Institut für Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin
Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – Wintersemester 2019/20
F. Betrand, S. Puttkammer 06.11.2019

Serie 4 **Diskussion am 15.11.2019**

Aufgabe 1 (Konsistenzordnung des θ-Schemas). Zeigen Sie für den Konsistenzfehler des θ-Schemas mit $\theta \in [0,1] \setminus \{1/2\}$ und

$$\hat{y} = y_0 - hf(t_0 + \theta h, y_0 + \theta(\hat{y} - y_0)),$$

dass für jedes (t_0, y_0) gilt

$$|y_{t_0,y_0}(t_0 + h) - \hat{y}| \leq Ch^2.$$

Hinweis: Betrachten Sie den Abschneidefehler $R(h) := y_{t_0,y_0}(t_0 + h) - y_0 - hf\big(t_0 + \theta h, y_0 + \theta(y_{t_0,y_0}(t_0 + h) - y_0)\big)$.

Aufgabe 2 (Satellitenbahn im Erde-Mond-System; praktische Aufgabe). Lösen Sie das Anfangswertproblem aus Serie 1, Aufgabe 4

$$\begin{aligned} x'' &= x + 2y' - (1-\mu)\frac{x+\mu}{((x+\mu)^2 + y^2)^{3/2}} - \mu\frac{x-(1-\mu)}{((x-1+\mu)^2 + y^2)^{3/2}}, \\ y'' &= y - 2x' - (1-\mu)\frac{y}{((x+\mu)^2 + y^2)^{3/2}} - \mu\frac{y}{((x-1+\mu)^2 + y^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

mit der relativen Mondmasse $\mu = 1/82.45$ und den Anfangswerten

$$x(0) = 1.2, \quad x'(0) = y(0) = 0, \quad \text{und} \quad y'(0) = -1.049357509830350$$

numerisch mit Hilfe folgender Verfahren

1. explizites Eulerverfahren,
2. implizite Trapezregel (Crank-Nicolson),

Verwenden Sie die Umformulierung in ein System erster Ordnung.
Geben Sie die Bahnkurven in der x-y-Ebene in einem gemeinsamen Plot aus. Wählen Sie den Zeithorizont $t_{\max}$ hinreichend groß, um entscheiden zu können, ob die approximierte Lösung eine periodische Bahnkurve bildet.
Vergleichen Sie unterschiedliche Schrittweiten $h = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$.

Aufgabe 3 (Konsistenzordnung expliziter RK-Verfahren). Bestimmen Sie die Konsistenzordnung der folgenden Runge-Kutta-Verfahren mit Hilfe der algebraischen Bedingungen aus der Vorlesung.

(i)

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & & \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \\ \hline & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}$$

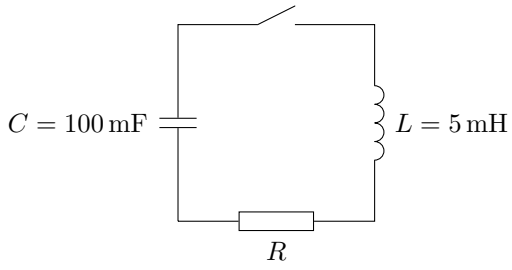
(ii) RK4

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{array}$$

(iii) 3/8-Regel

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & & \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & & \\ 1 & 1 & -1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{array}$$

Aufgabe 4 (Modellierung: Idealer und gedämpfter RLC-Schwingkreis). Gegeben sei folgender elektrischer Schaltkreis mit einem aufgeladenen Kondensator mit Kapazität $C = 100\,\mathrm{mF}$ und Ladung $Q_0 = 1\,\mathrm{C}$, einem Schalter, einer Spule mit Induktivität $L = 5\,\mathrm{mH}$ und einem Widerstand R.



Sobald der Stromkreis am Schalter geschlossen wird, wird der Kondensator entladen. Nehmen Sie zunächst einen verlustfreien Stromfluss an, also den Widerstand $R = 0\,\Omega$. Sobald der Strom fließt, wird an der Spule eine Spannung induziert

$$U_\mathrm{L} = L\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I(t),$$

die dem Strom aus dem Kondensator *entgegen* wirkt (Lenzsche Regel). Es gilt zudem wieder das 2. Kirchhoffschen Gesetz (Maschenregel)

$$0 = U_\mathrm{C}(t) + U_\mathrm{L}(t).$$

Leiten Sie aus diesen physikalischen Gesetzmäßigkeiten und den bereits bekannten aus Aufgabe 4 in Serie 2 eine gewöhnliche Differentialgleichung in I her. Skizzieren Sie die Lösung des zugehörige Anfangswertproblem mit $I(t_0) = 0\,\mathrm{A}$ sowie U_C und diskutieren den Ent- und Aufladeprozess. Wie oft wird der Kondensator in einer Sekunde ent- und wieder aufgeladen? Welche Änderungen ergeben sich, wenn in einem realen Schaltkreis ein Widerstand $R > 0$ vorliegt?