

Lösung Klassenstufe 11-13 Aufgabe 1

Die einzige Lösung ist $a = b = c = 2$. Nehmen wir an, (a, b, c) ist eine Lösung von

$$5^a + 12^b = 13^c \quad (1)$$

$$5^b + 12^c = 13^a \quad (2)$$

$$5^c + 12^a = 13^b \quad (3)$$

Ohne Einschränkung gilt $a \leq b, c$.

1. Fall $a \leq 0$: Aus $1 \geq 13^a = 5^b + 12^c > 0$ folgt $b, c \leq 0$. Da $5^x \geq 12^x \geq 13^x$ für $x \leq 0$, wird die Gleichheit bei (1), (2) oder (3) verletzt. Dieser Fall kann daher nicht eintreten.

2. Fall $0 < a \leq 2$: Die erste und dritte Gleichung liefern $b, c > 0$. Wegen (2) gilt

$$12^a \leq 12^c = 13^a - 5^b \leq 13^a - 5^a$$

Nahe Null ist der Anstieg von $13^x - 5^x$ kleiner als der von 12^x , aber wächst wegen der höheren Basis schneller an. Daher haben die Funktionen nur einen Schnittpunkt ($x = 2$). $\Rightarrow a = b = c = 2$.

3. Fall $a > 2$: Analog zum Zweiten Fall, wobei man die Ungleichungen umkehrt und statt a auf der linken Seite mit der größten der drei Zahlen beginnt.

Q.e.d.

