Lösung Klassenstufe 11-13 Aufgabe 4

Die Terme $\sin(\ldots(\sin(x))\ldots)$ sollen zur besseren Übersicht mit $\sin^{(k)}(x)$ abgekürzt werden. Annahme, es existiert eine Lösung x der Gleichung

$$\sin^{(4)}(x) = \cos^{(4)}(x)$$

Wegen $|\cos(x)| < \frac{\pi}{2}$ gilt $0 < \cos(\cos(x)) < 1$ und es muss $\sin(x) > 0$ sein, da für $\sin(x) \leq 0$ auch $\sin^{(4)}(x) \leq 0 \leq \cos^{(4)}(x)$ wäre. Insbesondere gilt $0 < \sin(\sin(x)) < 1$. $\quad (*)$

$$\begin{aligned} & & \sin^{(4)}(x) &= \cos^{(4)}(x) \\ \Rightarrow & & \sin^{(4)}(x) \cdot \sin^{(4)}(x) &= \cos^{(4)}(x) \cdot \cos^{(4)}(x) \\ \Rightarrow & & \sin^2(\sin^{(3)}(x)) &= \cos^2(\cos^{(3)}(x)) = 1 - \sin^2(\cos^{(3)}(x)) \end{aligned}$$

Aus der bekannten Ungleichung $|\sin(z)| \leq |z|$ (viermal angewandt) und den Abschätzungen $(*)$ folgt

$$\begin{aligned} \Rightarrow & & 1 = \sin^2(\sin^{(3)}(x)) + \sin^2(\cos^{(3)}(x)) &\leq \sin^2(\sin^{(2)}(x)) + \cos^2(\cos^{(2)}(x)) \\ \Rightarrow & & \sin^2(\sin^{(2)}(x)) &\geq 1 + \cos^2(\cos^{(2)}(x)) = \sin^2(\cos^{(2)}(x)) \end{aligned}$$

$(*)$ und die Monotonie von sin auf dem entsprechenden Interval führen zur Ungleichung

$$\begin{aligned} \Rightarrow & & \sin^{(2)}(x) &\geq \cos^{(2)}(x) \\ \Rightarrow & & \sin^{(2)}(x) \cdot \sin^{(2)}(x) &\geq \cos^{(2)}(x) \cdot \cos^{(2)}(x) \\ \Rightarrow & & \sin^2(\sin(x)) &\geq \cos^2(\cos(x)) = 1 - \sin^2(\cos(x)) \end{aligned}$$

Da sin und cos an verschiedenen Stellen Null sind und $|\sin(x)| = |x|$ nur für $z = 0$ gilt, erhalten wir den widerspruch

$$1 \geq \sin^2(\sin(x)) + \sin^2(\cos(x)) > \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$\Rightarrow$ Es gibt keine reelle Lösung der Gleichung. Q.e.d.