Lineare Algebra individuell
Online-Fassung, Ver. 0.42
Internes Material, **25.4.2004**

Kapitel 4

Multilineare Abbildungen

In diesem Kapitel werden Abbildungen von Vektorräumen untersucht, die in mehreren Argumenten linear sind.
Besonders nützlich ist für uns die Determinante, mit der wir ein weiteres Werkzeug zur Lösung von Gleichungen erhalten. Die Bezeichnung wurde bereits 1801 von C. F. Gauss verwendet; dem Inhalt nach ist die Konstruktion wesentlich älter. Wir erläutern, wie sich die Determinante in das Studium multilinearer Abbildungen einordnet.
Einen weiteren wichtigen Spezialfall bilden die Bilinearformen. Einige von ihnen eignen sich dazu, die im Kapitel 6 untersuchten Begriffe der Länge und des Winkels zu definieren.
Allgemein sind multilineare Abbildungen durch Räume von Tensoren gegeben, die mittels Universaleigenschaften charakterisiert werden können und so ein selbstständiges Interesse erlangen.

4.4 Tensorprodukte*

Die Untersuchung multilinearer Abbildungen führt ganz allgemein auf die Frage nach einem klassifizierenden Objekt. Tatsächlich gibt es eine *universelle* p-lineare Abbildung, deren Konstruktion zunächst für $p = 2$ beschrieben wird. 4/4/1

Definition. (*Tensorprodukt*)

V, W seien K-Vektorräume sowie $t : V \times W \to T$ eine bilineare Abbildung mit der folgenden Eigenschaft:
Ist $f : V \times W \to P$ bilinear, dann existiert genau eine lineare Abbildung $\varphi : T \to P$ mit $\varphi \cdot t = f$, d.h. für die das Diagramm

Diese Definition sichert noch nicht die Existenz eines Tensorprodukts – sie ergibt sich allerdings aus dem folgenden Satz.

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "t"'] & & P \\ & T \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Ein solches Paar (T, t) (oder nachlässig einfach der Vektorraum T) heißt *Tensorprodukt von* V *und* W (*über* K).

Trotz der etwas abstrakten Begriffsbildung beinhaltet diese Definition nichts Anderes als eine Präzisierung des zuvor naiv verwendeten Begriffs *klassifizierendes Objekt*. Für einen Vektorraum T mit der angegebenen *Universaleigenschaft* ist $\mathrm{Hom}_K(T, P)$ bis auf Isomorphie der Vektorraum aller bilinearen Abbildungen $V \times W \to P$.

Satz. *Zu jedem Paar* (V, W) *von* K*-Vektorräumen existiert ein Tensorprodukt* (T, t). *Es ist bis auf kanonische Isomorphie eindeutig bestimmt, d.h. für jedes Tensorprodukt* (T', t') *von* V *und* W *existiert ein eindeutig bestimmter Isomorphismus* $\psi : T \to T'$, *für den das folgende Diagramm kommutiert*: 4/4/2

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[rr, "t'"] \arrow[dr, "t"'] & & T' \\
& T \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

Darüber hinaus gibt es eine kanonische Konstruktion, die unter den (*isomorphen*) *Tensorprodukten von* V *und* W *ein konkretes auswählt,* es wird von nun an auch *das* Tensorprodukt von V und W genannt.

Denken Sie dabei etwa an Kardinalzahlen, mit denen Sie ohne Kenntnis der expliziten Konstruktion rechnen können.

Tatsächlich wird die letzte Feststellung erst im Beweis des Satzes präzisiert. Wer bereit ist, sich mit der Existenz eines in Abhängigkeit von Basen konstruierten Tensorprodukts zu begnügen (das damit nur bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt wäre), erhält dafür die Anleitung in 4/4/5 .

Beweis. Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit. Sie ergibt sich (wie schon bisher bei Objekten mit Universaleigenschaft) ohne besonderen Aufwand, denn definitionsgemäß existieren eindeutig bestimmte Homomorphismen $\psi : T \to T'$ und $\psi' : T' \to T$, für die das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
& T' \arrow[dr, "\psi'"] & \\
T \arrow[ur, "\psi"] \arrow[rr, dotted, "\sigma"] & & T \\
& V \times W \arrow[ul, "t"] \arrow[uu, "t'"] \arrow[ur, "t"'] &
\end{tikzcd}$$

Nach Voraussetzung ist für ein Tensorprodukt (T,t) von V und W der Homomorphismus $\sigma = \psi' \cdot \psi : T \to T$ mit $\sigma \cdot t = t$ eindeutig bestimmt. Offensichtlich gilt auch $\mathrm{id}_T \cdot t = t$, und die Eindeutigkeit von σ ergibt $\sigma = \mathrm{id}_T$, d.h. $\psi' \cdot \psi = \mathrm{id}_T$. Analog folgt $\psi \cdot \psi' = \mathrm{id}_{T'}$, daher ist ψ ein Isomorphismus.

Zum Beweis der Existenz eines Paares (T,t) mit der geforderten Eigenschaft wählen wir für T den Faktorraum $T := K^{(V\times W)}/U$ des K-Vektorraumes $K^{(V\times W)}$ nach dem Unterraum U, der von allen Vektoren

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}',\boldsymbol{w}) - (\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) - (\boldsymbol{v}',\boldsymbol{w}), \quad \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}' \in V,\ \boldsymbol{w} \in W\\
&(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}+\boldsymbol{w}') - (\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) - (\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}'), \quad \boldsymbol{v} \in V,\ \boldsymbol{w},\boldsymbol{w}' \in W\\
&(a\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) - a(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}), \quad (\boldsymbol{v},a\boldsymbol{w}) - a(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}), \quad \boldsymbol{v} \in V,\ \boldsymbol{w} \in W,\ a \in K
\end{aligned}$$

erzeugt ist. Dabei wird mit der üblichen Identifikation $V \times W$ als Basis von $K^{(V\times W)}$ betrachtet (vgl. 3/3/9). $t : V \times W \to T$ sei das Produkt der Inklusion $V \times W \to K^{(V\times W)}$ mit dem kanonischen Homomorphismus $\pi : K^{(V\times W)} \to T$. Dann ist t offensichtlich bilinear (U wurde gerade so definiert, dass die Bilinearität auf den Klassen erfüllt ist). Für eine beliebige bilineare Abbildung $f : V \times W \to P$ haben wir nun zu zeigen, dass genau eine lineare Abbildung $\varphi : T \to P$ mit $\varphi \cdot t = f$ existiert. Dazu untersuchen wir das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
K^{(V\times W)} \arrow[rr, dotted, "\sigma"] \arrow[dr, "\pi"] & & P \\
& T \arrow[ur, dotted, "\varphi"] & \\
& V \times W \arrow[uul, "\subseteq"] \arrow[u, "t"] \arrow[uur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Da $V \times W$ eine Basis von $K^{(V\times W)}$ ist, existiert nach dem Prinzip der linearen Fortsetzung ein eindeutig bestimmter Homomorphismus $\sigma : K^{(V\times W)} \to P$ mit $\sigma(v,w) = f(v,w)$, für $\boldsymbol{v} \in V$ und $\boldsymbol{w} \in W$, d.h. das äußere Diagramm kommutiert. Da f bilinear ist, wird das oben angegebene Erzeugendensystem für U durch σ auf $\mathbf{0}$ abgebildet, d.h. $U \subseteq \ker(\sigma)$. Deshalb faktorisiert σ über den kanonischen Homomorphismus $\pi : K^{(V\times W)} \to T = K^{(V\times W)}/U$ und eine lineare Abbildung $\varphi : T \to P$, so dass das gesamte Diagramm kommutiert (vgl. 3/2/16). Die Eindeutigkeit von φ folgt aus der Surjektivität der Abbildung π: Ist $\varphi' : T \to P$ mit $\varphi' \cdot t = f$, so muss auch $\varphi' \cdot \pi = \sigma$ sein (aufgrund der Eindeutigkeit der linearen Fortsetzung), also ist $\varphi' \cdot \pi = \varphi \cdot \pi$, und die Surjektivität von π impliziert $\varphi' = \varphi$. ❑

Bezeichnungen. Das Tensorprodukt T von V und W über K wird mit $V \otimes_K W$ oder (bei fixiertem Grundkörper K) nachlässig mit $V \otimes W$ bezeichnet, die Elemente von T heißen *Tensoren*. Für die zugehörige kanonische bilineare Abbildung (*Tensorabbildung*) $t = t_{V,W} : V \times W \to V \otimes_K W$ setzen wir $t(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) =: \boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}$. Die Vektoren $\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}$ werden *zerfallende*, auch *zerlegbare* Tensoren genannt. 4/4/3

Die Menge der zerfallenden Tensoren heißt *Segre-Kegel* von $V \otimes_K W$ und ist im Allgemeinen kein Unterraum.

Bemerkung. (*Rechenregeln für Tensoren*) 4/4/4

(1) Jedes Element von $V \otimes_K W$ ist Summe (endlich vieler) zerfallender Tensoren, d.h. $\{\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{v} \in V,\ \boldsymbol{w} \in W\}$ bildet insbesondere ein Erzeugendensystem des Vektorraumes $V \otimes_K W$.

(2) Die Bilinearität der Tensorabbildung $t : V \times W \to V \otimes_K W$ findet ihren Ausdruck in den folgenden Rechenregeln.

$$(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}') \otimes \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}' \otimes \boldsymbol{w}, \quad \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in V,\ \boldsymbol{w} \in W$$
$$\boldsymbol{v} \otimes (\boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}') = \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}', \quad \boldsymbol{v} \in V,\ \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}' \in W$$
$$(a\boldsymbol{v}) \otimes \boldsymbol{w} = a(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v} \otimes (a\boldsymbol{w}), \quad \boldsymbol{v} \in V,\ \boldsymbol{w} \in W,\ a \in K$$

Aus Basen in V und W lassen sich – wie nachfolgend erläutert – Basen des Produkts $V \otimes_K W$ gewinnen.

Bemerkung. 4/4/5

$\mathcal{B}_V = (\boldsymbol{v}_i)_{i\in I}$ und $\mathcal{B}_W = (\boldsymbol{w}_j)_{j\in J}$ seien Basen der Vektorräume V bzw. W.

(1) Es existiert eine bilineare Abbildung $t' : V \times W \to K^{(I\times J)}$ mit

$$\Big(\sum_{i\in I} x_i \boldsymbol{v}_i, \sum_{j\in J} y_j \boldsymbol{w}_j\Big) \mapsto \sum_{(i,j)\in I\times J} x_i\, y_j \cdot (i,j),$$

wobei $(x_i)_{i\in I}$ bzw. $(y_j)_{j\in J}$ Koordinatenfamilien von Vektoren aus V bzw. W bezeichnen. Dadurch werden die Paare (v_i, w_j) auf die Elemente (i,j) der kanonischen Basis von $K^{(I\times J)}$ abgebildet. Nach dem Prinzip der linearen Fortsetzung existiert für jede bilineare Abbildung $f : V\times W \to P$ eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung
$\varphi : K^{(I\times J)} \to P$, für die das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V\times W \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "t'"'] & & P \\ & K^{(I\times J)} \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Daher erfüllt t' die Universaleigenschaft des Tensorprodukts. Es folgt $K^{(I\times J)} \cong V\otimes_K W$ mit einem eindeutig bestimmten Isomorphismus, der die bilineare Abbildung t' und die Tensorabbildung von $V\times W$ respektiert; die Vektoren $t'(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) \in K^{(I\times J)}$ werden durch ihn auf $\boldsymbol{v}_i \otimes \boldsymbol{w}_j$ abgebildet. So ergibt sich auch:

(2) $\mathcal{B}_V\otimes\mathcal{B}_W := (\boldsymbol{v}_i\otimes\boldsymbol{w}_j)_{(i,j)\in I\times J}$ ist eine Basis von $V\otimes_K W$, insbesondere
$\dim_K(V\otimes_K W) = \dim_K(V)\cdot\dim_K(W)$.

Damit erhalten wir das Tensorprodukt ohne die abstrakte Konstruktion.

(3) Ein Tensor $\boldsymbol{u}\in V\otimes_K W$ ist stets von der Gestalt
$$\boldsymbol{u} = \sum_{i\in I, j\in J} u^{ij}\boldsymbol{v}_i\otimes\boldsymbol{w}_j,$$
wobei $(u^{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ die Koordinatenfamilie von $\boldsymbol{u}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_V\otimes\mathcal{B}_W$ bezeichnet. Die Zahlen u^{ij} werden auch *Tensorkomponenten* des Tensors $\boldsymbol{u}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_V\otimes\mathcal{B}_W$ genannt. Für $V=W$ und $\mathcal{B}_V = \mathcal{B}_W$ heißen sie kurz *Tensorkomponenten von* $\boldsymbol{u}$ *bezüglich* $\mathcal{B}_V$. In der Technik wird die Notation *Tensor* für Familien solcher Zahlen (u^{ij}) verwendet, die durch Basistransformation in V auseinander hervorgehen.

Durch das Transformationsverhalten von (u^{ij}) werden die Eigenschaften des Tensorprodukts in Koordinaten beschrieben.

Für Tensorprodukte von mehr als zwei Vektorräumen erhalten wir dann Tensoren als Verallgemeinerungen des Begriffs der *Matrix*.

Beispiel. (*Segre-Kegel*)

$V=\mathbb{R}^2$ sei der reelle Standardraum.
Sind (u^{ij}) die Tensorkomponenten von $\boldsymbol{u}\in V\otimes_{\mathbb{R}} V$ bezüglich der kanonischen Basis $\mathcal{B}$, so zerfällt der Tensor $\boldsymbol{u}$ genau dann, wenn er von der Gestalt $\boldsymbol{u} = (x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2)\otimes(y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2)$ ist, d.h.
$$\boldsymbol{u} = x_1y_1\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_1 + x_1y_2\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_2 + x_2y_1\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{e}_1 + x_2y_2\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{e}_2$$
mit geeigneten $x_i, y_j\in\mathbb{R}$. Die Tensorkomponenten bezüglich $\mathcal{B}$ sind daher $\boldsymbol{u}^{11} = x_1y_1$, $\boldsymbol{u}^{12} = x_1y_2$, $\boldsymbol{u}^{21} = x_2y_1$, $\boldsymbol{u}^{22} = x_2y_2$. Sie genügen der Bedingung $\boldsymbol{u}^{11}\boldsymbol{u}^{22} = \boldsymbol{u}^{12}\boldsymbol{u}^{21}$.
Der Isomorphismus $V\otimes_{\mathbb{R}} V\to\mathbb{R}^4$, der $(\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{e}_2)$ auf die kanonische Basis abbildet, hat als Bildmenge der zerfallenden Tensoren die Nullstellenmenge $V(X_1X_4 - X_2X_3)\subseteq\mathbb{R}^4$.
Das rechtfertigt die Bezeichnung „Kegel“: Wer noch keinen Kegel im 4-dimensionalen Raum gesehen hat ist eingeladen, sich die Schnitte mit den dreidimensionalen Unterräumen $V(X_4 - \alpha X_3)$ für feste Zahlen $\alpha\in\mathbb{R}$ zu veranschaulichen.

Satz. *Sind V, W und P Vektorräume, so existieren folgende Isomorphismen, die durch die angegebenen Bedingungen eindeutig bestimmt sind*: 4/4/6

(1) $V\otimes_K W\cong W\otimes_K V,\quad \boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}\mapsto\boldsymbol{w}\otimes\boldsymbol{v}\,.$

(2) $(V\otimes_K W)\otimes_K P\cong V\otimes_K(W\otimes_K P),\quad (\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w})\otimes\boldsymbol{p}\mapsto\boldsymbol{v}\otimes(\boldsymbol{w}\otimes\boldsymbol{p})\,.$

(3) $(V\bigoplus W)\otimes_K P\cong(V\otimes_K P)\bigoplus(W\otimes_K P),\quad (\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\otimes\boldsymbol{p}\mapsto(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{p}, \boldsymbol{w}\otimes\boldsymbol{p})\,.$

(1) - (3) und (5) werden als Übungsaufgaben empfohlen; verwenden Sie vorzugsweise die Charakterisierung des Tensorprodukts durch seine Universaleigenschaft.

(4) $K \otimes_K V \cong V, \quad a \otimes \boldsymbol{v} \mapsto a\boldsymbol{v}\,.$

(5) $\mathrm{Hom}_K(V, \mathrm{Hom}_K(W, P)) \cong \mathrm{Hom}(V \otimes_K W, P)$;
dabei wird $\psi \in \mathrm{Hom}_K(V, \mathrm{Hom}_K(W, P))$ *die eindeutig bestimmte lineare Abbildung* $V \otimes_K W \to P$ *zugeordnet, die mittels der Tensorabbildung der bilinearen Abbildung* $V \times W \to P,\ (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \mapsto \big(\psi(\boldsymbol{v})\big)(\boldsymbol{w})$ *entspricht.*

Wer für die obigen Regeln Namen wie „Kommutativität“, „Assoziativität“ usw. verwendet, sollte beachten, dass hier nur Isomorphie besteht – keine Gleichheit. Die Eigenschaft (5) wird auch als *adjungierte Assoziativität* bezeichnet.

Beweis des Satzes. Die angeführten Eigenschaften ergeben sich aus der Universalität des Tensorprodukts; wir zeigen (4).
$t : K \times V \to V$ sei die durch $t(a, \boldsymbol{v}) := a\boldsymbol{v}$ gegebene bilineare Abbildung; es ist nur zu zeigen, dass t die Universaleigenschaft des Tensorprodukts erfüllt. Dazu betrachten wir eine beliebige bilineare Abbildung $f : K \times V \to P$; offenbar ist $\varphi : V \to P$ mit $\varphi(\boldsymbol{v}) := f(1, \boldsymbol{v})$ die eindeutig bestimmte lineare Abbildung, für die das Diagramm

$$\begin{tikzcd} K \times V \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "t"', "(a,\boldsymbol{v})\mapsto a\cdot\boldsymbol{v}"'] & & P \\ & V \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert. ❏

Nachdem ein Tensorprodukt von Vektorräumen definiert ist, lässt sich auf nahe liegende Weise auch ein Tensorprodukt linearer Abbildungen erklären, das in beiden Argumenten funktoriell ist.

Satz. (*Bifunktorialität des Tensorprodukts*) 4/4/7

Sind $V_1,\ V_2,\ W_1,\ W_2$ *Vektorräume und* $\varphi_1 : V_1 \to W_1,\ \varphi_2 : V_2 \to W_2$ *lineare Abbildungen, so gibt es genau eine mit* $\varphi_1 \otimes_K \varphi_2$ *bezeichnete lineare Abbildung*

$V_1 \otimes_K V_2 \to W_1 \otimes_K W_2,$ *für die*

$(\varphi_1 \otimes_K \varphi_2)(\boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{v}_2) = \varphi_1(\boldsymbol{v}_1) \otimes \varphi_2(\boldsymbol{v}_2), \quad \boldsymbol{v}_1 \in V_1,\ \boldsymbol{v}_2 \in V_2$

ist. Das so definierte Tensorprodukt zweier Homomorphismen besitzt die folgenden Eigenschaften:

(1) $\mathrm{id}_{V_1} \otimes_K \mathrm{id}_{V_2} = \mathrm{id}_{V_1 \otimes_K V_2}\,.$

(2) *Sind* $\varphi_1' : W_1 \to P_1$ *und* $\varphi_2' : W_2 \to P_2$ *weitere lineare Abbildungen, dann gilt*

$$(\varphi_1' \cdot \varphi_1) \otimes_K (\varphi_2' \cdot \varphi_2) = (\varphi_1' \otimes_K \varphi_2') \cdot (\varphi_1 \otimes_K \varphi_2).$$

Der Begriff der *Bifunktorialität* soll hier nicht präzisiert werden, er dürfte aber durch seinen gelegentlichen Gebrauch einleuchten.

Beweis. Die bilineare Abbildung

$$f : V_1 \times V_2 \to W_1 \otimes_K W_2, \quad (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \mapsto \varphi_1(\boldsymbol{v}_1) \otimes \varphi_2(\boldsymbol{v}_2)$$

lässt sich durch einen eindeutig bestimmten Homomorphismus über das Tensorprodukt $V_1 \otimes_K V_2$ fortsetzen, und die so entstehende lineare Abbildung $V_1 \otimes_K V_2 \to W_1 \otimes_K W_2$ bildet $\boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{v}_2$ auf $\varphi_1(\boldsymbol{v}_1) \otimes \varphi_1(\boldsymbol{v}_2)$ ab. Die verbleibenden Eigenschaften folgen daraus, dass Tensorprodukte von zerfallenden

Tensoren erzeugt werden; es genügt also, die Übereinstimmung der betreffenden Abbildungen auf der Teilmenge $\{\boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{v}_2 \mid \boldsymbol{v}_1 \in V_1,\ \boldsymbol{v}_2 \in V_2\}$ zu überprüfen. ❑

Für $V_1 = W_1 = V$ setzen wir auch $\mathrm{id}_V \otimes_K \varphi_2 =: V \otimes_K \varphi_2$, entsprechend wird $\varphi_1 \otimes_K W := \varphi_1 \otimes_K \mathrm{id}_W$ definiert.

Weitere Eigenschaften – wie die Vertauschbarkeit des Tensorprodukts mit einer Summe von Homomorphismen – werden in den Übungsaufgaben behandelt.

Wir bemerken, dass das Symbol $\varphi_1 \otimes_K \varphi_2$ einen Doppelsinn hat, es könnte ebenso ein Element des Vektorraumes $\mathrm{Hom}_K(V_1, W_1) \otimes_K \mathrm{Hom}_K(V_2, W_2)$ bezeichnen. Erfreulicherweise ist in wichtigen Fällen keine Unterscheidung erforderlich; dies ergibt der folgende

Satz. *V_1, V_2, W_1 und W_2. bezeichnen endlichdimensionale Vektorräume.* 4/4/8

(1) *Die (gemäß der Konstruktion aus Satz 4/4/7) durch $(\varphi_1, \varphi_2) \mapsto \varphi_1 \otimes_K \varphi_2$ induzierte kanonische Abbildung*
$$\mathrm{Hom}_K(V_1, W_1) \otimes_K \mathrm{Hom}_K(V_2, W_2) \to \mathrm{Hom}_K(V_1 \otimes_K V_2, W_1 \otimes_K W_2)$$
ist ein Isomorphismus. Insbesondere gilt

(2) $\mathrm{End}_K(V_1) \otimes_K \mathrm{End}_K(V_2) \cong \mathrm{End}_K(V_1 \otimes_K V_2)$.

Beweis. Für einen Vektorraum W gibt es zu beliebigen Zahlen $m \in \mathbb{N}$ Isomorphismen $W^m \cong \mathrm{Hom}_K(K^m, W)$, die $(\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m) \in W^m$ auf den Homomorphismus $K^m \to W$, $\boldsymbol{e}_i \mapsto \boldsymbol{w}_i$ abbilden. Es genügt offenbar, den Satz für den Fall zu beweisen, dass $V_1 = K^{m_1}$ und $V_2 = K^{m_2}$ endlichdimensionale Standardräume sind. Dann ist bis auf Isomorphie auch $V_1 \otimes_K V_2$ der Standardraum $K^{m_1 m_2}$, und die Behauptung (1) ergibt sich aus der Kommutativität des folgenden Diagramms.

$$\begin{array}{ccc} W_1^{m_1} \otimes_K W_2^{m_2} & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Hom}_K(K^{m_1}, W_1) \otimes_K \mathrm{Hom}_K(K^{m_2}, W_2) \\ \cong\downarrow & & \downarrow \\ (W_1 \otimes_K W_2)^{m_1 m_2} & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Hom}_K(K^{m_1} \otimes_K K^{m_2}, W_1 \otimes_K W_2) \end{array}$$

... eine kleine Rechnung mit zerfallenden Tensoren. Wie sieht die Abbildung zum linken vertikalen Pfeil aus?

Erweiterung des Skalarbereichs 4/4/9

Wir fixieren eine Körpererweiterung $K \subseteq K'$, d.h. von nun an ist K Unterkörper eines Körpers K', der dann selbst als Vektorraum über K angesehen werden kann.

Rechnen wir mit Vektoren des Standardraumes $\mathbb{R}^n$ und betrachten wir das Ergebnis später in $\mathbb{C}^n$, so haben wir genau das ausgeführt, was hier beschrieben wird: eine *Skalarerweiterung.*

Bezeichnungen. V und W seien K-Vektorräume, $\varphi : V \to W$ eine K-lineare Abbildung.

(1) $V_{K'} := K' \otimes_K V$ ist ein K'-Vektorraum, der seine Addition durch die Struktur als Vektorraum über K erhält und für den die Multiplikation mit Skalaren durch die K-bilineare Abbildung

(∗) $\qquad K' \times V_{K'} \to V_{K'}$

gegeben ist, die durch $(a', b' \otimes \boldsymbol{v}) \mapsto (a' \cdot b') \otimes \boldsymbol{v}$ eindeutig bestimmt wird.

$V_{K'}$ heißt der aus V durch *Skalarerweiterung* mit K' entstandene Vektorraum.

Verwenden Sie die K-bilineare Abbildung $K' \times K' \to K'$, die durch $(a', b') \mapsto a' \cdot b'$ eindeutig bestimmt ist.

(2) Dem Homomorphismus $\varphi : V \to W$ wird die K'-lineare Abbildung

$$\varphi_{K'} := K' \otimes_K \varphi : V_{K'} \to W_{K'}$$

der durch Skalarerweiterungen entstandenen Vektorräume zugeordnet.

Ist K Unterkörper der komplexen Zahlen (hier meist $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{Q}$), so heißt $V_{\mathbb{C}}$ bzw. $\varphi_{\mathbb{C}}$ die *Komplexifizierung* von V bzw. φ.

Homomorphismen endlichdimensionaler Vektorräume haben wir schon wiederholt mittels der zugeordneten Matrizen beschrieben. Das ist im vorliegenden Fall besonders leicht.

Satz. 4/4/10

(1) *V sei ein K-Vektorraum und $\mathcal{B}_V = (\boldsymbol{v}_j)_{j\in J}$ eine Basis von V. Dann ist $\mathcal{B}'_V = (1 \otimes \boldsymbol{v}_j)_{j\in J}$ eine Basis des K'-Vektorraumes $V_{K'}$, insbesondere $\dim_{K'}(V_{K'}) = \dim_K(V)$.*

(2) *$\varphi : V \to W$ sei eine K-lineare Abbildung endlichdimensionaler Vektorräume, $\mathcal{B}_W = (\boldsymbol{w}_i)_{i\in I}$ eine Basis des K-Vektorraumes W und $\mathcal{B}'_W := (1 \otimes \boldsymbol{w}_i)_{i\in I}$, dann gilt $\mathrm{M}_{\mathcal{B}'_V,\mathcal{B}'_W}(\varphi_{K'}) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_W}(\varphi)$, wobei $\mathrm{M}(I,J;K)$ mittels der Inklusion $K \subseteq K'$ als Teilmenge von $\mathrm{M}(I,J;K')$ betrachtet wird.*

Beweis. Die K-bilineare Abbildung

$$K' \times K^{(J)} \to K'^{(J)}, \quad (a', (a_j)_{j\in J}) \mapsto (a'a_j)_{j\in J}$$

erfüllt die Universaleigenschaft des Tensorprodukts über K, daher existiert ein K-Isomorphismus

$$(K^{(J)})_{K'} = K' \otimes_K K^{(J)} \to K'^{(J)}, \quad a' \otimes (a_j)_{j\in J} \mapsto (a'a_j)_{j\in J};$$

er ist mit der Multiplikation von Elementen aus K' verträglich, daher ein K'-Isomorphismus .
Für die Basis $(\boldsymbol{v}_j)_{j\in J}$ des Vektorraumes V erhalten wir nun mittels linearer Fortsetzung einen K-Isomorphismus $V \cong K^{(J)}$, $\boldsymbol{v}_j \mapsto \boldsymbol{e}_j$. Sein Tensorprodukt mit $\mathrm{id}_{K'}$ über K ergibt einen Isomorphismus, dessen Komposition mit dem vorhergehenden ein K'-Isomorphismus

$$V_{K'} = K' \otimes_K V \to K' \otimes_K K^{(J)} \to K'^{(J)}$$

ist; er bildet die Familie $(1 \otimes \boldsymbol{v}_j)_{j\in J}$ auf die kanonische Basis $(\boldsymbol{e}_j)_{j\in J}$ von $K'^{(J)}$ ab. Die zweite Behauptung folgt unmittelbar aus der Definition der Matrix einer linearen Abbildung. ❑

Anmerkung. So sieht der typische Fall aus: Ist $\varphi : V \to W$ ein Homomorphismus reeller Vektorräume, dann erhalten wir durch Erweiterung des Skalarbereichs mit den komplexen Zahlen ein kommutatives Diagramm

Das Studium von Endomorphismen reeller Vektorräume kann zweckmäßig auf dem Umweg über die komplexen Zahlen ausgeführt werden. Einzelheiten dazu folgen im 5. Kapitel.

$$\begin{tikzcd}
V_{\mathbb{C}} \arrow[r, "\varphi_{\mathbb{C}}"] & W_{\mathbb{C}} \\
V \arrow[u, "\boldsymbol{v}\mapsto 1\otimes\boldsymbol{v}"'] \arrow[r, "\varphi"] & W \arrow[u, "\boldsymbol{w}\mapsto 1\otimes\boldsymbol{w}"']
\end{tikzcd}$$

von $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen, in dem $\varphi_{\mathbb{C}}$ sogar $\mathbb{C}$-linear ist.
Wird $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ durch die Matrix $A = \mathrm{M}(\varphi) \in \mathrm{M}(m,n;\mathbb{R})$ definiert, so entspricht das obige Diagramm einem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^n \arrow[r] & \mathbb{C}^m \\ \mathbb{R}^n \arrow[u, "\subseteq"] \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{R}^m \arrow[u, "\subseteq"'] \end{tikzcd}$$

in dem beide Zeilen durch Multiplikation mit derselben Matrix A gegeben sind.

Das Kroneckerprodukt

4/4/11

Das Tensorprodukt linearer Abbildungen lässt sich insbesondere für endlichdimensionale Vektorräume als Matrizenoperation interpretieren. Aus Basen $(\boldsymbol{v}^{(1)}_{j_1})_{j_1\in J_1}$, $(\boldsymbol{v}^{(2)}_{j_2})_{j_2\in J_2}$ von V_1 bzw. V_2 und $(\boldsymbol{w}^{(1)}_{i_1})_{i_1\in I_1}$, $(\boldsymbol{w}^{(2)}_{i_2})_{i_2\in I_2}$ von W_1 bzw. W_2 erhalten wir Basen $\mathcal{B}_{V_1}\otimes\mathcal{B}_{V_2} = (\boldsymbol{v}^{(1)}_{j_1}\otimes\boldsymbol{v}^{(2)}_{j_2})_{(j_1,j_2)\in J_1\times J_2}$ von $V_1\otimes V_2$ und $\mathcal{B}_{W_1}\otimes\mathcal{B}_{W_2} = (\boldsymbol{w}^{(1)}_{i_1}\otimes\boldsymbol{w}^{(2)}_{i_2})_{(i_1,i_2)\in I_1\times I_2}$ von $W_1\otimes W_2$. Sind $A^{(1)} = (a^{(1)}_{i_1j_1}) \in \mathrm{M}(I_1,J_1;K)$ und $A^{(2)} = (a^{(2)}_{i_2j_2}) \in \mathrm{M}(I_2,J_2;K)$ die Matrizen der Homomorphismen $\varphi_1 : V_1\to W_1$ bzw. $\varphi_2 : V_2\to W_2$ bezüglich der entsprechenden Basen, so ist

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{V_1}\otimes\mathcal{B}_{V_2},\mathcal{B}_{W_1}\otimes\mathcal{B}_{W_2}}(\varphi_1\otimes_K\varphi_2) = (b_{(i_1,i_2),(j_1,j_2)}) \in \mathrm{M}(I_1\times I_2, J_1\times J_2;K)$$
$$\text{mit}\quad b_{(i_1,i_2),(j_1,j_2)} = a^{(1)}_{i_1j_1}\cdot a^{(2)}_{i_2j_2}.$$

Definition. (*Kroneckerprodukt zweier Matrizen*)

Für Matrizen $A^{(1)} = (a^{(1)}_{i_1j_1}) \in \mathrm{M}(I_1,J_1;K)$ und $A^{(2)} = (a^{(2)}_{i_2j_2}) \in \mathrm{M}(I_2,J_2;K)$ heißt

$$A^{(1)}\otimes A^{(2)} := (b_{(i_1,i_2),(j_1,j_2)}) \in \mathrm{M}(I_1\times I_2, J_1\times J_2;K) \quad \text{mit}$$
$$b_{(i_1,i_2),(j_1,j_2)} := a^{(1)}_{i_1j_1}\cdot a^{(2)}_{i_2j_2}$$

das *Kroneckerprodukt*, auch *Tensorprodukt* von A und B.

Hier wird lediglich das Tensorprodukt von Homomorphismen in Matrizenschreibweise ausgedrückt.

Gemäß der allgemeinen Definition im Kapitel 1 (vgl. 1/3/1) sind hierbei die Paare (i_1,i_2) Zeilenindizes und die Paare (j_1,j_2) Spaltenindizes.
Die Rechenoperationen zwischen Matrizen sind so definiert, dass die vertraute Anordnung der Einträge als rechteckiges Schema nicht erforderlich ist. Für das Kroneckerprodukt der Matrizen $A = (a_{i_1j_1}) \in \mathrm{M}(m_1,n_1;K)$ und $B\in \mathrm{M}(m_2,n_2;K)$ wird jedoch die folgende Konvention verwendet, bei der $A\otimes B$ als Blockmatrix so geschrieben werden kann:

$$A\otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1j_1}B & \dots & a_{1n_1}B \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m_11}B & \dots & a_{m_1j_1}B & \dots & a_{m_1n_1}B \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(m_1m_2, n_1n_2;K)$$

Beachten Sie: Das Kroneckerprodukt ist für beliebige Matrizen definiert.

Beispiel.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \qquad ❏$$

Die obige Anordnung der Einträge der Matrix $A\otimes B$ ergibt sich so: Sind V und W Vektorräume mit Basen $\mathcal{B}_V = (\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n)$ und $\mathcal{B}_W = (\boldsymbol{w}_1,\dots,\boldsymbol{w}_m)$, dann wählen wir die Anordnung der Vektoren in $\mathcal{B}_V\otimes\mathcal{B}_W$ als

$$\mathcal{B}_V\otimes\mathcal{B}_W =$$

$(\boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{w}_m, \boldsymbol{v}_2 \otimes \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_2 \otimes \boldsymbol{w}_m, \ldots, \boldsymbol{v}_n \otimes \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \otimes \boldsymbol{w}_m)$.

Bemerkung. (*Eigenschaften des Kroneckerprodukts*) 4/4/12

(1) Sind $\varphi_1 : K^{n_1} \to K^{m_1}$ und $\varphi_2 : K^{n_2} \to K^{m_2}$ lineare Abbildungen mit zugehörigen Matrizen $A^{(1)} = \mathrm{M}(\varphi_1) \in \mathrm{M}(m_1, n_1; K)$ und $A^{(2)} = \mathrm{M}(\varphi_2) \in \mathrm{M}(m_2, n_2; K)$, so ist $A^{(1)} \otimes A^{(2)}$ die Matrix von $\varphi_1 \otimes_K \varphi_2$ bezüglich der Tensorprodukte der kanonischen Basen.

(2) Für das Kroneckerprodukt gelten folgende Rechenregeln:

(i) $(aA) \otimes B = a(A \otimes B) = A \otimes (aB)$
für $A \in \mathrm{M}(m_1, n_1; K)$, $B \in \mathrm{M}(m_2, n_2; K)$, $a \in K$.

(ii) $(A^{(1)} + A^{(2)}) \otimes B = A^{(1)} \otimes B + A^{(2)} \otimes B$
für $A^{(1)}, A^{(2)} \in \mathrm{M}(m_1, n_1; K)$, $B \in \mathrm{M}(m_2, n_2; K)$.

(iii) $A \otimes (B^{(1)} + B^{(2)}) = A \otimes B^{(1)} + A \otimes B^{(2)}$
für $A \in \mathrm{M}(m_1, n_1; K)$, $B^{(1)}, B^{(2)} \in \mathrm{M}(m_2, n_2; K)$.

(iv) $(A^{(1)} \otimes A^{(2)}) \cdot (B^{(1)} \otimes B^{(2)}) = (A^{(1)} \cdot B^{(1)}) \otimes (A^{(2)} \cdot B^{(2)})$
für $A^{(1)} \in \mathrm{M}(m_1, n_1; K)$, $B^{(1)} \in \mathrm{M}(n_1, p_1; K)$, $A^{(2)} \in \mathrm{M}(m_2, n_2; K)$, $B^{(2)} \in \mathrm{M}(n_2, p_2; K)$.

Es handelt sich um Eigenschaften, die für das Tensorprodukt von Homomorphismen bewiesen wurden bzw. leicht zu prüfen sind.

Beweis. (1) ist offensichtlich. (2) folgt aus den entsprechenden Eigenschaften des Tensorprodukts von Homomorphismen durch Übergang zu den zugehörigen Matrizen. ❑

Wer den Versuch unternimmt, Formeln wie die unter (2) aufgeführten elementar zu verifizieren, lernt die Vorzüge „basisfreier“ Beweise schätzen.

Schwerpunkte zum gewählten Stoff

- Tensorprodukt von Vektorräumen, Universaleigenschaft und Existenz [4/4/1 – 4/4/3]
- Elementare Rechenregeln für Tensoren, Auffinden einer Basis des Tensorprodukts, einige Isomorphismen [4/4/4 – 4/4/6]
- Bifunktorialität des Tensorprodukts [4/4/7 – 4/4/8]
- Wechsel des Grundkörpers durch das Tensorprodukt mit einem Erweiterungskörper [4/4/9 – 4/4/10]
- Das Tensorprodukt (Kroneckerprodukt) von Matrizen und seine Eigenschaften [4/4/11 – 4/4/12]

Sachverzeichnis