Lösung Klassenstufe 7-8 Aufgabe 1

Es gilt

$$\begin{aligned} a &= \frac{3n+4}{2n+3} + \frac{5m+8}{2m+3} \\ &= \frac{(2n+3)+(n+\frac{3}{2})-\frac{1}{2}}{2n+3} + \frac{(4m+6)+(m+\frac{3}{2}+\frac{1}{2})}{2m+3} \\ &= 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4n+6}+2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4m+6} \\ &= 4+\frac{1}{4m+6}-\frac{1}{4n+6}. \end{aligned}$$

Nun $|\frac{1}{4m+6}| \leq \frac{1}{2}$, $|\frac{1}{4n+6}| \leq \frac{1}{2}$, da $|4k+6| \geq 2$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Aus $a \in \mathbb{Z}$ folgt $\frac{1}{4m+6} - \frac{1}{4n+6} \in \mathbb{Z}$ und mit obiger Gleichung

$$\left(\frac{1}{4m+6} - \frac{1}{4n+6}\right) \in \{-1, 0, 1\}.$$

Die Annahme $\frac{1}{4m+6} - \frac{1}{4n+6} = -1$ führt zu $\frac{1}{4m+6} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow m = -2$ und $\frac{1}{4n+6} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow n = -1$.
Analog liefert $\frac{1}{4m+6} - \frac{1}{4n+6} = -1$ die Werte $m = -1$ und $n = -2$.
Gilt der dritte mögliche Fall, $\frac{1}{4m+6} - \frac{1}{4n+6} = O$, so folgt $m = n$.

Folglich sind

$$\begin{aligned} a = 3, &m = -2,\ n = -1; \\ a = 4, &m = n \in \mathbb{Z}; \\ a = 5, &m = -1,\ n = -2 \end{aligned}$$

alle Lësungen. Q.e.d.

Alternative Lösung: Wir betrachten den ersten Bruch $a_1(n) = \frac{3n+4}{2n+3}$ mal für einige Werte $n \in \mathbb{Z}$:

n	-3	-2	-1	0	1	2	3
Zähler: $3n+4$	-5	-2	1	4	7	10	13
Nenner: $2n+3$	-3	-1	1	3	5	7	9
$a_1(n)$	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{13}{10}$

Es fällt auf, dass der Bruch immer in gekürzter Form vorliegt, d.h. der größte gemeinsame Teiler von Zähler und Nenner ist 1. Das kann man allgemein wie folgt zeigen: Sei $d \in \mathbb{N}$ ein Teiler von $3n+4$ und $2n+3$, dann ist d auch ein Teiler von $2(3n+4) - 3(2n+3) = -1$, also $d = 1$. Ganz analog zeigt man, dass Zähler und Nenner des zweiten Bruchs $a_2(m) = \frac{5m+8}{2m+3}$ teilerfremd sind: sei $d \in \mathbb{N}$ ein gemeinsamer Teiler, dann teilt d auch $2(5m+8) - 5(2m+3) = 1$, also $d = 1$. Es bleibt die Frage zu beantworten, unter welcher Bedinung die Summe zweier gekürzter Brüche $\frac{p}{q}$ und $\frac{p'}{q'}$ eine ganze Zahl ergeben kann.

Dies ist nur möglich, wenn die Nenner q und q' bis auf das Vorzeichen übereinstimmen, denn:

$$\begin{aligned}\frac{p}{q}+\frac{p'}{q'}=\frac{pq'+p'q}{qq'}\in\mathbb{Z} \quad &\Rightarrow \quad qq' \text{ teilt } pq'+p'q \\ &\Rightarrow \quad q \text{ teilt } pq'+p'q \\ &\Rightarrow \quad q \text{ teilt } pq', \text{ da es } p'q \text{ teilt} \\ &\Rightarrow \quad q \text{ teilt } q', \text{ da } p \text{ und } q \text{ teilerfremd sind}\end{aligned}$$

Das gleiche Argument ist aber auch für q' gültig, d.h auch q' teilt q und man erhält damit insgesamt $q=q'$ oder $q=-q'$.

Angewendet auf unsere Aufgabe erhalten wir als notwendige Bedingung dafür, dass $a=a_1(n)+a_2(m)$ ganzzahlig ist, also entweder

$$2n+3=2m+3 \quad \Leftrightarrow \quad m=n$$

oder

$$2n+3=-(2m+3) \quad \Leftrightarrow \quad m+n=-3$$

Eingesetzt in die Brüche ergibt das im Fall $m=n$:

$$a=\frac{3n+4}{2n+3}+\frac{5n+8}{2n+3}=\frac{8n+12}{2n+3}=4\in\mathbb{Z}$$

und für den Fall $m=-n-3$:

$$a=\frac{3n+4}{2n+3}+\frac{5(-n-3)+8}{-(2n+3)}=\frac{8n+11}{2n+3}=4-\frac{1}{2n+3}$$

Dies ist nur ganzzahlig, falls $2n+3=\pm1$, also $n=-1$ oder $n=-2$.

Alle möglichen Paare ganzer Zahlen m,n, für die a ganzzahlig ist, sind also:

$$\boxed{m=n\in\mathbb{Z}, \qquad m=-1, n=-2, \qquad m=-2, n=-1}$$