Institut für Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin
Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – Wintersemester 2019/20
F. Betrand, S. Puttkammer 08.01.2020

Serie 11 **Diskussion am 17.01.2020**

Aufgabe 1. Gegeben sei das lineare Mehrschrittverfahren

$$y_{i+1} + \frac{1}{5}y_i - \frac{6}{5}y_{i-1} = \frac{h}{10}\big(21f(t_i, y_i) + f(t_{i-1}, y_{i-1})\big).$$

(a) Bestimmen Sie die Konsistenzordnung des Verfahrens.
(b) Das Anfangswertproblem $y'(t) = 0$, $y(0) = 1$ soll mit dem obigen Verfahren gelöst werden für die Startwerte $y_0 = 1$ und $y_1 = 1 + \varepsilon h$ mit $\varepsilon > 0$. Geben Sie die Lösung $(y_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ des Verfahrens explizit an und skizzieren sie. Was gilt für $\varepsilon = 0$?
Hinweis: Nutzen Sie die Resultate aus der Vorlesung zur Bestimmung der Basis des Vektorraums, zu dem $(y_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ gehört, und bestimmen die Koeffizienten mit Hilfe der Startwerte.
(c) Ist das Verfahren nullstabil?

Aufgabe 2 (Optimale Mehrschrittverfahren; Rechercheaufgabe). Lesen Sie den Abschnitt „Highest attainable order of stable multistep methods“ im Kapitel III.3 in Hairer, Nørsett, Wanner, „Solving Ordinary Differential Equations I“, Springer, Berlin Heidelberg 1993, und machen sich mit der Argumentation vertraut.
(a) Beschreiben Sie die „Greek-Roman transformation“ für die Variable der charakteristischen Polynome. Zeigen Sie anschaulich, wie sich die Nullstellen verändern.
(b) Präsentieren Sie einen eigenständigen Beweis für Theorem 3.9: Jedes stabile Mehrschrittverfahren der Ordnung $k + 2$ ist symmetrisch. (Gehen Sie wie in der Quelle vor, aber zeigen Sie alle benutzten Resultate direkt anstatt auf Lemmata zu verweisen.)
Hinweis: Die Quelle ist im HU-Netz verfügbar unter
`https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-540-78862-1`

Aufgabe 3 (Satellitenbahn im Erde-Mond-System; praktische Aufgabe). Lösen Sie das Anfangswertproblem aus Serie 1, Aufgabe 4 wie in Serie 4, Aufgabe 2, numerisch. Diesmal mit Hilfe ein konvergentes Mehrschrittverfahren der Ordnung 4.

Aufgabe 4 (Lotka-Volterra Gleichung; praktische Aufgabe). *(a)* Für ein lineares Mehrschrittverfahren

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_{k-j} y_{i+1-j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_{k-j} f_{i+1-j} \quad \text{mit} \quad f_{i+1-j} = f(t_{i+1-j}, y_{i+1-j}),$$

mit konstanten Zeitschritten $h > 0$ ist das *Speicherschema nach Skeel* rekursiv definiert durch

$$\begin{aligned} s_{i+1,k} &:= s_{i,k-1} + \alpha_k y_{i+1} - h\beta_k f_{i+1} = 0, \\ s_{i+1,k-1} &:= s_{i,k-2} + \alpha_{k-1} y_{i+1} - h\beta_{k-1} f_{i+1}, \\ &\vdots \\ s_{i+1,1} &:= s_{i,0} + \alpha_1 y_{i+1} - h\beta_1 f_{i+1}, \\ s_{i+1,0} &:= \alpha_0 y_{i+1} - h\beta_0 f_{i+1}. \end{aligned}$$

Vgl. [R.D. Skeel, Math. Comp. 33, 1979] und beachte die umgekehrte Nummerierung der Koeffizienten α_j und β_j dort. Zeigen Sie, dass zur rekursiven Auswertung des obigen Mehrschrittverfahrens, die Speicherung des Vektors $s_{i+1} = (s_{i+1,0}, \ldots, s_{i+1,k-1})^\top$ genügt.
Hinweis: Es ist zu zeigen, dass tatsächlich $s_{i+1,k} = 0$ und dass sich daraus stets y_{i+1} berechnen lässt.
(b) Die zeitabhängige Population y_1 von Mäusen und y_2 von Katzen in Berlin soll durch das Räuber-Beute-Modell nach Lotka und Volterra beschrieben werden

$$\begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a y_1(t)\,(1 - y_2(t)) \\ -c y_2(t)\,(1 - y_1(t)) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

mit den Konstanten $a = 2$ und $c = 1$. Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ gibt es dreimal so viele Mäuse wie Katzen. Gesucht ist der Zeitpunkt $t_{\text{gleich}} > 0$, zu dem es erstmalig mehr Katzen als Mäuse gibt. Dazu genügt das sparsame Speicherschema nach Skeel, da die gesamte vorherige Populationsentwicklung nicht aufgehoben werden muss.
Implementieren Sie ein konvergentes Mehrschrittverfahren Ihrer Wahl ($k \geq 2$) mit dem Speicherschema nach Skeel und berechnen Sie t_{gleich} damit.