

## Übungen zur Vorlesung Stochastische Finanzmathematik II

Abgabe bis Do. 27.6. zu Beginn der Vorlesung

### Serie 9 (Version vom 20. Juni 2013)

- 1) Ein reeller Prozess  $X = (X_t)$  ist “von der Klasse (D)” falls die Familie aller Zufallsvariablen  $\{1_{\{\tau < \infty\}} X_\tau \mid \tau \leq \infty \text{ Stoppzeit}\}$  gleichmäßig integrierbar ist.

Beweisen Sie:

- i) Ein lokales Martingal  $M$  ist ein gleichmäßig integrierbares Martingal genau dann, wenn es von der Klasse (D) ist.
- ii) Zeigen Sie direkt, d.h. *ohne* Verwendung des Novikov oder Kazamaki Kriteriums: Sei  $L$  ein stetiges lokales Martingal mit  $L_0 = 0$ ,  $Y := \mathcal{E}(L)$  und  $\langle L \rangle$  durch eine Konstante  $C$  beschränkt. Dann gilt für jede Stoppzeit  $\tau$  und alle  $1 < p < \infty$

$$E[1_{\{\tau < \infty\}} |Y_\tau|^p] \leq \exp\left(\frac{1}{2}p(p-1)C\right)$$

und  $Y$  ist ein gleichmäßig integrierbares Martingal.

- iii) Zeigen Sie, dass das Kazamaki Kriterium das Novikov Kriterium verallgemeinert: Ist  $L$  ein stetiges lokales Martingale mit  $E[\exp(\langle \frac{1}{2}L \rangle_\infty)] < \infty$  so ist  $\exp(\frac{1}{2}L)$  ein gleichmäßig integrierbares Submartingal.

- 2) i) Seien  $\mathcal{F}^1$  und  $\mathcal{F}^2$  unabhängige  $\sigma$ -Algebren.

Beweisen Sie, dass der lineare Unterraum

$$\mathcal{C} := \text{span} \{G^1 G^2 \mid G^i \in L^\infty(\mathcal{F}^i)\},$$

welcher von den Produkten  $G^1 G^2$  beschränkter  $\mathcal{F}^i$ -messbarer Zufallsvariablen  $G^i$  aufgespannt wird, dicht im Raum  $L^2(\mathcal{F}^1 \vee \mathcal{F}^2)$  liegt (d.h.  $\mathcal{C}$  ist total).

- ii) Seien  $W^1$  und  $W^2$  zwei unabhängige Wienerprozesse auf  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  mit erzeugten Filtrierungen  $(\mathcal{F}_t^{W^1})_{t \geq 0}$  bzw.  $(\mathcal{F}_t^{W^2})_{t \geq 0}$ . Zeigen Sie: Jede quadratintegrierbare  $\mathcal{F}_\infty^{W^1} \vee \mathcal{F}_\infty^{W^2}$ -messbare Zufallsvariable  $H$  besitzt eine eindeutige Darstellung

$$H = E[H] + \int_0^\infty h_t^1 dW_t^1 + \int_0^\infty h_t^2 dW_t^2$$

mit previsiblen  $h^1, h^2$ , so dass  $E \left[ \int_0^\infty (|h_t^1|^2 + |h_t^2|^2) dt \right] < +\infty$ .

3) Berechnen Sie die Itô-Darstellung, d.h. den previsiblen Integranden  $\vartheta \in L^2(W)$  für

$$H = E[H] + \int_0^T \vartheta_t dW_t$$

zu folgenden Funktionalen  $H$  einer Brownschen Bewegung  $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ :

- i)  $W_T^3$ ,
- ii)  $\int_0^T W_t dt$ ,
- iii)  $\int_0^T \exp(\sigma W_t + \mu t) dt \quad (\mu, \sigma \in \mathbb{R})$ .

4) Wir betrachten einen Finanzmarkt mit  $n$  riskanten Wertpapieren  $(S_t^1, \dots, S_t^n)_{t \in [0, T]}$  und einem Bankkonto  $(B_t)_{t \in [0, T]}$ . Ferner sei  $P^*$  ein risikoneutrales Maß, d.h. die diskontierten Preisprozesse  $(S_t^1/B_t, \dots, S_t^n/B_t)_{t \in [0, T]}$  sind Martingale unter  $P^*$ . Ist  $S_t^i > 0$   $P^*$ -f.s. für alle  $t \in [0, T]$  und ein  $i \in \{1, \dots, n\}$ , so kann man (statt  $B$ ) das Wertpapier  $i$  als ein neues Numeraire wählen.

Zeigen Sie:

- i) Es existiert ein Maß  $P^i \sim P$ , so dass die mit  $(S_t^i)$  diskontierten Preisprozesse  $(S_t^1/S_t^i, \dots, S_t^n/S_t^i, B_t/S_t^i)_{t \in [0, T]}$  Martingale unter  $P^i$  sind. Geben Sie den Dichteprozess von  $P^i$  bezüglich  $P^*$  an.
- ii) Für den arbitragefreien Preis  $\pi_t(H) := B_t E^*[H/B_T | \mathcal{F}_t]$  eines Derivates  $H \geq 0$ , berechnet unter  $P^*$ , gilt

$$\pi_t(H) = S_t^i E_{P^i} \left[ \frac{H}{S_T^i} \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad 0 \leq t \leq T,$$

und es gilt die folgende Formel für den Numeraire-Wechsel

$$S_t^i E_{P^i} \left[ \frac{H}{S_T^i} \middle| \mathcal{F}_t \right] = S_t^j E_{P^j} \left[ \frac{H}{S_T^j} \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad 0 \leq t \leq T,$$

für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ .