



Aufgabe 1 (Linear implizites Eulerverfahren). Das autonome Anfangswertproblem $y'(t) = f(y(t))$, $y(0) = y_0$ soll mit dem linear impliziten Eulerverfahren gelöst werden

$$y_{i+1} = y_i + hk_1 \quad \text{mit} \quad k_1 = J(y_i + hk_1) + (f(y_i) - Jy_i) \quad \text{und} \quad J := \partial_y f(y_i).$$

(a) Bestimmen Sie die Konsistenzordnung des Verfahrens.

(b) Bestimmen Sie die Stabilitätsfunktion des Verfahrens. Ist das Verfahren A-stabil?

Hinweis: Wenden Sie das Verfahren auf die Testgleichung $y'(t) = \lambda y(t)$ an und geben die Schritte des Verfahrens in der Form $y_i = R(h\lambda)^i y_0$ an.

Aufgabe 2. Für welche $0 \leq \theta \leq 1$ ist das θ -Schema A-stabil? Begründen Sie.

Aufgabe 3. Für einen Parameter γ , sei das folgende diagonal implizite Runge-Kutta-Verfahren gegeben

$$\begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma & \\ 1 + \gamma & 1 & \gamma \\ \hline & \frac{1}{2} + \gamma & \frac{1}{2} - \gamma \end{array}.$$

(a) Bestimmen Sie die Konsistenzordnung des Verfahrens. Ist die Konsistenzordnung abhängig von γ ?

(b) Geben Sie die Stabilitätsfunktion des Verfahrens an.

Aufgabe 4 (Zusammenhang von Schrittweite und Konsistenzordnung). Zur Lösung des Anfangswertproblems $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(0) = y_0$ soll ein Einschrittverfahren der Ordnung p verwendet werden. Nehmen Sie an, dass Konstanten $T_0 > 0$ und $C > 0$ existieren, sodass das Verfahren für jeden Schritt die Rechenzeit pT_0 benötigt und die gesuchte Funktion zum Zeitpunkt $t_{\max}$ mit einem Fehler von Ch^p approximiert. Die Konstanten T_0 und C seien vom jeweiligen Verfahren unabhängig.

(a) Bestimmen Sie für einen vorgegebenen Fehler $0 < \varepsilon \leq C$ in $t = t_{\max}$ die größtmögliche Schrittweite $h = h(p, \varepsilon)$ und die zugehörige Gesamt-Rechenzeit $T = T(p, \varepsilon)$.

(b) Wie verhält sich T in Abhängigkeit von p und welches ist die optimale Konsistenzordnung $p_{\text{opt}} = p_{\text{opt}}(\varepsilon)$? Wie verhält sich p_{opt} in Abhängigkeit von ε ?

Hinweis: Sie können zur Vereinfachung annehmen, dass die Zahlen p und N mit $h = (t_{\max} - t_0)/N$ reell gewählt werden können.

Aufgabe 5 (Stabilität eines linearen Mehrschrittverfahrens). Für konstante Schrittweite $h > 0$, betrachten Sie das lineare Mehrschrittverfahren

$$\frac{1}{2}(3y_{i+1} - 4y_i + y_{i-1}) = hf(t_{i+1}, y_{i+1}) \quad \text{für } i = 1, 2, 3, \dots$$

Wenden Sie das Verfahren zur Lösung der Testgleichung $y'(t) = \lambda y(t)$, $y(0) = 1$ für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit den Startwerten $y_0 = 1$ und $y_1 = e^{\lambda h}$ an.

(a) Berechnen die Lösungen y_i explizit in der Form

$$y_i = \alpha \xi_1^i + \beta \xi_2^i$$

für geeignete Nullstellen $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C}$ des sogenannten erzeugenden Polynoms

$$\frac{1}{2}(3\xi^2 - 4\xi + 1) = h\lambda\xi^2.$$

Bestimmen Sie die Koeffizienten α und β mittels der exakten Startwerte des Verfahrens. (Vgl. Aufgabe 4.3)

(b) Für welche $\lambda \in \mathbb{C}$ und $h > 0$ liefert das Verfahren beschränkte Lösungen? (Die Menge dieser $h\lambda \in \mathbb{C}$ bilden das Stabilitätsgebiet des Verfahrens.)

Aufgabe 6 (Randwertproblem). Gegeben sei das folgende Randwertproblem auf dem Intervall $[0, 3]$

$$u''(t) = 100u(t), \quad u(0) = 1, \quad u(3) = e^{-30}.$$

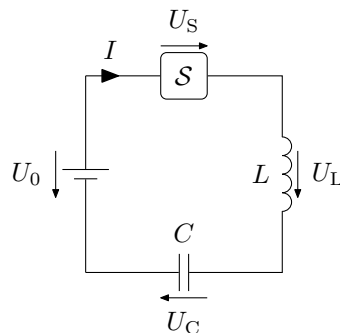
(a) Lösen Sie das Problem mit dem einfachen Schießverfahren. Berechnen Sie dazu explizit die Lösung $y_s(t)$ des Anfangswertproblems

$$y''(t) = 100y(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = s$$

und bestimmen $s = s^*$ derart, dass $y_{s^*}(3) = e^{-30}$. Wie groß ist der relative Fehler in $t = 3$, wenn s^* einen relativen Fehler $\varepsilon > 0$ besitzt?

(b) Lösen Sie das Problem mit dem Differenzenverfahren. Geben Sie dazu das lineare Gleichungssystem zur Bestimmung der Werte u_j von $u(t_j)$ in den äquidistant verteilten Knoten $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 3$ an.

Aufgabe 7 (Van-der-Pol-Gleichung; Modellierung). Gegeben sei folgender vereinfachter Schaltkreis eines van-der-Pol-Oszillators.



Am Halbleiter (engl. „semiconductor“) gilt statt des Ohmschen Gesetzes folgender nichtlinearer Zusammenhang zwischen Spannung und Stromfluss mit einem Parameter $\mu > 0$

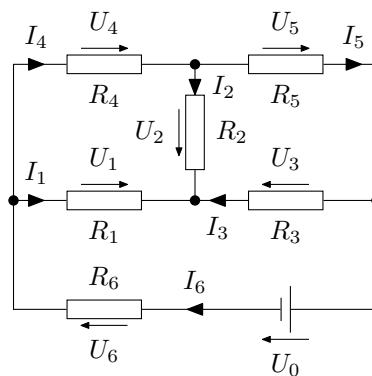
$$U_S(t) = I(t) (I(t)^2 - \mu).$$

(a) Leiten Sie daraus und aus den bekannten Gesetzmäßigkeiten das van-der-Pol-System erster Ordnung her (vgl. Serie 4, Aufgabe 4)

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} U_C(t) \\ I(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} I(t) \\ \frac{1}{L} (\mu - I(t)^2) I(t) - \frac{1}{L} U_C(t) + \frac{U_0}{L} \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} I(t) \\ U_L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} (\mu - 3 I(t)^2) U_L(t) - \frac{1}{C} I(t) \end{bmatrix}.$$

(b) Stellen Sie ein explizites und ein implizites Einschrittverfahrens derselben Ordnung zum Lösen Sie eines der obigen Systeme mit den Anfangswerten $I(0) = 0$ und $U(0) = U_0$ auf. Schreiben Sie im Pseudocode ein Programm zur Lösung dieser Aufgabe und dem Plotten des Phasenporträts Ihrer Lösungen in der I - U -Ebene für geeignete Wahlen der Parameter C , L und μ sowie der Startwerte.

Aufgabe 8 (Netzwerkanalyse; Modellierung). *Vorbetrachtung:* Gegeben sei folgendes lineares Netz einer Wheatstone-Brücke



In allen Elementen gilt das Ohmsche Gesetz $U_k(t) = R_k I_k(t)$, $k = 1, \dots, 6$. Die 12 Unbekannten $[I, U]^\top := (I_1, \dots, I_6, U_1, \dots, U_6)^\top$ erfüllen also die 6 algebraischen Gleichungen

$$\begin{bmatrix} \text{diag}(R_1, \dots, R_6) & -I_{6 \times 6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ U \end{bmatrix} = 0. \quad (1)$$

Die Knotenregel liefert

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ U \end{bmatrix} = 0,$$

wobei die Gleichung am 4. Knoten linear abhängig von den vorherigen ist. Mit der Maschenregel folgt

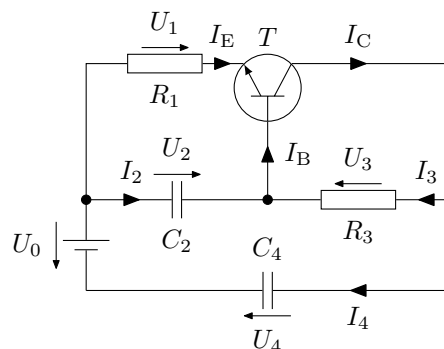
$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ U_0 \end{bmatrix}.$$

Insgesamt erhalten wir ein wohlgestelltes lineares System $M[I, U]^T = B$. Für weitere Details zu dieser Analyse siehe M. Marinescu, J. Winter, „Grundlagenwissen Elektrotechnik“, Vieweg+Teubner, Wiesbaden 2011, Abschnitt 7.1, verfügbar im HU-Netz unter

<https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-8348-9957-6>

Wenn das Netzwerk dynamische Elemente wie Spulen oder Kondensatoren enthält, so beinhaltet die Gleichung (1) Ableitungen der Form $U_k(t) = L_k \frac{d}{dt} I_k(t)$ oder $I_k(t) = C_k \frac{d}{dt} U_k(t)$. Aus dem gesamten System $M[I, U]^T = B$ wird ein sogenanntes differential-algebraisches Gleichungssystem (DAE). Bei nichtlinearen Bauteilen wie Halbleitern wird das System nichtlinear.

Aufgabe: Betrachten Sie nun folgende Schaltung mit einem npn-Transistor T .



Der Basisstrom I_B an diesem aktiven Bauelement regelt, wie viel Strom durch den Transistor fließt (in waagerechter Richtung von rechts nach links). Es gelte $I_C = \alpha I_E$ mit dem Verstärkungsfaktor $\alpha > 0$.

Stellen sie das differential-algebraische Gleichungssystem auf, das den obigen dynamischen Schaltkreis modelliert. Sie können dazu den Transistor durch folgende Ersatzschaltung mit einem Widerstand und einer Stromquelle ersetzen

