

Lösung Klassenstufe 9-10 Aufgabe 2

Wir bezeichnen mit $2 = p_1 < p_2 < \dots < p_m$ die Folge der Primzahlen. Für $p_i \leq k \leq p_{i+1} - 1$ erhalten wir dann $p(k) = p_i, q(k) = p_{i+1}$. Sei $p_m = q(2009)$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{2009} \frac{1}{p(k)q(k)} &\leq \sum_{k=2}^{p_m-1} \frac{1}{p(k)q(k)} = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{p_{i+1} - p_i}{p_i p_{i+1}} \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \left(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{p_{i+1}} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{p_m} \\ &< \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Q.e.d.