Institut für Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin
Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – Wintersemester 2019/20
F. Betrand, S. Puttkammer 19.12.2019

Serie 10 **Diskussion am 10.01.2020**

Aufgabe 1 (Verfahren von Milne). Bestimmen Sie die Konsistenzordnung des folgenden 2-schrittigen Mehrschrittverfahrens

$$y_j - y_{j-2} = \frac{h}{3}\big(f(t_j, y_j) + 4f(t_{j-1}, y_{j-1}) + f(t_{j-2}, y_{j-2})\big) \quad \text{für } j = 2, 3, \ldots$$

Aufgabe 2 (Nullstabilität – Wiederholung). Zeigen Sie, dass ein lineares Mehrschrittverfahren genau dann nullstabil ist, wenn ein $C > 0$ existiert, sodass für alle Lösungen $y_j, j = 0, 1, \ldots$ des Anfangswertproblems

$$y'(t) = 0, \quad y(t_0) = y_0$$

gilt

$$\|y_j\|_\infty \leq C \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}_0.$$

Aufgabe 3 (Konsistenz und Stabilität). Für die Parameter $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, betrachten Sie das lineare 3-Schritt-Verfahren

$$y_j + \alpha y_{j-1} - y_{j-2} - \alpha y_{j-3} = h(\beta f(t_{j-1}, y_{j-1}) + \gamma f(t_{j-2}, y_{j-2}) - \beta f(t_{j-3}, y_{j-3})).$$

Bestimmen Sie die Parameter α, β, γ derart, dass das Verfahren Konsistenzordnung $p = 3$ besitzt. Ist das resultierende Verfahren auch nullstabil?

Aufgabe 4 (Symmetrische Mehrschrittverfahren). Ein Mehrschrittverfahren heißt *symmetrisch*, falls

$$\alpha_{k-j} = -\alpha_j \quad \text{und} \quad \beta_{k-j} = \beta_j \quad \text{für } j = 0, 1, \ldots, k.$$

(a) Zeigen Sie, dass die maximale Konsistenzordnung eines symmetrischen Mehrschrittverfahrens immer gerade ist.
(b) Zeigen Sie, dass alle Nullstellen des charakteristischen Polynoms ρ eines nullstabilen symmetrischen Mehrschrittverfahrens auf dem Einheitskreis liegen.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\rho(0) \neq 0$ und $\rho(\lambda) = -\lambda^k \rho(\lambda^{-1})$.

Aufgabe 5 (Optimale Verfahren). Geben Sie für $k = 1, 2, 3, 4$ jeweils ein optimales Mehrschrittverfahren an, d.h. ein nullstabiles Verfahren mit der maximalen Konsistenzordnung nach der ersten Dahlquist-Schranke.