Serie 7 **Diskussion am 06.12.2019**

Aufgabe 1 (Lösbarkeit nichtlinearer Gleichungen bei impliziten RK-Verfahren). Sei $f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ und Lipschitz-stetig in der zweiten Komponente, d.h. es existiert ein $L > 0$ mit

$$|f(t,y) - f(t,\hat{y})| \leq L|y - \hat{y}| \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R} \text{ und } y, \hat{y} \in \mathbb{R}^d. \tag{1}$$

Gegeben sei ein s-stufiges implizites RK-Verfahren mit dem Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|c} c_i & a_{ij} \\ \hline & b_j \end{array} \quad i,j = 1,\dots,s$$

(a) Beschreiben Sie die Berechnung der Stufen k_i, $i = 1,\dots,s$ des impliziten Verfahrens als Fixpunktgleichung $\Phi(K) = K$ einer Funktion $\Phi : \mathbb{R}^{sd} \to \mathbb{R}^{sd}$ mit

$$K = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{sd}.$$

(b) Zeigen Sie, dass die Bedingung

$$hL \max_{i=1,\dots,s} \sum_{j=1}^{s} |a_{ij}| < 1$$

hinreichend für die Existenz einer Lösung der Fixpunktgleichung aus Aufgabenteil (a) ist.
Hinweis: Der Raum $\mathbb{R}^{sd}$ sei versehen mit der Norm $\|K\| = \max_{i=1,\dots,s} |k_i|$, wobei $|\cdot|$ die Norm des $\mathbb{R}^d$ aus der Lipschitz-Bedingung (1) ist.
(c) Formulieren Sie ein Newton-Verfahren zur Lösung der Gleichung $\Phi(K) = K$. Berechnen Sie insbesondere die erforderliche Jacobi-Matrix.

Aufgabe 2 (Vergleich von Fixpunktiteration und Newton-Verfahren). Zur Lösung des Anfangswertproblems $y'(t) = \lambda y(t)$, $y_0 = 1$ mit $\lambda = 10$ soll das implizite Eulerverfahren

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

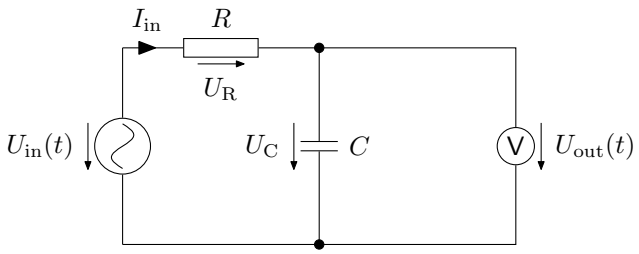
verwendet werden.
(a) Zeigen Sie, dass sich die Stufe k_1 des impliziten Verfahrens genau dann bestimmen lässt, wenn $\lambda h \neq 1$.
(b) Zeigen Sie, dass die Fixpunktiteration zur Berechnung von k_1 für alle Startwerte konvergiert, wenn $h\lambda < 1$. (Vgl. Aufgabe 1 (b))
(c) Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren zur Berechnung von k_1 nur eine Iteration benötigt. (Vgl. Aufgabe 1 (c))

Aufgabe 3 (Diagonalisierung der Systemmatrix). Sei $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ diagonalisierbar mit den Eigenwerten $\operatorname{spec}(A) = \{\lambda_i \in \mathbb{C} \ : \ i = 1, \dots, d\}$. Formen Sie ein allgemeines Runge-Kutta-Verfahren zur Lösung der Differentialgleichung $y'(t) = Ay(t)$ in ein Runge-Kutta-Verfahren in diagonalisierter Form um

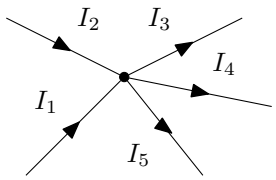
$$\tilde{y}_i'(t) = \lambda_i \, \tilde{y}_i(t), \quad i = 1, \dots, d,$$

wobei $\tilde{y}_i$ die i-te Komponente des Vektors $\tilde{y}$ bezeichnet. Das heißt, dass sich unter geeigneter Koordinatentransformation das Runge-Kutta-Verfahren *komponentenweise* durchführen lässt.

Aufgabe 4 (RC-Tiefpass Schaltung; Modellierung). Die sich zeitlich ändernde Spannung, kann als elektrisches Signal zur Informationsübertragung betrachtet werden. Der folgende Schaltkreis mit zwei Maschen verändert eine Eingangsspannung U_{in} und gibt eine Ausgangsspannung U_{out} am Spannungsmessgerät rechts aus.



An Verzweigungen elektrischer Netzwerke (Knoten) gilt das 1. Kirchhoffsches Gesetz (Knotenregel). Es besagt, dass sich an einem Knoten



alle ein- und ausfließende Ströme mit jeweiligem Vorzeichen zu Null addieren, also $\sum_{k=1}^{5} I_k = 0$.
(a) Modellieren Sie den obigen Schaltkreis entweder als gewöhnliche Differentialgleichung oder mit Hilfe von komplexen Widerständen. Nutzen Sie die Maschenregel für beide Maschen und die Knotenregel und geben Sie U_{out} in Abhängigkeit von U_{in} an. Sie können den Strom vernachlässigen, der durch das Spannungsmessgerät fließt, also $I_{\text{R}} = I_{\text{C}}$.
(b) Beschreiben Sie, wie sich das das Eingangssignal in Abhängigkeit von der Frequenz verändert. Skizzieren oder plotten Sie dazu das Verhältnis der Amplituden von U_{out} und U_{in} in Abhängigkeit der Frequenz für geeignete Wahlen von R und C. Für welche Frequenzen wird die Amplitude des Signals um mindestens den Faktor 1/2 reduziert?
(c) *Zusatz:* Was verändert sich bei Vertauschung von Widerstand und Kondensator? Was passiert, wenn statt des Kondensators eine Spule vorliegt?