

## Übungen zur Vorlesung Stochastische Finanzmathematik II

Abgabe bis Do. 20.6. zu Beginn der Vorlesung

**Serie 8** (Version vom 14. Juni 2013)

- 1) Seien  $\tau$  und  $\sigma$  Stoppzeiten. Zeigen Sie

$$\mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma} = \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma.$$

- 2) Sei  $Z$  der RCLL (cadlag) Dichteprozess von einem zu  $P$  absolutstetigen Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q$  (mit  $Q = P$  auf  $\mathcal{F}_0$ ) auf unserem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum und

$$R := \inf\{t \geq 0 \mid Z_t = 0\}.$$

Beweisen Sie die noch ausstehenden Beweisteile von Lemma 56 der Vorlesung:

- i) Für jeden nicht-negativen adaptierten Prozess  $U$  und  $s < t$  gilt  $Q$ -f.s.

$$E_s^Q[U_t] = 1_{\{Z_s \neq 0\}} \frac{1}{Z_s} E_s^P[U_t Z_t]$$

- ii) Sei  $Y$  ein adaptierter Prozess. Dann ist  $Y$  ein lokales  $Q$ -Martingal falls  $(YZ)^R$  ein lokales  $P$  Martingal ist.

- 3) Beweisen Sie: Für jedes stetige lokale Martingal  $M \in \mathcal{M}_{0,loc}^c$  und jedes  $H \in L_{loc}^2(M)$  ist das stochastische Integral  $H \cdot M_t = \int_0^t H dM$  ( $t \geq 0$ ) ein stetiges lokales Martingal aus  $\mathcal{M}_{0,loc}^c$ .

- 4) Sei  $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  eine rechtsstetige Funktion. Es bezeichne  $\pi_n$  eine verfeinernde Folge von Partitionen des Zeitintervalles mit  $|\pi_n| \rightarrow 0$ .

Beweisen Sie: Falls für jede solche Verfeinerungsfolge  $(\pi_n)$  die Summen

$$S_n := \sum_{t_k, t_{k+1} \in \pi_n} h(t_k)(x(t_{k+1}) - x(t_k))$$

für jede stetige Funktion  $h$  konvergieren, ist  $x$  notwendig von endlicher Variation.