Serie 3 **Diskussion am 08.11.2019**

Aufgabe 1 (Fixpunktiteration für das implizite Euler-Verfahren). Gegeben sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C(I \times D)$ Lipschitz-stetig in y, also

$$\exists L > 0 \, \forall y, z \in D \, \forall t \in I = [t_0, T], \; |f(t, y) - f(t, z)| \leq L|y - z|,$$

wobei $|\cdot|$ die euklidische Norm in $\mathbb{R}^n$ bezeichne. Das implizite Euler-Verfahren mit der Vorschrift

$$u_{j+1} = u_j + h\, f(t_{j+1}, u_{j+1})$$

soll für die Zeitschritte $t_j = t_0 + jh$, $j = 0, \ldots, N$ mittels Fixpunktiteration gelöst werden.

(a) Formulieren Sie die Fixpunktiteration im Pseudocode.
(b) Zeigen Sie, dass die Fixpunktiteration konvergiert, falls $h < 1/L$.
(c) Geben Sie eine Funktion f an, sodass die Fixpunktiteration im Fall $h = 1/L$ divergiert.

Aufgabe 2 (Erhaltungseigenschaften von Einschrittverfahren). Neben der Genauigkeit kann auch die Erhaltung bestimmter Eigenschaften der exakten Lösung bei der numerischen Lösung relevant bei der Entscheidung für ein Verfahren sein. Betrachten Sie das lineare Anfangswertproblem

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y(t), \quad y(0) = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für } r > 0.$$

Die zugehörige exakte Lösung ist die Parametrisierung des Kreises $y(t) = r\,(\cos t, \sin t)^\top$.

(a) Zeigen Sie, dass für die Schritte y_j des expliziten Euler-Verfahrens und $\widetilde{y}_j$ des impliziten Euler-Verfahrens zur festen Schrittweite h folgendes gilt

$$\lim_{j\to\infty} |y_j| = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{j\to\infty} |\widetilde{y}_j| = 0.$$

(b) Zeigen Sie, dass alle Schritte y_j der Trapezregel (Crank-Nicolson-Verfahren) auf dem Kreis liegen, also $|y_j| = r$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 3 (Konsistenzordnung des Heun-Verfahrens). Angenommen f sei stetig differenzierbar bezüglich y. Zeigen Sie, dass das Heun-Verfahren eine Konsistenzordnung von 2 besitzt.
Hinweis: Verwenden Sie die Analysen der Konsistenzordnung des Crank-Nicolson-Verfahrens und des expliziten Euler-Verfahrens.

Aufgabe 4 (Fehlerberechnung; praktische Aufgabe). Auf dem Intervall $I = [3/2, 3]$ sei folgendes Anfangswertproblem gegeben

$$y'(t) = \frac{3}{t}y + \frac{1}{t^2}y^2 \quad \text{mit} \quad y(3/2) = -27.$$

Für das explizite Euler-Verfahren mit Schritten y_j soll der globale Fehler

$$e(h) := \max_{j=0,\dots,N(h)} |y(t_j) - y_j|$$

betrachtet werden. Es werde angenommen, dass $e(h)$ für kleine h beschränkt ist durch Ch mit einer Konstanten $C > 0$.

(a) Berechnen Sie die exakte Lösung des Anfangswertproblems.
Hinweis: Verwenden Sie zur Lösung der Bernoulli'schen Differentialgleichung die Substitution $z(t) = 1/y(t)$.

(b) Bestimmen Sie C experimentell, indem Sie $e(h)$ für verschiedene Schrittweiten h numerisch berechnen.
Hinweis: Sie können das Skript von der Vorlesungshomepage verwenden.

(c) Der Fehler $e(h)$ kann als Funktion in Abhängigkeit von N wie folgt aufgefasst werden

$$\tilde{e}(N) = e\Big(\frac{3}{2N}\Big).$$

Plotten Sie $\tilde{e}(N)$ für $N = 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$ in einem loglog-Plot.
Hinweis: Sie können die `matplotlib`-Funktion

```
matplotlib.pyplot.loglog(N, e)
```

benutzen mit

```
N = numpy.array([10**2, 10**3, 10**4, 10**5, 10**6])
```

und den Fehler-Array `e` $\in \mathbb{R}^5$.