Lösung Klassenstufe 7-8 Aufgabe 4

h_c und s_c sind nicht identisch, da das Dreieck nicht gleichschenklig ist. O.B.d.A. $\alpha > \beta$. Bezeichne H den Schnittpunkt von h_c mit c, W den von w_γ mit c und M den von s_c mit c. Dann $\psi := \angle(ACH) = \angle(MCB)$ und $\phi := \angle(HCW) = \angle(WCM)$ nach Voraussetzung. Innenwinkelsummensatz im Dreieck ACH liefert $\alpha = 90 - \psi$ und im Dreieck BHC $\beta = 90 - 2\phi - \psi$. Subtraktion der Gleichungen führt zu $\alpha = \beta + 2\phi$. Sei nun S der Schnitt von AC mit der Mittelsenkrechten der Seite c durch M. Dann ist $\angle(SBM) = \angle(BAC) = \alpha = \beta + 2\phi$, also $\angle(SBC) = 2\phi$. Stufenwinkelsatz f̈hrt zu $\angle(ASM) = \angle(ACH) = \psi$ und folglich auch $\angle(MSB) = \psi$. Wegen $\angle(MSB) = \angle(MCB) = \psi$ liegen nach Umkehrung des Umfangswinkelsatzes M,B,S,C auf einem Kreis. Umfangswinkelsatz über der Sehne BS liefert nun $\angle(BCS) = \angle(BMS) = 90$, folglich $\angle(ACB) = 90$, q.e.d.

Alternative Lösung. H, W, M bezeichnen dieselben Punkte wie in der vorangegangenen Lösung. Was müsste gelten, wenn die Behauptung stimmt? Wegen des Satzes des Thales muss dann der Umkreismittelpunkt auf der Seite $\overline{AB}$ liegen. Da für die Seitelängen $|\overline{AM}| = |\overline{MB}|$ nach Voraussetzung gilt, muss M dann der Mittelpunkt des Umkreises sein! Bezeichne U den Umkreismittelpunkt. Nach dem Bogenwinkelsatz ist $\angle(BUC) = 2\alpha$. Sei F der Fußpunkt des Lotes von U auf die Seite $\overline{BC}$. Da $|\overline{BU}| = |\overline{CU}|$ ist dann $\angle(FUC) = \angle(BUC)/2 = \alpha$. Dann ist $\angle(FCU) = 90^o - \angle(FUC) = 90^o - \alpha = \angle(HCA) = \angle(MCB)$. Die letzte Gleichung folgt aus der Bedingung and die Winkelhalbierende nach einfacher Rechnung (siehe erste Ls̈oung). Da F auf $\overline{BC}$ liegt, folgt daraus, dass U auf $\overline{CM}$ liegen muss. Der Umkreismittelpunkt U liegt auch auf der Mittelsenkrechten der Seite $\overline{AB}$. Wären die Seitenhalbierende und die Mittelsenkrechte identisch, so wären $\angle(CMA) = \angle(CMB) = 90^o$, $|\overline{AM}| = |\overline{MB}| = c/2$ und damit (nach SWS) die Dreiecke ΔAMC, und ΔBMC kongruent: somit $|\overline{AC}| = |\overline{BC}|$, d.h. ΔABC wäre gleichschenklig, im Widersprcuh zur Voraussetzung. Also schneiden sich Mittelsenkrechte und Seitenhalbierende der Seite $\overline{AB}$ in einem Punkt (nämlich M). Und da U auf beiden liegen muss, ist $U = M$!