach Indextransformation folgt. Mittels (3) ergibt sich die Existenz einer Basis der folgenden Gestalt:

$$\begin{array}{ccccccc}
\boldsymbol{v}_1^{(q)} \;\ldots & \boldsymbol{v}_{i_q}^{(q)} & & & & & \\
\varphi(\boldsymbol{v}_1^{(q)}) \;\ldots & \varphi(\boldsymbol{v}_{i_q}^{(q)}) & \boldsymbol{v}_1^{(q-1)} \;\ldots & \boldsymbol{v}_{i_{q-1}}^{(q-1)} & & & \\
\varphi^2(\boldsymbol{v}_1^{(q)}) \;\ldots & \varphi^2(\boldsymbol{v}_{i_q}^{(q)}) & \varphi(\boldsymbol{v}_1^{(q-1)}) \;\ldots & \varphi(\boldsymbol{v}_{i_{q-1}}^{(q-1)}) & \boldsymbol{v}_1^{(q-2)} & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\varphi^{q-1}(\boldsymbol{v}_1^{(q)}) \;\ldots & \varphi^{q-1}(\boldsymbol{v}_{i_q}^{(q)}) & \varphi^{q-2}(\boldsymbol{v}_1^{(q-1)}) \;\ldots & \varphi^{q-2}(\boldsymbol{v}_{i_{q-1}}^{(q-1)}) & \varphi^{q-3}(\boldsymbol{v}_1^{(q-2)}) & \ldots
\end{array}$$

Die erste Zeile der obigen Liste enthält eine Basis für W_q, die zweite eine Basis für W_{q-1} usw. bis zur letzten, in der eine Basis für $W_1 = V_1 = \ker(\varphi)$ steht. Dabei entstehen die Vektoren jeder Zeile durch Ergänzung der Bilder der Vektoren der vorhergehenden zu einer Basis des entsprechenden Unterraumes W_i. Wegen $W_1 = \ker(\varphi)$ werden die Vektoren der letzten Zeile durch φ auf $\mathbf{0}$ abgebildet, und in der i-ten Spalte steht die Basis eines φ-invarianten Unterraumes von V, der nun mit U_i bezeichnet wird. Bei Anordnung der Vektoren nach den Spalten der Tabelle ergibt sich so eine Basis $\mathcal{B}$ von V mit der behaupteten Eigenschaft. Die zugehörigen Dimensionen n_i der Unterräume U_i sind gegeben durch

$$(n_1, \ldots, n_p) = (\underbrace{q, \ldots, q}_{i_q}, \underbrace{q-1, \ldots, q-1}_{i_{q-1}}, \underbrace{q-2, \ldots, q-2}_{i_{q-2}}, \ldots, \underbrace{1, \ldots, 1}_{i_1}),$$

wobei einzelne der Zahlen i_j null sein können (d.h. j tritt dann in der Folge nicht auf).

Es bleibt zu zeigen, dass q und die Zahlen n_i mit $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_p$ durch φ eindeutig bestimmt sind. Dazu wählen wir eine entsprechend gebildete Basis aus Vektoren $\big(\varphi^j(\boldsymbol{v'}_k^{(l)})\big)_{j,k,l}$ und ordnen diese nach dem obigem Schema an, d.h. die Spalten sind Bilder eines Vektors bezüglich der (aufsteigenden) Potenzen φ^j, und φ bildet den jeweils letzten Vektor einer Spalte auf $\mathbf{0}$ ab. Wir betrachten nun das lineare Gleichungssystem, das bezüglich der durch $\big(\varphi^j(\boldsymbol{v'}_k^{(l)})\big)_{j,k,l}$ gegebenen Basis die Bedingung $\varphi^j(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ in Koordinaten ausdrückt; die Lösung ist unmittelbar abzulesen: Wir erhalten für $\ker(\varphi^j)$ eine Basis, die genau aus den letzten j Zeilen der neuen Tabelle gebildet wird. Daher stehen in der j-ten Zeile von unten $\dim(V_j) - \dim(V_{j-1}) = \dim(W_j)$ der gegebenen Basisvektoren, und diese Zahlen sind durch φ eindeutig bestimmt. ❏

Bei Anwendung von φ^j „rücken die Zeilen der Tabelle j Schritte nach unten."

Die invarianten Unterräume U_i aus dem Satz zeichnen sich durch die folgende Eigenschaft aus. 5/3/7

Bemerkung – Definition. (*zyklischer Unterraum*)

Das Einsetzen von φ in Polynome ist durch den Homomorphismus $K[X] \to \mathrm{End}_K(V)$, $X \mapsto \varphi$ von K-Algebren beschrieben.

Ist $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$, so ist für $\boldsymbol{v} \in V$ die Menge

$$K[\varphi]\cdot \boldsymbol{v} := \{\big(f(\varphi)\big)(\boldsymbol{v}) \mid f \in K[X]\}$$

ein φ-invarianter Unterraum; solche Unterräume heißen *φ-zyklisch.*

Ist $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$, so existiert wegen $\dim_K(V) < \infty$ eine größte Zahl m, für die $\boldsymbol{v}, \varphi(\boldsymbol{v}), \varphi^2(\boldsymbol{v}), \ldots, \varphi^{m-1}(\boldsymbol{v})$ linear unabhängig sind. Diese Vektoren bilden dann (da die Menge $\{\varphi^k(\boldsymbol{v}) \mid k \in \mathbb{N}\}$ in ihrer linearen Hülle liegt) eine Basis des zyklischen Unterraumes $U = K[\varphi]\cdot \boldsymbol{v}$, die *zyklische Basis* genannt wird.

Alle Vektoren $\boldsymbol{w}$ des zyklischen Unterraumes U mit $U = K[\varphi]\cdot \boldsymbol{w}$ heißen *zyklische Erzeugende* des Paares $(U, \varphi|_U)$. Die Zahl $m = \dim(U)$ wird gelegentlich auch *Länge des zyklischen Vektors* $\boldsymbol{w}$ genannt.

Der Begriff *zyklische Erzeugende* wird durch den der sog. *Moduln über dem Ring* $K[X]$ gerechtfertigt; dies wird jedoch hier nicht verwendet.

Wir weisen darauf hin, dass zyklische Erzeugende (außer für $\dim(U) = 1$) keine Erzeugenden des Untervektorraumes U sind; diese scheinbar unzweckmäßige

Bezeichnung hat ihren Ursprung in einem Begriff der Algebra, der den des Vektorraumes verallgemeinert.
Im obigen Satz bilden mit den dort verwendeten Notationen die Vektoren $\boldsymbol{v}_{i1} \in U_i$ zyklische Erzeugende der Paare $(U_i, \varphi|_{U_i})$. ❑

Bezeichnet $\varphi_{n_i} : K^{n_i} \to K^{n_i}$ denjenigen Endomorphismus des Standardrau- 5/3/8
mes, der für $j < n_i$ den Basisvektor $\boldsymbol{e}_j$ auf $\boldsymbol{e}_{j+1}$ sowie $\boldsymbol{e}_{n_i}$ auf $\mathbf{0}$ abbildet, dann erhalten wir für beliebig gegebene positive ganze Zahlen $n_1, \ldots, n_p$ durch die äußere direkte Summe einen Homomorphismus

$$\varphi_{n_1} \oplus \ldots \oplus \varphi_{n_p},$$

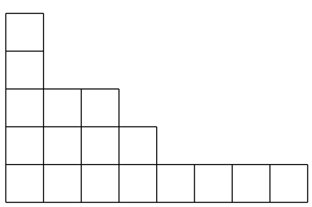
der bei entsprechender Einbettung der Summanden in K^n einen nilpotenten Endomorphismus

$$\varphi : K^n \to K^n, \quad n := n_1 + \ldots + n_p$$

induziert. Daher kann im Klassifikationssatz 2/3/6 jedes p-Tupel $(n_1, \ldots, n_p)$ mit $n_i > 0$, $n_1 + \ldots + n_p = n$ und $n_1 \geq \ldots \geq n_p$ tatsächlich auftreten.

Definition. (*Partition*) 5/3/9
Ist $n > 0$ eine natürliche Zahl, so heißt das p-Tupel $(n_1, \ldots, n_p) \in \mathbb{N}^p$ eine *Partition* von n, falls $n_1 \geq \ldots \geq n_p \geq 1$ und $n_1 + \ldots + n_p = n$ ist.

Eine Partition lässt sich durch ein sog. *Young-Diagramm* veranschaulichen, das $(n_1, \ldots, n_p)$ durch eine „Treppe“ aus jeweils n_i „Kästchen“ an der i-ten Position beschreibt. So entspricht z.B. der Partition $(5, 3, 3, 2, 1, 1, 1, 1)$ der Zahl 17 das Diagramm



5 3 3 2 1 1 1 1

mit insgesamt $5 + 3 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 17$ Kästchen.

Korollar. *Die Ähnlichkeitsklassen nilpotenter Matrizen in* $\mathrm{M}(n; K)$ *ent-* 5/3/10
sprechen umkehrbar eindeutig den Partitionen der Zahl n. *Zu jeder nilpotenten Matrix* $A \in \mathrm{M}(n; K)$ *existiert genau eine ähnliche Blockdiagonalmatrix*

$$J_{(n_1, \ldots, n_p)} = \begin{pmatrix} J_{n_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & J_{n_p} \end{pmatrix}$$

mit Blöcken

$$J_{n_i} = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & \mathbf{0} & \\ 0 & 1 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(n_i; K)$$

längs der Hauptdiagonale, wobei $(n_1, \ldots, n_p)$ *eine Partition von* n *ist (im Fall* $n_i = 1$ *bezeichnet* $J_1 = (0) \in \mathrm{M}(1; K)$ *die Nullmatrix).*
Insbesondere existieren nur endlich viele Ähnlichkeitsklassen nilpotenter Matrizen in $\mathrm{M}(n; K)$.

Der hier gefundene, eindeutig bestimmte Repräsentant $J_{(n_1,\dots,n_p)}$ der Ähnlichkeitsklasse heißt auch *jordansche Normalform der nilpotenten Matrix* A.

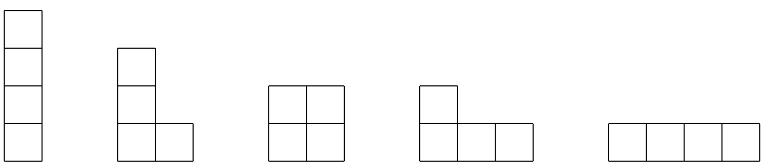
Beweis. Offenbar genügt es, für den durch A definierten Endomorphismus φ des Standardraumes K^n eine Basis $\mathcal{B}$ von K^n gemäß Satz 5/3/6 zu wählen. Dann ist $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = J_{(n_1,\dots,n_p)}$ für die entsprechende Partition $(n_1,\dots,n_p)$ von $n=\dim(V)$ und folglich A ähnlich zu $J_{(n_1,\dots,n_p)}$. ❏

Bemerkung. Zur Bestimmung der zu einem nilpotenten Endomorphismus 5/3/11
φ gehörigen Partition genügt es, die Folge $\mathrm{rang}(\varphi), \mathrm{rang}(\varphi^2), \mathrm{rang}(\varphi^3), \dots$ zu kennen (in der natürlich fast überall Nullen stehen). Ist nämlich $V_i = \ker(\varphi^i)$, so folgt nach dem Rangsatz (3/3/21) $n = \dim(V) = \dim(V_i) + \mathrm{rang}(\varphi^i)$, und

$$\begin{aligned}\dim(V_i) - \dim(V_{i-1}) &= n - \mathrm{rang}(\varphi^i) - (n - \mathrm{rang}(\varphi^{i-1}))\\ &= \mathrm{rang}(\varphi^{i-1}) - \mathrm{rang}(\varphi^i)\end{aligned}$$

ist die Zahl der Kästchen in der (von unten gezählt) i-ten Schicht des zugehörigen Young-Diagramms.

Beispiel. Es gibt genau 5 Partitionen der Zahl 4:



4   3 1   2 2   2 1 1   1 1 1 1

Die möglichen Fälle können mit einer Ausnahme bereits durch den Nilpotenzindex unterschieden werden. Da dieser, ebenso wie der Rang einer Matrix, auf einer Ähnlichkeitsklasse konstant ist, ergibt sich aus der Gestalt der entsprechenden Normalformen die folgende Tabelle.

Wir dürfen natürlich nicht erwarten, dass es immer so einfach aussieht, wenn wir nilpotente Endomorphismen $K^n \to K^n$ untersuchen.

Klassifikation nilpotenter Endomorphismen $\varphi: K^4 \to K^4$					
Partition	(4)	$(3,1)$	$(2,2)$	$(2,1,1)$	$(1,1,1,1)$
Bedingungen	$\varphi^4 = \mathbf{0}$ $\varphi^3 \neq \mathbf{0}$	$\varphi^3 = \mathbf{0}$ $\varphi^2 \neq \mathbf{0}$	$\varphi^2 = \mathbf{0}$ $\mathrm{rang}(\varphi)$ $= 2$	$\varphi^2 = \mathbf{0}$ $\mathrm{rang}(\varphi)$ $= 1$	$\varphi = \mathbf{0}$

Wir untersuchen beispielsweise die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 & 0\\ 4 & -2 & -4 & -1\\ -5 & 4 & 6 & 1\\ 4 & 4 & 0 & -2\end{pmatrix} \in \mathrm{M}(4;\mathbb{R}).$$

Offensichtlich ist

$$A \neq 0, \quad A^2 = 0, \quad \mathrm{rang}(A) = 2,$$

d.h. A ist nilpotent und muss die Normalform haben, die der Partition $(2,2)$ von 4 entspricht.

Nun soll darüber hinaus eine reguläre Matrix U bestimmt werden, für die $U^{-1}\cdot A\cdot U$ die Normalform $B = J_{(2,2)}$ ist. Zur Bestimmung der zyklischen

Vektoren berechnen wir zunächst den Kern der zugehörigen linearen Abbildung φ, der durch die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems mit der Koeffizientenmatrix A gegeben ist. Eine Basis von $\ker(\varphi)$ ist $\big((2,1,0,6),(2,-2,3,0)\big)$. Diese wird durch die Vektoren $\boldsymbol{w}_{11} = (1,0,0,0)$, $\boldsymbol{w}_{12} = (0,1,0,0)$ der kanonischen Basis zu einer Basis von V ergänzt.

Zusammen mit $\boldsymbol{w}_{21} = \varphi(\boldsymbol{w}_{11}) = (-2,4,-5,4)$ und $\boldsymbol{w}_{22} = \varphi(\boldsymbol{w}_{12}) = (4,-2,4,4)$ entsteht eine Basis $\mathcal{B} = (\boldsymbol{w}_{11},\boldsymbol{w}_{21},\boldsymbol{w}_{12},\boldsymbol{w}_{22})$ von V, bezüglich der $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ die gesuchte Normalform B besitzt. Werden die Vektoren aus $\mathcal{B}$ als Spalten einer Matrix

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

angeordnet, so erhalten wir durch

$$B = U^{-1} \cdot A \cdot U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

die Normalform von A. ❏

Allgemein ergibt sich das folgende

Rechenverfahren. (*Normalform einer nilpotenten Matrix*) 5/3/12

$A \in \mathrm{M}(n;K)$ sei eine nilpotente Matrix. $V_i \subseteq K^n$ bezeichne den Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems $A^i \cdot x = 0$,

$$\mathbf{0} = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{q-1} \subset V_q = V := K^n.$$

1. Schritt:

Bestimmung der Potenzen A^i ($i = 1,2,\ldots$) und damit der Zahl

$$q := \min\{i \,|\, A^i = 0\}.$$

Durch sukzessive Basisergänzung wird eine Basis $(\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_n)$ von V bestimmt, für die $(\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_{d_j})$ Basis von V_j ist, $d_j = \dim(V_j)$, $j = 1,\ldots,q$. Diese Basen stehen nun in jedem der folgenden Schritte zur Verfügung.

2. Schritt:

Ergänzung einer Basis von V_{q-1} durch Vektoren

$$\boldsymbol{w}_{11},\boldsymbol{w}_{12},\ldots,\boldsymbol{w}_{1i_q}$$

zu einer Basis des Vektorraumes $V_q = V$ (wir wählen die bereits unter 1. gefundenen Vektoren $\boldsymbol{b}_{d_{q-1}+1},\ldots,\boldsymbol{b}_{d_q}$).

3. Schritt:

Wahl einer Basis von V_{q-2} und Ergänzung durch Vektoren $\boldsymbol{w}_{21},\boldsymbol{w}_{22},\ldots,\boldsymbol{w}_{2\,i_{q-1}}$ zu einer Basis von V_{q-1}, wobei die linear unabhängigen Vektoren

$$\underbrace{{}^{\mathrm{t}}(A \cdot {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{w}_{11})}_{\boldsymbol{w}_{21}}, \underbrace{{}^{\mathrm{t}}(A \cdot {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{w}_{12})}_{\boldsymbol{w}_{22}}, \ldots \in V_{q-1}$$

als erste angeordnet werden (wir wenden das Austauschverfahren auf die genannten Vektoren und $\boldsymbol{b}_{d_{q-2}+1},\ldots,\boldsymbol{b}_{d_{q-1}}$ an).

$$\vdots$$

i-ter Schritt ($i \leq q$):

Wahl einer Basis von V_{q-i+1} und Ergänzung durch Vektoren $\boldsymbol{w}_{i-1\,1}, \boldsymbol{w}_{i-1\,2}, \ldots, \boldsymbol{w}_{i-1\,i_{q-i+2}}$ zu einer Basis von V_{q-i+2}, wobei die linear unabhängigen Vektoren

$$\underbrace{{}^{\mathrm{t}}(A\cdot{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{w}_{i-1\,1})}_{\boldsymbol{w}_{i-1\,1}}, \underbrace{{}^{\mathrm{t}}(A\cdot{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{w}_{i-1\,2})}_{\boldsymbol{w}_{i-1\,2}}, \ldots \in V_{q-i+2}$$

als erste angeordnet werden (wir wenden das Austauschverfahren auf die genannten Vektoren und $\boldsymbol{b}_{d_{q-i+1}+1}, \ldots, \boldsymbol{b}_{d_{q-i+2}}$ an).

$(q+1)$-ter Schritt:

Wahl einer Basis aus Vektoren $\boldsymbol{w}_{q1}, \boldsymbol{w}_{q2}, \ldots, \boldsymbol{w}_{q\,i_1}$ von V_1, in der die Vektoren

$$\underbrace{{}^{\mathrm{t}}(A\cdot{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{w}_{q-1\,1})}_{\boldsymbol{w}_{q1}}, \underbrace{{}^{\mathrm{t}}(A\cdot{}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{w}_{q-1\,2})}_{\boldsymbol{w}_{q2}}, \ldots \in V_1$$

als erste vorkommen (wir wenden das Austauschverfahren auf die genannten Vektoren und $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_{d_1}$ an).

Die Vektoren aus $\boldsymbol{w}_{ij}$ bilden nun eine Basis von V; werden sie dem Young-Diagramm entsprechend sinngemäß angeordnet,

$\boldsymbol{w}_{11}$	$\boldsymbol{w}_{12}$	$\ldots$	$\boldsymbol{w}_{1i_q}$					
$\boldsymbol{w}_{21}$	$\boldsymbol{w}_{22}$	$\ldots$	$\boldsymbol{w}_{2i_q}$	$\boldsymbol{w}_{2i_q+1}$	$\ldots$	$\boldsymbol{w}_{2i_{q-1}}$		
$\boldsymbol{w}_{31}$	$\boldsymbol{w}_{32}$	$\ldots$	$\boldsymbol{w}_{3i_q}$	$\boldsymbol{w}_{3i_q+1}$	$\ldots$	$\boldsymbol{w}_{3i_{q-1}}$	$\ldots$	
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		
$\boldsymbol{w}_{q1}$	$\boldsymbol{w}_{q2}$	$\ldots$	$\boldsymbol{w}_{qi_q}$	$\boldsymbol{w}_{qi_q+1}$	$\ldots$	$\boldsymbol{w}_{qi_{q-1}}$	$\ldots$	$\boldsymbol{w}_{q\,i_1}$

dann ergibt sich mit

$$U := ({}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{w}_{11}, {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{w}_{21}, {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{w}_{31}, \ldots, {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{w}_{q1}, {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{w}_{12}, \ldots, {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{w}_{q\,i_1}) \in \mathrm{GL}(n;K)$$

die Normalform $U^{-1}\cdot A\cdot U$ der nilpotenten Matrix A.

5.4 Die jordansche Normalform

Wie wir bereits wissen, induzieren gewisse Endomorphismen $\varphi : V \to V$ eine direkte Zerlegung des K-Vektorraumes V in die zugehörigen Eigenräume. Zur Untersuchung beliebiger Endomorphismen wird der Begriff des Eigenraumes folgendermaßen erweitert. 5/4/1

Im Gegensatz zur Zerlegung in Eigenräume, die nur unter einschränkenden Bedingungen existiert, kann nach Skalarerweiterung zu jedem beliebigen Endomorphismus φ eine Hauptraumzerlegung gefunden werden. Ist φ diagonalisierbar, so stimmt diese mit der Eigenraumzerlegung überein.

Bemerkung – Definition. λ sei ein Eigenwert von $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$.

(1) Die Kerne $V_{\lambda,k} := \ker\left((\lambda\cdot\mathrm{id}_V - \varphi)^k\right)$ bilden eine aufsteigende Kette

$$V_\lambda = V_{\lambda,1} \subseteq \ldots \subseteq V_{\lambda,k} \subseteq V_{\lambda,\,k+1} \subseteq \ldots$$

von Unterräumen des Vektorraumes V, sie heißen auch *höhere Eigenräume* von φ.

(2) $$\mathrm{H}(\varphi,\lambda) := \bigcup_{k=1}^{\infty} \ker\big((\lambda\cdot\mathrm{id}_V - \varphi)^k\big) = \bigcup_{k=1}^{\infty} V_{\lambda,k}$$

ist ein φ-invarianter Unterraum positiver Dimension; er heißt *Hauptraum*, auch *Primärkomponente von* φ zum Eigenwert λ.

Die Inklusionen unter (1) sind leicht einzusehen und es ergibt sich, dass die Vereinigung $\mathrm{H}(\varphi,\lambda)$ der Unterräume $V_{\lambda,k}$ selbst ein Unterraum von V ist. φ-Invarianz von $\mathrm{H}(\varphi,\lambda)$ folgt, da im Endomorphismenring $\mathrm{End}_K(V)$ die Beziehung

$$\varphi\cdot(\lambda\cdot\mathrm{id}_V - \varphi)^k = (\lambda\cdot\mathrm{id}_V - \varphi)^k\cdot\varphi$$

Tatsächlich ist $K[\varphi] \subseteq K[X]$ ein kommutativer Unterring; dies folgt aus den Potenzrechenregeln für φ.

gilt, mit $\boldsymbol{x} \in V_{\lambda,k} = \ker((\lambda\cdot\mathrm{id}_V - \varphi)^k)$ also

$$(\lambda\cdot\mathrm{id}_V - \varphi)^k\big(\varphi(\boldsymbol{x})\big) = (\varphi\cdot(\lambda\cdot\mathrm{id}_V - \varphi)^k)(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$$

und daher $\varphi(\boldsymbol{x}) \in V_{\lambda,k}$ sein muss. Wir sehen sogar noch mehr:
In der aufsteigenden Kette der Unterräume $\ker\big((\lambda\cdot\mathrm{id}_V - \varphi)^k\big)$ im endlichdimensionalen Vektorraum V kann es nur endlich viele verschiedene geben. Damit gilt $\mathrm{H}(\varphi,\lambda) = \ker\big((\lambda\cdot\mathrm{id}_V - \varphi)^m\big)$ für eine Zahl $m \in \mathbb{N}$, und die Einschränkung von $\lambda\cdot\mathrm{id}_V - \varphi$ auf $\mathrm{H}(\varphi,\lambda)$ ist nilpotent. Wie wir bereits wissen, genügt es dann, für m die Dimension dieses Hauptraumes zu wählen, d.h.

$$(\lambda\cdot\mathrm{id}_V - \varphi)^{\dim(\mathrm{H}(\varphi,\lambda))}|_{\mathrm{H}(\varphi,\lambda)} = 0$$

(vgl. 5/3/3 (4)). Bezüglich einer geeigneten Basis besitzt $\lambda\cdot\mathrm{id}_V - \varphi$ eine obere Dreiecksmatrix (vgl. 5/3/3 (3)); daher ist $\chi_{\varphi|_{\mathrm{H}(\varphi,\lambda)}}$ Determinante einer oberen Dreiecksmatrix, deren sämtliche Diagonaleinträge $X - \lambda$ sind und es ergibt sich insbesondere

$$\chi_{\varphi|_{\mathrm{H}(\varphi,\lambda)}} = (X-\lambda)^{\dim(\mathrm{H}(\varphi,\lambda))}$$ **5/4/2**

als charakteristisches Polynom der Einschränkung von φ auf $\mathrm{H}(\varphi,\lambda)$.

Der folgende Satz ist ein Spezialfall der später als *Primärzerlegung* bezeichneten natürlichen Zerlegung von V bezüglich φ. **5/4/3**

Satz. (*Hauptraumzerlegung*)
Es sei $\varphi : V \to V$ *ein Endomorphismus mit charakteristischem Polynom*

$$\chi_\varphi = (X-\lambda_1)^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot(X-\lambda_s)^{\alpha_s},$$

wobei $\lambda_1, \ldots \lambda_s$ *paarweise verschieden sind. Dann gilt*

$$\dim(\mathrm{H}\big(\varphi,\lambda_i\big) = \alpha_i,$$
$$\mathrm{H}(\varphi,\lambda_i) = \ker(\varphi - \lambda\cdot\mathrm{id}_V)^{\alpha_i} \quad (i = 1, \ldots, s),$$
$$V = \mathrm{H}(\varphi,\lambda_1) \oplus \ \ldots\ \oplus \mathrm{H}(\varphi,\lambda_s).$$

Beweis. λ sei einer der Eigenwerte λ_i, $H := \mathrm{H}(\varphi,\lambda)$ und $\alpha := \alpha_i$. Wir wählen eine Zahl m, für die $H = \ker(\varphi - \lambda\cdot\mathrm{id}_V)^k$ ist, sofern $k \geq m$. Weiter setzen wir $\psi := (\varphi - \lambda\cdot\mathrm{id}_V)^m$, $W := \mathrm{im}(\psi)$. Dann gilt

(1) $V = H \bigoplus W$, und H, W sind φ-invariante Unterräume.

Das ergibt sich folgendermaßen: Ist $\boldsymbol{x} \in H \cap W$, so muss $\boldsymbol{x} = \psi(\boldsymbol{y})$ sein für einen geeigneten Vektor $\boldsymbol{y} \in V$ sowie $\psi(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$. Daher ist $\psi^2(\boldsymbol{y}) = \mathbf{0}$, d.h. (wegen $\ker(\psi^2) = \ker(\psi) = H$) $\boldsymbol{y} \in \ker(\psi)$, also $\boldsymbol{x} = \psi(\boldsymbol{y}) = \mathbf{0}$. Damit ist $H \cap W = \mathbf{0}$, und aus $\dim(V) = \dim(\mathrm{im}(\psi)) + \dim(\ker(\psi))$ folgt $V = H \bigoplus W$. Die φ-Invarianz von W ergibt sich wie für H, da in $\mathrm{End}_K(V)$ der Endomorphismus $\psi = \lambda\cdot\mathrm{id}_V - \varphi$ mit φ kommutiert.

Das ist uns eine kleine Überlegung wert: Es sei $\boldsymbol{y} \in \mathrm{im}(\psi) = W$, so folgt $\boldsymbol{y} = \psi(\boldsymbol{x})$, daher $\varphi(\boldsymbol{y}) = \varphi(\psi(\boldsymbol{x})) = \psi(\varphi(\boldsymbol{x})) \in \mathrm{im}(\psi)$.

(2) $\chi_{\varphi|_H} = (X-\lambda)^\alpha$, insbesondere ist $\alpha = \deg(\chi_{\varphi|_H}) = \dim\big(\mathrm{H}(\varphi,\lambda)\big)$.

Zum Beweis stellen wir zunächst fest, dass $\chi_\varphi = \chi_{\varphi|H} \cdot \chi_{\varphi|W}$ ist (vgl. 5/1/8). Zuvor haben wir gesehen, dass $\chi_{\varphi|H} = (X-\lambda)^\mu$ eine Potenz von $X-\lambda$ ist (5/4/2), insbesondere daher $\mu \le \alpha$. Wäre $\mu < \alpha$, so müsste λ Nullstelle von $\chi_{\varphi|W}$ sein, daher λ Eigenwert der Einschränkung von φ auf W. Ein Eigenvektor $\boldsymbol{x} \in W$ zu λ liegt jedoch in $\ker(\lambda \cdot \mathrm{id}_V - \varphi) \subseteq H$.
Aus $\boldsymbol{x} \in H \cap W$ folgt nach (1) $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, $\lightning$.

Hier wenden wir den Satz über die eindeutige Primfaktorzerlegung eines Polynoms aus $K[X]$ auf χ_φ an.

Die Zerlegung von V in eine direkte Summe der Haupträume ergibt sich induktiv, indem (1), (2) entsprechend auf W und die weiteren Eigenwerte von φ angewendet werden. ❏

Korollar. (*Satz von Cayley–Hamilton*) 5/4/4

Für jeden Homomorphismus $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ *gilt* $\chi_\varphi(\varphi) = \mathbf{0}$.

Interessant ist zunächst, dass überhaupt ein (nicht konstantes) Polynom f mit $f(\varphi) = \mathbf{0}$ existiert – das allein ist aber viel leichter zu beweisen. Später zeigt sich, dass wir hier eine noch genauere Information erhalten haben.

Beweis. Formulieren wir die Aussage in Matrixform, so wird offensichtlich, dass die Behauptung nicht von einer Skalarerweiterung abhängig ist; wir können daher o.B.d.A. K durch den Zerfällungskörper K' von $\chi_\varphi \in K[X]$ ersetzen. Dann ist $\chi_\varphi = (X-\lambda_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (X-\lambda_i)^{\alpha_s}$ mit paarweise verschiedenen Zahlen $\lambda_i \in K'$ und $V = H_1 \bigoplus \ldots \bigoplus H_s$ direkte Summe der Haupträume $H_i = \mathrm{H}(\varphi, \lambda_i)$. Der Endomorphismus

$$(*) \qquad \eta := \chi_\varphi(\varphi) = (\varphi - \lambda_1 \cdot \mathrm{id}_V)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (\varphi - \lambda_s \cdot \mathrm{id}_V)^{\alpha_s}$$

überführt (ebenso wie φ) die Haupträume H_i in sich. Es genügt daher zu zeigen, dass $\eta|_{H_i} = \mathbf{0}$ ist. $\varphi - \lambda_i \cdot \mathrm{id}_V$ ist jedoch ein nilpotenter Endomorphismus auf dem α_i-dimensionalen Raum H_i, womit wegen der Vertauschbarkeit der Faktoren in $(*)$ die Behauptung folgt. ❏

Anmerkung. Die im Beweis für das Korollar auftretenden Homomorphismen $(\varphi - \lambda_j \cdot \mathrm{id}_V)|_{H_i} : H_i \to H_i$ sind für $j \ne i$ Isomorphismen, denn ein von $\mathbf{0}$ verschiedenes Element des Kerns von $(\varphi - \lambda_j \cdot \mathrm{id}_V)|_{H_i}$ wäre aus zwei verschiedenen Haupträumen, $\lightning$. 5/4/5

Warnung. Der Satz zeigt, dass $\chi_A(A)$ für eine Matrix $A \in \mathrm{M}(n;K)$ stets die Nullmatrix ist. Wer nun glaubt, den Satz bewiesen zu haben, indem er in $\chi_A = \det(X \cdot \mathrm{E}_n - A)$ zunächst X durch A ersetzt und dann die Determinante der Nullmatrix bestimmt, sollte überlegen, was das Operationszeichen im Ausdruck $X \cdot \mathrm{E}_n$ bedeutet. 5/4/6

… so funktioniert es nur für $n = 1$.

Nach dem Satz von Cayley-Hamilton ist der Kern $\boldsymbol{a}$ des K-Algebrahomomorphismus 5/4/7

$$K[X] \to \mathrm{End}_K(V), \quad X \mapsto \varphi$$

vom Nullideal verschieden; es gibt daher ein eindeutig bestimmtes normiertes Polynom minimalen Grades in $\boldsymbol{a}$, das gleichzeitig erzeugendes Element dieses Hauptideals ist (vgl. 2/4/15).

Definition. (*Minimalpolynom*)

Das normierte Polynom m_φ minimalen Grades in $K[X]$, für das $\mathrm{m}_\varphi(\varphi) = \mathbf{0}$ ist, heißt *Minimalpolynom des Endomorphismus* $\varphi : V \to V$.

Der Begriff *Minimalpolynom* wird auch in allgemeinerem Zusammenhang verwendet; wir beziehen uns stets auf einen konkreten Endomorphismus.

Der Satz von Cayley – Hamilton zeigt, dass das charakteristische Polynom von φ durch m_φ teilbar ist, genauer gilt das folgende

Korollar. *Das Minimalpolynom eines Endomorphismus ändert sich bei Anwendung einer Skalarerweiterung nicht. Sind* $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ *die Nullstellen* 5/4/8

Vgl. 5/3/7 zum Begriff des zyklischen Vektors.

von $\chi_\varphi \in K[X]$ *im Zerfällungskörper* K' *und* $H_i = \mathrm{H}(\varphi_{K'}, \lambda_i) \subseteq V_{K'}$ *die Haupträume des durch Skalarerweiterung entstandenen Endomorphismus* $\varphi_{K'} \in \mathrm{End}_{K'}(V_{K'})$ *sowie* m_i *die maximalen Längen zyklischer Vektoren für die nilpotenten Endomorphismen* $(\varphi_{K'} - \lambda_i \cdot \mathrm{id}_{V_{K'}})|_{H_i}$ *der Haupträume* $H_i \subseteq V_{K'}$ $(i = 1, \ldots, s)$*, dann ist*

$$(*) \qquad \mathrm{m}_\varphi = (X - \lambda_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (X - \lambda_s)^{m_s}$$

das Minimalpolynom von φ*; insbesondere ist das Produkt auf der rechten Seite von* $(*)$ *ein Polynom über dem Grundkörper* K*, der* $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ *nicht enthalten muss.*

Beweis. Offenbar ist der Grad von m_φ die kleinste natürliche Zahl k, für die $\varphi^0, \varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^k \in \mathrm{End}_K(V)$ linear abhängig sind. Dann existieren $a_0, \ldots, a_k \in K$ mit $a_k \neq 0$, für die $\sum_{i=0}^k a_i \varphi^i = \mathbf{0}$ ist, und wir erhalten $\mathrm{m}_\varphi = \sum_{i=0}^k \frac{a_i}{a_k} X^i$ als Minimalpolynom von φ.

Nach 5/4/4 genügt es, $k \leq n$ zu betrachten.

Wir entnehmen daraus, dass die Koeffizienten des Polynoms m_φ durch Rechnungen mit Matrizen über dem Grundkörper bestimmt werden können. Es folgt, dass sich m_φ bei Skalarerweiterung nicht ändert, daher kann o.B.d.A angenommen werden, dass das charakteristische Polynom χ_φ in Linearfaktoren zerfällt. Die einzig möglichen irreduziblen Faktoren von m_φ sind Teiler des charkteristischen Polynoms χ_φ und daher die linearen Polynome $X - \lambda_i$. Wir haben nur noch ihre Multiplizitäten zu bestimmen.

Beschränken wir uns auf den direkten Summanden H_i von V, so zeigt sich, dass m_i die kleinste natürliche Zahl mit $(\varphi - \lambda_i \cdot \mathrm{id}_V)^{m_i}|_{H_i} = \mathbf{0}$ ist. Weiter sind nach 5/4/5 die Einschränkungen $(\varphi - \lambda_j \cdot \mathrm{id}_V)|_{H_i}$ für $j \neq i$ Isomorphismen. Es folgt, dass $(X - \lambda_i)^{m_i}$ die größte Potenz von $X - \lambda_i$ ist, die das Minimalpolynom m_φ teilt. ❏

Die Hauptraumzerlegung wird nun in Matrizenform angegeben. In Analogie zu den vorhergehenden Begriffen sprechen wir von den *höheren Eigenräumen*, den *Haupträumen* $\mathrm{H}(A, \lambda)$ bzw. dem *Minimalpolynom* m_A einer quadratischen Matrix $A \in \mathrm{M}(n; K)$, wenn wir uns auf den Endomorphismus φ des Standardraumes mit $\mathrm{M}(\varphi) = A$ beziehen. 5/4/9

Die nachfolgenden speziellen Matrizen sind uns für $\lambda = 0$ bereits bei der Bestimmung der Normalformen im nilpotenten Fall begegnet.

Bezeichnung. (*elementarer Jordanblock*)

Eine Matrix

$$\mathrm{J}(m, \lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & & & & \\ 1 & \lambda & & \mathbf{0} & \\ 0 & 1 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(m; K)$$

heißt *elementarer Jordanblock zum Eigenwert* λ (dabei ist der Fall $m = 1$ als $\mathrm{J}(1, \lambda) := (\lambda) \in \mathrm{M}(1; K)$ zu lesen).

Der Satz über die Hauptraumzerlegung lässt sich nun folgendermaßen formulieren.

Korollar. (*jordansche Normalform*) 5/4/10

$\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ *sei ein Endomorphismus, dessen charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt,*

$$\chi_\varphi = (X-\lambda_1)^{\alpha_1}\cdot\ldots(X-\lambda_s)^{\alpha_s} \quad mit \quad \lambda_i \in K, \quad \lambda_i \neq \lambda_j \quad für \quad i\neq j,$$

dann existiert eine Basis $\mathcal{B}$ von V, für die

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \mathrm{J}(m_{11},\lambda_1) & & & & & & \\ & \ddots & & & & \mathbf{0} & \\ & & \mathrm{J}(m_{1\,r_1},\lambda_1) & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \mathrm{J}(m_{s1},\lambda_s) & & \\ & \mathbf{0} & & & & \ddots & \\ & & & & & & \mathrm{J}(m_{s\,r_s},\lambda_s) \end{pmatrix}$$

eine Blockmatrix mit elementaren Jordanblöcken längs der Hauptdiagonale ist. Wird die Reihenfolge der Zahlen $\lambda_1,\ldots,\lambda_s$ vorgegeben und

$$\begin{array}{c} m_{11} \geq \ldots \geq m_{1\,r_1} \\ \vdots \\ m_{s1} \geq \ldots \geq m_{s\,r_s} \end{array}$$

gewählt, so ist diese Matrix durch φ eindeutig bestimmt.

Die angegebene Matrix heißt *jordansche Normalform* des Endomorphismus φ. Entsprechend wird für eine Matrix $A\in\mathrm{M}(n;K)$, deren charakteristisches Polynom Produkt linearer Polynome ist, eine jordansche Normalform des Endomorphismus $\varphi: K^n\to K^n$ mit $\mathrm{M}(\varphi)=A$ als *jordansche Normalform der Matrix A* bezeichnet; *sie ist in der Ähnlichkeitsklasse von A in demselben Sinn eindeutig bestimmt.*

Unter Benutzung der obigen Bezeichnungen ergibt sich

$$\mathrm{m}_\varphi = (X-\lambda_1)^{m_{11}}\cdot(X-\lambda_2)^{m_{21}}\cdot\ldots\cdot(X-\lambda_s)^{m_{s1}}$$

als Minimalpolynom des Endomorphismus φ bzw. einer beliebigen Matrix mit der angegebenen jordanschen Normalform.

Die geometrische Multiplizität $\gamma_{\lambda_i} = \dim\big(\ker(\varphi-\lambda_i\cdot\mathrm{id}_V)\big)$ des Eigenwerts λ_i stimmt mit der Zahl der in der Normalform auftretenden elementaren Jordanblöcke zu λ_i überein.

Beweis. Die Existenz einer Basis mit der gesuchten Eigenschaft ergibt sich, indem für jeden Hauptraum $H_i := \mathrm{H}(\varphi,\lambda_i)$ eine Basis gewählt wird, bezüglich der die Matrix des nilpotenten Endomorphismus $(\varphi-\lambda_i\cdot\mathrm{id}_V)|_{H_i}$ auf dem invarianten Unterraum H_i die Normalform nach Korollar 5/3/10 annimmt.

Zum Beweis der Eindeutigkeit bemerken wir zunächst, dass aus der im Satz angegebenen Basis $\mathcal{B}$ und der Matrix $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ unmittelbar die Haupträume $\mathrm{H}(\varphi,\lambda_i)$ abgelesen werden können: Sie werden von den Vektoren $\boldsymbol{b}_j$ erzeugt, für die λ_i an (j,j)-ter Position in $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ vorkommt. Die Haupträume sind aber durch φ eindeutig bestimmt, und die Einschränkung von $\varphi-\lambda_i\cdot\mathrm{id}_V$ auf den φ-invarianten Unterraum $\mathrm{H}(\varphi,\lambda_i)$ ist nilpotent. Damit folgt die Behauptung aus der entsprechenden Eindeutigkeitsaussage für nilpotente Endomorphismen (vgl. 5/3/6). ❏

Der Bedingung $(\varphi-\lambda_i\cdot\mathrm{id}_V)^{\alpha_i}(\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$ entspricht ein lineares Gleichungssystem für die Koordinaten der zugehörigen Vektoren aus V.

Eine Blockdiagonalmatrix aus elementaren Jordanblöcken zum selben Eigenwert, angeordnet nach absteigender Größe, wird als *Jordanblock* bezeichnet. Die Jordanblöcke eines Endomorphismus sind bis auf Permutation eindeutig bestimmt; wir sprechen dennoch gelegentlich (etwas nachlässig) von *der* jordanschen Normalform.

Das Tupel $(\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ aller verschiedenen Eigenwerte und die sog. *Segre-Charakteristik* $[(m_{11}, \dots, m_{1r_1}) \dots (m_{s1}, \dots, m_{sr_s})]$, die aus den zugehörigen Partitionen der Dimensionen der Haupträume gebildet wird, ergeben eine vollständige Beschreibung der jordanschen Normalform.
Insbesondere entspricht der Eintrag $(m_{i1}, \dots, m_{ir_i})$ dem i-ten Jordanblock, der seinerseits aus den elementaren Blöcken $\mathrm{J}(m_{i1}, \lambda_i), \dots, \mathrm{J}(m_{ir_i}, \lambda_i)$ zusammengesetzt ist.

Rechenverfahren. (*Bestimmung der jordanschen Normalform*) 5/4/11

$A \in \mathrm{M}(n; K)$ sei eine Matrix, deren charakteristisches Polynom Produkt linearer Polynome ist, φ bezeichnet den entsprechenden Endomorphismus des Standardraumes $V := K^n$.

1. Schritt:

Es werden die Nullstellen λ_i des charakteristischen Polynoms bestimmt sowie Basen der zugehörigen Haupträume $H_i := \mathrm{H}(\varphi, \lambda_i)$.

$H_i = \ker(\varphi - \lambda_i \cdot \mathrm{id}_V)^{\alpha_i}$, wobei $\alpha_i :=$ algebraische Multiplizität von λ_i.

2. Schritt:

Auf die nilpotenten Endomorphismen $\psi_i := (\varphi - \lambda_i \cdot \mathrm{id}_V)|_{H_i}$ wird das Verfahren 5/3/12 angewendet. Wir erhalten Basen $\mathcal{B}_i$, für die ψ_i die Normalform einer nilpotenten Matrix annimmt, d.h.

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_i}(\varphi_i) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_i}(\psi_i + \lambda_i \cdot \mathrm{id}_{H_i}) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_i}(\psi_i) + \lambda_i \cdot \underbrace{\mathrm{M}_{\mathcal{B}_i}(\mathrm{id}_{H_i})}_{\mathrm{E}_{\dim(H_i)}}$$

ist eine Blockdiagonalmatrix aus elementaren Jordanblöcken zum betreffenden Eigenwert λ_i.
Durch Zusammensetzen der Basen $\mathcal{B}_i$ zu einer Basis $\mathcal{B}$ von V ergibt sich die jordansche Normalform für A als $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

Beispiel. Wir bestimmen die jordansche Normalform J der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & 6 & 2 & -5 \\ -3 & -1 & 3 & 2 & -2 \\ -4 & -1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(5; \mathbb{C})$$

sowie eine Matrix $U \in \mathrm{GL}(5; \mathbb{C})$, für die $J = U^{-1} \cdot A \cdot U$ ist.
Zunächst werden die Eigenwerte (als Nullstellen des charakteristischen Polynoms) bestimmt. Es ist

$$\chi_A = \det(X \cdot \mathrm{E}_5 - A) = \det \begin{pmatrix} X-1 & -2 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & X & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & X-6 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & -3 & X-2 & 2 \\ 4 & 1 & -4 & 0 & X \end{pmatrix}$$

$$= X^5 - 9X^4 + 27X^3 - 27X^2 = X^2 \cdot (X-3)^3,$$

d.h. A besitzt einen Eigenwert $\lambda_1 = 0$ der (algebraischen) Multiplizität 2 und einen Eigenwert $\lambda_2 = 3$ der (algebraischen) Multiplizität 3.
Für die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^5$ mit $\mathrm{M}(\varphi) = A$ erhalten wir als Haupträume

$$H_1 := \mathrm{H}(\varphi, 0) = \ker(\varphi^2) \quad \text{und} \quad H_2 := \mathrm{H}(\varphi, 3) = \ker\big((\varphi - 3 \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{C}^5})^3\big).$$

H_1 ist Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems mit der Koeffizientenmatrix

$$A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 3 & 3 & -12 \\ -6 & 0 & 6 & -3 & 3 \\ -9 & 9 & 18 & 9 & -18 \\ -9 & 0 & 9 & 9 & -9 \\ -15 & 0 & 15 & 6 & -6 \end{pmatrix},$$

für den durch leichte Rechung eine Basis $\big((0,1,0,1,1),(1,-1,1,0,0)\big)$ gefunden wird. Nun ist die Filtrierung von H_1 durch $\mathbf{0} \subseteq \ker(\varphi) \subseteq \ker(\varphi)^2 = H_1$ zu bestimmen. $\ker(\varphi)$ ist Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems mit der Koeffizientenmatrix A; eine Basis ist durch den Vektor $(1,0,1,1,1)$ gegeben. Wir ergänzen diesen zu einer Basis von $\ker(\varphi^2)$ und erhalten $\boldsymbol{w}_1 := (0,1,0,1,1)$ als zyklischen Vektor im 2-dimensionalen Hauptraum H_1; er bildet zusammen mit $\boldsymbol{w}_2 := \varphi(\boldsymbol{w}_1) = (-1,0,-1,-1,-1)$ eine zyklische Basis für H_1.

Wir untersuchen nun den Hauptraum H_2. Zur Vereinfachung der Bezeichnungen wird $\psi := \varphi - \lambda_2 \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{C}^5}$ gesetzt. Wie im ersten Schritt haben wir die Filtrierung von H_2 durch die Unterräume $\ker(\psi^i)$ zu bestimmen, wobei ψ die Matrix

$$\mathrm{M}(\psi) = A - \lambda_2 \cdot \mathrm{E}_4 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & 1 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & 2 & -5 \\ -3 & -1 & 3 & -1 & -2 \\ -4 & -1 & 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

besitzt. Es ergeben sich Basen

$$\big((-1,1,0,0,1),(0,-1,0,1,0),(1,0,1,0,0)\big) \quad \text{für} \quad \ker(\psi^2),$$
$$\big((-1,1,0,0,1),(1,0,1,0,0)\big) \quad \text{für} \quad \ker(\psi).$$

Wegen $\dim(H_2) = 3$ gilt $\ker(\psi^2) = \ker(\psi^3) = H_2$, und zum nilpotenten Endomorphismus $\psi|_{H_2}$ gehört die Partition $(2,1)$. Ein zyklischer Vektor der Länge 2 entsteht durch Ergänzung der Basis für $\ker(\psi)$ zu einer Basis für $\ker(\psi^2)$ nach dem Austauschverfahren; wir erhalten $\boldsymbol{w}_3 := (0,-1,0,1,0)$ und $\boldsymbol{w}_4 := \psi(\boldsymbol{w}_3) = (-1,1,0,0,1)$. Entsprechend wird $\boldsymbol{w}_4 \in \ker(\psi)$ durch den Vektor $\boldsymbol{w}_5 := (1,0,1,0,0)$ zu einer Basis von $\ker(\psi)$ ergänzt.

Für die so erhaltene Basis $\mathcal{B} = (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3, \boldsymbol{w}_4, \boldsymbol{w}_5)$ des 5-dimensionalen Standardraumes ist $J := \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ jordansche Normalform von φ und daher

$$J = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0 \\ 0&0&3&0&0 \\ 0&0&1&3&0 \\ 0&0&0&0&3 \end{pmatrix} = U^{-1} \cdot A \cdot U \quad \text{mit} \quad U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix besitzt einen elementaren Jordanblock für den Eigenwert 0 und zwei für den Eigenwert 3. Die Segre-Charakteristik zum Paar $(0,3)$ der Eigenwerte ist $[(2)(2,1)]$. ❏

Wir ziehen mittels 5/4/10 weitere Folgerungen aus den Eigenschaften der Jordanform.

Ist ein Endomorphismus diagonalisierbar, so muss seine jordansche Normalform selbst eine Diagonalmatrix sein (die elementaren Jordanblöcke sind aus $\mathrm{M}(1;K)$). Daraus ergibt sich ein weiteres Diagonalisierbarkeitskriterium.

Korollar. $\varphi : V \to V$ sei ein Endomorphismus. 5/4/12

(1) *φ ist genau dann diagonalisierbar, wenn das Minimalpolynom m_φ Produkt paarweise nichtassoziierter linearer Polynome ist.*

Leider haben wir hier das Problem, m_φ zu bestimmen, vgl. auch 5/2/8 .

(2) *φ ist genau dann halbeinfach, wenn das Minimalpolynom zu seiner Ableitung teilerfremd ist, d.h.* $\operatorname{ggT}(\mathrm{m}_\varphi, \mathrm{m}'_\varphi) = 1$.

Beweis. Da bei Skalarerweiterung das Minimalpolynom unverändert bleibt (vgl. 5/4/8), folgt (2) aus (1) und 2/4/21. ❑

Offensichtlich existiert eine jordansche Normalform zumindest nach Erweiterung des Grundkörpers. Besonders einfach kann die Existenzaussage formuliert werden, wenn über dem gegebenen Körper nichtkonstante Polynome stets in Linearfaktoren zerfallen. 5/4/13

... so wie das nach dem Fundamentalsatz der Algebra im komplexen Fall gilt.

Korollar. *Jede Matrix $A \in \mathrm{M}(n;\mathbb{C})$ besitzt eine (im obigen Sinn eindeutig bestimmte) jordansche Normalform.*

Elementarteiler* 5/4/14

Nachdem die Klassifikation der Endomorphismen eines Vektorraumes (zumindest über einem „hinreichend großen" Körper) prinzipiell erhalten wurde, stellt sich die Frage nach der praktischen Ausführung. Wie wir gesehen haben, ist das im Fall nilpotenter Endomorphismen stets möglich, während im Allgemeinen die Bestimmung der Eigenwerte Schwierigkeiten bereiten kann. Tatsächlich sind für Dimensionen > 4 die Nullstellen des charakteristischen Polynoms nicht immer Wurzelausdrücke der Koeffizienten einer gegebenen Matrix aus $\mathrm{M}(n;\mathbb{C})$. In den Anwendungen der Mathematik bieten sich zwar Näherungslösungen an, jedoch wissen wir bereits, dass Rundungsfehler ein Resultat unbrauchbar machen können; so kann sich im Fall nahe beieinander liegender Eigenwerte unter Umständen sogar ein qualitativ falsches Resultat (Auftreten anderer Jordanblöcke) bei der Bestimmung der Normalform ergeben.

Der Beweis dieser Eigenschaft erfordert tiefere Sätze aus der hier nicht behandelten Galoistheorie.

Hier lernen wir ein Invariantensystem kennen, mit dem sich konstruktiv entscheiden lässt, ob die jordanschen Normalformen zweier Matrizen übereinstimmen. Die Rechnung beruht auf der Bestimmung von Determinanten und dem euklidischen Algorithmus, führt also auch ohne Näherungen zum Ziel. Darüber hinaus erhalten wir eine Ähnlichkeitsklassifikation der Matrizen über einem beliebigen Grundkörper.

Die Theorie der Elementarteiler geht auf Sylvester, Smith und Weierstrass zurück.

Wir beginnen mit technischen Vorbereitungen. Ist $M \in \mathrm{M}(n;K[X])$ eine Matrix, so bezeichnet $\operatorname{ggT}(M)$ den größten gemeinsamen Teiler aller Einträge von M im Polynomring $K[X]$.

Lemma. *Ist $B \in \mathrm{M}(n;K[X])$ und $\det(B) \in K^*$, so gilt für $0 \le k \le n$*

$$\operatorname{ggT}\bigl(\Lambda^k(M)\bigr) = \operatorname{ggT}\bigl(\Lambda^k(M\cdot B)\bigr) = \operatorname{ggT}\bigl(\Lambda^k(B\cdot M)\bigr).$$

Beweis. Zunächst sehen wir, dass aufgrund der Formel 4/2/28 (2) für die adjungierte Matrix eine wieder mit dem Symbol B^{-1} bezeichnete Matrix aus $\mathrm{M}(n;K[X])$ existiert, die die Eigenschaft $B^{-1}\cdot B = B\cdot B^{-1} = \mathrm{E}_n$ besitzt.
Wegen der Funktorialität der äußeren Potenz (vgl. 4/5/17) ist $\Lambda^k(M\cdot B) = \Lambda^k(M)\cdot\Lambda^k(B)$, daher jeder Eintrag der Matrix $\Lambda^k(M\cdot B)$ Vielfachensumme der Einträge von $\Lambda^k(M)$, d.h. $\operatorname{ggT}\bigl(\Lambda^k(M)\bigr) \mid \operatorname{ggT}\bigl(\Lambda^k(M\cdot B)\bigr)$.
Umgekehrt ist $\Lambda^k(M) = \Lambda^k(M\cdot B\cdot B^{-1}) = \Lambda^k(M\cdot B)\cdot\Lambda^k(B^{-1})$, daher jeder Eintrag von $\Lambda^k(M)$ Vielfachensumme der Einträge der Matrix $\Lambda^k(M\cdot B)$. Wir erhalten $\operatorname{ggT}\bigl(\Lambda^k(M\cdot B)\bigr) \mid \operatorname{ggT}\bigl(\Lambda^k(M)\bigr)$ und weiter $\operatorname{ggT}\bigl(\Lambda^k(M\cdot B)\bigr) = \operatorname{ggT}\bigl(\Lambda^k(M)\bigr)$.
Die zweite der behaupteten Gleichheiten folgt entsprechend. ❑

Zeilen- bzw. Spaltenoperationen einer Matrix lassen sich als Multiplikation mit geeigneten Elementarmatrizen interpretieren (Bemerkung 2/3/11 (3)). Das lässt sich nach dem Lemma sinngemäß auch auf polynomiale Matrizen übertragen. 5/4/15

Dafür sind jedenfalls solche Matrizenoperationen zulässig, für die die Determinante der entsprechenden Elementarmatrix aus $K \setminus \{\mathbf{0}\}$ ist.

Bemerkung – Definition. (*Präsentationsmatrix*)

Ist $M \in \mathrm{M}(n; K[X])$, so ändern sich die Polynome $\mathrm{ggT}(\Lambda^k(M))$ nicht, wenn M durch eine Matrix ersetzt wird, die aus M durch eine der folgenden Transformationen entsteht.

(1) Vertauschen zweier Zeilen (bzw. Spalten) von M.

(2) Multiplikation einer Zeile (bzw. Spalte) von M mit einer Zahl $a \in K^*$.

(3) Addition des f-fachen einer Zeile (Spalte) von M zu einer anderen, wobei $f \in K[X]$ ein Polynom ist.

Zwei polynomiale Matrizen $M, M' \in \mathrm{M}(n; K[X])$ heißen *äquivalent*, falls sie durch eine Folge von Transformationen der angegebenen Typen ineinander überführt werden können.
Ist $A \in M(n; K)$, so heißt jede Matrix $M \in \mathrm{M}(n; K[X])$, die zur charakteristischen Matrix $X{\cdot}\mathrm{E}_n - A$ äquivalent ist, eine *Präsentationsmatrix für* A.
Ist $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ ein Endomorphismus, so wird jede Präsentationsmatrix für $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ ($\mathcal{B}$ durchläuft die Basen von V) als *Präsentationsmatrix für* φ bezeichnet.

Sie können leicht prüfen, dass damit eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{M}(n; K)$ definiert ist.

Beispielsweise ergeben sich für $f \in K[X]$ und

$$M = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 1 & f \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2; K[X])$$

durch Addition des $(-f)$-fachen der zweiten Zeile zur ersten usw. die äquivalenten Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & -f^2 \\ 1 & f \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -f^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & f^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f^2 \end{pmatrix}.$$

Später verwenden wir:
Ist M Präsentationsmatrix eines elementaren Jordanblocks $\mathrm{J}(m, \lambda)$, *so ist diese äquivalent zur Diagonalmatrix* $\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, (X - \lambda)^m)$.

Der Fall $m = 2$ folgt mit $f = X - \lambda$ bereits aus der vorhergehenden Rechnung.

Nun sei $A \in \mathrm{M}(n; K)$ sowie $U \in \mathrm{GL}(n; K)$ und $B = U^{-1}{\cdot}A{\cdot}U$. Dann ergibt sich für die charakteristischen Matrizen 5/4/16

$$X{\cdot}\mathrm{E}_n - B = X{\cdot}\mathrm{E}_n - U^{-1}{\cdot}A{\cdot}U = U^{-1}{\cdot}(X{\cdot}\mathrm{E}_n - A){\cdot}U.$$

Bemerkung. $A, B \in \mathrm{M}(n; K)$ seien ähnliche Matrizen.

(1) Die Präsentationsmatrizen von A und B sind zueinander äquivalent.

(2) $\mathrm{ggT}\big(\Lambda^k(X{\cdot}\mathrm{E}_n - B)\big) = \mathrm{ggT}\big(\Lambda^k(X{\cdot}\mathrm{E}_n - A)\big)$.

Beweis. (1) ergibt sich nach der zuvor ausgeführten Rechnung für die charakteristischen Matrizen: U und U^{-1} sind Produkte von Elementarmatrizen (2/3/13), sie bewirken daher bei Multiplikation mit der charakteristischen Matrix eine Folge von Zeilen- bzw. Spaltenoperationen. (2) ist aus dem in 5/4/14 bewiesenen Lemma abzulesen. ❑

Die Bemerkung rechtfertigt insbesondere folgende

Definition. (*Determinantenteiler*)

Ist $A \in \mathrm{M}(n; K)$, so heißt

Nach Definition von Λ^0 ist stets $\mathrm{d}_0(A) = 1$.

$$\mathrm{d}_k(A) := \mathrm{ggT}\big(\Lambda^k(X\cdot\mathrm{E}_n - A)\big) \in K[X], \quad 0 \le k \le n$$

der *k-te Determinantenteiler der Matrix A*.

Entsprechend heißt für $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$

$$\mathrm{d}_k(\varphi) := \mathrm{d}_k\big(\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)\big), \quad 0 \le k \le n$$

der *k-te Determinantenteiler des Endomorphismus φ*, wobei $\mathcal{B}$ eine beliebige Basis von V bezeichnet.

Determinantenteiler verallgemeinern den Begriff des charakteristischen Polynoms, denn $\chi_\varphi = \mathrm{d}_n(\varphi)$.

Bemerkung. Für jeden Endomorphismus $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ gilt 5/4/17

$$\mathrm{d}_{k-1}(\varphi) \,|\, \mathrm{d}_k(\varphi), \quad k = 1, \dots n,$$

denn ist A eine Matrix für φ bezüglich einer Basis von V, so sind nach dem laplaceschen Entwicklungssatz (vgl. 4/2/28 (3)) die Einträge von $\Lambda^k(X\cdot\mathrm{E}_n - A)$ Vielfachensummen der Einträge der Matrix $\Lambda^{k-1}(X\cdot\mathrm{E}_n - A)$. Aus $\mathrm{d}_n(\varphi) = \chi_\varphi$ folgt insbesondere $\mathrm{d}_k(\varphi) \ne 0$, $0 \le k \le n$.

Definition. (*Elementarteiler*) 5/4/18

Die Polynome

$$\mathrm{e}_k(\varphi) := \frac{\mathrm{d}_k(\varphi)}{\mathrm{d}_{k-1}(\varphi)} \in K[X], \quad k = 1, \dots n$$

heißen *Elementarteiler*, auch *invariante Teiler* oder *invariante Faktoren* des Endomorphismus $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$. Entsprechend werden die Polynome

$$\mathrm{e}_k(A) := \frac{\mathrm{d}_k(A)}{\mathrm{d}_{k-1}(A)} \in K[X], \quad k = 1, \dots n$$

Elementarteiler, (auch *invariante Teiler*) der Matrix $A \in \mathrm{M}(n;K)$ genannt.

Dies ist nur eine alternative Beschreibung des zuvor angegebenen Invariantensystems.

Bemerkung. Wegen $\mathrm{d}_0(\varphi) = 1$ bestimmen sich Elementarteiler und invariante Teiler gegenseitig, und offensichtlich gilt 5/4/19

(1) $$\mathrm{e}_1(\varphi) \cdot \ldots \cdot \mathrm{e}_k(\varphi) = \mathrm{d}_k(\varphi), \quad 1 \le k \le n,$$

daher insbesondere

(2) $$\mathrm{e}_n(\varphi) = \mathrm{d}_n(\varphi) \iff \mathrm{e}_1(\varphi) = \ldots = \mathrm{e}_{n-1}(\varphi) = 1.$$

… denn aus $\mathrm{e}_1(\varphi) \cdot \ldots \cdot \mathrm{e}_{n-1}(\varphi) = 1$ folgt $\mathrm{e}_1(\varphi) = \ldots = \mathrm{e}_{n-1}(\varphi) = 1$.

Die von 1 verschiedenen Elementarteiler werden gelegentlich als *nichttriviale Elementarteiler* bezeichnet. Die Bemerkung besagt, dass $\mathrm{e}_n(\varphi) = \mathrm{d}_n(\varphi)$ dazu äquivalent ist, dass φ genau einen nichttrivialen Elementarteiler besitzt.

Lemma. 5/4/20

(1) *Sind $f, g \in K[X]$ Polynome und $\mathrm{ggT}(f,g) = 1$, so ist die polynomiale Matrix $\mathrm{diag}(f,g) \in \mathrm{M}(2;K[X])$ äquivalent zu $\mathrm{diag}(1, fg)$.*

(2) *Wird die Jordanform einer Matrix durch das Tupel $(\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ der paarweise verschiedenen Eigenwerte und die entsprechende Segre-Charakteristik $[(m_{11}, \dots, m_{1r_1}) \dots (m_{s1}, \dots, m_{sr_s})]$ gegeben, so ist ihre Präsentationsmatrix äquivalent zur Diagonalmatrix*

$$\mathrm{diag}\Big(\prod_{i=1}^{s}(X-\lambda_i)^{m_{in}}, \prod_{i=1}^{s}(X-\lambda_i)^{m_{i\,n-1}}, \dots, \prod_{i=1}^{s}(X-\lambda_i)^{m_{i1}}\Big)$$

($m_{ij} := 0$ *für* $j > r_i$).

Ähnlich wie eine quadratische Matrix über dem Grundkörper K durch Zeilen- und Spaltentransformationen in Diagonalgestalt überführt werden kann, geschieht dies nach 5/4/15 für ihre charakteristische Matrix über $K[X]$. Wir sehen das hier zunächst für den Fall, dass eine jordansche Normalform existiert.

Beweis. Zum Beweis von (1) erinnern wir zunächst daran, dass der größte gemeinsame Teiler von f und g Vielfachensumme dieser Polynome ist, d.h. es existieren $p, q \in K[X]$, für die $pf + qg = 1$ gilt. Durch Zeilen- und Spaltenoperationen ergeben sich leicht die äquivalenten Matrizen

$$\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f & 0 \\ pf & g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f & 0 \\ pf+qg & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 1 & g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f & -gf \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & fg \end{pmatrix}.$$

Zum Beweis von Teil (2) der Behauptung wählen wir eine Jordanform der gegebenen Matrix. Ihre charakteristische Matrix wird äquivalent umgeformt, indem zunächst die den elementaren Jordanblöcken entsprechenden Blöcke durch $\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, (X-\lambda_i)^{m_{ij}})$ ersetzt werden (vgl. 5/4/15); der Block zum Eigenwert λ_i ist zu einer Diagonalmatrix äquivalent, die in der Diagonale die Potenzen $(X-\lambda_i)^{m_{ij}}$ mit $j \le r_i$ (und darüber hinaus höchstens Einsen) als Diagonaleinträge enthält. Nun werden noch die Diagonaleinträge permutiert, und auf die paarweise teilerfremden Potenzen von $(X-\lambda_i)$ und $(X-\lambda_j)$ mit $i \ne j$ wird (1) angewendet. ❑

Satz. *Die jordansche Normalform eines Endomorphismus $\varphi : V \to V$ ist durch seine Determinantenteiler $\big(\mathrm{d}_1(\varphi), \ldots, \mathrm{d}_n(\varphi)\big)$ bzw. seine Elementarteiler $\big(\mathrm{e}_1(\varphi), \ldots, \mathrm{e}_n(\varphi)\big)$ eindeutig bestimmt.* 5/4/21
Sind $(\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von φ und bezeichnet entsprechend

$$[(m_{11}, \ldots, m_{1r_1}) \ldots (m_{s1}, \ldots, m_{sr_s})]$$

die Segre-Charakteristik, so ergeben sich daraus (mit $m_{ij} = 0$ für $j > r_i$)

$$\mathrm{e}_{n-k}(\varphi) = \prod_{i=1}^{s} (X-\lambda_i)^{m_{i\,k+1}}, \quad 0 \le k < n$$

als Elementarteiler des Endomorphismus φ. Insbesondere erhalten wir so das Minimalpolynom $\mathrm{m}_\varphi = \mathrm{e}_n(\varphi)$.

φ besitzt eine Präsentationsmatrix $\mathrm{diag}(f_1, \ldots, f_n)$ mit $f_i \in K[X] \setminus \{0\}$. Dabei können die Polynome f_i normiert gewählt werden und so, dass die Teilbarkeitsbedingungen $f_1 \mid f_2 \mid \ldots \mid f_n$ erfüllt sind. In diesem Fall ist $f_i = \mathrm{e}_i(\varphi)$ für $i = 1, \ldots, n$. Die Matrix

$$\mathrm{diag}(f_1, \ldots, f_n) = \mathrm{diag}(\mathrm{e}_1(\varphi), \ldots, \mathrm{e}_n(\varphi)) \in \mathrm{M}(n; K[X])$$

ist unter den Präsentationsmatrizen des Endomorphismus φ eindeutig bestimmt; sie wird auch als *smithsche Normalform* bezeichnet.

Beweis. Aus dem Lemma folgt durch Berechnung der Unterdeterminanten

$$\mathrm{d}_{n-k}(\varphi) = \prod_{i=1}^{s} \prod_{j, j>k} (X-\lambda_i)^{m_{ij}}, \quad 0 \le k < n.$$

Betrachten Sie die Unterdeterminanten, die aus Teilen der Diagonale der Matrix in 6/4/20 (2) gebildet werden.

Quotientenbildung ergibt die behauptete Formel für die Elementarteiler e_i. Die Eindeutigkeitsaussage ist nun offensichtlich. ❑

Da nach Erweiterung des Grundkörpers stets eine jordansche Normalform existiert, ergibt sich das Minimalpolynom auch über einem beliebigen Grundkörper als $\mathrm{m}_\varphi = \mathrm{e}_n(\varphi)$.
Unmittelbar einzusehen ist nun auch folgende Eigenschaft der Elementarteiler, die die vertraute Teilbarkeit des charakteristischen Polynoms durch das Minimalpolynom verallgemeinert.

Korollar. Für einen Endomorphismus $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ gelten die Teilbar- 5/4/22 keitsbeziehungen $\mathrm{e}_1(\varphi)\,|\,\mathrm{e}_2\,(\varphi)\,|\,\ldots\,|\,\mathrm{e}_{n-1}(\varphi)\,|\,\mathrm{e}_n(\varphi)$.

Korollar. *Ist n die Dimension von V, so gilt* 5/4/23

$$\mathrm{m}_\varphi\,|\,\chi_\varphi\,|\,\mathrm{m}_\varphi^n,$$

daher besitzen Minimalpolynom und charakteristisches Polynom eines Endomorphismus dieselben irreduziblen Teiler.

Achtung: Die Multiplizitäten sind im Allgemeinen verschieden!

Beweis. Wir haben zu zeigen, dass $\chi_\varphi = \mathrm{d}_n(\varphi)$ Teiler von $\mathrm{e}_n(\varphi)^n$ ist. Dies folgt aus $\mathrm{e}_1(\varphi)\cdot\ldots\cdot\mathrm{e}_n(\varphi) = \mathrm{d}_n(\varphi)$ (vgl. 5/4/19 (1)) und $\mathrm{e}_i(\varphi)\,|\,\mathrm{e}_n(\varphi)$, $i = 1,\ldots,n$. ❏

Zerfällt χ_φ in ein Produkt von Linearfaktoren, so existiert eine jordansche Normalform; sie lässt sich dann aus den Elementarteilern ablesen.
Besitzen zwei Matrizen dieselben Elementarteiler, so sind sie zunächst über jedem Erweiterungskörper ähnlich, der alle Nullstellen der charakteristischen Polynome enthält. Im Falle $K = \mathbb{C}$ bedeutet das bereits Ähnlichkeit über dem Grundkörper. Tatsächlich folgt Ähnlichkeit von Matrizen mit denselben Elementarteilern ganz allgemein, ist jedoch schwieriger zu beweisen.

Ist die Faktorzerlegung für $\chi_A = \chi_B$ nicht explizit ausführbar, so kann anhand der Elementarteiler der Matrizen A, B entschieden werden, ob sie über einem Erweiterungskörper dieselbe jordansche Normalform besitzen.

Wir wenden uns der praktischen Bestimmung von Elementarteilern zu. Zur Vereinfachung der Bezeichnungen werden im dargestellten Algorithmus den Einträgen f_{ij} der Präsentationsmatrix nach Ausführung äquivalenter Umformungen jeweils neue Werte zugewiesen (wie z.B. in Computerprogrammen).

Rechenverfahren. (*Bestimmung der smithschen Normalform*) 5/4/24

Ist $M = (f_{ij}) \in \mathrm{M}(n;K[X])$ Präsentationsmatrix eines Endomorphismus $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$, so kann diese durch Zeilen- und Spaltentransformationen vom Typ 5/4/15 *folgendermaßen in eine Diagonalmatrix* $\mathrm{diag}(e_1,\ldots,e_n) \in \mathrm{M}(n;K[X])$ *mit normierten Polynomen e_i und $e_1\,|\,e_2\,|\,\ldots|\,e_n$ überführt werden.*

Wir erhalten hier eine Methode zur Bestimmung der Elementarteiler, die das mühsame Auffinden des größten gemeinsamen Teilers der Einträge aller äußeren Potenzen erleichtert.

(0) *Nach Permutation von Zeilen und Spalten der Matrix M ist o.B.d.A. f_{11} von minimalem Grad unter den von 0 verschiedenen Einträgen.*

(1) *Nach Subtraktion geeigneter Vielfacher der ersten Zeile von den übrigen steht an jeder Position $(i,1)$ mit $i > 1$ der Rest von f_{i1} bei Division durch f_{11}, folglich ist o.B.d.A.* $\deg(f_{i1}) < \deg(f_{11})$ *für $i > 1$.*

Division mit Rest ...

(2) *Entsprechend* (1) *kann durch Spaltenoperationen* $\deg(f_{1j}) < \deg(f_{11})$ *für $j > 1$ erreicht werden.*

(3) *Enthält die Matrix nun einen nicht verschwindenden Eintrag kleineren Grades als* $\deg(f_{11})$, *so wird erneut wie unter* (0), (1), (2) *vorgegangen. Dies kann nur endlich oft wiederholt werden, und es ergibt sich eine Präsentationsmatrix*

$$\begin{pmatrix} f_{11} & 0 \\ 0 & M' \end{pmatrix}, \quad M' \in \mathrm{M}(n-1;K[X]).$$

Hier sind natürlich Varianten möglich.

(4) *Falls $f_{11} \nmid f_{ij}$ $(i,j > 1)$, so lässt sich durch Addition der ersten Zeile zur i-ten sowie Subtraktion eines Vielfachen der ersten Spalte von der j-ten erreichen, dass an der (i,j)-ten Position ein Eintrag g_{ij} steht mit $0 \le \deg(g_{ij}) < \deg(f_{11})$. Dann werden die vorhergehenden Schritte wiederholt, bis eine Matrix der Gestalt* (3) *mit $f_{11}\,|\,\mathrm{ggT}(M')$ entsteht.*

Achtung, wir „zerstören“ dabei die bereits erreichte Gestalt mit Nullen neben und unterhalb der Position $(1,1)$.

(5) *Nun wird die Teilmatrix M' entsprechend umgeformt; der größte gemeinsame Teiler der so entstandenen Matrix ist ebenfalls durch f_{11} teilbar. Fortsetzung des Verfahren ergibt nach endlich vielen Schritten eine Diagonalmatrix* $\mathrm{diag}(f_{11},\ldots,f_{nn})$ *mit $f_{11}\,|\,f_{22}\,|\,\ldots|\,f_{nn}$*

Nach Multiplikation mit geeigneten Konstanten erhalten wir die Elementarteiler $\mathrm{e}_i(\varphi) = f_{ii}$ *des Endomorphismus* φ.

Wer angesichts dieses aufwändigen Algorithmus auf die Idee kommt, sein bevorzugtes Computeralgebrasystem zu benutzen, erspart sich einige Qualen. Allerdings ist die praktische Ausführung „hinreichend kleiner" Beispiele für das Verständnis von Nutzen. Die Kombination des unter 5/4/24 dargestellten Algorithmus mit der direkten Methode, die sich aus der Definition der Determinantenteiler ergibt, kann im Einzelfall schnell zum Ziel führen.

Beispiel. Zur Bestimmung der Normalform einer Präsentationsmatrix für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3; \mathbb{F}_2)$$

wird die charakteristische Matrix

$$X \cdot \mathrm{E}_3 - A = \begin{pmatrix} X & 1 & 1 \\ 1 & X & 1 \\ 1 & 1 & X \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3, \mathbb{F}_2[X])$$

äquivalent umgeformt. Nach Vertauschen der ersten beiden Zeilen entsteht eine Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & X & 1 \\ X & 1 & 1 \\ 1 & 1 & X \end{pmatrix},$$

die an der Position $(1,1)$ einen von 0 verschiedenen Eintrag minimalen Grades besitzt. Durch Subtraktion geeigneter Vielfacher der ersten Zeile von den übrigen ergibt sich daraus die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & X & 1 \\ 0 & X^2+1 & X+1 \\ 0 & X+1 & X+1 \end{pmatrix},$$

deren erste Spalte bereits die gewünschte Gestalt hat; sie ist offensichtlich äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & X^2+1 & X+1 \\ 0 & X+1 & X+1 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\mathrm{e}_1(A) = 1$ muss die Teilmatrix

$$C = \begin{pmatrix} X^2+1 & X+1 \\ X+1 & X+1 \end{pmatrix} \quad \text{zur Matrix} \quad \begin{pmatrix} \mathrm{e}_2(A) & 0 \\ 0 & \mathrm{e}_3(A) \end{pmatrix}$$

äquivalent sein. Anstatt den obigen Algorithmus fortzusetzen (was ebenfalls ganz leicht wäre), lassen sich in diesem besonders einfachen Fall auch die größten gemeinsamen Teiler $\mathrm{d}_3(A)$ und $\mathrm{d}_2(A)$ der äußeren Potenzen $\Lambda^i(C)$ ($i = 2, 1$) schnell bestimmen: Dies sind im ersten Fall die Determinante und im zweiten der ggT aller Einträge von C. So ergeben sich

$$\mathrm{e}_3(A) = \frac{\mathrm{d}_3(A)}{\mathrm{d}_2(A)} = \; X^2 + X\,, \quad \mathrm{e}_2(A) = \mathrm{d}_2(A) = \; X+1$$

und damit die gesuchte Normalform

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & X+1 & 0 \\ 0 & 0 & X^2+X \end{pmatrix}$$

der Präsentationsmatrix für A. ❏

Ähnlichkeit über dem Grundkörper*

Besitzen $A, B \in \mathrm{M}(n;K)$ äquivalente Präsentationsmatrizen, so stimmen ihre Elementarteiler überein; über einem Erweiterungskörper von K haben sie dieselbe jordansche Normalform und sind über diesem ähnlich. 5/4/25

Wir stellen nun die Frage nach der Ähnlichkeit über dem Grundkörper K. Im Fall $K = \mathbb{C}$ ist dies offensichtlich, da stets eine jordansche Normalform existiert. Ist K ein beliebiger unendlicher Körper, so lässt sich das aus dem Identitätssatz für Polynome herleiten. Der nachfolgende, allgemeine Beweis kann als Motivation für einen Begriff angesehen werden, der in der Algebra als *Modulstruktur auf* V untersucht wird.

Ähnlichkeit bedeutet Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems mit der Nebenbedingung, dass eine gewisse Determinante nicht verschwindet.

Satz. (*Ähnlichkeit über dem Grundkörper*)

Die Matrizen $A, B \in \mathrm{M}(n;K)$ *sind genau dann ähnlich, wenn ihre charakteristischen Matrizen äquivalent sind.*

Beweis. Nach 5/4/16 bleibt nur die Implikation $(\Leftarrow)$ zu beweisen; dies geschieht in mehreren Schritten.

Zur Vereinfachung werden wir eine Abbildung

$$K[X]^n \to K[X]^n, \quad (f_1, \dots, f_n) \mapsto {}^{\mathrm{t}}\big(H \cdot {}^{\mathrm{t}}(f_1, \dots, f_n)\big),$$

die durch Multiplikation mit $H \in \mathrm{M}(n; K[X])$ gegeben ist, mit dem Symbol $H\bullet$ bezeichnen. Weiter wird

$$f \cdot (f_1, \dots, f_n) := (f \cdot f_1, \dots, f \cdot f_n)$$

gesetzt für $f, f_i \in K[X]$; dies ist die übliche Matrizenoperation.

Dieser Beweis gehört zu den schwierigsten im vorliegenden Text. Er ist nicht erforderlich, falls Sie sich mit dem Grundkörper $\mathbb{C}$ begnügen.

(1) Exakte Folge der Präsentationsmatrix $M := X \cdot \mathrm{E}_n - A$

Die Folge

$$K[X]^n \xrightarrow{M\bullet} K[X]^n \xrightarrow{\pi_M} K^n \longrightarrow \mathbf{0}$$

ist exakt, wenn π_M durch

$$\pi_M(f_1, \dots, f_n) := \sum_{i=1}^{n} {}^{\mathrm{t}}\big(f_i(A) \cdot {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{e}_i\big)$$

definiert wird.

Wir erinnern uns: Exaktheit bedeutet, dass das Bild jeder auftretenden Abbildung mit dem Kern der nachfolgenden übereinstimmt.

π_M definiert so eine „Multiplikation mit Polynomen" auf K^n.

Zum Beweis stellen wir zunächst fest, dass π_M surjektiv ist, denn offensichtlich wird $(0, \dots, 1, \dots, 0) \in K[X]^n$ auf das gleiche Element in K^n abgebildet. $\pi_M \cdot M\bullet$ ist die Nullabbildung, denn für $G = (g_1, \dots, g_n) \in K[X]^n$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\pi_M\big(M\bullet\,(G)\big) &= \pi_M(X \cdot G) - \pi_M\big({}^{\mathrm{t}}(A \cdot {}^{\mathrm{t}}G)\big) \\
&= \pi_M(X \cdot G) - \sum_j \pi_M(g_j \cdot a_{1j}, \dots, g_j \cdot a_{nj}) \\
&= \sum_j {}^{\mathrm{t}}\big(g_j(A) \cdot A \cdot {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{e}_j\big) - \sum_j \sum_i {}^{\mathrm{t}}\big(g_j(A) \cdot (a_{ij} \cdot {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{e}_i)\big) \\
&= \sum_j {}^{\mathrm{t}}\big(g_j(A) \cdot (A \cdot {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{e}_j - \underbrace{\sum_i a_{ij}\, {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{e}_i}_{\mathrm{S}_j(A)})\big) = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Wir entnehmen daraus, dass $L := \ker(\pi_M) \supseteq \operatorname{im}(M\bullet) =: L'$ gelten muss. Zum Beweis der umgekehrten Inklusion werden wir zeigen, dass L/L' in $K[X]^n/L'$ der Nullunterraum ist.

Da $M\bullet(\boldsymbol{e}_i) \in L'$, gilt für die Klasse von $X \cdot \boldsymbol{e}_i$ im Faktorraum $K[X]^n/L'$

L, L', $K[X]^n$ werden als K-Vektorräume betrachtet.

$$\overline{X \cdot \boldsymbol{e}_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\overline{\boldsymbol{e}_j}.$$

Induktiv ergibt sich

$$\overline{X^k \cdot \boldsymbol{e}_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}^{(k)}\overline{\boldsymbol{e}_j}$$

mit geeigneten Zahlen $a_{ji}^{(k)} \in K$, denn aus $\boldsymbol{f} \in L'$ folgt $X \cdot \boldsymbol{f} \in L'$.
Ist nun $h = \sum_{i=1}^{n} f_i \boldsymbol{e}_i \in L$, so erhalten wir durch leichte Rechnung

$$\overline{h} = \sum_{i=1}^{n} \overline{f_i \boldsymbol{e}_i} = \sum_{i=1}^{n} c_i \overline{\boldsymbol{e}_i} \quad \text{mit} \quad c_i \in K, \text{ daher}$$

$$\mathbf{0} = \pi_M(h) = \pi_M\Big(\sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{e}_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} c_i \pi_M(\boldsymbol{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{e}_i = (c_1, \ldots, c_n).$$

Einsetzen der so gefundenen Zahlen $c_i = 0$ ergibt $\overline{h} = \mathbf{0}$, und wir erhalten $L/L' = \mathbf{0}$.

(2) Durch Multiplikation mit X entsteht aus (1) ein kommutatives Diagramm exakter Folgen:

... d.h. die Multiplikation mit X auf $K[X]^n$ „entspricht der Multiplikation mit A auf K^n."

$$\begin{tikzcd}
K[X]^n \arrow[r, "M\bullet"] \arrow[d, "X\cdot"'] & K[X]^n \arrow[r, "\pi_M"] \arrow[d, "X\cdot"'] & K^n \arrow[r] \arrow[d, "A\bullet"] & \mathbf{0} \\
K[X]^n \arrow[r, "M\bullet"] & K[X]^n \arrow[r, "\pi_M"] & K^n \arrow[r] & \mathbf{0}
\end{tikzcd}$$

(3) Sind M und $M' := X \cdot \mathrm{E}_n - B$ äquivalente polynomiale Matrizen, so existieren $P, Q \in \mathrm{M}(n; K[X])$, für die $M \cdot P = Q \cdot M'$ und $\det(P), \det(Q) \in K^*$ ist. Das ergibt sich wie in Bemerkung 2/3/11 (3), indem die Zeilen- bzw. Spaltenoperationen durch Multiplikation mit entsprechenden „Elementarmatrizen" ausgedrückt werden. 4/2/28 (2) zeigt, dass die durch P, Q gegebenen linearen Abbildungen $K[X]^n \to K[X]^n$ bijektiv sind. Daher existiert ein eindeutig bestimmter Automorphismus $\Phi_{P,Q} : K^n \to K^n$ des Standardvektorraumes, für den das folgende Diagramm kommutiert:

... denn π_M, $\pi_{M'}$ sind die kanonischen Homomorphismen auf die Faktorräume nach $\mathrm{im}(M)$, $\mathrm{im}(M')$.

$$\begin{tikzcd}
K[X]^n \arrow[r, "M'\bullet"] \arrow[d, "P\bullet"'] & K[X]^n \arrow[r, "\pi_{M'}"] \arrow[d, "Q\bullet"'] & K^n \arrow[r] \arrow[d, "\cong"', "\Phi_{P,Q}"] & \mathbf{0} \\
K[X]^n \arrow[r, "M\bullet"] & K[X]^n \arrow[r, "\pi_M"] & K^n \arrow[r] & \mathbf{0}
\end{tikzcd}$$

(4) Für $M = X \cdot \mathrm{E}_n - A$ und $M' = X \cdot \mathrm{E}_n - B$ ergibt sich aus (2) und (3) das folgende kommutative Diagramm.

Überprüfung der Kommutativität komplexer Diagramme wird sehr treffend auch als *Diagrammjagd* bezeichnet – das ist in den vorliegenden, leichten Fällen als Übung zu empfehlen.

$$\begin{tikzcd}
 & K[X]^n \arrow[rr, "M'\bullet"] \arrow[dd, "P\bullet"] & & K[X]^n \arrow[rr, "\pi_{M'}"] \arrow[dd, "Q\bullet"] & & K^n \arrow[dd, "\Phi_{P,Q}"] \\
K[X]^n \arrow[ur, "X\cdot"] \arrow[rr, "M'\bullet"] \arrow[dd, "P\bullet"'] & & K[X]^n \arrow[ur, "X\cdot"] \arrow[rr, "\pi_{M'}"] \arrow[dd, "Q\bullet"'] & & K^n \arrow[ur, "B\bullet"] \arrow[dd, "\Phi_{P,Q}"'] & \\
 & K[X]^n \arrow[rr, "M\bullet"] & & K[X]^n \arrow[rr, "\pi_M"] & & K^n \\
K[X]^n \arrow[ur, "X\cdot"] \arrow[rr, "M\bullet"'] & & K[X]^n \arrow[ur, "X\cdot"] \arrow[rr, "\pi_M"'] & & K^n \arrow[ur, "A\bullet"'] &
\end{tikzcd}$$

Daraus entnehmen wir insbesondere $U{\cdot}B = A{\cdot}U$ mit $U = \mathrm{M}(\Phi_{P,Q})$, folglich $B = U^{-1}{\cdot}A{\cdot}U$. ❏

Anmerkung. (*Bestimmung der Übergangsmatrizen*) 5/4/26

Der Beweis des Satzes ist konstruktiv.
Sind $A,\, B \in \mathrm{M}(n;K)$ und $P \in \mathrm{M}(n;K[X])$, $Q = (q_{ij}) \in \mathrm{M}(n;K[X])$ mit $\det(P),\ \det(Q) \in K^*$ sowie $(X{\cdot}\mathrm{E}_n - A)\cdot P = Q\cdot(X{\cdot}\mathrm{E}_n - B)$, dann gilt

$$B = U^{-1}{\cdot}A{\cdot}U, \quad U \in \mathrm{GL}(n;K) \ \text{ mit } \ \mathrm{S}_j(U) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{S}_i\big(q_{ij}(A)\big).$$

Diese Formel ergibt sich unter Verwendung der Kommutativität des letzten Diagramms im Beweis von 5/4/25.
Abgesehen davon, ob der Rechenaufwand als akzeptabel angesehen wird, lässt sich so für jede (beispielsweise selbst gefundene) Normalform prinzipiell eine entsprechende Übergangsmatrix angeben. Das mag auch insofern nützlich sein, als in der Literatur keine einheitliche Auffassung über die jordansche Normalform zu finden ist (gelegentlich wird anstelle der hier eingeführten Jordanform die transponierte Matrix gewählt). Auch für die Begleitmatrix, die sich später als Baustein einer weiteren Normalform herausstellt, gibt es unterschiedliche Varianten.

Verwenden Sie die Kommutativität des rechten Quadrats in der „vorderen Schicht“.

Korollar. *Ist $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus sowie $A \in \mathrm{M}(n;K)$ eine Matrix, deren Elementarteiler $\mathrm{e}_i(A) = \mathrm{e}_i(\varphi)$ sind ($i = 1, \dots, n$), so existiert eine Basis $\mathcal{B}$ von V, für die $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = A$ gilt.* 5/4/27

Beweis. B sei die Matrix von φ bezüglich einer beliebigen Basis $\mathcal{B}'$, so sind die charakteristischen Matrizen von A, B äquivalent. Nach dem Satz sind A und B ähnlich, d.h. $B = U^{-1}\cdot A\cdot U$ für eine geeignete Matrix $U \in \mathrm{GL}(n;K)$. Wir wählen $\mathcal{B}$ als die eindeutig bestimmte Basis mit der Übergangsmatrix $U = \mathrm{U}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$. ❏

Auch dieser Beweis ist wieder konstruktiv ausführbar.

Die wichtigsten der zuvor bewiesenen Eigenschaften lassen sich folgendermaßen zusammenfassen. 5/4/28

Korollar. *Für Matrizen $A,\, B \in \mathrm{M}(n;K)$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent.*

(1) *A ist B ähnlich.*

(2) *A ist B über einem Erweiterungskörper von K ähnlich.*

(3) *Es existiert ein Erweiterungskörper von K, über dem A und B dieselbe jordansche Normalform besitzen.*

(4) *A und B besitzen dieselben Determinantenteiler.*

(5) *A und B besitzen dieselben Elementarteiler.*

(6) *Die charakteristischen Matrizen von A und B sind äquivalent.*

Schwerpunkte zum gewählten Stoff

- Charakterisierung nilpotenter Endomorphismen und (entsprechend) nilpotenter Matrizen [5/3/1 – 5/3/5]
- Klassifikation der nilpotenten Endomorphismen [5/3/6]
- Zyklische Unterräume und zyklische Vektoren [5/3/7]
- Partitionen und Ähnlichkeitsklassen nilpotenter Matrizen [5/3/8 – 5/3/11]
- Rechnerische Bestimmung der Normalform einer nilpotenten Matrix [5/3/12]
- Höhere Eigenräume eines Endomorphismus und Hauptraumzerlegung [5/4/1 – 5/4/3]
- Der Satz von Cayley-Hamilton und das Minimalpolynom eines Endomorphismus [5/4/4 – 5/4/8]
- Existenz und Eindeutigkeit der jordanschen Normalform eines Endomorphismus, dessen charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt [5/4/9 – 5/4/10, 5/4/13]
- Rechnerische Bestimmung der jordanschen Normalform einer Matrix [5/4/11]
- Präsentationsmatrix eines Endomorphismus [5/4/15]
- Determinantenteiler und Elementarteiler eines Endomorphismus [5/4/16 – 5/4/18]
- Teilbarkeitseigenschaften der Elementarteiler; jordansche Normalform und Elementarteiler bestimmen sich gegenseitig [5/4/19 – 5/4/23]
- Smithsche Normalform (rechnerische Bestimmung der Elementarteiler) [5/4/24]
- Charakterisierung der Ähnlichkeit von Matrizen durch Übereinstimmung ihrer jordanschen Normalformen nach Skalarerweiterung bzw. durch Äquivalenz der charakteristischen Matrizen [5/4/25 – 5/4/28]

Sachverzeichnis