Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 6

VL Riemannsche Geometrie (Differentialgeometrie II)

SS 2014

Abgabe am 06.06.2014

Aufgabe 16

Existiert auf $S^1 \times S^3$

a) eine Riemannsche Metrik mit positiver Schnittkrümmung $K > 0$?

b) eine Riemannsche Metrik mit Schnittkrümmung $K \leq 0$?

4 P

Aufgabe 17

Es sei (M, g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine glatte beschränkte Funktion, $a > 0$, und es gelte für alle minimierenden, auf Bogenlänge parametrisierten Geodäten $\gamma : \mathbb{R} \to M$:

$$Ric_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) \geq a + f'(t) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass M kompakt ist. **6 P**

Aufgabe 18

Sei (M, g) eine einfach-zusammenhängende vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmmung $K \leq 0$ und $\gamma : \mathbb{R} \to M$ eine auf Bogenlänge parametrisierte Geodäte.

a) Zeigen Sie, dass es für jeden Punkt $p \in M$, der nicht auf dem Bild von γ liegt, eine eindeutig bestimmte Geodäte σ durch p gibt, die γ in einem Punkt $\gamma(s_0)$ senkrecht schneidet und $d(p, \gamma(s_0)) = \min\{d(p, \gamma(s)) \mid s \in \mathbb{R}\}$ erfüllt.

b) Zeigen Sie, dass dies nicht mehr gilt, wenn M nicht einfach-zusammenhängend ist oder wenn die Schnittkrümmungsschranke nicht gilt.

6 P

Insgesamt: **16 P**