



Aufgabe 1 (Fixpunktiteration für ein Adams-Moulton-Verfahren). Die Gleichung des k -schrittigen Adams-Moulton-Verfahrens

$$y_n = y_{n-1} + h \sum_{j=0}^k \beta_j f(t_{n-j}, y_{n-j})$$

soll mittels Fixpunktiteration für gegebene Daten $y_{n-k}, \dots, y_{n-1}$ gelöst werden.

(a) Formulieren Sie in Anlehnung an Aufgabe 1 aus Serie 3 ein Kriterium für die Konvergenz der Fixpunktiteration.

(b) Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$y''(t) = -20y'(t) - 19y(t) \quad \text{mit} \quad y(0) = 1 \quad \text{und} \quad y'(0) = -10.$$

Wie klein muss die konstante Schrittweite $h > 0$ gewählt werden, sodass die Fixpunktiteration für das 2-schrittige Verfahren

$$y_n = y_{n-1} + \frac{1}{12} h (5f(t_n, y_n) + 8f(t_{n-1}, y_{n-1}) - f(t_{n-2}, y_{n-2}))$$

konvergiert?

Hinweis: Formen Sie die Differentialgleichung zunächst in ein System erster Ordnung um und wenden dann das Verfahren an.

Aufgabe 2 (Ein explizites lineares Mehrschrittverfahren). Für konstante Schrittweite $h > 0$, betrachten Sie das explizite lineare Mehrschrittverfahren

$$y_n + 4y_{n-1} - 5y_{n-2} = h[4f(t_{n-1}, y_{n-1}) + 2f(t_{n-2}, y_{n-2})] \quad \text{für } n = 2, 3, \dots$$

(a) Bestimmen Sie die Konsistenzordnung des Verfahrens.

(b) Zeigen Sie, dass obiges Verfahren für das Anfangswertproblem $y'(t) = -y(t)$ mit den Startwerten $y_0 = 1$ und $y_1 = e^{-h}$ Lösungen der Form $y_n = \alpha \lambda_1^n + \beta \lambda_2^n$ liefert mit

$$\lambda_1 = -2 - 2h + 3\sqrt{1 + \frac{2}{3}h + \frac{4}{9}h^2},$$

$$\lambda_2 = -2 - 2h - 3\sqrt{1 + \frac{2}{3}h + \frac{4}{9}h^2}.$$

Bestimmen Sie α und β mit Hilfe der Startwerte y_0, y_1 .

Hinweis: λ_1 und λ_2 sind Nullstellen eines quadratischen Polynoms $q(\lambda)$. Formen Sie die Gleichung $q(\lambda_1) = q(\lambda_2)$ geeignet um.

Aufgabe 3 (Maximale Konsistenzordnung). Zeigen Sie, dass für jede Zahl $k \in \mathbb{N}$ (bis auf Normierung) genau ein lineares Mehrschrittverfahren mit Konsistenzordnung $2k$ existiert, aber keines mit Konsistenzordnung $2k + 1$.

Hinweis: Schreiben Sie das zugehörige lineare Konsistenz-Gleichungssystem in Matrix-Schreibweise in den Unbekannten $\alpha_0, \dots, \alpha_k, -\beta_0, \dots, -\beta_k$ und untersuchen den Kern dieser Matrix.

Aufgabe 4 (Implementierung eines Adams-Bashforth-Verfahrens). Für einen Parameter $\beta > 0$ beschreibt das Anfangswertproblem

$$x'(\phi) = \rho(\phi) \cos(\phi), \quad y'(\phi) = \rho(\phi) \sin(\phi), \quad x(0) = y(0) = 0,$$

aus [Bashforth, 1883] die Form eines Flüssigkeitstropfens, wobei $\rho(\phi)$ definiert ist durch

$$\frac{1}{\rho(\phi)} + \frac{\sin(\phi)}{x(\phi)} = 2 + \beta y(\phi) \quad \text{und} \quad \rho(0) := 1. \quad (*)$$

Lösen Sie das Anfangswertproblem numerisch nach der Vorgehensweise von Adams.

1. Berechne 2 Startwerte $(x_0, y_0)^\top$ und $(x_1, y_1)^\top$ wie folgt. Nehmen Sie an, dass $\rho(\phi) = 1 + b_2\phi^2 + b_4\phi^4 + \dots$. Das Einsetzen von $\rho(\phi)$ in das Anfangswertproblem liefert nach Integration eine Taylor-Entwicklung von x und y . Bestimmen Sie die ersten Koeffizienten $b_{2\ell}$ durch Koeffizientenvergleich in (*). Das liefert eine Approximation von $(x(\phi), y(\phi))^\top$ für kleine $\phi > 0$.
2. Wenden Sie das Mehrschrittverfahren

$$z_n = z_{n-1} + h \left(\frac{3}{2} f(\phi_{n-1}, z_{n-1}) - \frac{1}{2} f(\phi_{n-2}, z_{n-2}) \right)$$

auf die Startwerte aus 1. an und berechnen eine diskrete Lösung auf dem Intervall $\phi \in [0, \pi]$.

Plotten Sie die Lösung für unterschiedliche $\beta > 0$. (Die berechnete Lösung muss noch an der x -Achse gespiegelt werden und zeigt aus Symmetriegründen nur die rechte Hälfte der Kontur des Tropfens. Durch eine an der y -Achse gespiegelte Kopie, erhalten Sie einen richtigen liegenden Tropfen.)

Hinweis: Sie können auch den 1. Schritt überspringen und Startwerte mit einem geeigneten Einschrittverfahren berechnen.