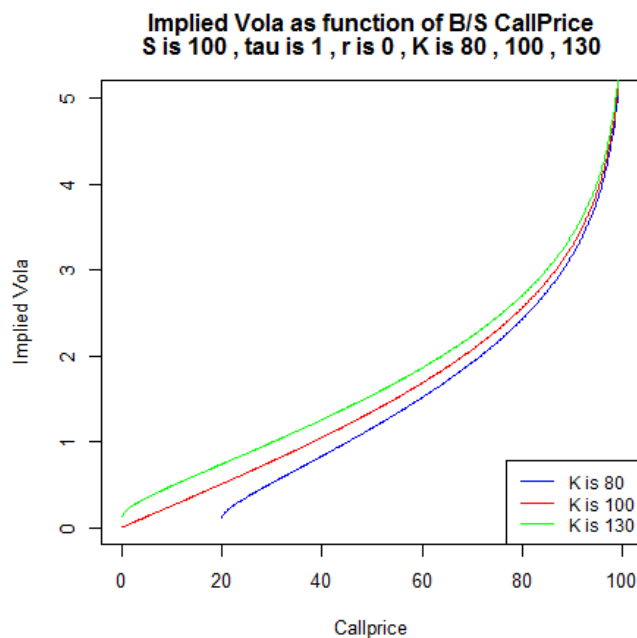
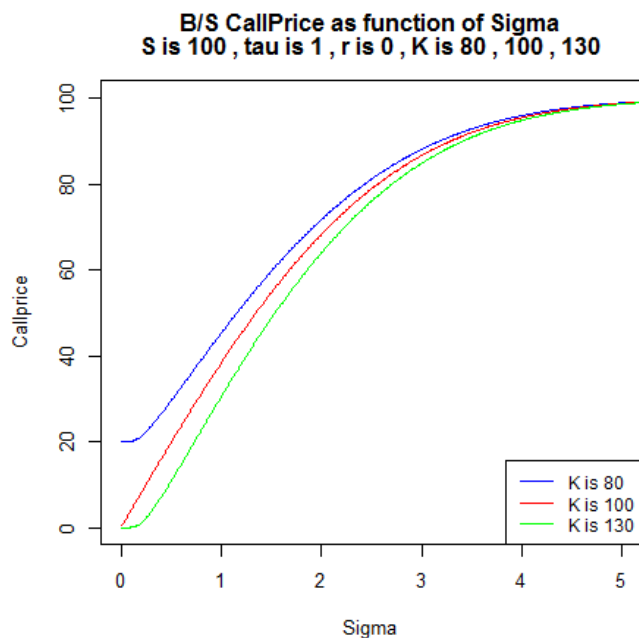
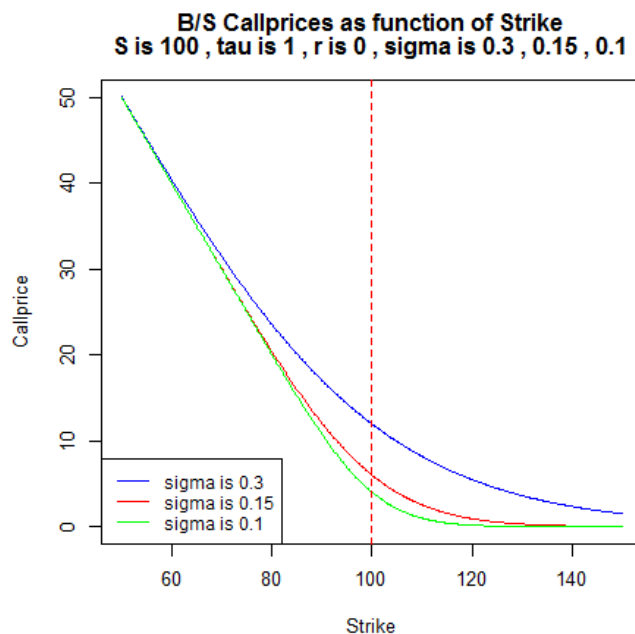
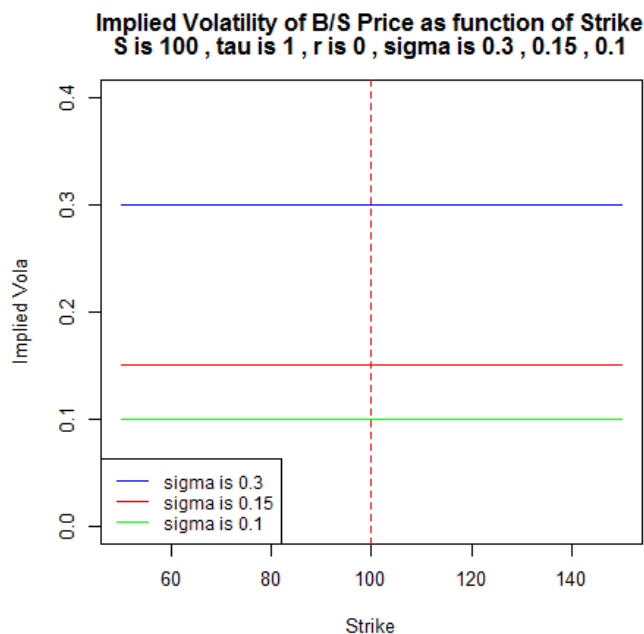


Finanzmathematik 2 - Übungsblatt 4

Aufgabe 4

i) Implizite Volatilität im Black-Scholes Modell



R-Code für diese Plots:

http://lb-web-live.de/attachments/File/IVolaBS_Final.r

Man sieht, dass die implizite Volatilität $\sigma^{im}(K)$ für ein festes σ konstant und gleich diesem σ ist.

Denn nach Definition löst σ^{im} für einen gegebenen Preis π die Gleichung $\Pi(x, \tau, \sigma^{im}, r, K) = \pi$. Da $\pi = \pi(C^{Call}(K))$ ist, muss also gelten: $\Pi(x, \tau, \sigma^{im}, r, K) = \Pi(x, \tau, \sigma, r, K)$. Damit ist $\sigma^{im} = \sigma$ eine Lösung. Aus FinMath I / Lemma75

wissen wir, dass $\sigma \mapsto \Pi(\sigma)$ strikt wachsend ist und Werte in $((x - e^{-r\tau}K)^+, x)$ annimmt. Daraus folgt einerseits die Eindeutigkeit von σ^{im} und andererseits, dass $\sigma^{im}(\pi)$ für $\pi \in ((x - e^{-r\tau}K)^+, x)$ definiert ist. Die zwei unteren Plots von $\sigma \mapsto \Pi(\sigma)$ und $\pi \mapsto \sigma^{im}(\pi)$ verdeutlichen diesen Zusammenhang.

Implementierung in R:

```
# Black-Scholes Function
BS = function(S, K, Time, r, sigma, type){
  d1 = (log(S/K) + (r + sigma^2/2)*Time) / (sigma*sqrt(Time))
  d2 = d1 - sigma*sqrt(Time)
  if (type==1){ ## Call
    # special case for sigma=0 otherwise BS is undefined
    if (sigma==0){ value = max(S-K*exp(-r*Time), 0) } else
      { value = S*pnorm(d1) - K*exp(-r*Time)*pnorm(d2) }
  }
  if (type==0){ ## Put
    value = K*exp(-r*Time)*pnorm(-d2) - S*pnorm(-d1)
  }
  return(value)
}

# CallOption price in Bachelier-model
CPBachelier = function(S, K, Time, sig){
  d = (S-K)/(sig*sqrt(Time))
  value = (S-K)*pnorm(d) + (sig*sqrt(Time))*dnorm(d)
  return(value)
}

# tailored Newton Algorithm
implyVolaNewton = function(S, K, Time, r, market){
  count = 0 ; count.max = 300
  sig_n = sqrt(2 * abs( (log(S/K) + r*T)/T ))
  while(count < count.max){
    p_diff = BS(S, K, Time, r, sig_n, 1) - market
    if ( sig_n==0 && S==K*exp(-r*Time) ) { vega=S*sqrt(Time)/sqrt(2*pi) }
    else if ( sig_n==0 && S!=K*exp(-r*Time) ) { vega=0 }
    else { vega=S*sqrt(Time)*dnorm((log(S/K) + (r+sig_n^2/2)*Time)/(sig_n*sqrt(Time))) }
    if ( vega==0 || is.nan(p_diff) || is.infinite(p_diff) || p_diff==0 ) break
    sig_n = sig_n - (p_diff / vega)
    count = count + 1
  }
  return(sig_n)
}
```

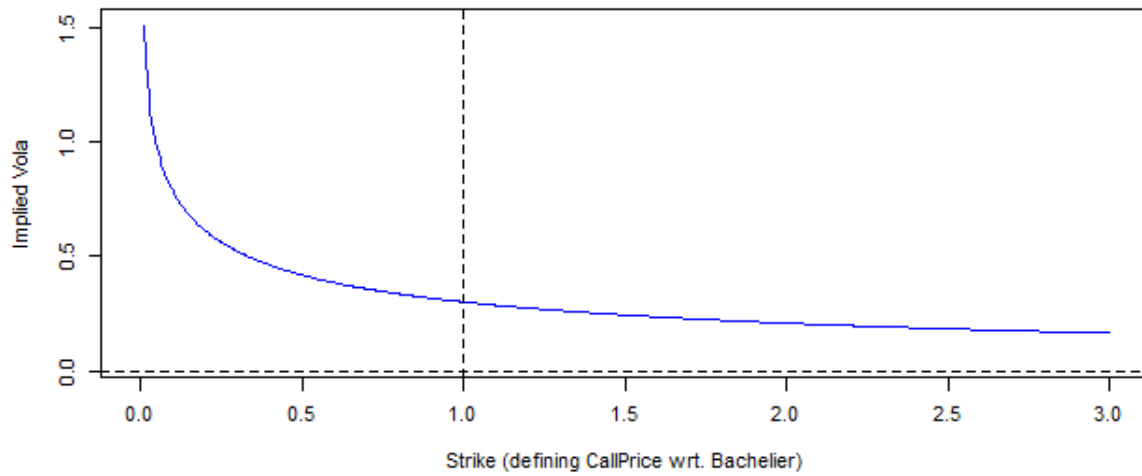
Anmerkung:

Diese 3 in R geschriebenen Funktionen bilden das Kernstück meiner Scripte. Sie sind sofort in R lauffähig. Keine weiteren Packages müssen installiert werden. Lediglich das Script "IVolaBenchmark_Final.r" benötigt einige frei verfügbaren Zusatzpackages, weil dort neben dem oben angegebenen "tailored Newton Algorithm" ein externer Newton Algorithmus für Vergleichszwecke verwendet wird. Wie erwartet zeigt der von mir implementierte "tailored Newton Algorithm" die besten Konvergenzeigenschaften. Einerseits stellt der optimale Startwert für σ (siehe Aufgabenbeschreibung) die quadratische Konvergenz sicher, andererseits arbeitet dieser Algorithmus mit einer analytischen Ableitung vom B/S-Preis, nämlich "Vega". Interessant ist auch der Spezialfall, in dem $\sigma = 0$ wird. Das ist genau dann der Fall, wenn $\log(S/K) + r\tau = 0$ oder äquivalent $S = K \cdot \exp(-r\tau)$ ist. Der Algorithmus arbeitet dennoch korrekt, falls man gesondert $vega(0) = \frac{S\sqrt{\tau}}{\sqrt{2\pi}}$ setzt.

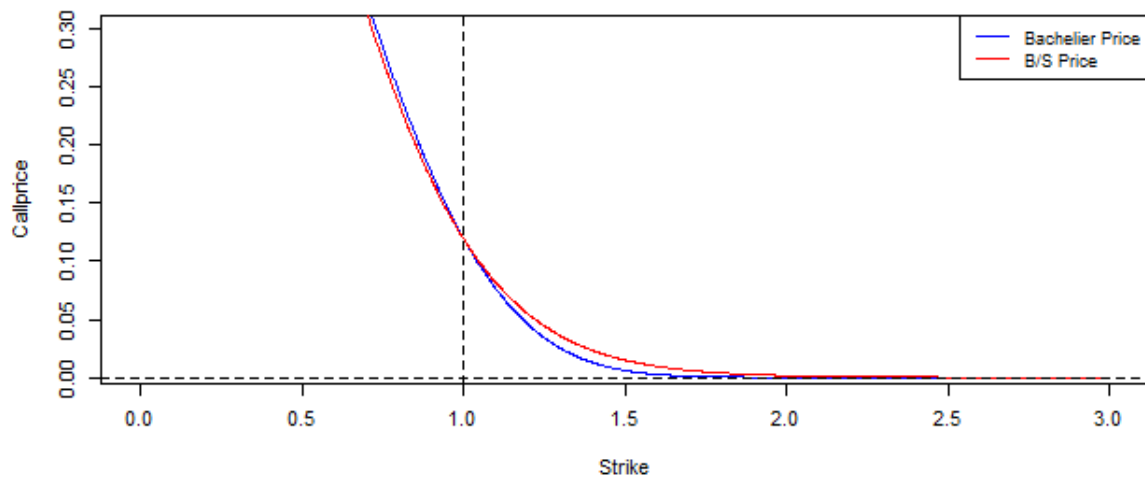
"Man versteht etwas nicht wirklich, wenn man nicht versucht, es zu implementieren." (Zitat: Donald Knuth)

ii) Implizite Volatilität im Bachelier Modell

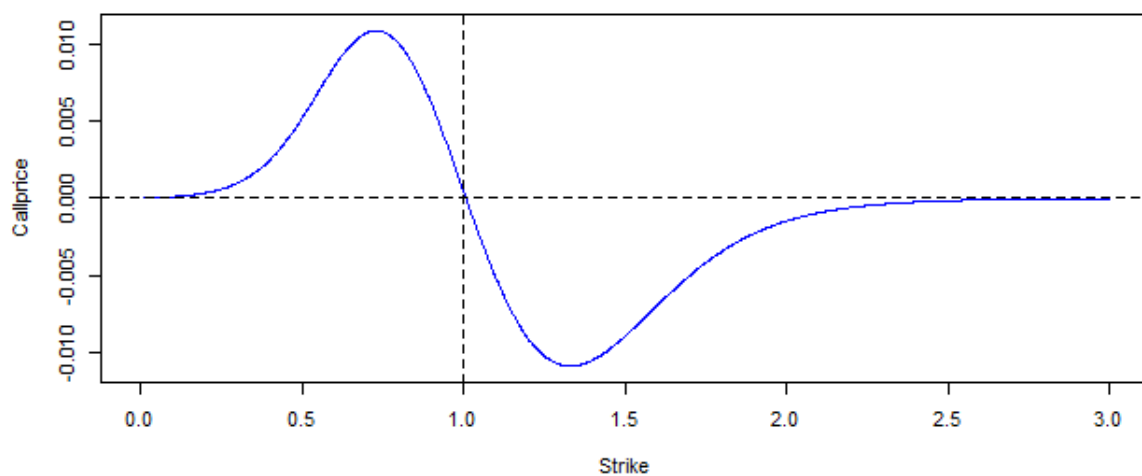
Implied Volatility (B/S) of Bachelier Price as function of Strike
S is 1, tau is 1, r is 0, sigma is 0.3



Bachelier vs. B/S prices as function of Strike
S is 1, tau is 1, r is 0, sigma is 0.3



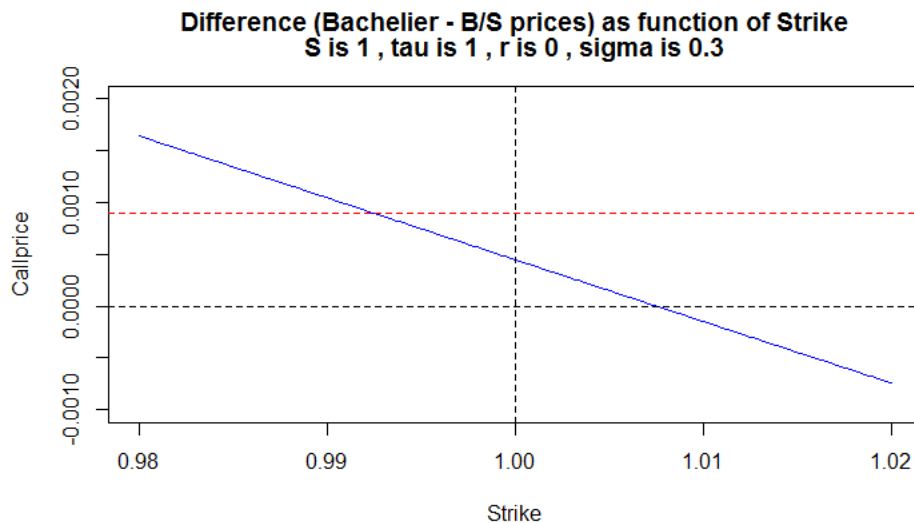
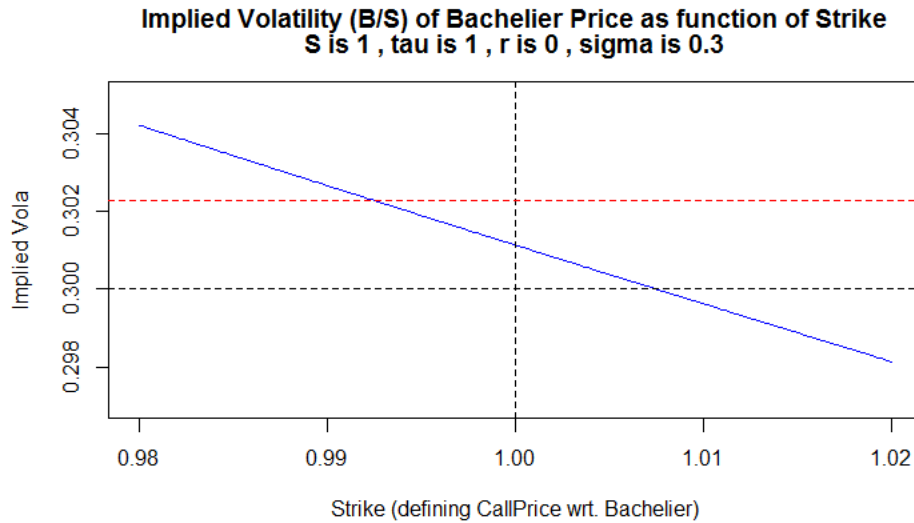
Difference (Bachelier - B/S prices) as function of Strike
S is 1, tau is 1, r is 0, sigma is 0.3



R-Code für die obigen Plots:

http://lb-web-live.de/attachments/File/IVolaBach_Final.r

Es wurde $S = 1$ und $\sigma = 0.3$ gewählt, so dass das Sigma im BS- und Bachelier-Modell zum Zeitpunkt t gleich ist (Vgl. Serie 5 A2) und damit die beiden Modelle vergleichbar sind. Alle 3 Plots wurden zur Veranschaulichung übereinander geplottet, um die Abhängigkeit vom Strike darzustellen. In der gewählten Skalierung könnte man vermuten, dass die B/S- und Bachelier-Preise bei $K = S = 1$ gleich sind, so dass $\sigma^{im}(K)$ für den Bachelier-Preis $\pi(C^{Call}(K))$ den Wert 0.3 liefert. Dass die B/S- und Bachelier-Preise nicht exakt at the Money ($S = K$) gleich sind, sieht man in den folgenden beiden stark vergrößerten Plots.



R-Code für die obigen Plots:

http://lb-web-live.de/attachments/File/IVolaBachZoom_Final.r

Bei der gewählten Schrittweite von 0.0001 für das Strike-Intervall erhält man numerisch $K_{min} = 1.0075$, an dem der Betrag der Differenz zwischen den Bachelier- und B/S-Preisen minimal wird. Exakte Abschätzungen einer At-the-Money Call Option für die Preise π_B (Bachelier) und π_{BS} (B/S) liefert Serie 5 A2, es gilt nämlich:

$$0 \leq \pi_B - \pi_{BS} \leq \frac{X_0}{12\sqrt{2\pi}} \left(\sigma\sqrt{T} \right)^3$$

X_0 entspricht dem Asset S zum Zeitpunkt $t = 0$ und $T = T - t = \tau$ in meinen Plots. Im Plot “Callprice Difference vs. Strike” kennzeichnet die rote horizontale Linie die rechte Schranke aus der obigen Abschätzung. Man sieht sowohl, dass die Differenz $\pi_B - \pi_{BS} \geq 0$ ist, als auch, dass sie unterhalb der Schranke liegt (alles bzgl. ATM).

Analog sieht man im Plot “Implied Volatility vs. Strike”, dass bei $K_{min} = 1.0075$ die implizite Volatilität $\sigma^{im}(K)$ angewandt auf Bachelier-Preise sehr nah bei 0,3 ist (der “tailored Newton Algorithmus” liefert dort 0.3000018). Es ist klar, dass dort, wo die Preise π_B und π_{BS} übereinstimmen, $\sigma_{BS}^{im}(\pi_B) = \sigma_{BS}^{im}(\pi_{BS}) = \sigma = 0,3$ ist (Vgl. Teil i)).

Eine Abschätzung von impliziten Volatilitäten $\sigma_{BS}^{im}(\pi)$ und $\sigma_B^{im}(\pi)$ einer At-the-Money Call Option für einen gegebenen Preis π liefert Serie 5 A2. Dort wird σ_B^{im} als implizite Volatilität im Bachelier-Modell definiert. Analog zu Überlegungen in Teil i) ist $\sigma_B^{im}(\pi(K), x, T - t, K) = \sigma_B$ für alle K , falls $\pi(K)$ Bachelier-Preise der Call-Optionen darstellen, bei fixierten sonstigen Parametern. σ_B ist sinngemäß die Volatilität im Bachelier-Modell. At-the-Money gilt also:

$$0 \leq \sigma_{BS}^{im} - \frac{\sigma_B^{im}}{X_0} \leq \frac{T}{12} (\sigma_{BS}^{im})^3$$

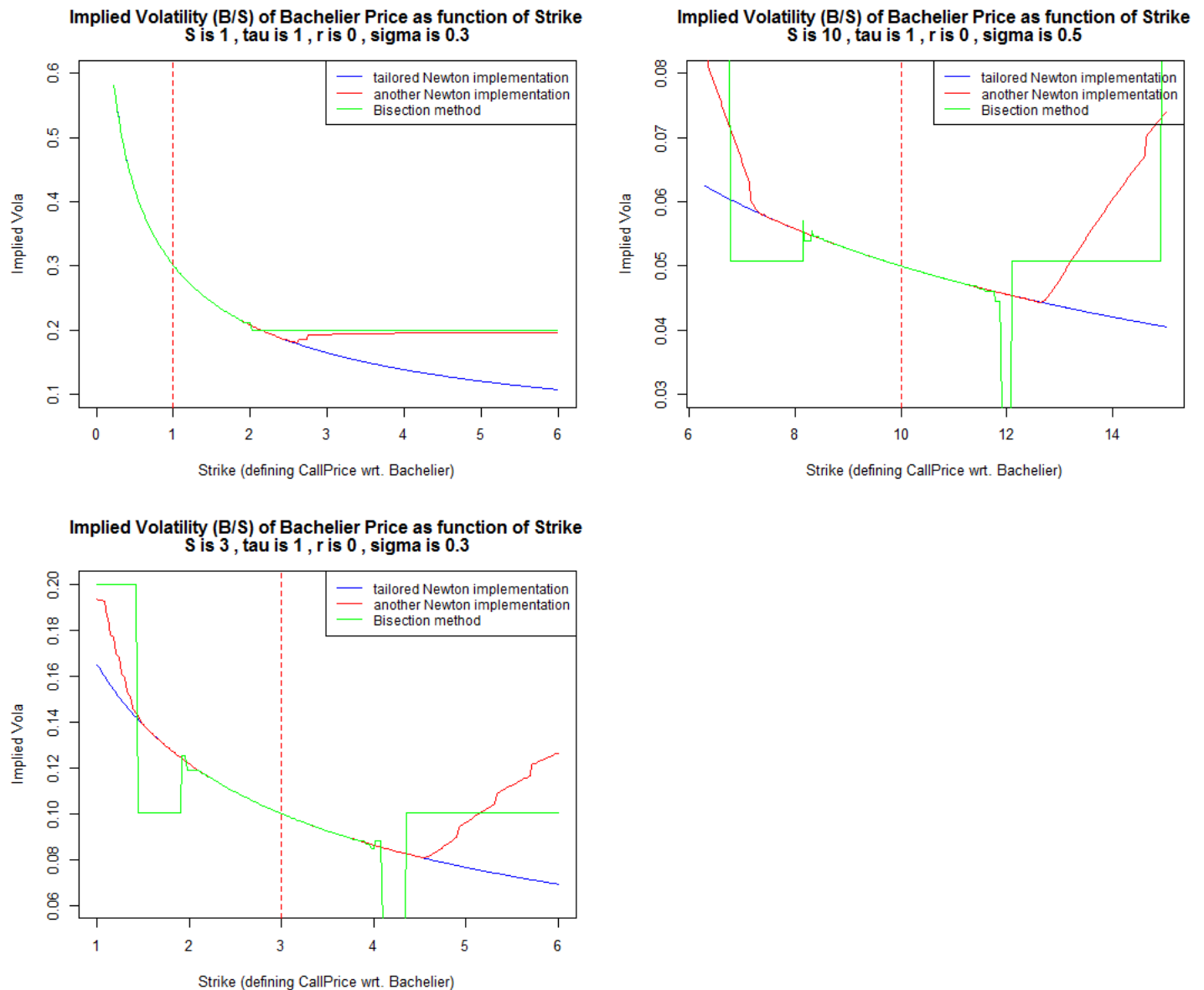
Da $\sigma_B^{im}(\pi(K), x, T - t, K) = \sigma_B = \sigma = 0.3$ (siehe Erläuterungen am Anfang von Teil ii)) und in unserem Fall $X_0 = S = 1$, haben wir damit eine obere und untere Schranke für $\sigma_{BS}^{im}(K)$ in unserem Plot At-the-Money. Es gilt nämlich:

$$0,3 \leq \sigma_{BS}^{im} \leq 0,3 + \frac{T}{12} (\sigma_{BS}^{im})^3 = 0,3 + 0.00227561$$

Der “tailored Newton Algorithmus” liefert als σ_{BS}^{im} den Wert 0.3011339 bei $K=S$ (ATM), was die rechte Seite der Abschätzung festlegt. Im Plot “Implied Volatility vs. Strike” kennzeichnet die rote horizontale Linie die rechte Schranke aus der obigen Abschätzung. Man sieht deutlich, dass σ_{BS}^{im} innerhalb der theoretischen Schranken liegt.

Für Strikes $K > K_{min}$ sind Bachelier-Preise $\pi_B < \pi_{BS}$ (gut erkennbar im 3fach-Plot). Also haben wir $\sigma_{BS}^{im}(\pi_B) < \sigma_{BS}^{im}(\pi_{BS}) = \sigma = 0,3$ (nach Teil i) ist $\sigma_{BS}^{im}(\pi)$ streng wachsend). Analog gilt für Strikes $K < K_{min}$, dass $\sigma_{BS}^{im}(\pi_B) > \sigma_{BS}^{im}(\pi_{BS}) = 0,3$. Insgesamt ergibt sich der charakteristische Verlauf der impliziten Volatilität $\sigma_{BS}^{im}(K)$ der Bachelier-Preise.

Benchmark der Implied Volatility-Algorithmen

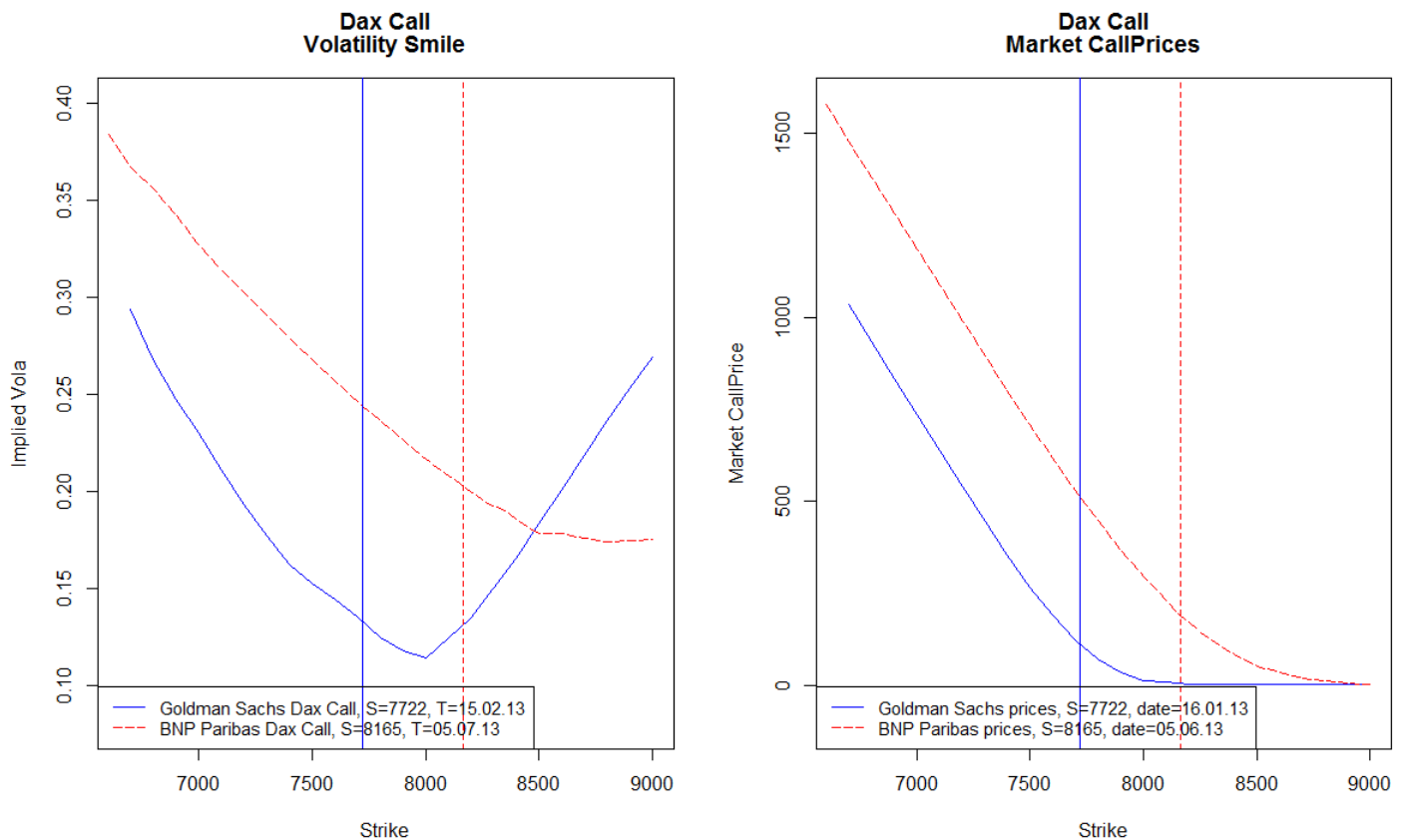


R-Code für die obigen Plots:

http://lb-web-live.de/attachments/File/IVolaBenchmark_Final.r

Das Bild zeigt 3 Plots mit "Benchmarks" für 3 verschiedene Algorithmen für die Implied Volatility. Als Parameter werden S und σ variiert, so dass man zusätzlich auch den Volatility Skew für verschiedene Bachelier-Parameter vergleichen kann.

iii) Volatility smile



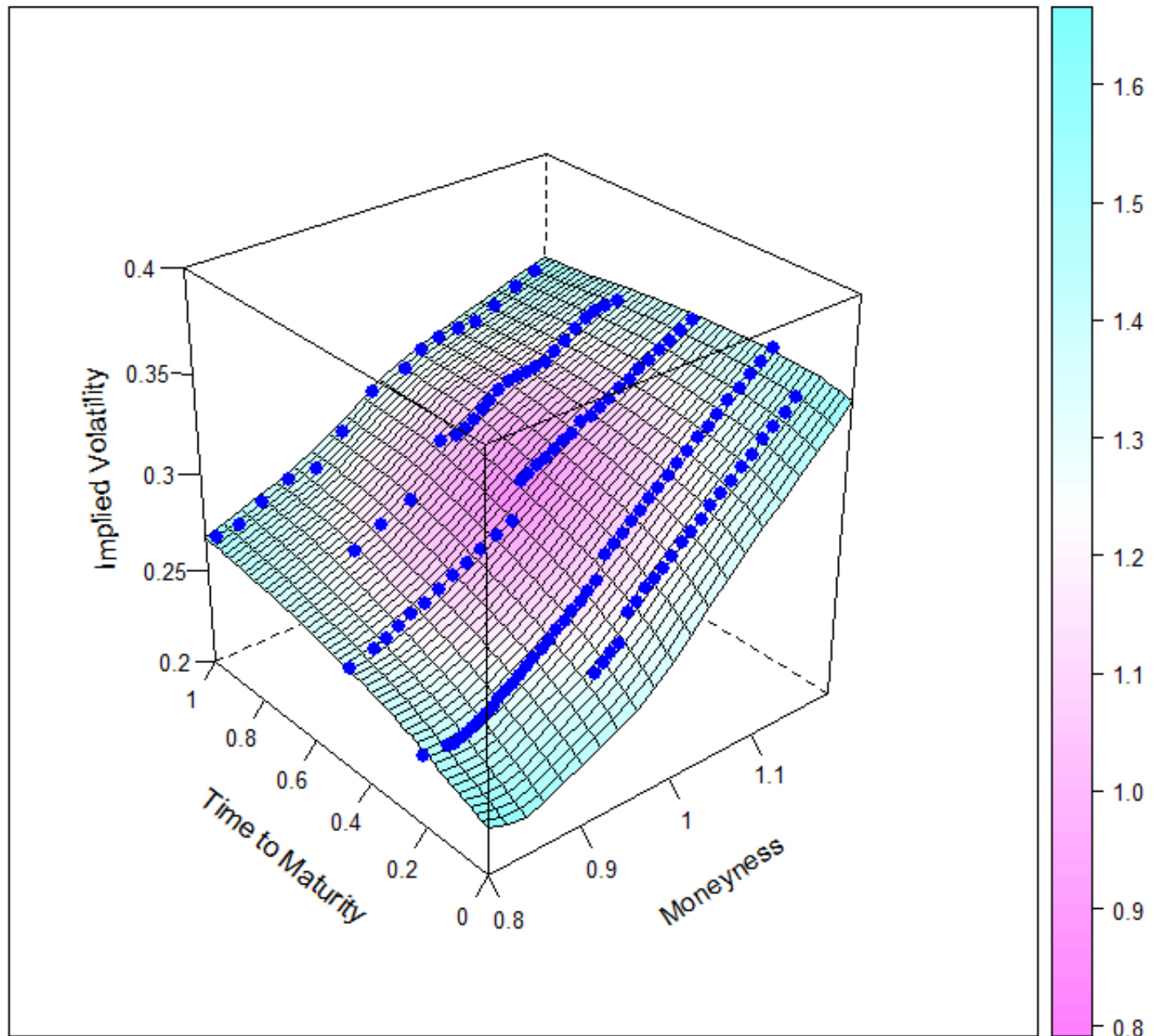
R-Code für diesen Plot:

<http://lb-web-live.de/attachments/File/IVolaSmile.r>

Der sogenannte “Smile” ist deutlich in den beiden Graphen erkennbar. Die zugrunde liegenden Daten von Goldman Sachs Dax Call-Optionen stammen vom 16.01.2013 (www.onvista.de/optionsscheine/suche/), die BNP Paribas Dax Call-Optionen stammen vom 05.06.2013 (www.derivate.bnpparibas.com/DEU/Startseite). Die Maturity ist in beiden Fällen 1 Monat. Der Spotpreis S unterscheidet sich in beiden Fällen deutlich, was auch den unterschiedlichen Verlauf der Volatilität erklärt. Für weitere Parameter siehe den R-Code. Auf der rechten Seite sieht man die Abhängigkeit der Marktpreise der Dax-Calloptionen vom Strike-Preis.

Die impliziten Volatilitäten wurden anhand der Marktpreise und des “tailored Newton Algorithmus” ermittelt, wobei der Smile-Effekt erkennbar wird. Damit wird u.a. deutlich, dass die Annahme einer konstanten Volatilität im BS-Modell in der Praxis nicht zutrifft bzw. dass die Aktienkurse nicht exakt der geometrischen Brownschen Bewegung folgen. Für weitere Details ist z.B. das Buch von J. Hull empfehlenswert.

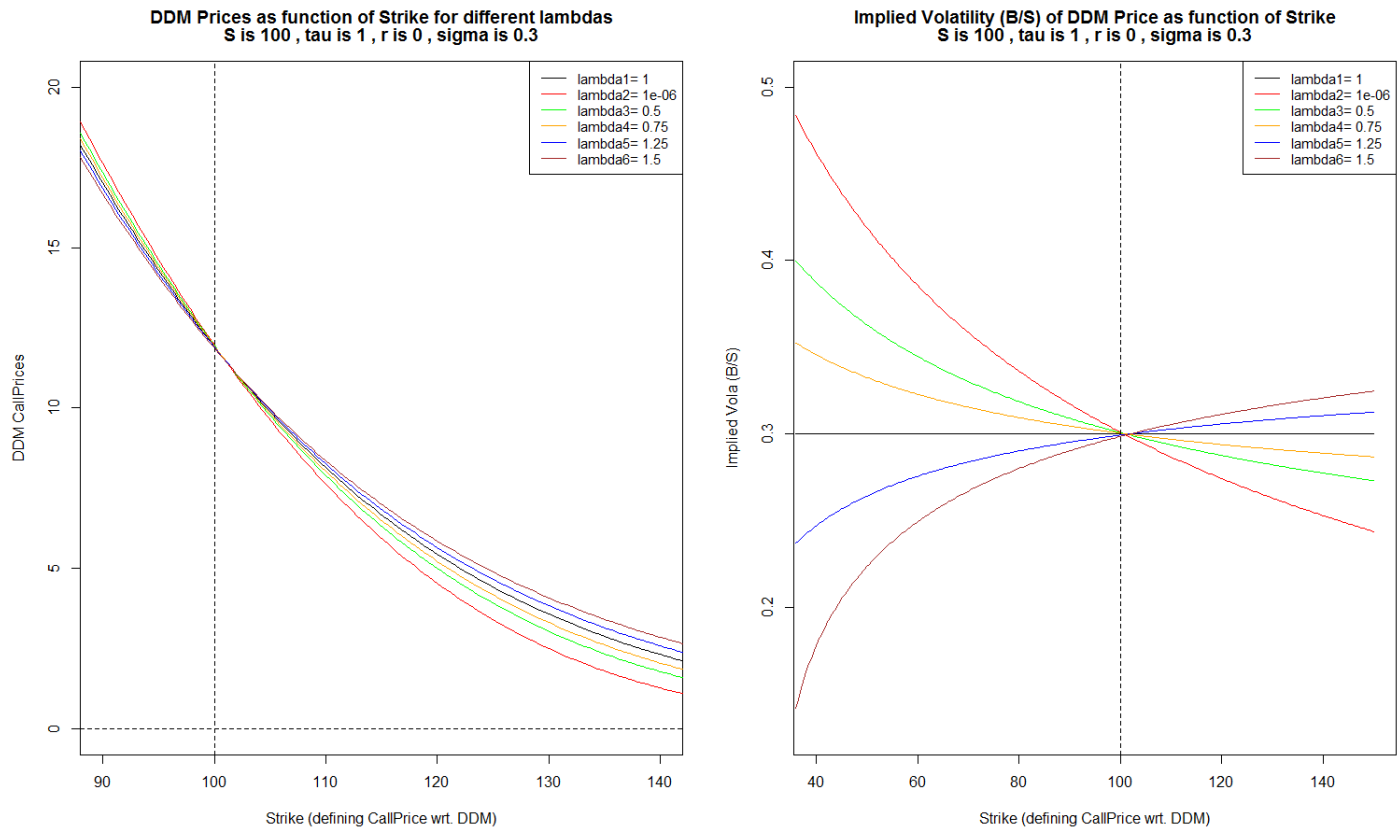
Abhängigkeit der impliziten Volatilität von Moneyness und $\tau = T - t$



Dieser Plot wurde mit R-Code und Datenmaterial erstellt, die unter folgendem Link frei verfügbar sind
<http://sfb649.wiwi.hu-berlin.de/quantnet/index.php?p=show&id=1893>

Mit Moneyness bezeichnet man in den Finanzmärkten das Verhältnis von $\frac{S_t}{K}$, also Spot-Preis durch Strike-Preis. Diesem Plot liegen Dax-Call-Optionen zu Grunde.

Ausblick auf das “Displaced-Diffusion Model”



R-Code für diesen Plot:

<http://lb-web-live.de/attachments/File/IVolaDDP.r>

Das Displaced-Diffusion Modell (DDM), das in Serie 6 A2 eingeführt wird, stellt eine Verallgemeinerung der beiden hier behandelten Modelle dar. In diesem Plot sieht man, dass das DDM für $\lambda = 1$ dem B/S-Modell entspricht, $\sigma_{BS}^{im}(K)$ ist konstant.

Für λ nahe Null (in diesem Fall $\lambda = 0,000001$) entspricht $\sigma_{BS}^{im}(K)$ dem Verlauf des Bachelier-Modells.

Für $0 < \lambda < 1$ erhält man einen Verlauf von $\sigma_{BS}^{im}(K)$, der zwischen den Graphen der impliziten Volatilitäten der Callpreise des B/S- und Bacheliermodells liegt.

Für $\lambda > 1$ erhält man $\sigma_{BS}^{im}(K)$, die monoton wachsend ist mit verschiedenen Steigungen, und die den Verlauf des Bacheliermodells in einem gewissen Sinne an der konstanten Linie $= \sigma$ spiegelt.

Das DDM eignet sich für die Praxis (z.B. equity markets), um den Volatility Skew der Preise flexibel zu kalibrieren.