REINHARD SCHULZE/WERNER RÖMISCH

Kennwertmethoden für nichtlineare VOLTERRAsche Integralgleichungen in stetigen stochastischen Prozessen

1. Einleitung

Die Aufgabenstellung hat ihren Ursprung in Problemen der kontinuierlichen Systemtheorie, insbesondere der Regelungstechnik. Ist das Eingangssignal eines kontinuierlichen Systems, das durch Differentialgleichungen bzw. Integralgleichungen beschrieben wird, zufällig, so können wir Eingangs- und Ausgangssignal als Realisierungen gewisser stochastischer Prozesse auffassen. Die Aufgabe besteht nun in einer statistischen Charakterisierung des Ausgangsprozesses mit Hilfe von Kennwerten, wobei lediglich gewisse Kennwerte des Eingangsprozesses als bekannt vorausgesetzt werden sollen. Bei linearen Systemen können allein aus Korrelationsfunktionen des Eingangsprozesses Korrelationsfunktionen des Ausgangsprozesses berechnet werden, so daß für GAUSSsche Prozesse diese kennwertmäßige Charakterisierung vollständig ausreicht. Für den Fall allgemeiner nichtlinearer Systeme sind uns Verfahren zur Lösung dieser Aufgabenstellung nicht bekannt.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, ein Verfahren zur Berechnung allgemeiner Kennwerte der Lösungen nichtlinearer Gleichungen anzugeben.

Um die Klasse von Kennwerten charakterisieren zu können, auf die dieses Verfahren anwendbar ist, beschäftigen wir uns zunächst mit Darstellungs- und Klassifizierungsmöglichkeiten von Kennwerten stochastischer Prozesse $x \in [[0, T], L_2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})]$, wobei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$ ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum ist.

Wir fassen die auftretenden stochastischen Prozesse stets als abstrakte Funktionen in speziellen BANACH-Räumen von Zufallsvariablen auf. Als *systembeschreibende Gleichung* betrachten wir

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(t, s, x(s), u(s))\, \mathrm{d}s, \quad t \in [0, T], \tag{1}$$

die wir als Gleichung in diesen stetigen abstrakten Funktionen verstehen. Hierbei fassen wir $u \in C([0, T], L_2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P}))$ als *Eingangsprozeß* und die Lösung x^* von (1) als *Ausgangsprozeß* auf. Aussagen über den Zusammenhang der Lösungen von (1) und der entsprechenden realisierungsweisen Lösungen wurden in [1] angegeben.

Das Vorgehen zur Lösung der Problemstellung wird dadurch charakterisiert, daß der in einem separablen Teilraum von $L_2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$ liegende Wertebereich des stetigen Eingangsprozesses u durch endlichdimensionale Teilräume konstruktiv approximiert wird. Die wesentliche Grundlage dafür bildet die gleichmäßige Approximierbarkeit jedes stochastischen Prozesses $u \in C([0, T], L_2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P}))$ durch Prozesse der Form

$$\sum_{l=1}^{s(m)} a_l^{(m)}\, 1_{A_l^{(m)}}, \quad \text{wobei} \quad \{a_l^{(m)}\}_{l=1}^{s(m)} \subseteq C([0, T], R)$$

eine endliche Familie stetiger reeller Funktionen und $\{A_l^{(m)}\}_{l=1}^{s(m)}$ eine endliche Ereignisdisjunktion von $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$ ist. D. h. jeder stochastische Prozeß $u \in C([0, T], L_2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P}))$ ist durch Prozesse mit endlich vielen stetigen Realisierungen approximierbar. Dabei lassen sich die $\{a_l^{(m)}\}_{l=1}^{s(m)}$ und die $\{\mathsf{P}(A_l^{(m)})\}_{l=1}^{s(m)}$ durch Kennwerte von u in der zu definierenden allgemeinen Form ausdrücken. Auf der anderen Seite wird gezeigt, daß sich eine große Klasse von Kennwerten von u und der Lösung x^* von (1) gerade mit Hilfe der $\{a_l^{(m)}\}_{l=1}^{s(m)}$ und der $\{\mathsf{P}(A_l^{(m)})\}_{l=1}^{s(m)}$ approximativ berechnen läßt. Um dieses Vorgehen zu rechtfertigen, untersuchen wir zunächst wahrscheinlichkeitstheoretische Eigenschaften stochastischer Prozesse.

2. Kennwertbegriff, Grundlagen aus der Wahrscheinlichkeitstheorie

Definition 1: Ist I eine beliebige nichtleere Indexmenge, $\Phi \in ((R, L_2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})) \times \times I, L_2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P}))$ mit dem Definitionsbereich $D_\Phi \subseteqq (R, L_2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})) \times I$ und $z \in L_2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$, so heißt $F_\Phi \in [D_\Phi \times L_2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P}), R)$, *$(\Phi, z)$-Kennwert*, falls für alle $(x, i) \in D_\Phi$ gilt:

$$F_\Phi(x, i, z) = (\Phi(x, i), z)_{L_2}\,.$$

$F_\Phi(x, ., z) \in [I, R)$ heißt *(Φ, z)-Kennwert des stochastischen Prozesses x*. Jeder (Φ, z)-Kennwert eines stochastischen Prozesses ist also eine reellwertige Funktion. Die Einführung des Operators Φ gestattet eine Klassifizierung von Kennwerten. So sprechen wir von *stetigen* bzw. *linear beschränkten* Kennwerten, wenn $\Phi(., i)$ für alle $i \in I$ die entsprechenden Eigenschaften hat. Für das Weitere von Bedeutung ist die folgende Klasse von Kennwerten:

Definition 2: Es sei M ein BANACH-Raum stochastischer Prozesse. Ein (Φ, z)-Kennwert F_Φ heißt *regulär auf M*, wenn es ein $\varphi \in ([[0, T], R) \times I, R)$ und eine in M dichte Teilmenge N derart gibt, daß für alle $i \in I$, $x \in N$ mit $(x, i) \in D_\Phi$ gilt:

$\varphi(x(., \omega), i) = \Phi(x, i)\,(\omega)$, P-fast überall.

Es erweist sich, daß Moment-, Verteilungs-, Korrelations- und Mittelwertsfunktionen auf $M = C([0, T], L_2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P}))$ reguläre Kennwerte darstellen. Das herzuleitende Verfahren läßt sich gerade auf stetige reguläre Kennwerte anwenden (weitere Aussagen, insbesondere zur Stetigkeit vgl. [1]).

Ferner sind für uns Aussagen über die von einem Prozeß $u \in [[0, T], [\Omega, R))$ erzeugte σ-Algebra $\mathfrak{A}_u \underset{\text{def}}{=} \mathfrak{A}(\{[u(t)]^{-1}(B) \mid B \in \mathfrak{B}^1, t \in [0, T]\})$ wichtig ($\mathfrak{B}^1$ ist die BORELsche σ-Algebra über R).

$\mathfrak{A}_u$ ist nach Definition die kleinste σ-Algebra bezüglich der $u(t)$ für jedes $t \in [0, T]$ meßbar ist. Unser Ziel sind Aussagen über die Separabilität von $L_2(\Omega, \mathfrak{A}_u, \mathsf{P})$.

Definition 3:

a) *$\mathfrak{E} \subseteqq P_\Omega$ ist Erzeugendensystem von $\mathfrak{A}$* $\underset{\text{def}}{=}$ $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\mathfrak{E})$, wobei $\mathfrak{A}(\mathfrak{E})$ die Kleinste σ-Algebra bezeichne, die $\mathfrak{E}$ enthält.

b) *$\mathfrak{A}$ ist separabel* $\underset{\text{def}}{=}$ Es existiert ein abzählbares Erzeugendensystem $\mathfrak{E} = \{A_k\}_{k \in nz}$ von $\mathfrak{A}$.

Satz 4: *$L_p(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$ $(1 \leqq p < \infty)$ ist genau dann separabel, wenn eine separable σ-Algebra $\mathfrak{A}_1 \subseteqq \mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A}_1 \underset{\mathsf{P}}{=} \mathfrak{A}$* (d. h. $L_p(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P}) = L_p(\Omega, \mathfrak{A}_1, \mathsf{P})$) *existiert.* ($\underset{\mathsf{P}}{=}$ bedeutet, daß sich die Ereignisse aus $\mathfrak{A}_1$ bzw. $\mathfrak{A}$ nur durch P-Nullmengen unterscheiden. Vgl. dazu [1]).

Wir untersuchen nun, ob sich für eine größere Klasse von stochastischen Prozessen die Struktur der σ-Algebra $\mathfrak{A}_u$ näher beschreiben läßt und ob speziell $L_p(\Omega, \mathfrak{A}_u, \mathsf{P})$ $(1 \leqq p < \infty)$ separabel ist. Dieses Problem wird im folgenden für stetige Prozesse gelöst.

Satz 5: *Ist $u \in C([0, T], L_2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P}))$ und $S \subseteqq [0, T]$ eine abzählbare, in $[0, T]$ dichte Menge, so gilt*

$$\mathfrak{A}_u \underset{\mathsf{P}}{=} \mathfrak{A}\Big(\bigcup_{t \in S} \mathfrak{A}_{u(t)}\Big).$$

Da $\mathfrak{A}_u$ zu einer von abzählbar vielen separablen σ-Algebren erzeugten σ-Algebra fast gleich ist, ist auch $L_p(\Omega, \mathfrak{A}_u, \mathsf{P})$ $(1 \leqq p < \infty)$ separabel.

Bemerkung 6: a) Die Separabilität von $L_p(\Omega, \mathfrak{A}_u, \mathsf{P})$ ermöglicht es, den Prozeß u durch eine abzählbare Menge von Zufallsvariablen zu approximieren, die sämtlich bezüglich $\mathfrak{A}_u$ meßbar sind. Die Bedeutung des Raumes $L_p(\Omega, \mathfrak{A}_u, \mathsf{P})$ für die nichtlineare Theorie stochastischer Prozesse besteht in folgendem:

Ist $f \in [R, R)$ BOREL-meßbar und gilt

$f \in [L_p(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P}), L_p(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P}))$ *so folgt für* $u \in [[0, T], L_p(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P}))$:

$f(u(.)) \in [[0, T], L_p(\Omega, \mathfrak{A}_u, \mathsf{P}))$.

b) Eine Aussage der Form von Satz 5 über die Struktur der σ-Algebra $\mathfrak{A}_u$ bildet eine Grundlage für die konstruktive Approximation stochastischer Prozesse.

3. Approximation der Prozeßalgebra $\mathfrak{A}_u$

Unser Ziel ist es, für $u \in C([0, T], L_2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P}))$, ausgehend von der Darstellung für $\mathfrak{A}_u$, eine Folge $\{\mathfrak{A}_u^{(m)}\}_{m \in nz}$ von σ-Algebren zu konstruieren, die die folgenden Eigenschaften besitzen:

(A) *Für jedes $m \in nz$ wird $\mathfrak{A}_u^{(m)}$ von einer endlichen Ereignisdisjunktion erzeugt.*

(B) $\mathfrak{A}_u^{(m)} \subseteqq \mathfrak{A}_u^{(m+1)}$ *für alle* $m \in nz$

(C) $\mathfrak{A}_u \underset{\mathsf{P}}{=} \mathfrak{A}\big(\bigcup_{m \in nz} \mathfrak{A}_u^{(m)}\big)$.

Wir wählen dazu in R eine solche Zerlegungsfolge $\{\{I_i^{(n)}\}_{i=1}^{r(n)}\}_{n \in nz}$, daß

1. $\bigcup_{i=1}^{r(n)} I_i^{(n)} = R, \quad I_i^{(n)} \cap I_j^{(n)} = 0, \quad i \neq j, \quad n \in nz$,
2. $\mathfrak{A}(\{I_i^{(n)}\}_{i=1}^{r(n)}) \subseteqq \mathfrak{A}(\{I_i^{(n+1)}\}_{i=1}^{r(n+1)}), \quad n \in nz$,
3. $\mathfrak{B}^1 = \mathfrak{A}(\{\{I_i^{(n)}\}_{i=1}^{r(n)}\}_{n \in nz})$.

Dies läßt sich z. B. durch geeignete Wahl von einer in R dichten Menge von Teilpunkten, die entsprechende Intervalle $I_i^{(n)}$ definieren, erreichen.

Ist ferner $\{t_i\}_{i \in nz}$ eine in $[0, T]$ dichte Menge, so definieren wir für alle, $k, n \in nz$

$$A_l^{(n,k)} \underset{\text{def}}{=} \bigcap_{i=1}^{k} [u(t_i)]^{-1} (I_{l_i}^{(n)}), \quad l = 1, \ldots, (r(n))^k,$$

wobei jedem l eineindeutig ein $(l_1, \ldots, l_k)$, $l_i \in \{1, \ldots, r(n)\}$ für $i = 1, \ldots, k$, zugeordnet ist. Wird durch $m \in nz$ eine geeignete Durchnumerierung von $\{(n, k) \mid n, k \in nz\}$ gewährleistet und bezeichnet $s(m) \underset{\text{def}}{=} (r(n))^k$, so erfüllt $\mathfrak{A}_u^{(m)} \underset{\text{def}}{=} \mathfrak{A}(\{A_l^{(m)}\}_{l=1}^{s(m)})$ auf Grund der Konstruktion und Satz 5 die Eigenschaften (A), (B), (C).

4. Spezielle Projektoren auf $C([0, T], L_2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P}))$

Definition 7:

a) Für beliebige $m \in nz$ sei
$P_m \in [C([0, T], L_2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})), C([0, T], L_2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P}))]$
definiert durch

$$(P_m x)(t) \underset{\text{def}}{=} \mathsf{E}^{\mathfrak{A}_u^{(m)}} x(t), \quad t \in [0, T],$$

$x \in C([0, T], L_2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P}))$

b) $B_m \underset{\text{def}}{=} P_m(C([0, T], L_2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})))$

c) $\widehat{B} \underset{\text{def}}{=} C([0, T], L_2(\Omega, \mathfrak{A}_u, \mathsf{P}))$

($\mathsf{E}^{\widetilde{\mathfrak{A}}}$ bezeichne den bedingten Erwartungswert der σ-Algebra $\widetilde{\mathfrak{A}}$).

Der folgende Satz garantiert nun die gleichmäßige Approximationsmöglichkeit stetiger Prozesse durch Prozesse mit endlich vielen stetigen Realisierungen:

Satz 8:

a) *Für beliebiges $x \in \widehat{B}$ gilt:*

$$\lim_{m \to \infty} \max_{t \in [0, T]} \|(P_m x)(t) - x(t)\|_{L_2} = 0$$

b) *Für beliebige $x_m \in B_m$ gilt*

$$x_m(t) = \sum_{l=1}^{s(m)} \frac{1}{P(A_l^{(m)})} (x(t), 1_{A_l^{(m)}})_{L_2} 1_{A_l^{(m)}}, \quad t \in [0, T],$$

$$\left(a_l^{(m)} \underset{\text{def}}{=} \frac{1}{P(A_l^{(m)})} (x(\cdot), 1_{A_l^{(m)}})_{L_2} \in C([0, T], R) \right.$$

nennen wir auch *Koeffizientenfunktionen* von $\left. x_m \right)$. Wir bemerken, daß die $(x(\cdot), 1_{A_l^{(m)}})_{L_2}$ und $\mathsf{P}(A_l^{(m)})$ spezielle reguläre Kennwerte von x darstellen.

5. Projektionsmethoden für Gleichung (1)

Wir betrachten Gleichung (1) unter den Voraussetzungen:
$u \in C([0, T], L_2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P}))$
$f \in [[0, T] \times [0, T] \times R \times R, R)$ sei stetig, und es existiere ein $L > 0$ derart, daß für alle $a_1, a_2, b_1, b_2 \in R$ und $t, s \in [0, T]$ gilt

$$|f(t, s, a_1, b_1) - f(t, s, a_2, b_2)| \leqq L(|a_1 - a_2| + |b_1 - b_2|), \quad x_0 \in L_2(\Omega, \mathfrak{A}_u, \mathsf{P}).$$

Satz 9:

a) *Die Gleichung* (1) *besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung $x^* \in \widehat{B}$.*

b) *Für alle $m \in nz$ haben die Gleichungen*

$$x_m(t) = P_m x_0 + \int_0^t f(t, s, x_m(s), (P_m u)(s))\, ds, \quad t \in [0, T], \tag{2}$$

eine eindeutig bestimmte Lösung $x_m^* \in B_m$.

c) $\lim_{m \to \infty} \max_{t \in [0,T]} \|x_m^*(t) - x^*(t)\|_{L_2} = 0.$

gebra $\widetilde{\mathfrak{A}}$).
Approximationsmöglichkeit
en Realisierungen:

. Wir bemerken, daß die
n x darstellen.

:

ein $L > 0$ derart, daß für

$(\Omega, \mathfrak{A}_u, \mathsf{P})$.

$x^* \in \hat{B}$.

(2)

Der Beweis ergibt sich unmittelbar durch Anwendung des BANACHschen Fixpunktsatzes und aus den Eigenschaften der P_m. Da nach Satz 8, b) für jedes $m \in nz$ $P_m u$, $P_m x_0$, x_m^* die Darstellungen

$$P_m u = \sum_{l=1}^{s(m)} a_l^{(m)} 1_{A_l^{(m)}} ,$$

$$x_m^* = \sum_{l=1}^{s(m)} b_l^{(m)} 1_{A_l^{(m)}}, \quad a_l^{(m)},\ b_l^{(m)} \in C([0, T], R) ,$$

$$P_m x_0 = \sum_{l=1}^{s(m)} c_l^{(m)} 1_{A_l^{(m)}}, \quad c_l^{(m)} \in R$$

besitzen, erhalten wir:

Folgerung 10: *Für alle $m \in nz$ gilt: x_m^* ist genau dann Lösung von (2), wenn*

$$\left\{ b_l^{(m)}(t) = c_l^{(m)} + \int_0^t f(t, s, b_l^{(m)}(s), a_l^{(m)}(s))\, ds \right\}_{l=1}^{s(m)} . \tag{3}$$

Dieses Ergebnis zeigt, daß wir allein aus der Kenntnis von $\{a_l^{(m)}\}_{l=1}^{s(m)}$, $\{c_l^{(m)}\}_{l=1}^{s(m)}$ die Koeffizientenfunktionen der Lösung x_m^* von Gleichung (2) bestimmen können. Dieses Resultat wird die Berechnung von Kennwerten von x_m^* ermöglichen.

6. Berechnung von Kennwerten der Lösung von (1)

Ist $y \in B_m$, d. h. $y = \sum_{l=1}^{s(m)} d_l^{(m)} 1_{A_l^{(m)}}$, so gilt für jeden mit φ regulären (Φ, z)-Kennwert F_Φ für alle $i \in I$:

$$F_\Phi(y, i, z) = \sum_{l=1}^{s(m)} \varphi(d_l^{(m)}, i)(z, 1_{A_l^{(m)}})_{L_2} .$$

Deshalb sind speziell beliebige reguläre (Φ, z)-Kennwerte F_Φ von x_m^* durch $\{b_l^{(m)}\}_{l=1}^{s(m)}$ und $\{(z, 1_{A_l^{(m)}})_{L_2}\}_{l=1}^{s(m)}$ bestimmt. Gilt außerdem, daß F_Φ stetig in x^* ist, so stellen die Kennwerte F_Φ von x_m^* Approximationen für den Kennwert F_Φ von x^* dar. Gemäß Folgerung 10 benötigen wir zur approximativen Berechnung beliebiger regulärer und in x^* stetiger Kennwerte von x^* nur die Kenntnis folgender Eingabekennwerte

$$\{(x_0, 1_{A_l^{(m)}})_{L_2}\}_{l=1}^{s(m)}, \quad \{(u, 1_{A_l^{(m)}})_{L_2}\}_{l=1}^{s(m)} ,$$

$$\{\mathsf{P}(A_l^{(m)})\}_{l=1}^{s(m)}, \qquad \{(z, 1_{A_l^{(m)}})_{L_2}\}_{l=1}^{s(m)} .$$

Diese Eingabekennwerte lassen sich z. B. im Falle ergodischer Eingangsprozesse aus Zeitmittelungen gewisser Realisierungen oder aber aus Verteilungsfunktionen ermitteln. Besonders einfache Verfahren ergeben sich bei GAUSSschem Eingangsprozeß, da in diesem Fall alle Verteilungsfunktionen allein durch die Mittelwerts- und Autokorrelationsfunktion bestimmt sind.

7. Beispiel

Wir betrachten eine Transistor-Verstärkerstufe mit Demodulator und zufälligem GAUSSschen Eingangsprozeß u:

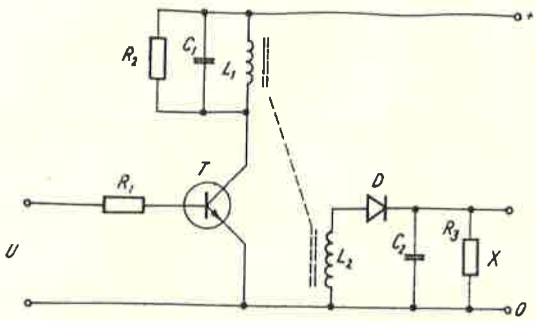

Abb. 1

Dieses System wird bei Verwendung einfacher Modelle für T und D durch eine nichtlineare Differentialgleichung 3. Ordnung beschrieben. Das dargelegte Verfahren wurde durch ein ALGOL-Programm numerisch realisiert und u. a. an diesem Beispiel erprobt. Für gegebene Mittelwertsfunktion m_u und Autokorrelationsfunktion R_{uu} wurden die Kreuzkorrelationsfunktion R_{x*u} und die eindimensionale Verteilungsfunktion $P_{x*(t_0)}$ für verschiedene Projektionsordnungen (k, n) näherungsweise berechnet.

Für $m_u(t) \equiv 0$ und $R_{uu}(t, s) = e^{-|t-s|}$ $t, s \in [0, 2.5]$, erhalten wir:

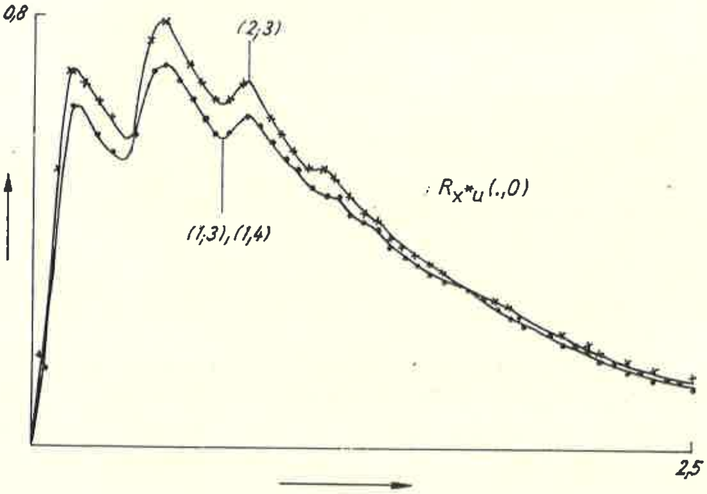

Abb. 2

[1] enthält in ausführlicher Darstellung die Beweise für alle angegebenen Aussagen, ALGOL-Programme und die Auswertung von Testbeispielen.

Demodulator und zufälligem

ür T und D durch eine nicht-
s dargelegte Verfahren wurde
l u. a. an diesem Beispiel er-
utokorrelationsfunktion R_{uu}
eindimensionale Verteilungs-
n (k, n) näherungsweise be-

en wir:

2,5 Abb. 2

alle angegebenen Aussagen,
elen.

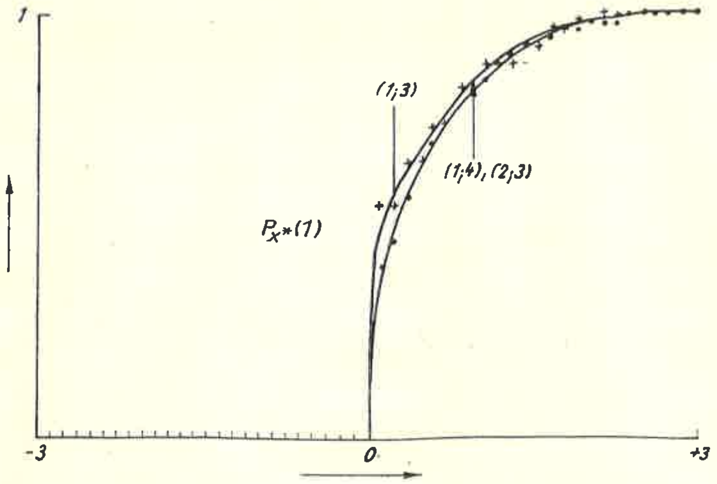

Abb. 3

Literatur

[1] RÖMISCH, W.; SCHULZE, R.; SOHR, D., Kennwertmethoden für Volterrasche Integralgleichungen in stochastischen Prozessen, Dissertation A, Humboldt-Universität, eingereicht 1976
[2] PROHOROV, YU.; ROZANOV, YU. A., Wahrscheinlichkeitstheorie (russ.), Moskau 1973
[3] BUNKE, H., Gewöhnliche Differentialgleichungen mit zufälligen Parametern, Berlin 1972

Anschrift:
R. SCHULZE, W. RÖMISCH, Humboldt-Universität, Sekt. Mathematik, Bereich Numerik,
1086 Berlin, PSF 1297, DDR