Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 12

Vorlesung Analysis 1 (Lehramtsstudiengänge)

Wintersemester 2014/15
Abgabe am 26.01.2015

Aufgabe 34

a) Zeigen Sie, dass jedes reelle Polynom von ungeradem Grad eine reelle Nullstelle besitzt.

b) Zeigen Sie, dass es mindestens zwei verschiedene Lösungen der Gleichung

$$x^3 - x - \sqrt{x} + \frac{1}{2} = 0$$

gibt, die im offenen Intervall $(0,2)$ liegen.

(*Tipp: Zwischenwertsatz*). **6 P**

Aufgabe 35

a) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass das Bild $f([a,b])$ ebenfalls ein kompaktes Intervall ist, d.h. es gilt: $f([a,b]) = [c,d]$ für reelle Zahlen $c \leq d$.

b) Sei $L \in (0,1)$ und $f : [a,b] \to [a,b]$ eine Abbildung mit

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y| \quad \forall\, x,y \in [a,b].$$

i) Zeigen Sie, dass es *genau* einen Fixpunkt ξ von f gibt.

ii) Zeigen Sie des Weiteren, dass man den Fixpunkt ξ wie folgt bestimmen kann: Man fixiert $x_0 \in [a,b]$ und betrachtet die rekursiv definierte Folge (x_n) mit $x_{n+1} := f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt (unabhängig vom Startpunkt x_0 !):

$$\xi = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

3+5 P

Aufgabe 36

1. Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden reellen Funktionen:

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x}$.

   Tipp: Benutzen Sie die analytische Definition von sin *und* cos *und den Grenzwert* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{ix}-1}{ix} = 1$ *(siehe Aufgabe 32 b) oder das Einschließungslemma für* cos *und* sin.

2. Folgern Sie daraus, dass die Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f_1(x) \;:=\; \begin{cases} \frac{sin(x)}{x} & \text{falls } x \neq 0 \\ 1 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

$$f_2(x) \;:=\; \begin{cases} \frac{\cos(x)-1}{x} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

   stetig sind.

6 P

Insgesamt: **20 P**