



Aufgabe 1 (Algebraischer Genauigkeitsgrad von Quadraturformeln). Gegeben sei ein Intervall $[a, b]$ mit äquidistanter Partition $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ und $h := t_{j+1} - t_j = (b - a)/n$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Newton-Côtes-Formeln

$$Q(f) = \sum_{j=0}^n \omega_j f(t_j) \quad \text{mit} \quad \omega_j = \int_a^b \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{t - t_k}{t_j - t_k} dt$$

für Polynome vom Grad $\leq n$ das exakte Integral liefern. Zeigen Sie, dass für *gerades* n sogar Polynome vom Grad $n + 1$ exakt integriert werden.

Hinweis: Verwenden Sie die Fehlerdarstellung der Polynominterpolation und nutzen die Symmetrie bezüglich $(a + b)/2$ aus.

Aufgabe 2 (Elementare Lösungsmethoden). Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme.

- (a) $x'(t) = 2t \sqrt{1 - x(t)^2}$, $x(0) = 0$
- (b) $x'(t) = \exp(t + x(t)) - 1$, $x(0) = 1$
- (c) $x'(t) = t x(t) (x(t)^2 - 1)$, $x(0) = c \in \mathbb{R}$

Aufgabe 3 (Ansatzmethode für lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten).

Bestimmen Sie alle Lösungen $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ des folgenden inhomogenen linearen Differentialgleichungssystems.

$$x'(t) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} x(t) + e^{-t} \begin{bmatrix} 2t \\ 1 \end{bmatrix}$$

Hinweis: Verwenden Sie den Resonanzansatz für die partikuläre Lösung.

Aufgabe 4 (Umlaufbahn im Erde-Mond-System). Ein Satellit befinde sich auf einer

Umlaufbahn im Erde-Mond-System mit relativer Mondmasse $\mu = 1/82.45$. Seine Koordinatenfunktion $t \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ in der Bewegungsebene ist gegeben durch das folgende System zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} x'' &= x + 2y' - (1 - \mu) \frac{x + \mu}{((x + \mu)^2 + y^2)^{3/2}} - \mu \frac{x - (1 - \mu)}{((x - 1 + \mu)^2 + y^2)^{3/2}}, \\ y'' &= y - 2x' - (1 - \mu) \frac{y}{((x + \mu)^2 + y^2)^{3/2}} - \mu \frac{y}{((x - 1 + \mu)^2 + y^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Schreiben Sie dieses System in ein System von vier Gleichungen erster Ordnung um.