Lösung Klassenstufe 7-8 Aufgabe 3

Das Minimum ist 7 und wird zum Beispiel für $m = 2$, $n = \pm 5$ angenommen[1], denn

$$2^{2\cdot 2+1} - 5^2 = 2^5 - 5^2 = 32 - 25 = 7.$$

Allgemein gilt

$$\begin{aligned}
n \equiv 0 \mod 8 \quad &\Rightarrow \quad -n^2 \equiv 0 \mod 8 && (1)\\
n \equiv \pm 1 \mod 8 \quad &\Rightarrow \quad -n^2 \equiv -1 \equiv 7 \mod 8 && (2)\\
n \equiv \pm 2 \mod 8 \quad &\Rightarrow \quad -n^2 \equiv 4 \mod 8 && (3)\\
n \equiv \pm 3 \mod 8 \quad &\Rightarrow \quad -n^2 \equiv -1 \equiv 7 \mod 8 && (4)\\
n \equiv \pm 4 \mod 8 \quad &\Rightarrow \quad -n^2 \equiv 0 \equiv 7 \mod 8 && (5)
\end{aligned}$$

(Dies ist eine Rechnung in Restklassen: $a \equiv b \mod 8$ ist die Abkürzung für: "a und b lassen bei Division durch 8 denselben Rest. Da Summe bzw. Produkt der Reste gleich dem Rest der Summe bzw. des Produktes ist, kann man mit den Resten genauso rechnen wie mit Zahlen. Ein bisschen komisch wirkt: $5 + 5 \equiv 2$. Das einzig Neuartige ist $2 \cdot 4 \equiv 0$. Lasst Euch das doch mal von Eurer Mathelehrerin oder Eurem Mathelehrer erklären!)

Nun ist $2^{2m+1} = 2 \cdot (2^m)^2$ keine Quadratzahl. Folglich gilt in den Fällen (1),(2),(4) und (5) wegen $2^{2m+1} - n^2 \geq 0$ auch $2^{2m+1} - n^2 \geq 7$.

Falls wir im Fall (3), $n = 8k \pm 2$, $k \in \mathbb{Z}$ ausschließen können, dass $2^{2m+1} - n^2 = 4$ gilt, können wir die Ungleichung auch im schwierigen 3. Fall beweisen. Wegen

$$4 = 2^{2m+1} - n^2 = 2^{2m+1} - (8k \pm 2)^2 = 8 \cdot 2^{2(m-1)} - 64k^2 \mp 32k - 4$$

gilt

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & 8 = 8 \cdot 2^{2m-1} - 8 \cdot 8k^2 \mp 8 \cdot 4k\\
\Rightarrow \quad & 1 = 8 \cdot 2^{2m-1} - 8 \cdot 8k^2 \mp 4k
\end{aligned}$$

Da $m > 1$ ist, muss die rechte Seite durch 2 teilbar sein. Das ist ein Widerspruch, da die linke Seite nicht durch 2 teilbar ist. Die von uns getroffene Annahme hat sich als falsch erwiesen und es muss das Gegenteil, $2^{2m+1} - n^2 \neq 4$ gelten. Damit ist gezeigt, dass

$$2^{2m+1} - n^2 \geq 7$$

gilt und die Gleichheit in einigen Fällen angenommen wird. Q.e.d.

[1] Mit den Symbolen $\pm$ und $\mp$ fassen Mathematiker gerne zwei ähnliche Gleichungen zusammen, falls sie sich nur in den Vorzeichen einiger Terme unterscheiden. So beschreibt zum Beispiel $a = \pm 3b + 4 \mp 5$ die beiden Gleichungen $a = +3b + 4 - 5$ und $a = -3b + 4 + 5$.