Serie 2 **Diskussion am 01.11.2019**

Aufgabe 1 (Satz von Peano und Satz von Picard-Lindelöf). Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ und $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig auf $I \times B(y_0, r)$ für $B(y_0, r) := \{y \in \mathbb{R}^n \ : \ |y - y_0| < r\}$ mit $r > 0$. Wähle $s > 0$ derart, dass $M(s, r)s \leq r$ mit

$$M(s, r) := \max\{|f(t, y)| \ : \ (t, y) \in [t_0, t_0 + s] \times B(x_0, r)\}$$

und setze $I_0 := [t_0, t_0 + s]$. Die stetigen Funktionen $C(I_0; \mathbb{R}^n)$ sind vollständig bezüglich der Supremumsnorm

$$\|y\|_\infty := \max_{t \in I_0} |y(t)| \quad \text{für } y \in C(I_0; \mathbb{R}^n).$$

(a) Zeigen Sie, dass die Teilmenge $Y := \{y \in C(I_0; \mathbb{R}^n) \ : \ \|y - y_0\|_\infty \leq r\} \subset C(I_0; \mathbb{R}^n)$ abgeschlossen, beschränkt und konvex ist.
(b) Zeigen Sie für den Operator $T : Y \to C(I_0; \mathbb{R}^n)$ mit

$$(Ty)(t) := y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, \mathrm{d}s \quad \text{für } t \in I_0,$$

dass T stetig ist und $T(Y) \subset Y$.
(c) Falls f Lipschitz-stetig bezüglich der zweiten Komponente y ist, zeigen Sie, dass T eine Kontraktion ist.

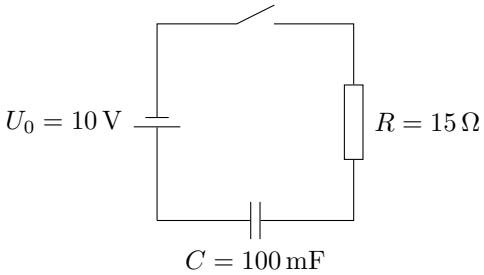
Aufgabe 2. Gegeben sei $f(t, y) = y^{1/3}$. Zeigen Sie, dass beliebig viele Lösungen zum folgenden Anfangswertproblem existieren

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(0) = 0.$$

Wie viele Lösungen gibt es für einen Anfangswert $y(0) > 0$?
Hinweis: Geben Sie die Lösungen explizit an und rechnen nach, dass sie das Anfangswertproblem erfüllen.

Aufgabe 3 (Fortsetzbarkeit von Lösungen). Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme und untersuchen Sie, ob sich Ihre Lösung zu einer globalen Lösung fortsetzen lässt.
(a) $y'(t) = y(t)^2$ für $t \in \mathbb{R}$ und $y(1) = -1$,
(b) $y'(t) = -2t\, y(t)^2$ für $t \in \mathbb{R}$ und $y(1) = 1/2$.

Aufgabe 4 (Modellierung: Aufladen eines Kondensators über einen Widerstand). Gegeben sei folgender elektrischer Schaltkreis mit einer Gleichspannungsquelle mit konstanter Spannung $U_0 = 10\,\mathrm{V}$, einem Schalter, einem Widerstand mit $R = 15\,\Omega$ und ein Kondensator mit Kapazität $C = 100\,\mathrm{mF}$.



Sobald der Stromkreis am Schalter geschlossen wird, wird der Kondensator aufgeladen, d.h. die Ladung $Q(t)$ wächst mit der Zeit t bis zum Erreichen der maximalen Ladung

$$Q_\infty = C\,U_0.$$

Der Widerstand im Stromkreis sorgt für eine Verzögerung des Aufladens. Die momentane Stromstärke ist damit gleich der infinitesimalen Änderung der Ladung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Q(t) = I(t).$$

Für die Spannung U_R am Widerstand gilt nach dem Ohmschen Gesetz

$$U_\mathrm{R}(t) = R\,I(t).$$

Die Spannung $U_\mathrm{C}(t)$ am Kondensator wirkt entgegen der Spannung U_0 und lautet

$$U_\mathrm{C}(t) = \frac{Q(t)}{C}$$

Nach dem 2. Kirchhoffschen Gesetz (Maschenregel) addieren sich die Spannungen im Stromkreis unter Berücksichtigung der Richtung zu Null

$$0 = U_0 - U_\mathrm{R}(t) - U_\mathrm{C}(t).$$

Leiten Sie aus dieser Gleichung und den vorher beschriebenen physikalischen Gesetzmäßigkeiten eine gewöhnliche Differentialgleichung in Q her. Lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem mit $Q(t_0) = 0\,\mathrm{C}$. Nach wie vielen Sekunden ist der Kondensator zu 95% aufgeladen?