Institut für Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin
Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen – Wintersemester 2019/20
F. Betrand, S. Puttkammer 04.12.2019

Serie 8 **Diskussion am 13.12.2019**

Aufgabe 1 (Stabilitätsfunktion von Runge-Kutta-Verfahren). *(a)* Zeigen Sie, dass die Stabilitätsfunktion $R(z) = 1 + zb^\top (I_{s\times s} - zA)^{-1} e$ eines s-stufigen expliziten Runge-Kutta-Verfahrens ein Polynom vom Grad $\leq s$ ist. (*Hinweis:* Beweis durch Induktion)
(b) Zeigen Sie, dass die Stabilitätsfunktion $R(z) = 1 + zb^\top (I_{s\times s} - zA)^{-1} e$ eines s-stufigen impliziten Runge-Kutta-Verfahrens eine rationale Funktion ist. (*Hinweis:* Cramersche Regel)

Aufgabe 2 (Stabilitätsfunktionen). Geben Sie für folgende Runge-Kutta-Verfahren die Stabilitätsfunktion an. Sind die Verfahren A-stabil? Skizzieren Sie die Stabilitätsgebiete (ggf. für geeignete Parameter θ).

(i) θ-Schema

$$\begin{array}{c|c} \theta & \theta \\ \hline & 1 \end{array}$$

(ii) Hammer-Hollingsworth-Verfahren

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array}$$

(iii) Gauß-Verfahren

$$\begin{array}{c|cc} \frac{3-\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} & \frac{3-2\sqrt{3}}{12} \\ \frac{3+\sqrt{3}}{6} & \frac{3+2\sqrt{3}}{12} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

(iv) Heun-Verfahren der Ordnung 3

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \\ \hline & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}$$

Aufgabe 3 (Stabilität des Heun-Verfahrens). Gegeben sei das Heun-Verfahren der Ordnung 3 mit Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \\ \hline & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}.$$

Bestimmen Sie die maximale Schrittweite $h > 0$, für die das obige Verfahen das System

$$y'(t) = By(t) \quad \text{mit} \quad B = \begin{bmatrix} -10 & 9 \\ 9 & -10 \end{bmatrix}$$

noch numerisch stabil integriert.
Hinweis: Bestimmen Sie zunächst das maximale Interval $J \subset \mathbb{R}$, das noch im Stabilitätsgebiet des Verfahrens liegt. Zeigen Sie dann mittels Diagonalisierung von B, dass $\|y_n\| = \|R(hB)^n y_0\|$ beschränkt bleibt.

Aufgabe 4 (Grafische Darstellung von Stabilitätsgebieten; praktische Aufgabe). Schreiben Sie ein Programm, das das Stabilitätsgebiet

$$\mathcal{S} \coloneqq \{z \in \mathbb{C} \ : \ |R(z)| \leq 1\}$$

eines gegebenen Runge-Kutta-Verfahrens mit den Koeffizienten (A, b, c) grafisch darstellt. Überprüfen Sie Ihr Programm an den Beispielen aus Aufgabe 2.
Hinweis: Ein mögliche Implementierung berechnet mit Hilfe des Python-Moduls `numpy.meshgrid` für jeden Punkt der komplexen Zahlenebene den Wert 1 oder 0 je nachdem, ob die Bedingung erfüllt ist oder nicht. Die resultierende boolesche Funktion kann mit `matplotlib.pyplot.contour` dargestellt werden.