Lösung Klassenstufe 7/8 Aufgabe 2

Es ist genau dann möglich ein solches $m \times n$-Rechteck zu konstruieren, wenn m und n beide gerade oder beide ungerade sind. Ein Rechteck, welches der Aufgabenstellung entsprechend gefärbt ist, nennen wir korrekt gefärbt.
Sind m und n beide ungerade, so kann man zunächst ein korrekt gefärbtes $1 \times n$-Rechteck konstruieren. Dazu klebt man Kopien eines beliebig gefärbten Quadrates nebeneinander und erhält genau für $1 \times k$ mit k ungerade ein korrekt gefärbtes Rechteck. Durch Aneinanderkleben von Kopien eines solchen $1 \times n$-Rechtecks erhält man nun ein gewünschtes $m \times n$-Rechteck.

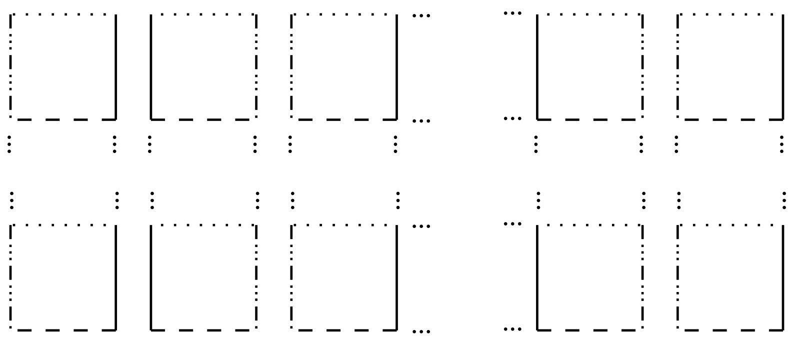

Abbildung 1: Lösung für ungerade n, m.

Sind m und n beide gerade, so lässt sich ein korrekt gefärbtes $m \times n$-Rechteck durch geeignetes Zusammenkleben von je einem korrekt gefärbten $(m-1) \times (n-1)$-, $1 \times (n-1)$-, $(m-1) \times 1$- und 1×1-Rechteckes erzielen.
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit genügt es, nur noch den Fall zu betrachten, dass m gerade und n ungerade ist. Angenommen, es existiere ein korrekt gefärbtes $m \times n$-Rechteck. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit eine Kante der ungeraden Länge n rot gefärbt. Wir zählen nun die Anzahl der auftauchenden roten Kanten bei den 1×1-Quadraten. Auf der rot gefärbten Kante des Rechtecks sind es n Stück und im Inneren des Rechtecks ist es eine gerade Zahl, da an jeder roten Kante zwei Quadrate aneinander geklebt sind. Zusammen ist es eine ungerade Zahl. Die Zahl der roten Kanten bei den 1×1-Quadraten ist aber gleich der Anzahl der 1×1-Quadrate selbst, also besteht das Rechteck aus einer ungeraden Zahl von Quadraten. Allerdings besteht das $m \times n$-Rechteck aus $m \cdot n$ Quadraten, einer geraden Zahl - Widerspruch. $\square$