Lineare Algebra individuell
Online-Fassung, Ver. 0.41
– – internes Material – –

15.4.2004

Kapitel 4

Multilineare Abbildungen

In diesem Kapitel werden Abbildungen von Vektorräumen untersucht, die in mehreren Argumenten linear sind.

Besonders nützlich ist für uns die Determinante, mit der wir ein weiteres Werkzeug zur Lösung von Gleichungen erhalten. Die Bezeichnung wurde bereits 1801 von C. F. GAUSS verwendet; sie steht für ein schon vorher bekanntes Hilfsmittel zur Untersuchung von Gleichungssystemen. Wir erläutern, wie sich die Determinante in das Studium multilinearer Abbildungen einordnet.

Einen anderen wichtigen Spezialfall bilden die Bilinearformen. Einige von ihnen eignen sich dazu, die im Kapitel 6 untersuchten Begriffe der Länge und des Winkels einzuführen.

Allgemein sind multilineare Abbildungen durch Räume von Tensoren gegeben, die mittels Universaleigenschaften charakterisiert werden können und so ein selbstständiges Interesse erlangen.

4.4 Tensorprodukte

Die Untersuchung multilinearer Abbildungen führt ganz allgemein auf die 4/4/1
Frage nach einem klassifizierenden Objekt. Tatsächlich gibt es eine *universelle* p-lineare Abbildung, deren Konstruktion zunächst für $p = 2$ beschrieben wird.

Definition. (*Tensorprodukt*)

V, W seien K-Vektorräume sowie $t : V \times W \to T$ eine bilineare Abbildung mit der folgenden Eigenschaft:
Ist $f : V \times W \to P$ bilinear, dann existiert genau eine lineare Abbildung $\varphi : T \to P$ mit $\varphi \cdot t = f$, d.h. für die das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "t"'] & & P \\ & T \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Ein solches Paar (T, t) (oder nachlässig einfach der Vektorraum T) heißt *Tensorprodukt von* V *und* W (*über* K).

Diese Definition sichert noch nicht die Existenz eines Tensorprodukts – sie ergibt sich allerdings aus dem folgenden Satz.

Trotz der etwas abstrakten Begriffsbildung beinhaltet diese Definition nichts Anderes als eine Präzisierung des zuvor naiv verwendeten Begriffs *klassifizierendes Objekt.* Für einen Vektorraum T mit der angegebenen *Universaleigenschaft* ist $\mathrm{Hom}_K(T, P)$ bis auf Isomorphie der Vektorraum aller bilinearen Abbildungen $V \times W \to P$.

Satz. *Zu jedem Paar* (V, W) *von* K*-Vektorräumen existiert ein Tensorpro-* 4/4/2
dukt (T, t). *Es ist bis auf kanonische Isomorphie eindeutig bestimmt, d.h. für*

jedes Tensorprodukt (T', t') *von* V *und* W *existiert ein eindeutig bestimmter Isomorphismus* $\psi : T \to T'$*, für den das folgende Diagramm kommutiert*:

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[rr, "t'"] \arrow[dr, "t"'] & & T' \\ & T \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Darüber hinaus gibt es eine kanonische Konstruktion, die unter den (isomorphen) Tensorprodukten von V *und* W *ein konkretes auswählt,* es wird von nun an auch *das* Tensorprodukt von V und W genannt.

Denken Sie dabei etwa an Kardinalzahlen, mit denen Sie ohne Kenntnis der expliziten Konstruktion rechnen können.

Tatsächlich wird die letzte Feststellung erst im Beweis des Satzes präzisiert. Wer bereit ist, sich mit der Existenz eines in Abhängigkeit von Basen konstruierten Tensorprodukts zu begnügen (das damit nur bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt wäre), erhält dafür die Anleitung in 4/4/5.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit. Sie ergibt sich (wie schon bisher bei Objekten mit Universaleigenschaft) ohne besonderen Aufwand, denn definitionsgemäß existieren eindeutig bestimmte Homomorphismen $\psi : T \to T'$ und $\psi' : T' \to T$, für die das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} & T' \arrow[dr, "\psi'"] & \\ T \arrow[ur, "\psi"] \arrow[rr, dotted, "\sigma"] & & T \\ & V \times W \arrow[ul, "t"] \arrow[uu, "t'"] \arrow[ur, "t"'] & \end{tikzcd}$$

Nach Voraussetzung ist für ein Tensorprodukt (T, t) von V und W der Homomorphismus $\sigma = \psi' \cdot \psi : T \to T$ mit $\sigma \cdot t = t$ eindeutig bestimmt. Offensichtlich gilt auch $\mathrm{id}_T \cdot t = t$, und die Eindeutigkeit von σ ergibt $\sigma = \mathrm{id}_T$, d.h. $\psi' \cdot \psi = \mathrm{id}_T$. Analog folgt $\psi \cdot \psi' = \mathrm{id}_{T'}$, daher ist ψ ein Isomorphismus.

Zum Beweis der Existenz eines Paares (T, t) mit der geforderten Eigenschaft wählen wir für T den Faktorraum $T := K^{(V \times W)}/U$ des K-Vektorraumes $K^{(V \times W)}$ nach dem Unterraum U, der von allen Vektoren

$$(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}', \boldsymbol{w}) - (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) - (\boldsymbol{v}', \boldsymbol{w}), \quad \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in V,\ \boldsymbol{w} \in W$$
$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}') - (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) - (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}'), \quad \boldsymbol{v} \in V,\ \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}' \in W$$
$$(a\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) - a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}), \quad (\boldsymbol{v}, a\boldsymbol{w}) - a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}), \quad \boldsymbol{v} \in V,\ \boldsymbol{w} \in W,\ a \in K$$

erzeugt ist. Dabei wird mit der üblichen Identifikation $V \times W$ als Basis von $K^{(V \times W)}$ betrachtet (vgl. 3/3/9). $t : V \times W \to T$ sei das Produkt der Inklusion $V \times W \to K^{(V \times W)}$ mit dem kanonischen Homomorphismus $\pi : K^{(V \times W)} \to T$. Dann ist t offensichtlich bilinear (U wurde gerade so definiert, dass die Bilinearität auf den Klassen erfüllt ist). Für eine beliebige bilineare Abbildung $f : V \times W \to P$ haben wir nun zu zeigen, dass genau eine lineare Abbildung $\varphi : T \to P$ mit $\varphi \cdot t = f$ existiert. Dazu untersuchen wir das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
K^{(V\times W)} \arrow[rr, dotted, "\sigma"] \arrow[dr, "\pi"] & & P \\
& T \arrow[ur, dotted, "\varphi"] & \\
& V \times W \arrow[uul, "\subseteq"] \arrow[u, "t"] \arrow[uur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Da $V \times W$ eine Basis von $K^{(V\times W)}$ ist, existiert nach dem Prinzip der linearen Fortsetzung ein eindeutig bestimmter Homomorphismus $\sigma : K^{(V\times W)} \to P$ mit $\sigma(v,w) = f(v,w)$, für $\boldsymbol{v} \in V$ und $\boldsymbol{w} \in W$, d.h. das äußere Diagramm kommutiert. Da f bilinear ist, wird das oben angegebene Erzeugendensystem für U durch σ auf $\mathbf{0}$ abgebildet, d.h. $U \subseteq \ker(\sigma)$. Deshalb faktorisiert σ über den kanonischen Homomorphismus $\pi : K^{(V\times W)} \to T = K^{(V\times W)}/U$ und eine lineare Abbildung $\varphi : T \to P$, so dass das gesamte Diagramm kommutiert (vgl. 3/2/16). Die Eindeutigkeit von φ folgt aus der Surjektivität der Abbildung π: Ist $\varphi' : T \to P$ mit $\varphi' \cdot t = f$, so muss auch $\varphi' \cdot \pi = \sigma$ sein (aufgrund der Eindeutigkeit der linearen Fortsetzung), also ist $\varphi' \cdot \pi = \varphi \cdot \pi$, und die Surjektivität von π impliziert $\varphi' = \varphi$. ❑

Bezeichnungen. Das Tensorprodukt T von V und W über K wird mit $V \otimes_K W$ oder (bei fixiertem Grundkörper K) nachlässig mit $V \otimes W$ bezeichnet, die Elemente von T heißen *Tensoren.* Für die zugehörige kanonische bilineare Abbildung (*Tensorabbildung*) $t = t_{V,W} : V \times W \to V \otimes_K W$ setzen wir $t(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) =: \boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}$. Die Vektoren $\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}$ werden *zerfallende*, auch *zerlegbare* Tensoren genannt. 4/4/3

Die Menge der zerfallenden Tensoren heißt *Segre-Kegel* von $V \otimes_K W$ und ist im Allgemeinen kein Unterraum.

Bemerkung. (*Rechenregeln für Tensoren*) 4/4/4

(1) Jedes Element von $V \otimes_K W$ ist Summe (endlich vieler) zerfallender Tensoren, d.h. $\{\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{v} \in V,\ \boldsymbol{w} \in W\}$ bildet insbesondere ein Erzeugendensystem des Vektorraumes $V \otimes_K W$.

(2) Die Bilinearität der Tensorabbildung $t : V \times W \to V \otimes_K W$ findet ihren Ausdruck in den folgenden Rechenregeln.

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}') \otimes \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}' \otimes \boldsymbol{w}, \quad \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}' \in V,\ \boldsymbol{w} \in W\\
&\boldsymbol{v} \otimes (\boldsymbol{w}+\boldsymbol{w}') = \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}', \quad \boldsymbol{v} \in V,\ \boldsymbol{w},\boldsymbol{w}' \in W\\
&(a\boldsymbol{v}) \otimes \boldsymbol{w} = a(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v} \otimes (a\boldsymbol{w}), \quad \boldsymbol{v} \in V,\ \boldsymbol{w} \in W,\ a \in K
\end{aligned}$$

Aus Basen in V und W lassen sich – wie nachfolgend erläutert – Basen des Produkts $V \otimes_K W$ gewinnen.

Bemerkung. 4/4/5

$\mathcal{B}_V = (\boldsymbol{v}_i)_{i\in I}$ und $\mathcal{B}_W = (\boldsymbol{w}_j)_{j\in J}$ seien Basen der Vektorräume V bzw. W.

(1) Es existiert eine bilineare Abbildung $t' : V \times W \to K^{(I\times J)}$ mit

$$\Big(\sum_{i\in I} x_i\boldsymbol{v}_i, \sum_{j\in J} y_j\boldsymbol{w}_j\Big) \mapsto \sum_{(i,j)\in I\times J} x_i\, y_j \cdot (i,j),$$

wobei $(x_i)_{i\in I}$ bzw. $(y_j)_{j\in J}$ Koordinatenfamilien von Vektoren aus V bzw. W bezeichnen. Dadurch werden die Paare (v_i, w_j) auf die Elemente (i,j) der kanonischen Basis von $K^{(I\times J)}$ abgebildet. Nach dem Prinzip der linearen Fortsetzung existiert für jede bilineare Abbildung $f : V \times W \to P$ eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\varphi : K^{(I\times J)} \to P$, für die das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "t'"'] & & P \\ & K^{(I\times J)} \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Daher erfüllt t' die Universaleigenschaft des Tensorprodukts. Es folgt $K^{(I\times J)} \cong V \otimes_K W$ mit einem eindeutig bestimmten Isomorphismus, der die bilineare Abbildung t' und die Tensorabbildung von $V \times W$ respektiert; die Vektoren $t'(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) \in K^{(I\times J)}$ werden durch ihn auf $\boldsymbol{v}_i \otimes \boldsymbol{w}_j$ abgebildet. So ergibt sich auch:

(2) $\mathcal{B}_V \otimes \mathcal{B}_W := (\boldsymbol{v}_i \otimes \boldsymbol{w}_j)_{(i,j)\in I\times J}$ ist eine Basis von $V \otimes_K W$, insbesondere $\dim_K(V \otimes_K W) = \dim_K(V) \cdot \dim_K(W)$.

Damit erhalten wir das Tensorprodukt ohne die abstrakte Konstruktion.

(3) Ein Tensor $\boldsymbol{u} \in V \otimes_K W$ ist stets von der Gestalt

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i\in I, j\in J} u^{ij} \boldsymbol{v}_i \otimes \boldsymbol{w}_j,$$

wobei $(u^{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ die Koordinatenfamilie von $\boldsymbol{u}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_V \otimes \mathcal{B}_W$ bezeichnet. Die Zahlen u^{ij} werden auch *Tensorkomponenten* des Tensors $\boldsymbol{u}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_V \otimes \mathcal{B}_W$ genannt. Für $V = W$ und $\mathcal{B}_V = \mathcal{B}_W$ heißen sie kurz *Tensorkomponenten von* $\boldsymbol{u}$ *bezüglich* $\mathcal{B}_V$. In der Technik wird die Notation *Tensor* für Familien solcher Zahlen (u^{ij}) verwendet, die durch Basistransformation in V auseinander hervorgehen.

Durch das Transformationsverhalten von (u^{ij}) werden die Eigenschaften des Tensorprodukts in Koordinaten beschrieben.

Für Tensorprodukte von mehr als zwei Vektorräumen erhalten wir dann Tensoren als Verallgemeinerungen des Begriffs der *Matrix*.

Beispiel. (*Segre-Kegel*)

$V = \mathbb{R}^2$ sei der reelle Standardraum.
Sind (u^{ij}) die Tensorkomponenten von $\boldsymbol{u} \in V \otimes_{\mathbb{R}} V$ bezüglich der kanonischen Basis $\mathcal{B}$, so zerfällt der Tensor $\boldsymbol{u}$ genau dann, wenn er von der Gestalt $\boldsymbol{u} = (x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2) \otimes (y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2)$ ist, d.h.

$$\boldsymbol{u} = x_1y_1\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1 + x_1y_2\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2 + x_2y_1\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_1 + x_2y_2\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_2$$

mit geeigneten $x_i, y_j \in \mathbb{R}$. Die Tensorkomponenten bezüglich $\mathcal{B}$ sind daher $\boldsymbol{u}^{11} = x_1y_1$, $\boldsymbol{u}^{12} = x_1y_2$, $\boldsymbol{u}^{21} = x_2y_1$, $\boldsymbol{u}^{22} = x_2y_2$. Sie genügen der Bedingung $\boldsymbol{u}^{11}\boldsymbol{u}^{22} = \boldsymbol{u}^{12}\boldsymbol{u}^{21}$.
Der Isomorphismus $V \otimes_{\mathbb{R}} V \to \mathbb{R}^4$, der $(\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_2)$ auf die kanonische Basis abbildet, hat als Bildmenge der zerfallenden Tensoren die Nullstellenmenge $V(X_1X_4 - X_2X_3) \subseteq \mathbb{R}^4$.
Das rechtfertigt die Bezeichnung „Kegel“: Wer noch keinen Kegel im 4-dimensionalen Raum gesehen hat ist eingeladen, sich die Schnitte mit den dreidimensionalen Unterräumen $V(X_4 - \alpha X_3)$ für feste Zahlen $\alpha \in \mathbb{R}$ zu veranschaulichen.

Satz. *Sind* V, W *und* P *Vektorräume, so existieren folgende Isomorphismen, die durch die angegebenen Bedingungen eindeutig bestimmt sind*: 4/4/6

(1) $V \otimes_K W \cong W \otimes_K V, \quad \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w} \mapsto \boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{v}$.

(2) $(V \otimes_K W) \otimes_K P \cong V \otimes_K (W \otimes_K P), \quad (\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}) \otimes \boldsymbol{p} \mapsto \boldsymbol{v} \otimes (\boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{p})$.

(3) $(V \bigoplus W) \otimes_K P \cong (V \otimes_K P) \bigoplus (W \otimes_K P), \quad (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \otimes \boldsymbol{p} \mapsto (\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{p}, \boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{p})$.

(1) - (3) und (5) werden als Übungsaufgaben empfohlen; verwenden Sie vorzugsweise die Charakterisierung des Tensorprodukts durch seine Universaleigenschaft.

(4) $K \otimes_K V \cong V, \quad a \otimes \boldsymbol{v} \mapsto a\boldsymbol{v}$.

(5) $\operatorname{Hom}_K(V, \operatorname{Hom}_K(W,P)) \cong \operatorname{Hom}(V \otimes_K W, P)$;
dabei wird $\psi \in \operatorname{Hom}_K(V, \operatorname{Hom}_K(W,P))$ *die eindeutig bestimmte lineare Abbildung* $V \otimes_K W \to P$ *zugeordnet, die mittels der Tensorabbildung der bilinearen Abbildung* $V \times W \to P,\ (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \mapsto \big(\psi(\boldsymbol{v})\big)(\boldsymbol{w})$ *entspricht.*

Wer für die obigen Regeln Namen wie „Kommutativität“, „Assoziativität“ usw. verwendet, sollte beachten, dass hier nur Isomorphie besteht – keine Gleichheit. Die Eigenschaft (5) wird auch als *adjungierte Assoziativität* bezeichnet.

Beweis des Satzes. Die angeführten Eigenschaften ergeben sich aus der Universalität des Tensorprodukts; wir zeigen (4).
$t : K \times V \to V$ sei die durch $t(a, \boldsymbol{v}) := a\boldsymbol{v}$ gegebene bilineare Abbildung; es ist nur zu zeigen, dass t die Universaleigenschaft des Tensorprodukts erfüllt. Dazu betrachten wir eine beliebige bilineare Abbildung $f : K \times V \to P$; offenbar ist $\varphi : V \to P$ mit $\varphi(\boldsymbol{v}) := f(1, \boldsymbol{v})$ die eindeutig bestimmte lineare Abbildung, für die das Diagramm

$$\begin{tikzcd} K \times V \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "t"', "(a,\boldsymbol{v}) \mapsto a\cdot\boldsymbol{v}"'] & & P \\ & V \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert. ❑

Nachdem ein Tensorprodukt von Vektorräumen definiert ist, lässt sich auf nahe liegende Weise auch ein Tensorprodukt linearer Abbildungen erklären, das in beiden Argumenten funktoriell ist.

Satz. (*Bifunktorialität des Tensorprodukts*) 4/4/7

Sind $V_1,\ V_2,\ W_1,\ W_2$ *Vektorräume und* $\varphi_1 : V_1 \to W_1,\ \varphi_2 : V_2 \to W_2$ *lineare Abbildungen, so gibt es genau eine mit* $\varphi_1 \otimes_K \varphi_2$ *bezeichnete lineare Abbildung*

$V_1 \otimes_K V_2 \to W_1 \otimes_K W_2$, *für die*

$(\varphi_1 \otimes_K \varphi_2)(\boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{v}_2) = \varphi_1(\boldsymbol{v}_1) \otimes \varphi_2(\boldsymbol{v}_2), \quad \boldsymbol{v}_1 \in V_1,\ \boldsymbol{v}_2 \in V_2$

ist. Das so definierte Tensorprodukt zweier Homomorphismen besitzt die folgenden Eigenschaften:

(1) $\mathrm{id}_{V_1} \otimes_K \mathrm{id}_{V_2} = \mathrm{id}_{V_1 \otimes_K V_2}$.

(2) *Sind* $\varphi_1' : W_1 \to P_1$ *und* $\varphi_2' : W_2 \to P_2$ *weitere lineare Abbildungen, dann gilt*

$$(\varphi_1' \cdot \varphi_1) \otimes_K (\varphi_2' \cdot \varphi_2) = (\varphi_1' \otimes_K \varphi_2') \cdot (\varphi_1 \otimes_K \varphi_2).$$

Der Begriff der *Bifunktorialität* soll hier nicht präzisiert werden, er dürfte aber durch seinen gelegentlichen Gebrauch einleuchten.

Beweis. Die bilineare Abbildung

$$f : V_1 \times V_2 \to W_1 \otimes_K W_2, \quad (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \mapsto \varphi_1(\boldsymbol{v}_1) \otimes \varphi_2(\boldsymbol{v}_2)$$

lässt sich durch einen eindeutig bestimmten Homomorphismus über das Tensorprodukt $V_1 \otimes_K V_2$ fortsetzen, und die so entstehende lineare Abbildung $V_1 \otimes_K V_2 \to W_1 \otimes_K W_2$ bildet $\boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{v}_2$ auf $\varphi_1(\boldsymbol{v}_1) \otimes \varphi_1(\boldsymbol{v}_2)$ ab. Die verbleibenden Eigenschaften folgen daraus, dass Tensorprodukte von zerfallenden

Tensoren erzeugt werden; es genügt also, die Übereinstimmung der betreffenden Abbildungen auf der Teilmenge $\{\boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{v}_2 \mid \boldsymbol{v}_1 \in V_1,\ \boldsymbol{v}_2 \in V_2\}$ zu überprüfen. $\square$

Für $V_1 = W_1 = V$ setzen wir auch $\mathrm{id}_V \otimes_K \varphi_2 =: V \otimes_K \varphi_2$, entsprechend wird $\varphi_1 \otimes_K W := \varphi_1 \otimes_K \mathrm{id}_W$ definiert.

Weitere Eigenschaften – wie die Vertauschbarkeit des Tensorprodukts mit einer Summe von Homomorphismen – werden in den Übungsaufgaben behandelt.

Wir bemerken, dass das Symbol $\varphi_1 \otimes_K \varphi_2$ einen Doppelsinn hat, es könnte ebenso ein Element des Vektorraumes $\mathrm{Hom}_K(V_1, W_1) \otimes_K \mathrm{Hom}_K(V_2, W_2)$ bezeichnen. Erfreulicherweise ist in wichtigen Fällen keine Unterscheidung erforderlich; dies ergibt der folgende

Satz. *V_1, V_2, W_1 und W_2. bezeichnen endlichdimensionale Vektorräume.* 4/4/8

(1) *Die (gemäß der Konstruktion aus Satz 4/4/7) durch $(\varphi_1, \varphi_2) \mapsto \varphi_1 \otimes_K \varphi_2$ induzierte kanonische Abbildung*

$$\mathrm{Hom}_K(V_1, W_1) \otimes_K \mathrm{Hom}_K(V_2, W_2) \to \mathrm{Hom}_K(V_1 \otimes_K V_2, W_1 \otimes_K W_2)$$

ist ein Isomorphismus. Insbesondere gilt

(2) $\mathrm{End}_K(V_1) \otimes_K \mathrm{End}_K(V_2) \cong \mathrm{End}_K(V_1 \otimes_K V_2)$.

Beweis. Für einen Vektorraum W gibt es zu beliebigen Zahlen $m \in \mathbb{N}$ Isomorphismen $W^m \cong \mathrm{Hom}_K(K^m, W)$, die $(\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m) \in W^m$ auf den Homomorphismus $K^m \to W$, $\boldsymbol{e}_i \mapsto \boldsymbol{w}_i$ abbilden. Es genügt offenbar, den Satz für den Fall zu beweisen, dass $V_1 = K^{m_1}$ und $V_2 = K^{m_2}$ endlichdimensionale Standardräume sind. Dann ist bis auf Isomorphie auch $V_1 \otimes_K V_2$ der Standardraum $K^{m_1 m_2}$, und die Behauptung (1) ergibt sich aus der Kommutativität des folgenden Diagramms.

$$\begin{tikzcd}
W_1^{m_1} \otimes_K W_2^{m_2} \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_K(K^{m_1}, W_1) \otimes_K \mathrm{Hom}_K(K^{m_2}, W_2) \arrow[d] \\
(W_1 \otimes_K W_2)^{m_1 m_2} \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Hom}_K(K^{m_1} \otimes_K K^{m_2}, W_1 \otimes_K W_2)
\end{tikzcd}$$

... eine kleine Rechnung mit zerfallenden Tensoren. Wie sieht die Abbildung zum linken vertikalen Pfeil aus?

Erweiterung des Skalarbereichs 4/4/9

Wir fixieren eine Körpererweiterung $K \subseteq K'$, d.h. von nun an ist K Unterkörper eines Körpers K', der dann selbst als Vektorraum über K angesehen werden kann.

Rechnen wir mit Vektoren des Standardraumes $\mathbb{R}^n$ und betrachten wir das Ergebnis später in $\mathbb{C}^n$, so haben wir genau das ausgeführt, was hier beschrieben wird: eine *Skalarerweiterung.*

Bezeichnungen. V und W seien K-Vektorräume, $\varphi : V \to W$ eine K-lineare Abbildung.

(1) $V_{K'} := K' \otimes_K V$ ist ein K'-Vektorraum, der seine Addition durch die Struktur als Vektorraum über K erhält und für den die Multiplikation mit Skalaren durch die K-bilineare Abbildung

$(*)$ $\qquad K' \times V_{K'} \to V_{K'}$

gegeben ist, die durch $(a', b' \otimes \boldsymbol{v}) \mapsto (a' {\cdot} b') \otimes \boldsymbol{v}$ eindeutig bestimmt wird.

$V_{K'}$ heißt der aus V durch *Skalarerweiterung* mit K' entstandene Vektorraum.

Verwenden Sie die K-bilineare Abbildung $K' \times K' \to K'$, die durch $(a', b') \mapsto a' {\cdot} b'$ eindeutig bestimmt ist.

(2) Dem Homomorphismus $\varphi : V \to W$ wird die K'-lineare Abbildung

$$\varphi_{K'} := K' \otimes_K \varphi : V_{K'} \to W_{K'}$$

der durch Skalarerweiterungen entstandenen Vektorräume zugeordnet.

Ist K Unterkörper der komplexen Zahlen (hier meist $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{Q}$), so heißt $V_{\mathbb{C}}$ bzw. $\varphi_{\mathbb{C}}$ die *Komplexifizierung* von V bzw. φ.

Homomorphismen endlichdimensionaler Vektorräume haben wir schon wiederholt mittels der zugeordneten Matrizen beschrieben. Das ist im vorliegenden Fall besonders leicht.

Satz. 4/4/10

(1) *V sei ein K-Vektorraum und $\mathcal{B}_V = (\boldsymbol{v}_j)_{j\in J}$ eine Basis von V. Dann ist $\mathcal{B}'_V = (1 \otimes \boldsymbol{v}_j)_{j\in J}$ eine Basis des K'-Vektorraumes $V_{K'}$, insbesondere $\dim_{K'}(V_{K'}) = \dim_K(V)$.*

(2) *$\varphi : V \to W$ sei eine K-lineare Abbildung endlichdimensionaler Vektorräume, $\mathcal{B}_W = (\boldsymbol{w}_i)_{i\in I}$ eine Basis des K-Vektorraumes W und $\mathcal{B}'_W := (1 \otimes \boldsymbol{w}_i)_{i\in I}$, dann gilt $\mathrm{M}_{\mathcal{B}'_V,\mathcal{B}'_W}(\varphi_{K'}) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_W}(\varphi)$, wobei $\mathrm{M}(I,J;K)$ mittels der Inklusion $K \subseteq K'$ als Teilmenge von $\mathrm{M}(I,J;K')$ betrachtet wird.*

Beweis. Die K-bilineare Abbildung

$$K' \times K^{(J)} \to K'^{(J)}, \quad (a', (a_j)_{j\in J}) \mapsto (a'a_j)_{j\in J}$$

erfüllt die Universaleigenschaft des Tensorprodukts über K, daher existiert ein K-Isomorphismus

$$(K^{(J)})_{K'} = K' \otimes_K K^{(J)} \to K'^{(J)}, \quad a' \otimes (a_j)_{j\in J} \mapsto (a'a_j)_{j\in J};$$

er ist mit der Multiplikation von Elementen aus K' verträglich, daher ein K'-Isomorphismus .
Für die Basis $(\boldsymbol{v}_j)_{j\in J}$ des Vektorraumes V erhalten wir nun mittels linearer Fortsetzung einen K-Isomorphismus $V \cong K^{(J)}$, $\boldsymbol{v}_j \mapsto \boldsymbol{e}_j$. Sein Tensorprodukt mit $\mathrm{id}_{K'}$ über K ergibt einen Isomorphismus, dessen Komposition mit dem vorhergehenden ein K'-Isomorphismus

$$V_{K'} = K' \otimes_K V \to K' \otimes_K K^{(J)} \to K'^{(J)}$$

ist; er bildet die Familie $(1 \otimes \boldsymbol{v}_j)_{j\in J}$ auf die kanonische Basis $(\boldsymbol{e}_j)_{j\in J}$ von $K'^{(J)}$ ab. Die zweite Behauptung folgt unmittelbar aus der Definition der Matrix einer linearen Abbildung. ❏

Anmerkung. So sieht der typische Fall aus: Ist $\varphi : V \to W$ ein Homomorphismus reeller Vektorräume, dann erhalten wir durch Erweiterung des Skalarbereichs mit den komplexen Zahlen ein kommutatives Diagramm

Das Studium von Endomorphismen reeller Vektorräume kann zweckmäßig auf dem Umweg über die komplexen Zahlen ausgeführt werden. Einzelheiten dazu folgen im 5. Kapitel.

$$\begin{tikzcd}
V_{\mathbb{C}} \arrow[r, "\varphi_{\mathbb{C}}"] & W_{\mathbb{C}} \\
V \arrow[u, "\boldsymbol{v}\mapsto 1\otimes\boldsymbol{v}"'] \arrow[r, "\varphi"] & W \arrow[u, "\boldsymbol{w}\mapsto 1\otimes\boldsymbol{w}"']
\end{tikzcd}$$

von $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen, in dem $\varphi_{\mathbb{C}}$ sogar $\mathbb{C}$-linear ist.
Wird $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ durch die Matrix $A = \mathrm{M}(\varphi) \in \mathrm{M}(m,n;\mathbb{R})$ definiert, so entspricht das obige Diagramm einem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^n \arrow[r] & \mathbb{C}^m \\ \mathbb{R}^n \arrow[u, "\subseteq"'] \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{R}^m \arrow[u, "\subseteq"'] \end{tikzcd}$$

in dem beide Zeilen durch Multiplikation mit derselben Matrix A gegeben sind.

Das Kroneckerprodukt

4/4/11

Das Tensorprodukt linearer Abbildungen lässt sich insbesondere für endlichdimensionale Vektorräume als Matrizenoperation interpretieren. Aus Basen $(\boldsymbol{v}_{j_1}^{(1)})_{j_1\in J_1}$, $(\boldsymbol{v}_{j_2}^{(2)})_{j_2\in J_2}$ von V_1 bzw. V_2 und $(\boldsymbol{w}_{i_1}^{(1)})_{i_1\in I_1}$, $(\boldsymbol{w}_{i_2}^{(2)})_{i_2\in I_2}$ von W_1 bzw. W_2 erhalten wir Basen $\mathcal{B}_{V_1}\otimes\mathcal{B}_{V_2} = (\boldsymbol{v}_{j_1}^{(1)}\otimes\boldsymbol{v}_{j_2}^{(2)})_{(j_1,j_2)\in J_1\times J_2}$ von $V_1\otimes V_2$ und $\mathcal{B}_{W_1}\otimes\mathcal{B}_{W_2} = (\boldsymbol{w}_{i_1}^{(1)}\otimes\boldsymbol{w}_{i_2}^{(2)})_{(i_1,i_2)\in I_1\times I_2}$ von $W_1\otimes W_2$. Sind $A^{(1)} = (a_{i_1j_1}^{(1)}) \in \mathrm{M}(I_1,J_1;K)$ und $A^{(2)} = (a_{i_2j_2}^{(2)}) \in \mathrm{M}(I_2,J_2;K)$ die Matrizen der Homomorphismen $\varphi_1 : V_1 \to W_1$ bzw. $\varphi_2 : V_2 \to W_2$ bezüglich der entsprechenden Basen, so ist

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_{V_1}\otimes\mathcal{B}_{V_2},\mathcal{B}_{W_1}\otimes\mathcal{B}_{W_2}}(\varphi_1\otimes_K\varphi_2) = (b_{(i_1,i_2),(j_1,j_2)}) \in \mathrm{M}(I_1\times I_2, J_1\times J_2;K)$$
$$\text{mit}\quad b_{(i_1,i_2),(j_1,j_2)} = a_{i_1j_1}^{(1)}\cdot a_{i_2j_2}^{(2)}.$$

Definition. (*Kroneckerprodukt zweier Matrizen*)
Für Matrizen $A^{(1)} = (a_{i_1j_1}^{(1)}) \in \mathrm{M}(I_1,J_1;K)$ und $A^{(2)} = (a_{i_2j_2}^{(2)}) \in \mathrm{M}(I_2,J_2;K)$ heißt

$$A^{(1)}\otimes A^{(2)} := (b_{(i_1,i_2),(j_1,j_2)}) \in \mathrm{M}(I_1\times I_2, J_1\times J_2;K) \quad \text{mit}$$
$$b_{(i_1,i_2),(j_1,j_2)} := a_{i_1j_1}^{(1)}\cdot a_{i_2j_2}^{(2)}$$

das *Kroneckerprodukt*, auch *Tensorprodukt* von A und B.

Hier wird lediglich das Tensorprodukt von Homomorphismen in Matrizenschreibweise ausgedrückt.

Gemäß der allgemeinen Definition im Kapitel 1 (vgl. 1/3/1) sind hierbei die Paare (i_1,i_2) Zeilenindizes und die Paare (j_1,j_2) Spaltenindizes.
Die Rechenoperationen zwischen Matrizen sind so definiert, dass die vertraute Anordnung der Einträge als rechteckiges Schema nicht erforderlich ist. Für das Kroneckerprodukt der Matrizen $A = (a_{i_1j_1}) \in \mathrm{M}(m_1,n_1;K)$ und $B \in \mathrm{M}(m_2,n_2;K)$ wird jedoch die folgende Konvention verwendet, bei der $A\otimes B$ als Blockmatrix so geschrieben werden kann:

$$A\otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1j_1}B & \dots & a_{1n_1}B \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m_11}B & \dots & a_{m_1j_1}B & \dots & a_{m_1n_1}B \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(m_1m_2, n_1n_2;K)$$

Beachten Sie: Das Kroneckerprodukt ist für beliebige Matrizen definiert.

Beispiel.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \qquad ❏$$

Die obige Anordnung der Einträge der Matrix $A\otimes B$ ergibt sich so: Sind V und W Vektorräume mit Basen $\mathcal{B}_V = (\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n)$ und $\mathcal{B}_W = (\boldsymbol{w}_1,\dots,\boldsymbol{w}_m)$, dann wählen wir die Anordnung der Vektoren in $\mathcal{B}_V\otimes\mathcal{B}_W$ als

$$\mathcal{B}_V\otimes\mathcal{B}_W =$$

$(\boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{w}_m, \boldsymbol{v}_2 \otimes \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_2 \otimes \boldsymbol{w}_m, \ldots, \boldsymbol{v}_n \otimes \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \otimes \boldsymbol{w}_m)$.

Bemerkung. (*Eigenschaften des Kroneckerprodukts*) 4/4/12

(1) Sind $\varphi_1 : K^{n_1} \to K^{m_1}$ und $\varphi_2 : K^{n_2} \to K^{m_2}$ lineare Abbildungen mit zugehörigen Matrizen $A^{(1)} = \mathrm{M}(\varphi_1) \in \mathrm{M}(m_1, n_1; K)$ und $A^{(2)} = \mathrm{M}(\varphi_2) \in \mathrm{M}(m_2, n_2; K)$, so ist $A^{(1)} \otimes A^{(2)}$ die Matrix von $\varphi_1 \otimes_K \varphi_2$ bezüglich der Tensorprodukte der kanonischen Basen.

(2) Für das Kroneckerprodukt gelten folgende Rechenregeln:
- (i) $(aA) \otimes B = a(A \otimes B) = A \otimes (aB)$
  für $A \in \mathrm{M}(m_1, n_1; K),\ B \in \mathrm{M}(m_2, n_2; K),\ a \in K$.
- (ii) $(A^{(1)} + A^{(2)}) \otimes B = A^{(1)} \otimes B + A^{(2)} \otimes B$
  für $A^{(1)}, A^{(2)} \in \mathrm{M}(m_1, n_1; K),\ B \in \mathrm{M}(m_2, n_2; K)$.
- (iii) $A \otimes (B^{(1)} + B^{(2)}) = A \otimes B^{(1)} + A \otimes B^{(2)}$
  für $A \in \mathrm{M}(m_1, n_1; K),\ B^{(1)}, B^{(2)} \in \mathrm{M}(m_2, n_2; K)$.
- (iv) $(A^{(1)} \otimes A^{(2)}) \cdot (B^{(1)} \otimes B^{(2)}) = (A^{(1)} \cdot B^{(1)}) \otimes (A^{(2)} \cdot B^{(2)})$
  für $A^{(1)} \in \mathrm{M}(m_1, n_1; K),\ B^{(1)} \in \mathrm{M}(n_1, p_1; K),\ A^{(2)} \in \mathrm{M}(m_2, n_2; K)$, $B^{(2)} \in \mathrm{M}(n_2, p_2; K)$.

Es handelt sich um Eigenschaften, die für das Tensorprodukt von Homomorphismen bewiesen wurden bzw. leicht zu prüfen sind.

Beweis. (1) ist offensichtlich. (2) folgt aus den entsprechenden Eigenschaften des Tensorprodukts von Homomorphismen durch Übergang zu den zugehörigen Matrizen. ❑

Wer den Versuch unternimmt, Formeln wie die unter (2) aufgeführten elementar zu verifizieren, lernt die Vorzüge „basisfreier" Beweise schätzen.

4.5 Tensoralgebra

Die in 4.4 ausgeführte Klassifikation Klassifikation der bilinearen Abbildungen zweier Vektorräume in einen dritten lässt sich auf die Untersuchung p-linearer Abbildungen übertragen. 4/5/1

Für K-Vektorräume $W, V_1, \ldots, V_p$ $(p \geq 1)$ wird von nun an der K-Vektorraum aller p-linearen Abbildungen

$$V_1 \times \ldots \times V_p \to W$$

mit dem Symbol $\mathrm{L}(V_1, \ldots, V_p; W)$ bezeichnet. Als Spezialfall ergibt sich damit $\mathrm{L}(V_1; W) = \mathrm{Hom}(V_1, W)$. Bei der Untersuchung des Tensorprodukts haben wir im vorigen Abschnitt insbesondere gesehen, dass für $p = 2$ die Komposition mit der Tensorabbildung einen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}(V_1 \otimes_K V_2, W) \to \mathrm{L}(V_1, V_2; W)$$

herstellt. Induktiv kann überprüft werden, dass im allgemeinen Fall nur $V_1 \otimes_K V_2$ durch $V_1 \otimes_K (V_2 \otimes_K (\ldots (\ldots \otimes_K V_p) \ldots))$ zu ersetzen ist, um einen entsprechenden Isomorphismus mit $\mathrm{L}(V_1, V_2, \ldots, V_p; W)$ zu erhalten. Ebenso könnten die Klammern anders gesetzt werden, denn dadurch entsteht nach 4/4/6 (2) ein auf natürliche Weise isomorpher Vektorraum. Die Mehrdeutigkeit ist zu vermeiden, wenn in vollständiger Analogie zum Beweis des Satzes 4/4/2 ein Tensorprodukt von p Vektorräumen definiert wird, das wir dann auf nahe liegende Weise mit den obigen Produkten identifizieren.

Diese Eigenschaft verbleibt als Übungsaufgabe.

Satz. *Sind $V_1, \dots, V_p$ Vektorräume über K, so existiert ein bis auf Isomorphie eindeutig bestimmtes Paar (T, t), bestehend aus einem Vektorraum T und einer p-linearen Abbildung $t : V_1 \times \ldots \times V_p \to T$ mit der folgenden Eigenschaft: Ist $f \in \mathrm{L}(V_1, \dots, V_p; W)$, dann gibt es genau eine lineare Abbildung $\varphi : T \to W$ mit $\varphi \cdot t = f$, d.h. für die das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} V_1 \times \ldots \times V_p \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "t"'] & & W \\ & T \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Ein solches Paar (T, t) oder nachlässig einfach der Vektorraum T heißt Tensorprodukt von $V_1, \dots, V_p$ (über K). Es gibt eine kanonische Konstruktion, die unter den (isomorphen) Tensorprodukten dieser Vektorräume ein konkretes auswählt; es wird von nun an auch *das* Tensorprodukt von $V_1, \dots, V_p$ genannt und mit dem Symbol $V_1 \otimes_K \ldots \otimes_K V_p$ bezeichnet.

Die zugehörige p-lineare Abbildung

$$t = t_{V_1, \dots, V_p} : V_1 \times \ldots \times V_p \to V_1 \otimes_K \ldots \otimes_K V_p\,,$$
$$(v_1, \dots, v_p) \mapsto v_1 \otimes \ldots \otimes v_p$$

heißt (wie im Fall $p = 2$) *Tensorabbildung;* ihr Bild erzeugt $V_1 \otimes_K \ldots \otimes_K V_p$; es besteht aus den *zerfallenden Tensoren* $v_1 \otimes \ldots \otimes v_p$.

Nach dem Satz ergibt sich ein kanonischer Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}(V_1 \otimes_K \ldots \otimes_K V_p, W) \longrightarrow \mathrm{L}(V_1, \dots, V_p; W).$$

Nun lassen sich verschiedene der in 4.4 ausgeführten Überlegungen auf den Fall mehrerer Faktoren übertragen, etwa die Konstruktion des Tensorprodukts linearer Abbildungen. Es handelt sich um so offensichtliche Folgerungen, dass wir darauf verzichten, sie im Einzelnen zu formulieren.

Die Tensoralgebra eines Vektorraumes 4/5/2

Ist V ein K-Vektorraum, so wird mit

$$\mathrm{T}^p(V) := \underbrace{V \otimes_K \ldots \otimes_K V}_{p \text{ Faktoren}}\,, \quad p > 1$$
$$\mathrm{T}^0(V) := K, \quad \mathrm{T}^1(V) := V$$

das *p-fache Tensorprodukt* von V bezeichnet. $\mathrm{T}^p(V)$ heißt auch *p-te Tensorpotenz.*

Für jede lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ existiert wegen der Universalität des Tensorprodukts eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$$\mathrm{T}(\varphi) : \mathrm{T}^p(V) \to \mathrm{T}^p(W), \quad v_1 \otimes \ldots \otimes v_p \mapsto \varphi(v_1) \otimes \ldots \otimes \varphi(v_p),$$

die im Fall $p = 0$ als id_K definiert ist und für $p = 1$ mit φ übereinstimmt.

Bemerkung. (*Funktorialität der Tensorpotenzen*)

p sei eine natürliche Zahl.

(1) $\mathrm{T}^p(\mathrm{id}_V) = \mathrm{id}_{\mathrm{T}^p(V)}$

(2) Für lineare Abbildungen $\varphi : V \to W$ und $\psi : W \to P$ ist

$$\mathrm{T}^p(\psi \cdot \varphi) = \mathrm{T}^p(\psi) \cdot \mathrm{T}^p(\varphi).$$

Zum K-Vektorraum

$$\mathrm{T}(V) := \oplus_{p \in \mathbf{N}} \mathrm{T}^p(V) = K \oplus V \oplus (V \otimes_K V) \oplus (V \otimes_K V \otimes_K V) \oplus \ldots$$

gehören injektive Homomorphismen $\mathrm{T}^p(V) \to \mathrm{T}(V)$, die $\mathrm{T}^p(V)$ auf die entsprechenden direkten Summanden abbilden; sie werden künftig als Inklusionen angesehen.

Lemma. 4/5/3

(1) *Es existieren eindeutig bestimmte bilineare Abbildungen*

$$\otimes_{p,q} : \mathrm{T}^p(V) \times \mathrm{T}^q(V) \to \mathrm{T}^{p+q}(V)\,,$$
$$(\boldsymbol{x}_1 \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{x}_p, \boldsymbol{y}_1 \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{y}_q) \mapsto \boldsymbol{x}_1 \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{x}_p \otimes \boldsymbol{y}_1 \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{y}_q,$$

die für $p = 0$ oder $q = 0$ durch Multiplikation mit Elementen des Grundkörpers gegeben sind.

(2) *Die Abbildungen $\otimes_{p,q}$ besitzen eine eindeutig bestimmte Fortsetzung zu einer bilinearen Abbildung*

$$\otimes : \mathrm{T}(V) \times \mathrm{T}(V) \to \mathrm{T}(V).$$

Mit der Operation $\otimes$ (Multiplikation) wird $\mathrm{T}(V)$ zur K-Algebra.

Die Abbildungen sind wieder nur für zerfallende Tensoren angegeben, von denen wir wissen, dass sie die Tensorprodukte erzeugen.

Beweis. Die jeweiligen Tensorabbildungen induzieren auf natürliche Weise Isomorphismen $\mathrm{T}^p(V) \otimes_K \mathrm{T}^q(V) \to \mathrm{T}^{p+q}(V)$. ❑

Die durch das Lemma beschriebene K-Algebra $\mathrm{T}(V)$ heißt *Tensoralgebra* des K-Vektorraumes V.

Satz. (*Universaleigenschaft der Tensoralgebra*) 4/5/4

Ist R eine (nicht notwendig kommutative) K-Algebra und $\varphi : V \to R$ eine lineare Abbildung von V in die (als K-Vektorraum betrachtete) Algebra R, so existiert genau ein Homomorphismus $f : \mathrm{T}(V) \to R$ von K-Algebren, der mit φ verträglich ist, d.h. für den das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\subseteq"'] & & R \\ & \mathrm{T}(V) \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Beweis. Die Eindeutigkeit von f folgt so:
Für zerfallende Tensoren $\boldsymbol{v}_1 \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{v}_p \in \mathrm{T}^p(V)$ ist stets $f(\boldsymbol{v}_1 \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{v}_p) = f(\boldsymbol{v}_1) \cdot \ldots \cdot f(\boldsymbol{v}_p) = \varphi(\boldsymbol{v}_1) \cdot \ldots \cdot \varphi(\boldsymbol{v}_p)$, und jedes Element von $\mathrm{T}(V)$ ist Summe von Tensoren des Typs $\boldsymbol{v}_1 \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{v}_p$.
Umgekehrt lässt sich die Existenz eines K-Algebrahomomorphismus mit der geforderten Eigenschaft nachweisen: Die Abbildungen

$$V^p \to R, \quad (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p) \mapsto \varphi(\boldsymbol{v}_1) \cdot \ldots \cdot \varphi(\boldsymbol{v}_p)$$

sind K-multilinear, daher existieren eindeutig bestimmte K-lineare Abbildungen $\mathrm{T}^p(V) \to R$, die $\boldsymbol{v}_1 \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{v}_p$ auf $\varphi(\boldsymbol{v}_1) \cdot \ldots \cdot \varphi(\boldsymbol{v}_p)$ abbilden. Die durch lineare Fortsetzung gegebene Erweiterung auf die direkte Summe $\mathrm{T}(V) = \bigoplus_{p \in \mathbf{N}} \mathrm{T}^p(V)$ ist ein Ringhomomorphismus. ❑

Wie unschwer überprüft werden kann, ist die Tensoralgebra durch ihre Universaleigenschaft bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Wird für V ein Vektorraum mit der Basis $(\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n)$ gewählt, so erhalten wir durch $\mathrm{T}(V)$

Noch allgemeiner können wir jede K-Algebra als Faktoralgebra einer Tensoralgebra erhalten. Dazu genügt es, auf den (naheliegend definierten) surjektiven Homomorphismus $\mathrm{T}(A) \to A$ den Homomorphiesatz anzuwenden.

die „nichtkommutative Version einer Polynomalgebra“ in den „Unbestimmten“ $\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_n$; $\mathrm{T}(V)$ ist dann als K-Vektorraum von allen Produkten $\boldsymbol{X}_{i_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{X}_{i_t}$ mit $t \in \mathbb{N}$ und $i_1, \dots, i_t \in \{1, \dots, n\}$ erzeugt (wobei als Produkt über die leere Indexmenge die Zahl $1 \in K$ zu wählen ist).

Korollar. (*Funktorialität der Tensoralgebra*) 4/5/5

Ist $\varphi : V \to W$ ein Homomorphismus von K-Vektorräumen, so existiert genau ein mit $\mathrm{T}(\varphi)$ bezeichneter K-Algebrahomomorphismus $\mathrm{T}(V) \to \mathrm{T}(W)$, für den das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}(V) \arrow[r, dotted, "\mathrm{T}(\varphi)"] & \mathrm{T}(W) \\ V \arrow[u, "\subseteq"] \arrow[r, "\varphi"] & W \arrow[u, "\subseteq"'] \end{tikzcd}$$

Weiter sind die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(1) $\mathrm{T}(\mathrm{id}_V) = \mathrm{id}_{\mathrm{T}(V)}$.

(2) *Für lineare Abbildungen $\varphi : V \to W$ und $\psi : W \to P$ ist*
$$\mathrm{T}(\psi \cdot \varphi) = \mathrm{T}(\psi) \cdot \mathrm{T}(\varphi).$$

Beweis. Der erste Teil der Behauptung folgt aus der Universalität der Tensoralgebra. (1) und (2) ergeben sich aus der Funktorialität der Tensorpotenzen T^p. ❑

Symmetrische und äußere Potenzen 4/5/6

Die Unterräume der symmetrischen bzw. der alternierenden multilinearen Abbildungen aus $\mathrm{L}^p(V, W)$ haben wir im allgemeinen Fall noch nicht beschrieben.

Hier wird die Konstruktion der symmetrischen und der äußeren Algebra vorbereitet.
Äußere Potenzen führen überdies zu einem tieferen Verständnis des Begriffs der Determinante.

Satz – Definition. *Für $p \geq 2$ sei $\boldsymbol{s}_p(V)$ der Untervektorraum in $\mathrm{T}^p(V)$, der von allen Tensoren*
$$\boldsymbol{v}_1 \otimes \dots \otimes \boldsymbol{v}_p - \boldsymbol{v}_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{v}_{\sigma(p)}, \quad \boldsymbol{v}_1, \dots \boldsymbol{v}_p \in V, \quad \sigma \in \mathrm{S}_p$$
erzeugt wird und $\boldsymbol{a}_p(V)$ der Unterraum, der von allen Tensoren
$$\boldsymbol{v}_1 \otimes \dots \otimes \boldsymbol{v}_p, \quad \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_j \text{ für ein Indexpaar } (i, j) \text{ mit } i \neq j$$
erzeugt wird. Weiter wird für $p = 0, 1$ $\boldsymbol{s}_p = \boldsymbol{a}_p = \boldsymbol{0}$ gesetzt. Dann heißen die Faktorräume
$$\mathrm{S}^p(V) := \mathrm{T}^p(V)/\boldsymbol{s}_p(V) \quad \text{und} \quad \Lambda^p(V) := \mathrm{T}^p(V)/\boldsymbol{a}_p(V)$$
die p-te *symmetrische* bzw. p-te *äußere Potenz* von V.

Durch Hintereinanderausführung der kanonischen Homomorphismen mit der Tensorabbildung erhalten wir die symmetrische bzw. alternierende p-lineare Abbildung
$$s_V^{(p)} : V^p \to \mathrm{S}^p(V), \qquad \wedge_V^{(p)} : V^p \to \Lambda^p(V).$$
Ist $\varphi : V \to W$ ein Homomorphismus, so wird durch $\mathrm{T}^p(\varphi)$ das angegebene Erzeugendensystem von $\boldsymbol{s}_p(V)$ in eine Teilmenge von $\boldsymbol{s}_p(W)$ und entsprechend das angegebene Erzeugendensystem von $\boldsymbol{a}_p(V)$ in eine Teilmenge von $\boldsymbol{a}_p(W)$ überführt; es existieren daher eindeutig bestimmte lineare Abbildungen $\mathrm{S}^p(\varphi) : \mathrm{S}^p(V) \to \mathrm{S}^p(W)$ bzw. $\Lambda^p(\varphi) : \Lambda^p(V) \to \Lambda^p(W)$, für die folgende Diagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{S}^p(V) \arrow[r, "\mathrm{S}^p(\varphi)"] & \mathrm{S}^p(W) & \Lambda^p(V) \arrow[r, "\Lambda^p(\varphi)"] & \Lambda^p(W) \\
\mathrm{T}^p(V) \arrow[r, "\mathrm{T}^p(\varphi)"] \arrow[u] & \mathrm{T}^p(W) \arrow[u] & \mathrm{T}^p(V) \arrow[r, "\mathrm{T}^p(\varphi)"] \arrow[u] & \mathrm{T}^p(W) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

(Die vertikalen Pfeile bezeichnen jeweils die kanonischen Homomorphismen auf die Faktorräume).

S^p *und* Λ^p *sind funktoriell, d.h. es gilt:*

(1) $\mathrm{S}^p(\mathrm{id}_V) = \mathrm{id}_{\mathrm{S}^p(V)}, \quad \Lambda^p(\mathrm{id}_V) = \mathrm{id}_{\Lambda^p(V)}$.

(2) *Für lineare Abbildungen* $\varphi : V \to W$ *und* $\psi : W \to P$ *ist*
$$\mathrm{S}^p(\psi \cdot \varphi) = \mathrm{S}^p(\psi) \cdot \mathrm{S}^p(\varphi) \quad \text{und} \quad \Lambda^p(\psi \cdot \varphi) = \Lambda^p(\psi) \cdot \Lambda^p(\varphi).$$

S^p *und* Λ^p *besitzen die folgenden Universaleigenschaften:*

(3) *Ist* $f \in \mathrm{L}^p(V;W)$ *eine symmetrische* p*-lineare Abbildung, so existiert genau eine lineare Abbildung* $\varphi : \mathrm{S}^p(V) \to W$, *für die* $f = \varphi \cdot s_V^{(p)}$ *ist.*

$$\begin{tikzcd}
V^p \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "s_V^{(p)}"'] & & W \\
& \mathrm{S}^p(V) \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

(4) *Ist* $f \in \mathrm{L}^p(V;W)$ *eine alternierende* p*-lineare Abbildung, so existiert genau eine lineare Abbildung* $\varphi : \Lambda^p(V) \to W$, *für die* $f = \varphi \cdot \wedge_V$ *ist.*

$$\begin{tikzcd}
V^p \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\wedge_V^{(p)}"'] & & W \\
& \Lambda^p(V) \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

Beweis. Die angegebenen Eigenschaften sind bereits durch ihre Formulierungen weitgehend offensichtlich. Wir beweisen beispielsweise (4). Die Universalität des Tensorprodukts zeigt, dass f sich mittels einer eindeutig bestimmten linearen Abbildung $\sigma : \mathrm{T}^p(V) \to W$ über $\mathrm{T}^p(V)$ faktorisieren lässt. Da f alternierend ist, liegen alle Tensoren $\boldsymbol{v}_1 \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{v}_p$ mit $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_j$ für ein Indexpaar (i,j) und $i \neq j$ in $\ker(\sigma)$. Das bedeutet, dass diese im Kern $\boldsymbol{a}_p$ des kanonischen Homomorphismus $\mathrm{T}^p(V) \to \Lambda^p(V)$ liegen, also σ über einen Homomorphismus $\varphi : \Lambda^p(V) \to W$ faktorisiert.

$$\begin{tikzcd}
V^p \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & W \\
& \mathrm{T}^p(V) \arrow[ur, "\sigma"] \arrow[r] & \Lambda^p(V) \arrow[u, dotted, "\varphi"']
\end{tikzcd}$$

Die Eindeutigkeit von φ folgt aus der Surjektivität des kanonischen Homomorphismus $\mathrm{T}^p(V) \to \Lambda^p(V)$. ❑

Für ein p-Tupel $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p) \in V^p$ von Vektoren wird $\wedge_V^{(p)}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p)$ auch mit $\boldsymbol{v}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{v}_p$ bezeichnet.

Bemerkung. 4/5/7

(1) $\boldsymbol{v}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{v}_p = 0$, falls $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_j$ für zwei verschiedene Indizes i, j.

(2) Alternierende multilineare Abbildungen sind schiefsymmetrisch, daher gilt für jede Permutation $\sigma \in \mathrm{S}_p$

$$\boldsymbol{v}_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{v}_{\sigma(p)} = \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \boldsymbol{v}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{v}_p .$$

Anwendung. (*Determinante eines Endomorphismus*) 4/5/8

Für einen endlichdimensionalen Vektorraum V erhalten wir durch das äußere Produkt erneut einen vertrauten Begriff, diesmal ohne den Umweg über eine Basis.

Ist $n = \dim(V) > 0$, so folgt aus dem vorigen Satz (4), dass $\Lambda^n(V)^* = \operatorname{Hom}(\Lambda^n(V), K)$ zum Vektorraum der Determinantenfunktionen auf V kanonisch isomorph ist. Daraus folgt $\dim\big(\Lambda^n(V)\big) = 1$. Wie schon in 4/2/4 (2) gezeigt, existiert zu jeder Basis $\mathcal{B} = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) \in V^n$ von V genau eine Determinantenfunktion $D_{\mathcal{B}} : V^n \to K$, die $\mathcal{B}$ auf 1 abbildet. Bezeichnet $d_{\mathcal{B}} : \Lambda^n(V) \to K$ die eindeutig bestimmte lineare Abbildung mit $d_{\mathcal{B}} \cdot \wedge_V^{(n)} = D_{\mathcal{B}}$, so ist $1 = D_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = d_{\mathcal{B}}(\wedge_V^{(n)}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)) = d_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{v}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{v}_n) \neq 0$ und deshalb $\boldsymbol{v}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{v}_n$ (wie jeder von $\mathbf{0}$ verschiedene Vektor) eine Basis des eindimensionalen Raumes $\Lambda^n(V)$.
Nun betrachten wir für einen Endomorphismus $\varphi : V \to V$ den zugehörigen Endomorphismus $\Lambda^n(\varphi) : \Lambda^n(V) \to \Lambda^n(V)$. Dieser ist wegen $\dim(\Lambda^n(V)) = 1$ durch Multiplikation mit einer Konstanten $d \in K$ gegeben. Wir zeigen, dass $d = \det(\varphi)$ ist. Dazu bezeichnen wir mit $A = (a_{ij}) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ die Matrix von φ bezüglich $\mathcal{B}$. Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned} & d_{\mathcal{B}}\big(\Lambda^n(\varphi)(\boldsymbol{v}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{v}_n)\big) = \\ & \quad = d_{\mathcal{B}}\big((a_{11}\boldsymbol{v}_1 + \ldots + a_{n1}\boldsymbol{v}_n) \wedge \ldots \wedge (a_{n1}\boldsymbol{v}_1 + \ldots + a_{nn}\boldsymbol{v}_n)\big) \\ & \quad = D_{\mathcal{B}}(a_{11}\boldsymbol{v}_1 + \ldots + a_{n1}\boldsymbol{v}_n, \ \ldots, \ a_{n1}\boldsymbol{v}_1 + \ldots + a_{nn}\boldsymbol{v}_n) = \det(A). \end{aligned}$$

In dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n(V) \arrow[r, "\Lambda^n(\varphi)"] \arrow[d, "d_{\mathcal{B}}"', "\cong"] & \Lambda^n(V) \arrow[d, "d_{\mathcal{B}}"', "\cong"] \\ K \arrow[r, "d\cdot(\ )"] & K \end{tikzcd}$$

bildet die lineare Abbildung in der unteren Zeile $1 \in K$ auf $\det(A)$ ab, denn $d \cdot d_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{v}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{v}_n) = d \cdot 1 = d_{\mathcal{B}}\big(\Lambda^n(\varphi)(\boldsymbol{v}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{v}_n)\big) = \det(A)$. ❑

Diese Überlegung rechtfertigt es, auch die lineare Abbildung $\Lambda^n(\varphi)$ als Determinante des Endomorphismus φ zu bezeichnen. Die Funktorialität von Λ^n beinhaltet als Spezialfall den Multiplikationssatz für Determinanten (vgl. 4/5/6 (2)).

Symmetrische Algebra und äußere Algebra 4/5/9

Wir finden hier eine neue Interpretation der Polynomalgebra, studieren erneut $\mathrm{S}^p(V)$, $\Lambda^p(V)$ und geben eine neue Matrizenoperation an.

Ist V ein Vektorraum, dann sind die durch 4/5/6 gegebenen Unterräume $\boldsymbol{s}(V) = \bigoplus_{p \in \mathbf{N}} \boldsymbol{s}_p(V) \subseteq \mathrm{T}(V)$ und $\boldsymbol{a}(V) = \bigoplus_{p \in \mathbf{N}} \boldsymbol{a}_p(V) \subseteq \mathrm{T}(V)$ Ideale in der K-Algebra $\mathrm{T}(V)$. Mit

$$\mathrm{S}(V) := \mathrm{T}(V)/\boldsymbol{s}(V) \quad \text{und} \quad \Lambda(V) := \mathrm{T}(V)/\boldsymbol{a}(V)$$

werden die Faktoralgebren nach diesen Idealen bezeichnet; $\mathrm{S}(V)$ heißt *symmetrische Algebra* von V, $\Lambda(V)$ *äußere Algebra*, auch *grassmannsche Algebra* des Vektorraumes V. Weiter identifizieren wir mittels der durch $\mathrm{T}^p(V) \to \mathrm{S}^p(V)$ bzw. $\mathrm{T}^p(V) \to \Lambda^p(V)$ induzierten K-Isomorphismen

$$\mathrm{S}(V) = \mathrm{T}(V)/\boldsymbol{s}(V) \cong \bigoplus_{p \in \mathbf{N}} \mathrm{S}^p(V) \quad \text{bzw.}$$

$$\Lambda(V) = \mathrm{T}(V)/\boldsymbol{a}(V) \cong \bigoplus_{p \in \mathbf{N}} \Lambda^p(V),$$

sehen diese also von nun an als gleich an.

Satz. 4/5/10

(1) *Ist* $\varphi : V \to W$ *eine lineare Abbildung, so existieren eindeutig bestimmte Homomorphismen*

$$\mathrm{S}(\varphi) : \mathrm{S}(V) \to \mathrm{S}(W) \quad \textit{und} \quad \Lambda(\varphi) : \Lambda(V) \to \Lambda(W)$$

von K*-Algebren, die auf den durch* S^p *und* Λ^p *gegebenen direkten Summanden mit* $\mathrm{S}^p(\varphi)$ *bzw.* $\Lambda^p(\varphi)$ *übereinstimmen.*

(2) S *und* Λ *sind funktoriell, d.h. für jeden Vektorraum* V *gilt*

$$\mathrm{S}(\mathrm{id}_V) = \mathrm{id}_{\mathrm{S}(V)}, \quad \Lambda(\mathrm{id}_V) = \mathrm{id}_{\Lambda(V)},$$

und für lineare Abbildungen $\varphi : V \to W$ *und* $\psi : W \to P$ *ist*

$$\mathrm{S}(\psi \cdot \varphi) = \mathrm{S}(\psi) \cdot \mathrm{S}(\varphi) \ \textit{und}$$
$$\Lambda(\psi \cdot \varphi) = \Lambda(\psi) \cdot \Lambda(\varphi).$$

Beweis. Ist $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung, so faktorisiert z.B. $\mathrm{T}(\varphi)$ über einen eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus $\mathrm{S}(\varphi) = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} \mathrm{S}^p(\varphi)$, für den das folgende, durch die kanonischen Homomorphismen auf die Faktoralgebren gebildete Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T}^p(V) \arrow[r, "\mathrm{T}^p(\varphi)"] \arrow[d] & \mathrm{T}^p(W) \arrow[d] \\
\mathrm{S}^p(V) \arrow[r, "\mathrm{S}^p(\varphi)"] & \mathrm{S}^p(W)
\end{tikzcd}$$

Die Funktorialität folgt daher aus der Funktorialität der Tensoralgebra. Entsprechend ist für Λ vorzugehen. ❑

Für die Multiplikation in $\Lambda(V)$ wird das Symbol $\wedge$ verwendet, das auf diese Weise bilineare Abbildungen induziert:

$$\wedge_{p,q} : \Lambda^p(V) \times \Lambda^q(V) \to \Lambda^{p+q}(V)\,,$$
$$(\boldsymbol{v}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{v}_p, \boldsymbol{w}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{w}_q) \mapsto \boldsymbol{v}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{v}_p \wedge \boldsymbol{w}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{w}_q$$

Für die Multiplikation in $\mathrm{S}(V)$ wird aus einem anschließend ersichtlichen Grund das gewöhnliche Multiplikationszeichen benutzt.

Die symmetrische Algebra ist kommutativ, und es gilt der folgende

Satz. V *sei ein* n*-dimensionaler Vektorraum,* $(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ *eine Basis von* V*. Dann ist der Einsetzungshomomorphismus* 4/5/11

$$K[X_1, \ldots, X_n] \to \mathrm{S}(V), \quad X_i \mapsto \boldsymbol{x}_i \in \mathrm{S}^1(V) \quad \textit{für } i = 1, \ldots, n$$

ein Isomorphismus von K*-Algebren.*

Beweis. Der Einsetzungshomomorphismus ist surjektiv, denn sein Bild erzeugt $\mathrm{S}(V)$ als K-Vektorraum. Bezeichnet M_p den K-Untervektorraum des Polynomringes $K[X_1, \ldots, X_n]$, der von den Monomen mit vollständigem Grad p erzeugt wird, so existiert eine surjektive lineare Abbildung $\varphi_p : M_p \to \mathrm{S}^p(V)$, die $X_{i_1} \cdot \ldots \cdot X_{i_p}$ auf $\boldsymbol{x}_{i_1} \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{x}_{i_p}$ abbildet. Umgekehrt definiert

Die Existenz von Einsetzungshomomorphismen $K[X_1, \ldots, X_n] \to A$ ist insbesondere für kommutative Algebren A bewiesen worden.

$$V^p \longrightarrow M_p$$

$$(a_{11}\boldsymbol{x}_1 + \ldots + a_{n1}\boldsymbol{x}_n,\ \ldots\ , a_{1p}\boldsymbol{x}_1 + \ldots + a_{np}\boldsymbol{x}_n) \\ \mapsto (a_{11}X_1 + \ldots + a_{n1}X_n) \cdot \ldots \cdot (a_{1p}X_1 + \ldots + a_{np}X_n)$$

eine symmetrische p-lineare Abbildung. Diese faktorisiert eindeutig über die universelle symmetrische p-lineare Abbildung:

$$\begin{tikzcd} V^p \arrow[rr] \arrow[dr] & & M_p \\ & \mathrm{S}^p(V) \arrow[ur, "\psi_p"'] & \end{tikzcd}$$

Aus $\psi_p \cdot \varphi_p = \mathrm{id}_{M_p}$ folgt die Injektivität von φ_p, d.h. die surjektiven Abbildungen φ_p sind Isomorphismen von K-Vektorräumen. Der Einsetzungshomomorphismus $X_i \mapsto \boldsymbol{x}_i$ ist die direkte Summe

$$\bigoplus_{p\in\mathbf{N}} \varphi_p : K[X_1, \ldots , X_n] = \bigoplus_{p\in\mathbf{N}} M_p \to \bigoplus_{p\in\mathbf{N}} \mathrm{S}^p(V) = \mathrm{S}(V)$$

und daher ebenfalls bijektiv. ❑

Korollar. *Für einen n-dimensionalen Vektorraum V ist* 4/5/12

$$\dim\left(\mathrm{S}^p(V)\right) = \binom{p+n-1}{p}$$

die Anzahl der Monome vom vollständigen Grad p in n Unbestimmten.

Beweis. Der Einsetzungshomomorphismus aus dem Satz bildet den Untervektorraum von $K[X_1, \ldots , X_n]$, der durch die Monome mit vollständigem Grad p erzeugt wird, isomorph auf $\mathrm{S}^p(V)$ ab. ❑

Es bleibt die Anzahl der Monome vom vollständigen Grad p zu bestimmen.

Im Gegensatz zur symmetrischen Algebra ist die äußere Algebra im Allgemeinen nicht kommutativ.

Satz. *$p > 1$ sei eine natürliche Zahl. Für eine beliebige Basis $\mathcal{B} = (\boldsymbol{x}_1, \ldots , \boldsymbol{x}_n)$ des K-Vektorraumes V ist $\Lambda^p\mathcal{B} := (\boldsymbol{x}_{i_1}\wedge\ldots\wedge\boldsymbol{x}_{i_p})_{1\le i_1<\ldots<i_r\le n}$ eine Basis von $\Lambda^p(V)$, insbesondere folgt* 4/5/13

$$\dim(\Lambda^p(V)) = \binom{n}{p}.$$

Beweis. Für $p > n$ ist $\Lambda^p(V) = \mathbf{0}$. Für $p = n$ besteht die angegebene Familie in $\Lambda^n(V)$ aus genau einem Vektor $\boldsymbol{x}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{x}_n$; er ist – wie wir in 4/5/8 gesehen haben – von $\mathbf{0}$ verschieden und daher eine Basis dieses eindimensionalen Raumes. Von nun an sei $2 \le p < n$. Da die Tensoralgebra von den zerfallenden Tensoren erzeugt wird, ist die Menge aller

$$(a_{11}\boldsymbol{x}_1 + \ldots + a_{n1}\boldsymbol{x}_n) \wedge \ldots \wedge (a_{1p}\boldsymbol{x}_1 + \ldots + a_{np}\boldsymbol{x}_n)$$

mit $a_{ij} \in K$ ein Erzeugendensystem des K-Vektorraumes $\Lambda^p(V)$. Die angegebenen Elemente von $\Lambda^p(V)$ sind Linearkombinationen der $\boldsymbol{x}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{x}_{i_p}$ mit $1 \le i_1 < \ldots < i_p \le n$; dies wird offensichtlich, wenn wir $\Lambda^p(V)$ als Untervektorraum von $\Lambda(V)$ betrachten und darin die Beziehungen $\boldsymbol{x}_i \wedge \boldsymbol{x}_i = \mathbf{0}$ und $\boldsymbol{x}_i \wedge \boldsymbol{x}_j = -\boldsymbol{x}_j \wedge \boldsymbol{x}_i$ verwenden.
Nun bleibt die lineare Unabhängigkeit zu prüfen. Angenommen,

$$(*) \qquad \sum_{(i_1,\ldots,i_p),1\le i_1<\ldots<i_r\le n} a_{i_1,\ldots,i_p}\boldsymbol{x}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{x}_{i_p} = \mathbf{0}$$

mit Zahlen $a_{i_1,\ldots,i_p} \in K$; wir zeigen, dass diese Koeffizienten dann alle verschwinden. $(i_1, \ldots , i_p)$ sei einer der Multiindizes und $\{1, \ldots , n\} \setminus \{i_1, \ldots , i_p\}$ $=: \{j_1, \ldots , j_{n-p}\}$. Multiplizieren wir $(*)$ im Ring $\Lambda(V)$ mit $\boldsymbol{x}_{j_1}\wedge\ldots\wedge\boldsymbol{x}_{j_{n-p}}$, so ergibt sich $\mathbf{0} = a_{i_1,\ldots,i_p}\boldsymbol{x}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{x}_n \in \Lambda^n(V)$ und daher $a_{i_1,\ldots,i_p} = 0$ aus dem schon bewiesenen Fall $p = n$. ❏

Nachdem Basen der Vektorräume $\Lambda^p(V)$ konstruiert sind, lässt sich das äußere Produkt als Matrizenoperation interpretieren. Wir beginnen mit der

Definition. (*äußere Potenz einer Matrix*) 4/5/14

$A \in \mathrm{M}(m,n;K)$ sei eine Matrix. Für $0 \le p \le \min\{m,n\}$ wird die *äußere Potenz* $\Lambda^p(A)$ durch $\Lambda^0(A) := (1) \in \mathrm{M}(1;K)$ definiert und für $p > 0$ durch

$$\Lambda^p(A) := (a_{IJ})_{I\in M_p, J\in N_p} \in \mathrm{M}(M_p, N_p; K),$$

wobei folgende Bezeichnungen verwendet werden:

$$M_p := \{(i_1,\ldots,i_p) \mid 1 \le i_1 < \ldots < i_p \le m\}\,,$$
$$N_p := \{(j_1,\ldots,j_p) \mid 1 \le j_1 < \ldots < j_p \le n\}\,,$$
$$a_{IJ} := \det(A_{IJ})\,,$$

und $A_{IJ} \in \mathrm{M}(p;K)$ bezeichnet die $p\times p$-Teilmatrix von A, die dem Multiindexpaar (I,J) entspricht, $A_{IJ} = (a_{ij})_{i\in I, j\in J}$.

Es gibt keine zwingende Anordnung der Multiindizes; wir fixieren die lexikographische Ordnung und verwenden entsprechend das Symbol $\Lambda^p\mathcal{B}$ künftig für diejenige Basis des Vektorraumes Λ^pV, die so aus der Basis $\mathcal{B}$ von V entsteht. Damit kann $\Lambda^p(A)$ wieder in vertrauter Weise als rechteckiges Schema von Zahlen aufgeschrieben werden, und es gilt $\Lambda^1(A) = A$.

Beispiel.

$$\Lambda^2\begin{pmatrix}1&3&4&0\\2&0&1&1\\1&1&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6&-7&1&3&3&4\\-2&-4&1&-4&3&4\\2&-1&1&-1&-1&1\end{pmatrix}$$

Satz. *$\varphi : V \to W$ sei eine lineare Abbildung endlichdimensionaler Vektorräume und $\mathcal{B}_V$ eine Basis von V, $\mathcal{B}_W$ eine Basis von W.* 4/5/15
Ist $p \le \min\{\dim(V),\dim(W)\}$, dann hat die lineare Abbildung $\Lambda^p(\varphi)$ bezüglich $\Lambda^p\mathcal{B}_V$ und $\Lambda^p\mathcal{B}_W$ die Matrix

$$\mathrm{M}_{\Lambda^p\mathcal{B}_V,\Lambda^p\mathcal{B}_W}\big(\Lambda^p(\varphi)\big) = \Lambda^p\big(\mathrm{M}_{\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_W}(\varphi)\big).$$

Beweis. Wir setzen $\mathcal{B}_V = (\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n)$, $\mathcal{B}_W = (\boldsymbol{w}_1,\ldots,\boldsymbol{w}_m)$ und $A = (a_{ij}) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_V}(\varphi)$. Dann ist $\varphi(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij}\boldsymbol{w}_i$, folglich

$$\begin{aligned}
&\varphi(\boldsymbol{v}_{j_1}\wedge\ldots\wedge\boldsymbol{v}_{j_p}) = \\
&= \Big(\sum_{i_1=1}^m a_{i_1j_1}\boldsymbol{w}i_1\Big)\wedge\ldots\wedge\Big(\sum_{i_k=1}^m a_{i_kj_k}\boldsymbol{w}i_k\Big)\wedge\ldots\wedge\Big(\sum_{i_p=1}^m a_{i_pj_p}\boldsymbol{w}i_p\Big)\\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_p} a_{i_1j_1}\cdot\ldots\cdot a_{i_pj_p}\boldsymbol{w}_{i_1}\wedge\ldots\wedge\boldsymbol{w}_{i_p}\\
&= \sum_{(i_1,\ldots,i_p), i_1<\ldots<i_p}\Big(\sum_{\sigma\in\mathrm{S}_p}\mathrm{sign}(\sigma)a_{\sigma(i_1),j_1}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma(i_p),j_p}\boldsymbol{w}_{i_1}\wedge\ldots\wedge\boldsymbol{w}_{i_p}\Big)\\
&= \sum_{(i_1,\ldots,i_p), i_1<\ldots<i_p}\det\big((a_{ij})_{i=i_1,\ldots,i_p,j=j_1,\ldots,j_p}\big)\boldsymbol{w}_{i_1}\wedge\ldots\wedge\boldsymbol{w}_{i_p}.
\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung aus der Definition der äußeren Potenz einer Matrix. ❏

Das Kriterium 4/2/19 zur Rangbestimmung mit Unterdeterminanten erhält 4/5/16 nach dem Satz folgende Gestalt, die von der Wahl der Basen nicht abhängt.

Korollar. *Ist $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung endlichdimensionaler Vektorräume, so gilt für $p \le \min\{\dim(V), \dim(W)\}$*

$$\operatorname{rang}(\varphi) < p \iff \Lambda^p(\varphi) = 0.$$

Korollar. *Sind $A \in \mathrm{M}(m,n;K)$ und $B \in \mathrm{M}(n,k;K)$ Matrizen, so ist* 4/5/17

$$\Lambda^p(A \cdot B) = \Lambda^p(A) \cdot \Lambda^p(B)$$

für alle $p \le \min\{m,n,k\}$.

... eine sonst wohl nicht leicht zu beweisende Formel.

Beweis. A und B sind Matrizen geeigneter Homomorphismen von Standardräumen. Die Behauptung folgt daher aus der Funktorialität von Λ^p und dem zuvor bewiesenen Satz 4/5/15. ❑

Wir bemerken, dass sich die Formel für die äußere Potenz eines Produkts von Matrizen ebenso wie die Determinantenformeln in 4/2/28 auf beliebige kommutative Ringe übertragen lassen.
Als Spezialfall ergibt sich, dass für eine quadratische Matrix $C \in \mathrm{M}(n;K)$ die äußere Potenz $\Lambda^n(C)$ mit der Determinante von C übereinstimmt.

Korollar. (*allgemeiner Multiplikationssatz für Determinanten*) 4/5/18
Es seien $A \in \mathrm{M}(n,m;K)$ und $B \in \mathrm{M}(m,n;K)$ Matrizen.

(1) *Für $m < n$ ist $|A \cdot B| = 0$.*

(2) *Für $m \ge n$ ist*

Für praktische Rechnungen dürfte die Formel von eher geringem Nutzen sein.

$$|A \cdot B| = \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_n \le m} \begin{vmatrix} a_{1j_1} & \ldots & a_{1j_n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nj_1} & \ldots & a_{nj_n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{j_1 1} & \ldots & b_{j_1 n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{j_n 1} & \ldots & b_{j_n n} \end{vmatrix}.$$

Beweis. (1) folgt wegen $\operatorname{rang}(A \cdot B) \le \operatorname{rang}(A) \le m < n$. (2) ergibt sich als Spezialfall $p = n$ aus dem vorhergehenden Korollar 4/5/17 und der Formel für die Matrizenmultiplikation. ❑

Klassische Tensorrechnung 4/5/19

Für den Rest des Kapitels wird ein Vektorraum V der endlichen Dimension n fixiert. Aufgrund der kanonischen Isomorphie $V \to V^{**}$ wird nicht mehr zwischen V und seinem bidualen Raum unterschieden, d.h. von nun an wird $V = V^{**}$ gesetzt. Aus 4/4/6 – 4/4/8 und mit den Bezeichnungen von 4/5/1 erhalten wir beispielsweise

$$\begin{aligned} V \otimes_K V = V^{**} \otimes_K V^{**} &= \operatorname{Hom}(V^*, K) \otimes_K \operatorname{Hom}(V^*, K) \\ &\cong \operatorname{Hom}(V^* \otimes_K V^*, K) \cong \mathrm{L}(V^*, V^*; K) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} V^* \otimes_K V^* &= \operatorname{Hom}(V, K) \otimes_K \operatorname{Hom}(V, K) \\ &\cong \operatorname{Hom}(V \otimes_K V, K) \cong \mathrm{L}(V, V; K); \end{aligned}$$

beide Formeln sind Spezialfälle der folgenden

Bemerkung. Für endlichdimensionale Vektorräume $V_1, \ldots, V_m$ über K ist die durch die Tensorabbildung induzierte natürliche Abbildung

$$V_1^* \otimes_K \ldots \otimes_K V_m^* \to \mathrm{L}(V_1, \ldots, V_m; K)$$

ein Isomorphismus.

Definition. (*gemischte Tensoren*)

4/5/20

Der Vektorraum

$$\mathrm{T}_q^p(V) := \mathrm{T}^p(V^*) \otimes_K \mathrm{T}^q(V) = \underbrace{V^* \otimes_K \ldots \otimes_K V^*}_{p} \otimes_K \underbrace{V \otimes_K \ldots \otimes_K V}_{q},$$

der auf natürliche Weise zum Raum der $(p+q)$-linearen Abbildungen $V^p \times (V^*)^q \to K$ kanonisch isomorph ist, heißt Raum der *gemischten Tensoren vom Doppelgrad* (p,q) auf V. Seine Elemente werden auch p-fach *kovariante* und q-fach *kontravariante Tensoren* genannt.
Insbesondere heißen die Elemente von $\mathrm{T}_1^0(V) = V$ in diesem Zusammenhang auch *einfach kontravariante Tensoren,* die Vektoren aus $\mathrm{T}_0^1(V) = V^*$ *einfach kovariante Tensoren.*

$(p+q)$ heißt *vollständiger Grad* der Elemente von $\mathrm{T}_q^p(V)$, die gelegentlich auch *Tensoren* $(p+q)$*-ter Stufe* genannt werden.

Die Bezeichnung $\mathrm{T}_q^p(V)$ wird in der Literatur nicht einheitlich verwendet. Eine „Übersetzung" der Notationen sollte aber nicht schwerfallen.

Beispiele. (*Tensoren*)

(1) $$\mathrm{T}_0^2(V) = V^* \otimes_K V^* \cong \underbrace{\mathrm{L}(V,V;K) \cong \mathrm{Hom}(V,V^*)}_{b \,\mapsto\, (\, x \,\mapsto\, b(x,\ )\,)}.$$

Dies ist eine Interpretation von $\mathrm{T}_0^2(V)$ als Raum der Bilinearformen auf V. Entsprechend ist $\mathrm{T}_0^p(V)$ als Raum der p-Linearformen auf V anzusehen. Die Determinante $\det : V^n \to K$ ist in diesem Sinne ein spezieller n-fach kovarianter Tensor auf V.

(2) $$\mathrm{T}_1^1(V) = V^* \otimes_K V \cong \mathrm{L}(V,V^*;K) \cong \mathrm{End}(V)\,,$$
$$\mathrm{T}_1^1(V^*) = V \otimes_K V^* \cong \mathrm{L}(V^*,V;K) \cong \mathrm{End}(V^*)\,.$$

(3) $$\mathrm{T}_1^2(V) = \mathrm{L}(V,V,V^*;K) \cong \mathrm{L}(V,V;V),$$

d.h. ein Tensor $u \in \mathrm{T}_1^2(V)$ definiert eine Operation auf V. Bildet der Vektorraum V mit der durch u definierten bilinearen Abbildung $V \times V \to V$ eine K-Algebra, so heißt u der *Strukturtensor* dieser Algebra. Als Beispiele über dem Körper $K = \mathbb{R}$ der reellen Zahlen eignen sich die komplexen Zahlen oder die *Quaternionenalgebra*, die sich aus der in einer der Übungsaufgabe entsprechend bezeichneten Matrizengruppe gewinnen lässt.

Die Strukturtensoren sind in beiden Fällen leicht anzugeben.

Die vorige Bemerkung ergibt für beliebige p, q einen natürlichen Isomorphismus

$$\mathrm{T}_q^p(V) \to \mathrm{L}(\underbrace{V,\ldots,V}_{p},\underbrace{V^*,\ldots,V^*}_{q};K),$$

der gewöhnlich als Gleichheit verstanden wird.

Ist $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_n)$ eine Basis für V und $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{b}^1,\ldots,\boldsymbol{b}^n)$ eine Basis für V^*, so erhalten wir $\boldsymbol{u} \in \mathrm{T}_q^p(V)$ durch seine Tensorkomponenten $x_{\nu_1,\ldots,\nu_p}^{\mu_1,\ldots,\mu_q} \in K$ bezüglich $(\mathcal{B},\mathcal{B}')$ als

$$\boldsymbol{u} = \sum_{\nu_1,\ldots,\nu_p,\mu_1,\ldots,\mu_q} x_{\nu_1,\ldots,\nu_p}^{\mu_1,\ldots,\mu_q} \cdot \boldsymbol{b}^{\nu_1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{b}^{\nu_p} \otimes \boldsymbol{b}_{\mu_1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{b}_{\mu_p};$$

dabei variieren die Indizes μ_i, ν_j jeweils in $\{1,\ldots,n\}$.

Solche Koordinaten haben wir bereits verwendet. Wählen wir beispielsweise $\mathcal{B}'$ als duale Basis zu $\mathcal{B}$, dann bilden die Tensorkomponenten von $u \in \mathrm{T}_0^2(V)$

die Matrix der dem Tensor u entsprechenden Bilinearform $V \times V \to K$ bezüglich $\mathcal{B}$.
Zur Vereinfachung der Notationen wird die *einsteinsche Summenkonvention* eingeführt: Über alle in einem Produkt „oben und unten“ auftretenden Indizes ist zu summieren. Das verdeutlicht den Sinn der hier verwendeten Bezeichnungen. Die vorige Formel für $\boldsymbol{u}$ als Linearkombination der angegebenen Basisvektoren von $\mathrm{T}^p_q(V)$ lautet dann

$$\boldsymbol{u} = x^{\mu_1,\ldots,\mu_q}_{\nu_1,\ldots,\nu_p} \cdot \boldsymbol{b}^{\nu_1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{b}^{\nu_p} \otimes \boldsymbol{b}_{\mu_1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{b}_{\mu_p}.$$

Die Indizes variieren nun immer in dem offensichtlich sinnvollen Bereich, der nicht mehr ausdrücklich angegeben wird.

Das Rechnen mit den Tensorkomponenten gestaltet sich recht einfach. Die Vektorraumoperationen sind durch die Formeln

$$\big(x^{\mu_1,\ldots,\mu_q}_{\nu_1,\ldots,\nu_p}\big) + \big(x'^{\mu_1,\ldots,\mu_q}_{\nu_1,\ldots,\nu_p}\big) = \big(x^{\mu_1,\ldots,\mu_q}_{\nu_1,\ldots,\nu_p} + x'^{\mu_1,\ldots,\mu_q}_{\nu_1,\ldots,\nu_p}\big),$$
$$a \cdot \big(x^{\mu_1,\ldots,\mu_q}_{\nu_1,\ldots,\nu_p}\big) = \big(a \cdot x^{\mu_1,\ldots,\mu_q}_{\nu_1,\ldots,\nu_p}\big), \quad a \in K$$

gegeben.

Satz. (*Koordinatentransformation*) 4/5/21
Sind $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$, $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{\boldsymbol{b}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{b}}_n)$ *Basen von* V *sowie* $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{b}^1, \ldots, \boldsymbol{b}^n)$, $\tilde{\mathcal{B}}' = (\tilde{\boldsymbol{b}}^n, \ldots, \tilde{\boldsymbol{b}}^n)$ *Basen von* V^*, *und wird der Basiswechsel jeweils durch die Matrizen* $(s^i_j), (t^l_k) \in \mathrm{M}(n;K)$ *mit*

$$\boldsymbol{b}_j = s^i_j \tilde{\boldsymbol{b}}_i, \quad \boldsymbol{b}^l = t^l_k \tilde{\boldsymbol{b}}^k$$

beschrieben, so hat ein Tensor mit den Komponenten

$$\big(x^{\mu_1,\ldots,\mu_q}_{\nu_1,\ldots,\nu_p}\big)_{\mu_1,\ldots,\mu_q,\nu_1,\ldots,\nu_p} \quad \textit{bezüglich} \quad (\mathcal{B}, \mathcal{B}')$$

die Komponenten

$$\big(\tilde{x}^{i_1,\ldots,i_q}_{k_1,\ldots,k_p}\big)_{i_1,\ldots,i_q,k_1,\ldots,k_p} \quad \textit{bezüglich} \quad (\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{B}}'),$$

die durch

$$\tilde{x}^{i_1,\ldots,i_q}_{k_1,\ldots,k_p} = s^{i_1}_{\mu_1} \cdot \ldots \cdot s^{i_q}_{\mu_q} \cdot x^{\mu_1,\ldots,\mu_q}_{\nu_1,\ldots,\nu_p} \cdot t^{\nu_1}_{k_1} \cdot \ldots \cdot t^{\nu_p}_{k_p}.$$

gegeben sind.

Beweis. Die Behauptung folgt durch Einsetzen, sie ist lediglich unter Verwendung der einsteinschen Summenkonvention aufgeschrieben. ❑

Bemerkung. (*Tensorprodukt*) 4/5/22
Die auf offensichtliche Weise definierte bilineare Abbildung

$$\mathrm{T}^p_q(V) \times \mathrm{T}^{p'}_{q'}(V) \to \mathrm{T}^{p+p'}_{q+q'}(V)$$
$$(\boldsymbol{v}^1 \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{v}^p \otimes \boldsymbol{v}_1 \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{v}_q, \boldsymbol{w}^1 \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{w}^{p'} \otimes \boldsymbol{w}_1 \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{w}_{q'})$$
$$\mapsto \boldsymbol{v}^1 \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{v}^p \otimes \boldsymbol{w}^1 \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{w}^{p'} \otimes \boldsymbol{v}_1 \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{v}_q \otimes \boldsymbol{w}_1 \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{w}_{q'})$$

wird in Tensorkomponenten bezüglich eines gegebenen Basenpaares durch

$$\Big(\big(x^{\mu_1,\ldots,\mu_q}_{\nu_1,\ldots,\nu_p}\big), \big(y^{\mu'_1,\ldots,\mu'_{q'}}_{\nu'_1,\ldots,\nu'_{p'}}\big)\Big) \mapsto \big(x^{\mu_1,\ldots,\mu_q}_{\nu_1,\ldots,\nu_p} \cdot y^{\mu'_1,\ldots,\mu'_{q'}}_{\nu'_1,\ldots,\nu'_{p'}}\big)$$

… Surjektivität und Dimensionsvergleich.

beschrieben. Sie induziert einen Isomorphismus $\mathrm{T}^p_q(V) \otimes \mathrm{T}^{p'}_{q'}(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}^{p+p'}_{q+q'}(V)$.

Satz. (*Dualität von* $\mathrm{T}^p_q(V)$ *und* $\mathrm{T}^q_p(V)$) 4/5/23
Es existiert eine bilineare Abbildung

$$\mathrm{T}^p_q(V) \times \mathrm{T}^q_p(V) \to K,$$

die durch die Bedingung

$$(\boldsymbol{x}^1 \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{x}^p \otimes \boldsymbol{y}_1 \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{y}_q, \boldsymbol{z}^1 \otimes \ldots \boldsymbol{z}^q \otimes \boldsymbol{u}_1 \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{u}_p)$$

$$\mapsto < \boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{u}_1 > \cdot \ldots \cdot < \boldsymbol{x}^p, \boldsymbol{u}_p > \cdot < \boldsymbol{z}^1, \boldsymbol{y}_1 > \cdot \ldots \cdot < \boldsymbol{z}^q, \boldsymbol{y}_q >$$

eindeutig bestimmt ist. Sie wird ebenfalls mit $<\ ,\ >$ *bezeichnet und ist eine duale Paarung. Die durch sie induzierte Abbildung*

$$\Phi^p_q : \mathrm{T}^p_q(V) \to (\mathrm{T}^q_p(V))^* \ , \quad \boldsymbol{w} \mapsto < \boldsymbol{w},\ >$$

ist ein Isomorphismus des Tensorraumes $\mathrm{T}^p_q(V)$ *zum dualen Raum des Raumes* $\mathrm{T}^q_p(V)$.

Beweis. Die Konstruktion der bilinearen Abbildung $<\ ,\ >$ folgt dem vertrauten Muster und wird nicht ausgeführt.

Wir zeigen, dass eine duale Paarung vorliegt: Dazu wählen wir ein Paar $(\boldsymbol{b}^1, \ldots, \boldsymbol{b}^n)$, $(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ dualer Basen für V. Zum Beweis der Injektivität von Φ^p_q nehmen wir an, für einen gegebenen Tensor $\boldsymbol{w} \in \mathrm{T}^p_q(V)$ sei

$$< \boldsymbol{w},\ > : \mathrm{T}^q_p(V) \to K, \quad \boldsymbol{u} \mapsto < \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u} >$$

die Nullabbildung. Sind $\left(w^{\mu_1, \ldots, \mu_q}_{\nu_1, \ldots, \nu_p}\right)_{\mu_1, \ldots, \mu_q, \nu_1, \ldots, \nu_p}$ die Tensorkomponenten von $\boldsymbol{w}$ bezüglich des gegebenen Basenpaares, so erhalten wir durch Einsetzen der Basisvektoren von $\mathrm{T}^q_p(V)$ insbesondere

$$0 \ = < \boldsymbol{w}, \boldsymbol{b}^{\mu_1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{b}^{\mu_q} \otimes \boldsymbol{b}_{\nu_1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{b}_{\nu_p} > = w^{\mu_1, \ldots, \mu_q}_{\nu_1, \ldots, \nu_p}$$

für beliebige μ_i, ν_j; es folgt $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$.

Aus $\dim(\mathrm{T}^p_q(V)) = \dim(\mathrm{T}^q_p(V)) = \dim(V)^{p+q}$ ergibt sich nun die Behauptung. ❏

Schwerpunkte zum gewählten Stoff

- Tensorprodukt von Vektorräumen, Universaleigenschaft und Existenz [4/4/1 – 4/4/3]
- Elementare Rechenregeln für Tensoren, Auffinden einer Basis des Tensorprodukts, einige Isomorphismen [4/4/4 – 4/4/6]
- Bifunktorialität des Tensorprodukts [4/4/7 – 4/4/8]
- Wechsel des Grundkörpers durch das Tensorprodukt mit einem Erweiterungskörper [4/4/9 –4/4/10]
- Das Tensorprodukt (Kroneckerprodukt) von Matrizen und seine Eigenschaften [4/4/11 –4/4/12]
- p-lineare Abbildungen und p-fache Tensorprodukte [4/5/1]
- Die Tensorpotenzen eines Vektorraumes, Funktorialität [4/5/2]
- Die Tensoralgebra eines Vektorraumes; Universalität und funktorielle Eigenschaften [4/5/3 – 4/5/5]
- Symmetrische und äußere Potenzen von Vektorräumen [4/5/6 – 4/5/7]
- Funktorialität der symmetrischen und äußeren Potenzen [4/5/6]
- Anwendung: Determinante eines Endomorphismus [4/5/8]
- Konstruktion der symmetrischen und der äußeren Algebra; funktorielle Eigenschaften [4/5/9 – 4/5/10]
- Charakterisierung der symmetrischen Algebra [4/5/11]
- Dimensionen der symmetrischen und der äußeren Potenzen [4/5/12 – 4/5/13]
- Äußere Potenz einer Matrix; Eigenschaften [4/5/14 – 4/5/18]
- Gemischte Tensoren (p, q)-ter Stufe auf einem endlichdimensionalen Vektorraum [4/5/19 – 4/5/20]
- Tensorprodukt, Koordinatentransformation und Dualität für gemischte Tensoren [4/5/21 – 4/5/23]

Sachverzeichnis