Zusammenfassung der Vorlesung Lineare Algebra und Analytische Geometrie bei Herrn Kleinert Beginn WS 2000 - 2001 HU Berlin

Paul Ebermann

12. Februar 2006

Inhaltsverzeichnis

-1 Vorwort

Doz. Dr. sc. W. Kleinert, unser Dozent in Lineare Algebra und Analytische Geometrie, gehört zu den Menschen, die keine Aufzeichnungen für ihre Vorlesungen haben, insbesondere kein Vorlesungsskript. Begründung:

> Ich bin ein Perfektionist, wenn ich ein Skript hätte, würde ich immer wieder daran herumbasteln, ohne je fertig zu werden. Dies würde mich verrückt machen.[1]

Da es von ihm also kein Skript gibt, habe ich mich also an die Arbeit gemacht und in den Weihnachtsferien begonnen, meine Aufzeichnungen der Vorlesung in LaTeX niederzuschreiben. Der eigentliche Text entspricht etwa den Aufzeichnungen, die Fußnoten sind meist komplett von mir. Die Nummerierung der Sätze und Kapitel habe ich beibehalten, die Definitionen und Beispiele waren ursprünglich nicht nummeriert. Sätze bzw. Bemerkungen, denen Herr Kleinert keine Nummer zuweisen wollte (weil zu trivial), habe ich mit „Satz ohne Nummer" gekennzeichnet.

Ich bin für Verbesserungsvorschläge bzw. Korrekturen jederzeit dankbar, wer welche hat, sollte sich an mich wenden.

Das 0. Kapitel ist nun abgeschlossen.

Paul Ebermann, 12. Februar 2006.

[1] Fast wörtlich, aus meiner Erinnerung. Wer es besser weiß, soll mir den korrigierten Text schicken.

0 Grundbegriffe der naiven Mengenlehre

Logische Symbole

[1] Bevor wir mit der Mengenlehre anfangen, werden wir einige Symbole der Aussagenlogik klären.

Symbol	Verwendung	Bedeutung
$\exists :$	$\exists x : \langle Aussage \rangle$	Es existiert (mindestens) ein Objekt, so dass die Aussage gilt. Meist taucht das Objekt in der Aussage wieder auf.
	$\exists x \in M : \langle Aussage \rangle$	Es existiert mindestens ein Element in der angegebenen Menge M, so dass die angegebene Aussage wahr ist.
$\exists! :$	$\exists! x \in M : \langle Aussage \rangle$	Es existiert genau ein Element in der angegebenen Menge, so dass die Aussage gilt.
$\forall :$	$\forall x : \langle Aussage \rangle$	Für alle Objekte x gilt die Aussage.
	$\forall x \in M : \langle Aussage \rangle$	Für alle Elemente x der Menge M gilt die Aussage.
$\Leftrightarrow$	$\langle Aussage1 \rangle \Leftrightarrow \langle Aussage2 \rangle$	$\langle Aussage1 \rangle$ gilt genau dann, wenn $\langle Aussage2 \rangle$ gilt. (Oder auch: $\langle Aussage1 \rangle$ und $\langle Aussage2 \rangle$ sind logisch äquivalent.)
$\Rightarrow$	$\langle Aussage1 \rangle \Rightarrow \langle Aussage2 \rangle$	Wenn $\langle Aussage1 \rangle$ gilt, gilt auch $\langle Aussage2 \rangle$. (Oder: $\langle Aussage1 \rangle$ impliziert $\langle Aussage2 \rangle$.)
$\wedge$	$\langle Aussage1 \rangle \wedge \langle Aussage2 \rangle$	$\langle Aussage1 \rangle$ und $\langle Aussage2 \rangle$ gelten beide.
$\vee$	$\langle Aussage1 \rangle \vee \langle Aussage2 \rangle$	Es gilt $\langle Aussage1 \rangle$ oder $\langle Aussage2 \rangle$. (Es können auch beide gelten!)

[1] Dies war kein Bestandteil der Vorlesung, sondern wurde teilweise vorausgesetzt, teilweise nebenbei erläutert. Ich (P.E.) habe diese hier gesammelt. Wenn weitere im Skript benutzt werden, aber nicht hier auftauchen, sofort reklamieren!

0.1 Mengen, Mengenoperationen

Definition

Georg Cantor (1845 - 1928) begründete die Mengenlehre als mathematische Disziplin. Von ihm stammt die ursprüngliche Definition einer Menge.

Definition 0.1. *Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von wohlunterschiedenen Objekten*[2] *unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.*
*Diese Objekte werden **Elemente** der Menge genannt.*

$\boxed{a \in A}$ *Man schreibt*
$a \in A$ *für „a ist Element der Menge A“,*
$\boxed{a \notin A}$ $a \notin A$ *für „a ist nicht Element der Menge A“.*

Um auch Mengen wieder zu wohlunterschiedenen Objekten zu machen (also als Elemente von Mengen verwenden zu können), definieren wir uns eine Gleichheitsrelation:

$\boxed{A = B}$ **Definition 0.2.** *Zwei Mengen A und B heißen **gleich** ($A = B$) genau dann, wenn jedes Element aus A auch ein Element aus B ist und umgekehrt:*

$$\forall a : a \in A \Leftrightarrow a \in B$$

$\boxed{A \neq B}$ *Sonst sind die Mengen **ungleich** .*

Es ist also $A \neq B$ genau dann, wenn

$$\big(\exists a \in A : a \notin B\big) \vee \big(\exists b \in B : b \notin A\big)$$

Mengen können auf verschiedene Weisen beschrieben werden.
Eine Möglichkeit sind die diversen Standardbezeichnungen für häufig verwendete Mengen:

$\boxed{\mathbb{N}}$ $\mathbb{N}$ die Menge der **natürlichen Zahlen**
(0 ist keine natürliche Zahl).

$\boxed{\mathbb{N}_0}$ $\mathbb{N}_0$ die Menge der **natürlichen Zahlen mit** 0.

$\boxed{\mathbb{Z}}$ $\mathbb{Z}$ die Menge der **ganzen Zahlen**.

$\boxed{\mathbb{Q}}$ $\mathbb{Q}$ die Menge der **rationalen Zahlen**.

$\boxed{\mathbb{R}}$ $\mathbb{R}$ die Menge der **reellen Zahlen**.

$\boxed{\mathbb{C}}$ $\mathbb{C}$ die Menge der **komplexen Zahlen**.

[2] Wohlunterschiedene Objekte bedeutet, dass wir bei zwei Objekten a und b sagen können, dass $a = b$ (also a und b für das selbe Objekt stehen), oder sonst gilt $a \neq b$ (die beiden Objekte also unterschiedlich sind).
Damit ist z.B. ein Sack Kies oder ein Liter Wasser mathematisch **nicht** als Menge anzusehen, auch wenn dies physikalisch Mengenangaben sind. (Es sei denn, man hätte die Kieselsteine durchnummeriert (zur Unterscheidung) und spricht von der „Menge der Kieselsteine in diesem Sack“.)

Eine andere Möglichkeit ist die der Auflistung aller Elemente in geschweiften Klammern, durch Komma getrennt.

Beispiel 0.1.1.

$$\begin{aligned} A &= \{2,3,4\} \qquad \text{(sprich: Menge aus 2, 3 und 4)} \\ &= \{4,2,3\} \\ &= \{2,3,2,4,2\} \end{aligned}$$

Wie wir sehen, ist die Reihenfolge unwichtig, auch Wiederholungen werden ignoriert.

$$\mathbb{N} = \{1,2,3,\cdots\}$$

$$\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,3,\cdots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\} = \{0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots\}$$

Eine wichtige Variante ist das Symbol $\varnothing$ für die **leere Menge**. $\boxed{\varnothing}$

Eine weitere Möglichkeit ist die Festlegung der Menge durch eine Aussage:

Beispiel 0.1.2.

$$\{2,4,6,8,\cdots\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist gerade }\}$$

Sprich: Menge aller natürlichen Zahlen n, für die gilt: n ist gerade.

$$F := \left\{n \in \mathbb{N} \mid \exists x,y,z \in \mathbb{N}^3 : x^n + y^n = z^n\right\} = {}^{3}\,\{1,2\}$$

Wie wir bereits gesehen haben, kann die gleiche Menge auf unterschiedliche Arten festgelegt werden.

Definition 0.3. *Eine Menge A heißt **Teilmenge** einer Menge B genau dann, wenn jedes Element von A auch ein Element von B ist:* $\boxed{A \subseteq B}$

$$(A \subseteq B) \Leftrightarrow (\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B)$$

*Eine A heißt **echte Teilmenge** von B genau dann, wenn* $\boxed{A \subset B}$

$$A \subseteq B \text{ und } A \neq B$$

Statt $A \subseteq B$ kann man auch schreiben $B \supseteq A$, genauso ist $A \subset B$ gleichbedeutend mit $B \supset A$. $\boxed{B \supseteq A}$ $\boxed{B \supset A}$

[3] Fermatsche Vermutung, angeblich von ihm bewiesen, der Beweis (auf dem Rand eines Buches) ist aber verloren gegangen. Inzwischen wurde diese Vermutung von Andew Wiles bewiesen (sehr aufwendig).

$\boxed{\text{Satz ohne Nummer.}}$ Für jede Menge A gilt:

$$\varnothing \subseteq A$$

und

$$A \subseteq A$$

Wenn A und B Mengen sind, so gilt:

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

Die Russellsche Antinomie

Wenn man diese naive Definition von Menge verwendet, ist es möglich, Widersprüche zu konstruieren. Ein Beispiel ist die Russellsche Antinomie.

Betrachten wir $M :=$ „die Menge aller Mengen". Nun gibt es Mengen, die sich selbst als Element enthalten(z.B. die „Menge aller unbelebten Dinge"), und Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten (z.B. alle bisher betrachteten Zahlenmengen). Bilden wir nun die Menge

$$\mathcal{A} := \{A \in M \mid A \notin A\}.$$

Nun können wir untersuchen, ob $\mathcal{A}$ zu den Mengen gehört, die sich selbst enthalten, oder zu den Mengen, die sich nicht selbst enthalten. Nehmen wir an, ersteres wäre der Fall, also $\mathcal{A} \in \mathcal{A}$. Dann folgt nach Definition von $\mathcal{A}$ sofort, dass $\mathcal{A} \notin \mathcal{A}$, was nun klar ein Widerspruch ist. Nehmen wir umgekehrt an, dass $\mathcal{A} \notin \mathcal{A}$, so folgt nach Definition von $\mathcal{A}$, dass $\mathcal{A} \in \mathcal{A}$. Auch hier erhalten wir einen Widerspruch.

Beseitigung der Russellschen Antinomie

Wir definieren anstelle von Definition 0.1:

Definition 0.4. *Eine beliebige Zusammenfassung von wohlunterschiedenen Objekten der Realität, unserer Anschauung oder unseres Denkens nennen wir* ***Klasse****.*
Eine Klasse heißt ***Menge*** *genau dann, wenn sie als Element einer Klasse auftritt.*
Klassen, die keine Mengen sind, heißen ***eigentliche Klassen****.*

Wie der Leser leicht nachvollziehen kann, ergibt sich dann für die Russellsche Antinomie, dass M, die Klasse aller Mengen, und $\mathcal{A}$, die Klasse aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten, beide keine Mengen sind (also vor allem $\mathcal{A} \notin M$). Da $\mathcal{A}$ keine Menge ist, kann auch nicht gefragt werden, ob sie sich selbst enthält, damit entsteht kein Widerspruch.

Mengenoperationen

Definition 0.5. *Seien A und B Mengen.*
$\boxed{\mathfrak{P}(A)}$ *Die Menge aller Teilmengen von A heißt* ***Potenzmenge*** [4] *von A:*

$$\mathfrak{P}(A) := \{X \mid X \subseteq A\}$$

Die Menge

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

(sprich: A vereinigt B) heißt ***Vereinigung (bzw. Vereinigungsmenge) von*** *A* ***und*** *B.* $\boxed{A \cup B}$

Die Menge

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

(sprich: A geschnitten B) heißt ***Schnittmenge*** *oder auch* ***Durchschnitt*** *von A und B.* $\boxed{A \cap B}$

Die Menge

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

(Sprich: A ohne B, A minus B) heißt ***Differenz*** *von A und B.* $\boxed{A \setminus B}$

Die Menge

$$A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

heißt ***symmetrische Differenz*** *von A und B.* $\boxed{A \triangle B}$

Beispiel 0.1.3.

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Satz ohne Nummer. Es gelten folgende Rechenregeln:
Seien A, B, C Mengen. Dann gelten die Assoziativgesetze

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) \\ (A \triangle B) \triangle C &= A \triangle (B \triangle C) \end{aligned}$$

und die Kommutativgesetze

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A \\ A \cap B &= B \cap A \\ A \triangle B &= B \triangle A. \end{aligned}$$

[4] Der Name Potenzmenge erklärt sich aufgrund einer Beobachtung bei endlichen Mengen: Wenn eine Menge M n Elemente hat, so besitzt die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ dieser Menge 2^n Elemente.

$\boxed{\text{Satz ohne Nummer.}}$ Für die Verknüpfung mehrerer Operationen bei drei Mengen A, B, C gelten die Distributivgesetze

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

und die de-Morganschen Regeln :

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$
$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

Letztere lassen sich noch verallgemeinern, siehe Übungsaufgabe 4 in Serie 1. oder Satz 0.3.1.

0.2 Mengenabbildungen

Definition 0.6. *Seien A und B Mengen.*
Für $a \in A$ und $b \in B$ heißt die Menge

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

$\boxed{(a,b)}$ *ein* ***geordnetes Paar****.*

$\boxed{\text{Satz ohne Nummer.}}$

1. Es ist $(a, b) \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(A \cup B))$.
2. $$a \neq b \Leftrightarrow (a, b) \neq (b, a),$$
   die Paar-Bildung ist also nicht kommutativ.
3. $$\big((a, b) = (c, d)\big) \Leftrightarrow \big(a = c \wedge b = d\big)$$

In der Praxis wird vor allem die Eigenschaft (3) verwendet, dies wird auch oft als axiomatische Definition verwendet.

Definition 0.7. *Die Menge*

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

$\boxed{A \times B}$ *heißt* ***kartesisches[5] Produkt oder auch Kreuzprodukt von*** A ***und*** B*.*

Das kartesische Produkt zweier Mengen ist eine Mengenoperation, die im allgemeinen nicht kommutativ ist.

Definition 0.8. *Seien X, Y nichtleere Mengen. Jede nichtleere Teilmenge F des Kreuzproduktes $X \times Y$ (also eine Menge von Paaren, dessen erste Komponente aus X und dessen zweite Komponente aus Y kommt) nennen wir eine* ***Korrespondenz*** *oder* ***Korrelation*** *aus X in Y.*

Damit ist $\boxed{\mathrm{Kor}(X,Y)}$

$$\begin{aligned}\mathrm{Kor}(X,Y) &:= \{F \mid F \subseteq (X \times Y) \wedge F \neq \varnothing\}\\ &= \mathfrak{P}(X \times Y) \setminus \{\varnothing\}\end{aligned}$$

die Menge der Korrespondenzen oder Korrelationen aus X in Y.
Für eine Menge M bezeichnen wir $\mathrm{Kor}(M,M)$ *auch als* ***Menge der Relationen auf*** *X.* $\boxed{\mathrm{Kor}(M,M)}$

Definition 0.9. *Sei $F \in \mathrm{Kor}(X,Y)$, dann heißt* $\boxed{D(F)}$

$$D(F) := \{x \in X \mid \exists y \in Y : (x,y) \in F\}$$

der ***Definitionsbereich von*** *F.*

$$W(F) := \{y \in Y \mid \exists x \in X : (x,y) \in F\}$$

heißt ***Wertebereich (oder Wertevorrat) von*** *F.* $\boxed{W(F)}$
F heißt ***eindeutig*** *genau dann, wenn*

$$\forall (x,y) \in F : \forall (u,v) \in F : \big((x = u) \Rightarrow (y = v)\big)$$

Die Menge

$$\mathrm{Kor}_*(X,Y) := \{F \in Kor(X,Y) \mid D(F) = X \wedge F \ \textit{eindeutig}\}$$

heißt ***Menge der Graphen von Abbildungen von*** *X* ***nach*** *Y.* $\boxed{\mathrm{Kor}_*(X,Y)}$

Definition 0.10. *Sei $F \in \mathrm{Kor}_*(X,Y)$. Dann gibt es laut Def. 0.9 zu jedem $x \in X$ genau ein*[6] *$y \in Y$, so dass $(x,y) \in F$.*
Wir schreiben dafür auch $y = f(x)$. $\boxed{y = f(x)}$
Die dadurch definierte eindeutige Zuordnung f mit

$$x \in X \longmapsto y = f(x) \in Y$$

heißt auch die zu F gehörige ***Abbildung*** ***von*** *X* ***nach*** *Y.* $\boxed{\mathrm{Abb}(X,Y)}$

---

[5] Descartes [de'kart], René , lateinisiert: Renatus *Cartesius*, *1596, † 1650, frz. Philosoph, Mathematiker und Naturforscher. Mit D. beginnt die neuzeitliche Philosophie in Form eines strengen *Rationalismus (Kartesianismus).* Er suchte ein geschlossenes mechanist. Weltsystem zu errichten. D. forderte das Zurückgehen auf die einfachsten Einsichten, die durch Intuition gewiss sind. Um die letzte Gewissheit zu erreichen, führte er eine Zweifelsbetrachtung durch: Alles bezweifelnd, bin ich mir doch meines Denkens, also meiner Existenz gewiss (*cogito, ergo sum*, ≫Ich denke, also bin ich.≪). Davon ausgehend lehrte er einen Dualismus der denkenden u. der ausgedehnten Substanz. Als Mathematiker begr. D. die analyt. Geometrie. – Werke: ≫Discours de la méthode≪ (≫Versuch über die Methode≪), ≫Meditationen über die erste Philosophie≪, ≫Philosoph. Prinzipien≪.
Quelle: Bertelsmann Universallexikon, leider kein Erscheinungs- oder Redaktionsschluss-Datum auffindbar (1992 - 1994)

[6] Wegen der Eindeutigkeit höchstens eins, wegen D(F)=X mindestens eins, also genau eins.

Für die Menge dieser eindeutigen Zuordnungen von X nach Y schreiben wir auch $\mathrm{Abb}(X, Y)$.

$\boxed{f : X \to Y}$ $\boxed{X \xrightarrow{f} Y}$

Statt $f \in \mathrm{Abb}(X, Y)$ schreibt man auch $f : X \to Y$ oder $X \xrightarrow{f} Y$.
Die zu $f \in \mathrm{Abb}(X, Y)$ gehörige Korrespondenz $F \in \mathrm{Kor}_*(X, Y)$ mit

$$F := \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$$

*heißt dann auch **Graph von** f.*

Eine Abbildung ist also eigentlich eine Menge von Paaren aus dem kartesischen Produkt zweier Mengen mit bestimmten Eigenschaften. Verwendet wird allerdings vor allem die Zuordnung, die durch diese Menge gegeben sind.

$\boxed{D_f}$ $\boxed{W_f}$

Definition 0.11. *Die Menge $D_f := D(F)$ wird **Definitionsbereich von** f genannt. Die Menge $W_f := W(F)$ heißt **Wertebereich** oder **Wertevorrat von** f.*

> SATZ OHNE NUMMER. Seien X und Y nichtleere Mengen.
> Zwei Abbildungen $f, g \in \mathrm{Abb}(X, Y)$ sind gleich ($f = g$) genau dann, wenn
> $$\forall x \in D_f : f(x) = g(x).$$

Spezielle Abbildungen

$\boxed{\mathrm{incl}_X}$ $\boxed{id_X}$

Definition 0.12. *Sei $X \subseteq Y$ und $X \neq \varnothing$, dann ist die für alle $x \in X$ durch $\mathrm{incl}_X(x) := x$ definierte Abbildung $\mathrm{incl}_X : X \to Y$ die **kanonische Inklusion von X in Y**.*
*Die Abbildung $id_X : X \to X$ mit $id_X(x) = x$ heißt **identische Abbildung von Y.***

$\boxed{p_X}$ $\boxed{p_Y}$

Definition 0.13. *Seien $X \neq \varnothing$ und $Y \neq \varnothing$ Mengen.*
*Dann heißt die Abbildung $p_X : X \times Y \to X$ mit $p_X(x, y) := x$ die **kanonische Projektion** von $X \times Y$ auf X.*
*Die Abbildung $p_Y : X \times Y \to Y$ mit $p_Y(x, y) := Y$ heißt ebenso **kanonische Projektion von $X \times Y$ nach Y**.*

Ebenso gibt es für vorgegebene $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ Abbildungen

$$i_{X,y_0} : X \to X \times Y \text{ mit } i_{X,y_0}(x) := (x, y_0)$$

und

$$i_{x_0,Y} : Y \to X \times Y \text{ mit } i_{x_0,Y}(y) := (x_0, y).$$

$\boxed{const_{y_0}}$

Definition 0.14. *Weiterhin ist für jedes $y_0 \in Y$ die **konstante Abbildung** $\mathrm{const}_{y_0} : X \to Y$ definiert durch*

$$\forall x \in X : \quad \mathrm{const}_{y_0}(x) := y_0.$$

$\boxed{\triangle_A}$ **Definition 0.15.** *Die für jede Menge $A \neq \varnothing$ durch*

$$\forall a \in A: \quad \triangle_A(a) := (a, a)$$

definierte Abbildung $\triangle_A : A \to A \times A$ heißt ***Diagonalabbildung*** *von A.*

$\boxed{\triangle}$ **Definition 0.16.** *Für $f : X \to Y$, $g : Z \to W$ heißt die durch*

$$\forall (x, z) \in X \times Z : (f \times g)(x, z) := (f(x), g(z))$$

definierte Abbildung $f \times g : X \times Z \to Y \times X$ das ***kartesische Produkt von f und g.*** $\boxed{f \times g}$

Definition 0.17. *Für $f : X \to Y$, $g : X \to Z$ heißt die durch*

$$(f, g)(x) := (f(x), g(x))$$

definierte Abbildung $(f, g) : X \to Y \times Z$ ***direktes Produkt*** *von f und g.* $\boxed{(f, g)}$

Definition 0.18. *Sei $f : X \to Y$ und $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$.*
Dann heißt die Menge

$$f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}$$

das ***Bild von A unter f.***
Insbesondere heißt $im(f) := f(X)$ das ***volle Bild von f.*** $\boxed{im(f)}$

$$f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

heißt ***volles Urbild von B bezüglich f.*** $\boxed{f^{-1}(B)}$
Für $y \in Y$ heißt

$$f^{-1}(y) := f^{-1}(\{y\}) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$$

die ***Faser*** *von y unter f.* $\boxed{f^{-1}(y)}$
Die Abbildung $f|_A : A \to A$ mit

$$\forall a \in A : (f|_A)(a) := f(a)$$

heißt ***Einschränkung von f auf A.*** $\boxed{f|_A}$

Satz 0.2.1. Für jede Mengenabbildung $f : X \to Y$ und beliebige Mengen $A, A' \subseteq X$, $B, B' \in Y$ gilt:

1. $$f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$$
2. $$f(A \cap A') \subseteq f(A) \cap f(A')$$
3. $$f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$$
4. $$f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$$
5. $$f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$$

Der Beweis ist nicht schwer.

Definition 0.19. *Für $f : X \to Y$, $g : W \to Z$, $Y \subseteq W$ heißt die $\forall x \in X$ durch*

$$(g \circ f)(x) := g(f(x))$$

$\boxed{g \circ f}$ *definierte Abbildung $g \circ f : X \to Z$ die **Komposition** oder **Verkettung** von g und f.*

Satz 0.2.2. Sei $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to W$. Dann gilt:

Assoziativgesetz

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Neutrale Elemente

$$f \circ id_X = id_Y \circ f = f$$

Satz 0.2.3. Sei $f : X \to Y$. Dann gilt:

1. X ist die Vereinigungsmenge der Fasern aller Elemente von Y:
$$X = \bigcup_{y \in Y} f^{-1}(y) = f^{-1}(Y)$$
2. Je zwei nichtleere Fasern von f sind entweder disjunkt oder identisch. Es gilt sogar verschärfend:
$$\forall y_1 \in im(f), \forall y_2 \in im(f) :$$
$$f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) \Leftrightarrow y_1 = y_2 \Leftrightarrow f^{-1}(y_1) \cap f^{-1}(y_2) \neq \varnothing$$

0.3 Mengenfamilien

Definition 0.20. *Ein **Mengensystem** ist eine Menge $\mathfrak{M}$, deren Elemente selbst wieder Mengen sind.*

Beispiel 0.3.1. Jede Potenzmenge einer Menge ist ein Mengensystem.

Beispiel 0.3.2. Sei $M \neq \varnothing$ eine beliebige Menge, $A \subseteq \mathfrak{P}(M)$. Dann ist $\mathfrak{M} := \{B \subseteq M \mid B \cap A \neq \varnothing\}$ ein Mengensystem.

Davon zu unterscheiden ist der Begriff einer Mengenfamilie:

Definition 0.21. *Seien $I \neq \varnothing$, $M \neq \varnothing$ zwei Mengen. Eine Abbildung $f : I \to \mathfrak{P}(M)$ heißt dann auch **Mengenfamilie** von M oder **Familie von Teilmengen von** M.*

Eine solche Abbildung $f : I \to \mathfrak{P}(M)$ kann durch

$$f(i) := M_i \quad \forall i \in I \text{ mit } M_i \subseteq M$$

definiert werden.

Definition 0.22. *Damit kann folgende Schreibweise eingeführt werden:* $\boxed{(M_i)_{i\in I}}$

$$(M_i)_{i\in I} \text{ bzw. } (f(i))_{i\in I} \Leftrightarrow \forall i \in I : f(i) = M_i, M_i \subseteq M.$$

*I heißt **Index-Bereich** der Familie $f \in \mathrm{Abb}(I, \mathfrak{P}(M))$.*
*Ein $i \in I$ heißt **Index des Familienmitgliedes** M_i.*

Beispiel 0.3.3. [7] Betrachte das Mengensystem $\mathfrak{M} := \{M_\flat, M_\natural\}$. Dann kann man mit dem Indexbereich $I := \{1, 2\}$ eine Abbildung $f : I \to \mathfrak{M}$ definiert werden durch

$$f(1) := M_\flat$$
$$f(2) := M_\natural$$

Diese Abbildung f können wir als Mengenfamilie auffassen:

$$(M_i)_{i\in\{1,2\}}$$

Damit ist $M_1 = M_\flat$ und $M_2 = M_\natural$. Setzen wir $M := M_\flat \cup M_\natural$, so ist $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{P}(M)$, also auch $f : I \to \mathfrak{P}(M)$ eine Abbildung.

Genauso kann aus jeder Menge mit 2 Elementen, die wieder Mengen sind, eine Mengenfamilie mit dem Indexbereich {1, 2} konstruiert werden.

Definition 0.23. *Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Mengenfamilie.* $\boxed{\bigcap_{i\in I} M_i}$
Dann heißt

[7] In der Vorlesung hat Herr Kleinert Notenschlüssel und Paragraph (§) verwendet, aber den Notenschlüssel habe ich bei LaTeX nicht gefunden. Wer ihn findet, soll sich melden!

$$\bigcap_{i \in I} M_i := \{x \mid \forall i \in I : x \in M_i\}$$

der ***Durchschnitt der Mengenfamilie****.*

$$\bigcup_{i \in I} M_i := \{x| \mid \exists i \in I : x \in M_i\}$$

$\boxed{\bigcup_{i\in I} M_i}$ *heißt die* ***Vereinigung der Familie****.*

ähnliche Definitionen gibt es natürlich auch für Mengensysteme:

$\boxed{\bigcap_{\mathfrak{M}}}$ **Definition 0.24.** *Sei $\mathfrak{M}$ ein Mengensystem.*
Dann heißt die Menge

$$\bigcap\nolimits_{\mathfrak{M}} := \{x| \mid \forall A \in \mathfrak{M} : x \in A\}$$

$\boxed{\bigcup_{\mathfrak{M}}}$ *der* ***Durchschnitt von $\mathfrak{M}$****.*
Die Menge

$$\bigcup\nolimits_{\mathfrak{M}} := \{x| \mid \exists A \in \mathfrak{M} : x \in A\}$$

heißt die ***Vereinigung von $\mathfrak{M}$****.*

Mengenfamilien und Mengensysteme sind per Definition unterschiedliche Konzepte. Aber:

1. Aus jedem Mengensystem $\mathfrak{M}$ kann man auf kanonische Weise eine Mengenfamilie (die sogenannte assoziierte Mengenfamilie) konstruieren, nämlich

   $$f : \mathfrak{M} \to \mathfrak{P}\left(\bigcup\nolimits_{\mathfrak{M}}\right)$$

   mit

   $$\forall A \in \mathfrak{M} : \quad f(A) := A$$

   Dabei gilt:

   $$\forall A, B \in \mathfrak{M} : f(A) = f(M) \Leftrightarrow A = B$$

   Es sind also alle Mitglieder der Mengenfamilie $(A)_{A \in \mathfrak{M}}$ verschieden.

2. Sei umgekehrt ein $(M_i)_{i \in I}$ eine Mengenfamilie derart, dass

   $$\forall (i,j) \in I \times I : M_i = M_j \Leftrightarrow i = j$$

   (also alle Mitglieder paarweise verschieden). Dann können wir ein Mengensystem bilden durch $\mathfrak{M} := \{M_i \mid i \in I\}$. Die dazugehörige assoziierte Familie $f : \mathfrak{M} \to \mathfrak{P}\left(\bigcup_{i \in I} M_i\right)$ ist im wesentlichen identisch mit der Ausgangsfamilie $g : I \to \mathfrak{P}\left(\bigcup_{i \in I} M_i\right)$, da eine eineindeutige Beziehung $M_i \leftrightarrow i$ besteht.

$\boxed{\text{Satz 0.3.1.}}$ Seien $(M_i)_{i\in I}$ und $(N_j)_{j\in J}$ zwei Mengenfamilien mit Indexbereichen $I \neq \varnothing$, $J \neq \varnothing$. Dann gelten folgende Identitäten:

1. Verallgemeinerung der Distributivgesetze:
$$\left(\bigcup_{i\in I} M_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} N_j\right) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (M_i \cap N_j)$$

2. $$\left(\bigcap_{i\in I} M_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} N_j\right) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (M_i \cup N_j)$$

3. Verallgemeinerung der de-Morganschen Regeln:
$$M \setminus \bigcup_{i\in I} M_i = \bigcap_{i\in I} (M \setminus I)$$

4. $$M \setminus \bigcap_{i\in I} M_i = \bigcup_{i\in I} (M \setminus I)$$

5. $$\bigcap_{i\in I} \mathfrak{P}(M_i) = \mathfrak{P}\left(\bigcap_{i\in I} M_i\right)$$

6. $$\bigcup_{i\in I} \mathfrak{P}(M_i) \subseteq \mathfrak{P}\left(\bigcup_{i\in I} M_i\right)$$
Die Gleichheit gilt im allgemeinen nicht.

Beweis.

zu (1):

$$\begin{aligned}
& x \in \left(\bigcup_{i\in I} M_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} N_j\right) \\
\Leftrightarrow & x \in \left(\bigcup_{i\in I} M_i\right) \wedge x \in \left(\bigcup_{j\in J} N_j\right) \\
\Leftrightarrow & (\exists i_0 \in I : x \in M_{i_0}) \wedge (\exists j_0 \in J : x \in M_{j_0}) \\
\Leftrightarrow & \exists i_0 \in I : \exists j_0 \in J : x \in M_{i_0} \wedge x \in M_{j_0} \\
\Leftrightarrow & \exists (i_0, j_0) \in I \times J : x \in (M_{i_0} \cap N_{j_0}) \\
\Leftrightarrow & x \in \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (M_i \cap N_j)
\end{aligned}$$

zu (2): (analog)
zu (3):

$$\begin{aligned}
& x \in \left(M \setminus \bigcup_{i\in I} M_i\right) \\
\Leftrightarrow & x \in M \wedge x \notin \bigcup_{i\in I} M_i \\
\Leftrightarrow & x \in M \wedge \forall i \in I : x \notin M_i \\
\Leftrightarrow & \forall i \in I : x \in M \wedge x \notin M_i \\
\Leftrightarrow & \forall i \in I : x \in (M \setminus M_i) \\
\Leftrightarrow & x \in \bigcap_{i\in I} (M \setminus M_i)
\end{aligned}$$

zu (4): (analog)
zu (5):

$$\begin{aligned}
& A \in \bigcap_{i\in I} \mathfrak{P}(M_i) \\
\Leftrightarrow & \forall i \in I : A \in \mathfrak{P}(M_i) \\
\Leftrightarrow & \forall i \in I : A \subseteq M_i \\
\Leftrightarrow & A \subseteq \bigcap_{i\in I} M_i \\
\Leftrightarrow & A \in \mathfrak{P}\left(\bigcap_{i\in I} M_i\right) M_i
\end{aligned}$$

zu (6): (analog) $\square$

$\boxed{\text{Satz 0.3.2.}}$ **Verhalten von Operationen an Mengenfamilien bei Abbildungen.** Sei $f : M \to N$ eine Abbildung. Seien $(A_i)_{i\in I}$ mit $\forall i \in I : A_i \subseteq M$ und $(B_j)_{j\in J}$ mit $\forall j \in J : B_j \subseteq N$ zwei Mengenfamilien.
Dann gelten folgende elementare Identitäten:

1. $$f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$$

2. $$f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i),$$

   die Gleichheit gilt im allgemeinen nicht.

3. $$f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$$

4. $$f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$$

Beweis.
zu (1):

$$\begin{aligned}
& y \in f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \\
\Leftrightarrow & y \in N \wedge \exists x \in \bigcup_{i\in I} A_i : y = f(x) \\
\Leftrightarrow & y \in N \wedge \exists i \in I : \exists x \in A_i : y = f(x) \\
\Leftrightarrow & \exists i \in I : y \in f(A_i) \\
\Leftrightarrow & y \in \bigcup_{i\in I} f(A_i)
\end{aligned}$$

zu (2): $\Rightarrow$ analog, für Gegenrichtung Gegenbeispiel.
zu (3), (4) habe ich den Beweis leider nicht mitgeschrieben. $\square$

Definition 0.25. *Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Mengenfamilie. Dann heißt*

$\boxed{\bigtimes_{i\in I} M_i}$

$\boxed{\prod_{i\in I} M_i}$

$$\prod_{i\in I} M_i := \bigtimes_{i\in I} M_i := \left\{ g \mid g : I \to \bigcup_{i\in I} M_i \wedge \forall i \in I : g(i) \in M_i \right\}$$

*das **kartesische** oder auch **Kreuzprodukt** von* $(M_i)_{i\in I}$.

Das kartesische Produkt einer Mengenfamilie ist also eine Menge von Abbildungen aus dem Indexbereich in die Vereinigung der Mengen, wobei jede Abbildung jedem Index ein Element der damit indizierten Menge zuordnet.

Es ist leicht zu erkennen:

$\boxed{\text{Satz ohne Nummer.}}$ Ist $(M_i)_{i\in I}$ eine Mengenfamilie und $M_{i_0} = \varnothing$ für mindestens ein $i_0 \in I$, so ist

$$\bigtimes_{i\in I} M_i = \varnothing.$$

Dies ist leicht zu beweisen, es gibt z.B. keine Abbildung nach M_{i_0}.

Es stellt sich natürlich die Frage nach der Umkehrung:

Frage. Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Mengenfamilie mit

$$\forall i \in I : M_i \neq \varnothing.$$

Ist dann **immer**

$$\bigtimes_{i\in I} M_i \neq \varnothing \;?$$

Diese Frage kann aus den bisherigen Axiomen der Mengenlehre und den Regeln der Logik nicht beantwortet werden. (Für bestimmte (z.B. endliche) Mengenfamilien ist der Beweis möglich, aber nicht allgemein.)

Diese Aussage ist also logisch unabhängig von allen anderen Axiomen[8].

Deswegen stellte 1904 Zermelo das Auswahlaxiom auf:

$\boxed{\text{Auswahlaxiom.}}$ Sei $\mathfrak{M}$ ein Mengensystem mit der Eigenschaft

$$\forall A \in \mathfrak{M} : A \neq \varnothing.$$

Dann existiert eine Abbildung

$$g : \mathfrak{M} \to \bigcup_{\mathfrak{M}}$$

mit

$$\forall A \in \mathfrak{M} : g(A) \in A.$$

[8] Dies wurde 1963 von Paul Cohen bewiesen

Es gibt also für **jedes** Mengensystem $\mathfrak{M}$ mit $\varnothing \notin \mathfrak{M}$ eine **Auswahlfunktion**

$$g : \mathfrak{M} \to \bigcup_{A \in M} A,$$

die jeder Menge $A \in \mathfrak{M}$ ein Element aus A zuordnet.
Aus dem Auswahlaxiom folgt leicht:

> $\boxed{\text{Satz 0.3.3.}}$ Sei $(M_i)_{i \in I}$ eine Mengenfamilie mit $\forall i \in I : M_i \neq \varnothing$.
> Dann gilt:
> $$\bigtimes_{i \in I} M_i \neq \varnothing,$$
> also
> $$\exists h : I \to \bigcup_{i \in I} M_i \text{ mit } h(i) \in M_i.$$

Beweis.
Die Mengenfamilie $(M_i)_{i \in I}$ ist eigentlich eine Abbildung

$$f \to \mathfrak{P}\left(\bigcup_{i \in I} M_i\right) \text{ mit } \forall i \in I : f(i) = M_i.$$

Betrachten wir weiterhin das Mengensystem

$$\mathfrak{M} := \{M_i \mid i \in I\},$$

so ist

$$im(f) = f(I) = \mathfrak{M}.$$

Da laut Voraussetzung alle Mengen in $\mathfrak{M}$ nicht leer sind, existiert nach Auswahlaxiom eine Abbildung

$$g : \mathfrak{M} \to \bigcup_{i \in I} M_i \text{ mit } \forall i \in I : g(M_i) \in M_i$$

Durch $h := g \circ f$ ist dann eine Abbildung gegeben, die die Behauptung erfüllt. □

Definition 0.26. *Sei $f \in \bigtimes_{i \in I} M_i$. Dann ist f eindeutig festgelegt durch ihre Werte $f(i)$, $i \in I$. Die Abbildung*

$$(a_i)_{i \in I} := (f(i))_{i \in I} := f$$

heißt dann auch ein ***I-Tupel*** *in $\prod_{i \in I} M_i$.* $\boxed{(a_i)_{i \in I}}$

Wir können also auch schreiben:

$$\bigtimes_{i\in I} M_i = \{(a_i)_{i\in I} \mid \forall i \in I : a_i \in M_i\}$$

Weiterhin kann man folgendes Beispiel betrachten:
Sei $I = \{1,2\}$ und $(M_i)_{i\in I}$ eine damit erstellte Mengenfamilie aus nichtleeren Mengen M_1 und M_2.
Dann gibt es zwischen dem gewöhnlichen kartesischen Produkt $M_1 \times M_2$ und dem kartesischen Produkt der Mengenfamilie $\bigtimes_{i\in\{1,2\}} M_i$ kanonische Abbildungen

$$\alpha : M_1 \times M_2 \to \bigtimes_{i\in\{1,2\}} M_i$$

und

$$\beta : \bigtimes_{i\in\{1,2\}} M_i \to M_1 \times M_2$$

mit

$$\alpha((x_1, x_2)) := (x_i)_{i\in\{1,2\}}$$

und

$$\beta((x_i)_{i\in\{1,2\}}) := \{x_1, x_2\}.$$

Wie man leicht sieht, sind die Verkettungen dieser Abbildungen jeweils identische Abbildungen. Deswegen werden $M_1 \times M_2$ und $\bigtimes_{i\in\{1,2\}} M_i$ miteinander identifiziert, ebenso (x_1, x_2) und $(x_i)_{i\in\{1,2\}}$.
Allgemeiner definieren wir:

$\boxed{M_1 \times \ldots \times M_n}$

Definition 0.27. *Sei $n \in \mathbb{N}$, $I := \{1, \cdots, n\} \subset \mathbb{N}$ und $M_1, \cdots, M_n \neq \varnothing$. Dann schreiben wir*

$$M_1 \times \ldots \times M_n := \bigtimes_{i\in I} M_i$$

für das endliche kartesische Produkt der Mengen.

Ein Element

$$(a_1, \cdots, a_n) := (a_i)_{i\in\{1,\cdots n\}}$$

$\boxed{(a_1, \cdots, a_n)}$

bezeichnen wir als ***n-Tupel.***

Speziell bezeichnen wir ein 2-Tupel auch als ***geordnetes Paar****, ein 3-Tupel als* ***Tripel****, ein 4-Tupel als* ***Quadrupel*** *etc.*

$\boxed{M^I}$

Definition 0.28. *Seien $I \neq \varnothing$, $M \neq \varnothing$ feste Mengen. Dann gibt es die spezielle Familie $\Phi_0 : I \to \mathfrak{P}(M)$ mit $\forall i \in I : \Phi_0(i) := M$. Dann sei*

$$M^I := \bigtimes_{i\in I} M := \bigtimes_{i\in I} \Phi_0(I).$$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $I := \{1, \cdots, n\}$. Dann ist

$$M^I = M^{\{1,\cdots,n\}} = \overbrace{M \times \ldots \times M}^{n \text{ mal}}.$$

Zur Vereinfachung definieren wir $\boxed{M^n}$

$$M^n := M^{\{1,\cdots,n\}}.$$

Injektive, surjektive, bijektive Abbildungen

Definition 0.29. *Seien $M \neq \varnothing$, $N \neq \varnothing$ und $f \in \mathrm{Abb}(N, M)$. f heißt **injektive Abbildung** oder **Injektion** genau dann, wenn*

$$\forall (x_1, x_2) \in N^2 : \big(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2\big)$$

Mit

$$\mathrm{Inj}(N, M) := \{f \in \mathrm{Abb}(N, M) \mid f \textit{ injektiv } \}$$

*bezeichnen wir dann die **Menge der Injektionen** von N in M.* $\boxed{\mathrm{Inj}(N, M)}$

> $\boxed{\text{Satz ohne Nummer.}}$ Logisch äquivalente Formulierungen für die Injektivität von $f : N \to M$ sind
>
> $$\forall (x_1, x_2) \in N^2 : \big(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)\big)$$
>
> und
>
> $$\forall x \in N : f^{-1}(f(x)) = \{x\}.$$

Definition 0.30. *Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige Zahl. Dann bezeichnen wir mit* $\boxed{\mathbb{N}_n}$

$$\mathbb{N}_n := \{1, \cdots, n\}$$

die Menge der ersten n natürlichen Zahlen.

> $\boxed{\text{Satz 0.3.4.}}$ Seien $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n > m$. Dann:
>
> $$\mathrm{Inj}(\mathbb{N}_n, \mathbb{N}_m) = \varnothing,$$
>
> es gibt keine Injektionen von $\mathbb{N}_n$ nach $\mathbb{N}_m$.

Beweis.
Vollständige Induktion über m mit einem beliebigen $n > m$.

Induktionsanfang: $m = 1$, $n \geq 2$.

$$\mathrm{Abb}(\mathbb{N}_n, \{1\}) = \{const_1\}$$

und $const_1$ ist nicht injektiv (es ist z.B. $const_1(1) = 1 = const_1(2)$, aber $1 \neq 2$).

Induktionsschluss:

Induktionsvoraussetzung: Sei $n > m + 1$ (also auch $n > m$) und $\mathrm{Inj}(\mathbb{N}_n, \mathbb{N}_m) = \varnothing$. Betrachten wir $\mathbb{N}_{m+1} = \mathbb{N}_m \cup \{m + 1\}$.

Induktionsbehauptung: $\mathrm{Inj}(\mathbb{N}_n, \mathbb{N}_{m+1}) = \varnothing$.

Nehmen wir an, $Inj(\mathbb{N}_n, \mathbb{N}_{m+1}) \neq \varnothing$, also

$$\exists f : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_{m+1} \wedge f \text{ injektiv.}$$

Dann ist $f(n) \in \mathbb{N}_{m+1}$ und $f^{-1}(f(n)) = \{n\}$. Betrachten wir nun die induzierte Abbildung

$$\tilde{f} : \mathbb{N}_n \setminus \{n\} \to \mathbb{N}_{m+1} \setminus \{f(n)\}$$

mit $\tilde{f}(k) := f(k)$ und $\tilde{f}$ ist wieder injektiv, weil f injektiv war.

Betrachten wir die Injektion $g : \mathbb{N}_{m+1} \setminus \{f(n)\} \to \mathbb{N}_m$ mit

$$g(k) := \begin{cases} k & k < f(n) \\ k - 1 & k > f(n) \end{cases}.$$

Nun ist die Komposition $g \circ f : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_{m+1}$ nach Satz 0.3.5 wieder injektiv, damit ist $\mathrm{Inj}(\mathbb{N}_n, \mathbb{N}_m) \neq \varnothing$, was ein Widerspruch zur Induktions-Voraussetzung ist. Damit ist unsere Annahme $Inj(\mathbb{N}_n, \mathbb{N}_{m+1}) \neq \varnothing$ falsch, also gilt

$$Inj(\mathbb{N}_n, \mathbb{N}_{m+1}) = \varnothing.$$

Damit ist der Induktionsschluss auch bewiesen. □

Satz 0.3.5. Seien $M \neq \varnothing$, $N \neq \varnothing$ und $L \neq \varnothing$ drei Mengen und $f \in \mathrm{Abb}(M, N)$, $g \in \mathrm{Abb}(N, L)$.
Dann gilt:

(a) Ist $f \in \mathrm{Inj}(M, N)$ und $g \in \mathrm{Inj}(N, L)$, so ist $g \circ f \in \mathrm{Inj}(M, L)$

(b) Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht, nur f muss injektiv sein.

Beweis.
Siehe Übungsaufgabe 1 in Serie 2. □

$\boxed{\text{Satz 0.3.6.}}$ Sei $f \in M \to N$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

1. $f \in \mathrm{Inj}(M, N)$
2. $\exists g \in \mathrm{Abb}(N, M) : g \circ f = id_M$

Beweis.

(1) $\Rightarrow$ (2) Definiere $g : \mathbb{N} \to M$ durch

$$g(y) := \begin{cases} x & \text{falls } \exists x \in M : y = f(x) \\ x_0 & \text{im anderen Fall, mit } x_0 \in M \text{ beliebig.} \end{cases}$$

Dann ist $g \circ f = id_M$, wie leicht nachgeprüft werden kann.

(2) $\Rightarrow$ (1) Trivial, denn $id_M : M \to M$ ist injektiv, danach Satz 0.3.5, b) anwenden.

$\square$

Definition 0.31. *Ist $f \in \mathrm{Abb}(M, N)$ und $g \in \mathrm{Abb}(N, M)$ mit $g \circ f = id_M$, so heißt g eine **rechtsinverse Abbildung** von f. Genauso heißt f eine **linksinverse Abbildung** von g.*

Definition 0.32. *Eine Mengenabbildung $f \in \mathrm{Abb}(M, N)$ heißt **surjektiv** bzw. **Surjektion** genau dann, wenn gilt*

$$\forall y \in N : \exists x \in M : y = f(x)$$

Dann bezeichnet $\boxed{\mathrm{Surj}(M, N)}$

$$\mathrm{Surj}(M, N) := \{f \in \mathrm{Abb}(M, N) \mid f \textit{ surjektiv } \}$$

die Menge der Surjektionen von M nach N.

$\boxed{\text{Satz ohne Nummer.}}$ Logisch äquivalente Bedingungen für die Surjektivität sind

$$\forall y \in N : f^{-1}(y) \neq \varnothing$$

und

$$f(M) = N \text{ bzw. } im(f) = N.$$

Satz 0.3.7.

(a) Sei $f \in \mathrm{Abb}(M, N)$.
Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) $f \in \mathrm{Surj}(M, N)$

(2) $\exists g \in \mathrm{Abb}(N, M) : f \circ g = id_N$

(b)

$$f \in \mathrm{Surj}(M, N) \wedge h \in \mathrm{Surj}(N, L) \Rightarrow h \circ f \in \mathrm{Surj}(M, L)$$

(c)

$$\varphi \in \mathrm{Abb}(M, N) \wedge \psi \in \mathrm{Abb}(N, L) \wedge \psi \circ \varphi \in \mathrm{Surj}(M, L) \\ \Rightarrow \psi \in \mathrm{Surj}(N, L),$$

aber φ muss nicht surjektiv sein.

(d)

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, n < m : \mathrm{Surj}(\mathbb{N}_n, \mathbb{N}_m) = \varnothing$$

Beweis.

zu (a) siehe Übungsaufgabe 2a in Serie 2, Umkehrung mit (c).

zu (b) siehe Übungsaufgabe 1a in Serie 2

zu (c) Indirekter Beweis: Wenn ψ nicht surjektiv ist, kann $\psi \circ \varphi$ nicht surjektiv sein.

zu (d) analog zu Satz 0.3.4

□

Definition 0.33. *Eine Abbildung $f \in \mathrm{Abb}(M, N)$ heißt **bijektive Abbildung** bzw. **Bijektion** genau dann, wenn*

$$f \in \mathrm{Inj}(M, N) \wedge f \in \mathrm{Surj}(M, N)$$

Die Menge

$$\mathrm{Bij}(M, N) := \mathrm{Inj}(M, N) \cap \mathrm{Surj}(M, N)$$

$\boxed{\mathrm{Bij}(M, N)}$ *ist die Menge der Bijektionen von M nach N.*

Satz ohne Nummer. Logisch äquivalente Formulierungen für die Bijektivität von f sind

$$\forall y \in N : \exists! x \in M : y = f(x)$$

und

$$\forall y \in N : \# \left(f^{-1}(x)\right) = 1.$$

Satz 0.3.8. Sei $f \in \mathrm{Abb}(M, N)$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

1. $f \in \mathrm{Bij}(M, N)$
2. $\exists g \in \mathrm{Abb}(N, M) : g \circ f = id_M \quad \wedge$ $\exists h \in \mathrm{Abb}(N, M) : g \circ f = id_N$
3. $\exists \varphi \in \mathrm{Abb}(N, M) : \varphi \circ f = id_M \wedge f \circ \varphi = id_N$
4. $\exists! \varphi \in \mathrm{Abb}(N, M) : \varphi \circ f = id_M \wedge f \circ \varphi = id_N$

Beweis.

(1) $\Rightarrow$ (2)

$$\begin{aligned} & f \in \mathrm{Bij}(M, N) \\ \Rightarrow & (f \text{ injektiv}) \wedge (f \text{ surjektiv}) \\ \Rightarrow & (\exists g \in \mathrm{Abb}(0, 1) : g \circ f = id_M) \wedge \\ & (\exists h \in \mathrm{Abb}(0, 1) : f \circ h = id_N) \end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$ (3) Sei $g \circ f = id_M, f \circ h = id_N$.

$$\Rightarrow g = g \circ id_N = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = id_M \circ h = h,$$

also g = h. Damit leistet $\varphi := g = h$ das Gewünschte.

(3) $\Rightarrow$ (4) Sei $\varphi \in \mathrm{Abb}(N, M)$ mit $\varphi \circ f = id_M$, $f \circ \varphi = id_N$. Sei ebenfalls $\psi \in \mathrm{Abb}(N, M)$ mit $\psi \circ f = id_M$, $f \circ \psi = id_N$. Dann

$$\psi = (\varphi \circ f) \circ \psi = \varphi \circ (f \circ \psi) = \varphi,$$

also $\psi = \varphi$. Damit ist Aussage (4) erfüllt.

(4) → (1)

$$\varphi \circ f = id_M \Rightarrow f \text{ injektiv.}$$

$$f \circ \varphi = id_N \Rightarrow f \text{ surjektiv.}$$

□

f^{-1}

Definition 0.34. *Sei $f \in \mathrm{Bij}(M,N)$. Dann bezeichnet man mit $f^{-1} \in \mathrm{Abb}(N,M)$ die nach Satz 0.3.8 eindeutig existierende Abbildung $\varphi \in \mathrm{Abb}(N,M)$ mit $\varphi \circ f = id_M$.*
*f^{-1} heißt dann die **Inverse** oder **Umkehrabbildung** zur Bijektion f.*

Satz ohne Nummer. Ist $f \in \mathrm{Bij}(M,N)$, so gilt für die Umkehrabbildung:

(a) $f^{-1} \circ f = id_M$, $f \circ f^{-1} = id_N$

(b) $f^{-1} \in \mathrm{Bij}(N,M)$, $(f^{-1})^{-1} = f$

Satz ohne Nummer. Sei $f \in \mathrm{Bij}(M,N)$ und $g \in \mathrm{Bij}(N,L)$. Dann ist $g \circ f \in \mathrm{Bij}(M,L)$ und $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Satz ohne Nummer. Seien $n, m \in \mathbb{N}$, so dass

$$\exists f \in \mathrm{Bij}(\mathbb{N}_n, \mathbb{N}_m).$$

Dann ist $n = m$.

Satz 0.3.9. Seien M, M', N, N' nichtleere Mengen, $f \in \mathrm{Bij}(M,M')$ und $g \in \mathrm{Bij}(N,N')$. Dann gilt:
Die Abbildung $\Phi : \mathrm{Abb}(M,N) \to \mathrm{Abb}(M',N')$ mit

$$\forall \varphi \in \mathrm{Abb}(M,N) : \Phi(\varphi) := g \circ \varphi \circ f^{-1}$$

ist eine Bijektion und $\Phi^{-1}(\psi) = g^{-1} \circ \psi \circ f$

Beweis.
Es ist $\Phi \circ \Phi^{-1} = id_{\mathrm{Abb}(M',N')}$ und $\Phi^{-1} \circ \Phi = id_{\mathrm{Abb}(M,N)}$. Damit ist Φ bijektiv und Φ^{-1} die Umkehrabbildung. □

Bei Bijektionen $f \in \mathrm{Bij}(M,N)$ besteht eine gewisse Zweideutigkeit der Bezeichnungen. Für ein $y \in N$ steht $f^{-1}(y)$ einmal für das Bild von y mit der Umkehrabbildung f^{-1}, andererseits steht $f^{-1}(y)$ auch für die Faser von y unter f. Letztere ist eine (einelementige) Teilmenge von M, ersteres das einzige Element dieser Menge.

Betrachten wir aber eine Menge $A \subseteq N$, so ist $f^{-1}(A)$ (als Urbildmenge von A) genau gleich $f^{-1}(A)$ (als Bildmenge von A der Umkehrabbildung), die gleiche Bezeichnung ist also wenigstens teilweise gerechtfertigt[9].

Beispiele für Bijektionen

Beispiel 0.3.4. Betrachten wir das offene Intervall $(0,1) := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$. Dann existieren Bijektionen zwischen $(0,1)$ und $\mathbb{R}$, z.B. $f : \mathbb{R} \to (0,1)$ mit

$$f(x) := \frac{e^x}{e^x + 1}.^{10}$$

Die Inverse $f^{-1} : (0,1) \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f^{-1}(y) := \ln \frac{y}{1-y}$$

Beispiel 0.3.5. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann gibt es Bijektionen zwischen dem offenen Intervall (a,b) und $(0,1)$, genauso zwischen $[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ und $[0,1]$, z.B. jeweils mit der Zuordnungsvorschrift

$$f(x) := \frac{x-a}{b-a}.$$

Beispiel 0.3.6. Sei $X \neq \varnothing$ eine Menge. Dann gilt es zwischen der Potenzmenge $\mathfrak{P}(X)$ und der Abbildungsmenge $\mathrm{Abb}(X, \{0,1\})$ ebenfalls Bijektionen. Betrachte die Abbildung $\lambda : \mathfrak{P}(X) \to \mathrm{Abb}(X, \{0,1\})$ mit

$$\forall A \in \mathfrak{P}(X) : \forall x \in X : \quad \lambda(A)(x) := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}.$$

Betrachte weiterhin die Abbildung $\Psi : \mathrm{Abb}(X, \{0,1\}) \to \mathfrak{P}(X)$ mit

$$\forall f \in \mathrm{Abb}(X, \{0,1\}) : \quad \Psi(f) := \{x \in X \mid f(x) = 1\}.$$

Es gilt dann :

$\forall A \in \mathfrak{P}(X)$:

$$\Psi(\lambda(A)) = \{x \in X \mid (\lambda(A))(x) = 1\} = \{x \in X \mid x \in A\} = A$$

also $\Psi \circ \lambda = id_{\mathfrak{P}(X)}$. Ebenso gilt auch

$\forall f \in \mathrm{Abb}(X, \{0,1\}) : \forall x \in X$:

$$(\lambda(\Psi(f))(x) = \begin{cases} 1 & x \in (\Psi(f))(x) \\ 0 & x \notin (\Psi(f))(x) \end{cases} = \begin{cases} 1 & f(x) = 1 \\ 0 & f(x) = 0 \end{cases} = f(x),$$

also $\lambda \circ \Psi = id_{\mathrm{Abb}(X,\{0,1\})}$. Damit sind Ψ und λ bijektiv sowie $\lambda^{-1} = \Psi$.

[9] Das ganze Dilemma entsteht nur durch die Bezeichnung der Faser von y mit $f^{-1}(y)$, anstatt $f^{-1}(\{y\})$ zu verwenden.

[10] e bezeichnet hier die Eulersche Zahl, man könnt aber auch jede andere Zahl $z > 1$ verwenden, dann würde sich natürlich eine andere Umkehrabbildung ergeben.

Beispiel 0.3.7. Es gibt auch zwischen den Mengen $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $\mathbb{N}$ Bijektionen. man betrachte $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2 : \quad f(n,m) := \frac{(n+m)\cdot(n+m-1)}{2} - m + 1.$$

Nachweis der Bijektivität siehe Übungsaufgabe 3 in Serie 3.

0.4 Mächtigkeit von Mengen

$\boxed{M \cong N}$ **Definition 0.35.** *Seien $M \neq \varnothing$, $N \neq \varnothing$ zwei Mengen. M und N heißen* ***gleichmächtig, umfangsgleich, bijektiv äquivalent, mengentheoretisch isomorph*** *($M \cong N$) genau dann, wenn*

$$\mathrm{Bij}(M,N) \neq \varnothing$$

Außerdem definiert man $\varnothing \cong \varnothing$[11].

Wie vorhin gezeigt wurde, gilt also:

Satz ohne Nummer.

1. $\mathbb{R} \cong (0,1)$
2. $\mathfrak{P}(X) \cong \mathrm{Abb}(X, \{0,1\})$
3. $\mathbb{N} \cong \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Es stellt sich folgende Frage:

Frage. Wie kann man bei vorgegebenen Mengen $M \neq \varnothing$ und $N \neq \varnothing$ feststellen, ob $M \cong N$?

Satz 0.4.1.

1. Sei X eine Menge. Dann sind X und $\mathfrak{P}(X)$ nicht gleichmächtig, genauer
$$\mathrm{Surj}(X, \mathfrak{P}(X)) = \varnothing.$$
2. Allerdings ist für $X \neq \varnothing$
$$\mathrm{Inj}(X, \mathfrak{P}(X)) \neq \varnothing.$$

[11] Das war nicht in der Original-Definition, aber ich halte das so für sinnvoll.

Beweis.

zu (1): Sei $f : X \to \mathfrak{P}(X)$ eine Abbildung. Sei $C_f := \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$, so ist $C_f \in \mathfrak{P}(X)$. Angenommen $f \in \mathrm{Surj}(X, \mathfrak{P}(X))$, dann müsste $C_f \in im(f)$ sein. Damit $\exists x_0 : f(x_0) = C_f$. Nun betrachten wir den Fall, dass $x_0 \in f(x_0) = C_f$, so folgt $x_0 \notin f(x_0)$, genauso folgt aus $x_0 \notin f(x_0)$ auch $x_0 \in f(x_0)$. Es ergibt sich immer ein Widerspruch, also ist die Annahme falsch, also ist $\mathrm{Surj}(X, \mathfrak{P}(X)) = \varnothing$.

zu (2): Man betrachte z.B. die Abbildung $g : X \to \mathfrak{P}(X)$ mit

$$\forall x \in X : g(x) = \{x\}.$$

Diese Abbildung ist eine Injektion.

□

Definition 0.36. *Eine Menge X heißt **endlich** genau dann, wenn*

$$X = \varnothing \vee \exists n \in \mathbb{N} : X \cong \mathbb{N}_n$$

*Eine Menge X heißt **unendlich** genau dann, wenn X nicht endlich ist.*
*Eine Menge X heißt **abzählbar** genau dann, wenn X endlich ist oder $X \cong \mathbb{N}$.*
*Eine Menge heißt **abzählbar unendlich** genau dann, wenn X abzählbar ist und X unendlich ist.*
*Eine Menge heißt **überabzählbar** genau dann, wenn X nicht abzählbar ist.*

| SATZ 0.4.2. | **Theorem v. Cantor, Schröder, Bernstein**[12]. |

Seien $M \neq \varnothing$ und $N \neq \varnothing$ Mengen. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

1. M und N sind gleichmächtig, also $\exists h \in \mathrm{Bij}(M, N)$.
2. Es gibt in beide Richtungen Injektionen, also

$$\exists f \in \mathrm{Inj}(M, N) \wedge \exists g \in \mathrm{Inj}(N, M) \neq \varnothing$$

Beweis.

(1) ⇒ (2) Dies ist trivial, da alle Bijektionen und auch ihre Inversen auch Injektionen sind.

[12]Dieser Satz wurde unabhängig voneinander von den 3 Mathematikern Cantor, Schröder und (Felix) Bernstein bewiesen.

(2) $\Rightarrow$ (1) Seien die beiden injektiven Abbildungen $f : M \hookrightarrow N$ und $g : N \hookrightarrow M$ gegeben. Es ist zu zeigen: $\exists h \in Bij(M, N)$. Wenn f oder g bereits eine Bijektion ist, sind wir fertig. Sonst ist $f \notin \mathrm{Surj}(M, N)$ und $g \notin \mathrm{Surj}(N, M)$, also $N \setminus f(M) \neq \varnothing$ und $M \setminus g(N) \neq \varnothing$. Dann sind auch die Abbildungen $f \circ g : N \hookrightarrow N$ und $g \circ f : M \hookrightarrow M$ injektiv. Betrachten wir nun die **C-S-B-Menge**

$$G := \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} (g \circ f)^k (M \setminus g(N)).$$

G hat folgende Eigenschaften:

[1] $M \setminus g(N) \subseteq G$

[2] $(g \circ f)(G) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (g \circ f)^k (M \setminus g(N)) \subseteq G$

[3] $G = (M \setminus g(N) \cup ((g \circ f)(G))$

G ist also die kleinste Teilmenge von M, welche $M \setminus g(N)$ umfasst und unter der Abbildung $g \circ f$ „invariant“ (also $(g \circ f)(G) \subseteq G$) ist. Dann ist

$$f|_G : G \xrightarrow{\sim} f(G)$$

eine Bijektion und ebenfalls ist

$$g|_{N \setminus f(G)} : N \setminus f(G) \xrightarrow{\sim} g(N \setminus f(G))$$

eine Bijektion (weil f und g Injektionen sind und die Zielmengen der Abbildungen auf die Bildmengen eingeschränkt wurden).

Weil g injektiv ist, ist

$$\begin{aligned} g(N \setminus f(G)) &= g(N) \setminus (g \circ f)(G) \\ &= M \setminus \big(M \setminus g(N)\big) \setminus (g \circ f)(G) \\ &= M \setminus \Big(\big(M \setminus g(N)\big) \cup (g \circ f)(G)\Big) \end{aligned}$$

und nach 3 dann

$$= M \setminus G$$

Damit sind die Abbildungen

$$\big(g|_{N \setminus f(G)}\big)^{-1} : M \setminus G \xrightarrow{\sim} N \setminus f(G)$$

und

$$f : G \xrightarrow{\sim} f(G)$$

Bijektionen mit disjunkten Bild- und Urbildmengen. Kombinieren wir diese Abbildungen, so ist auch $h : M \to N$ mit

$$\forall x \in M : h(x) := \begin{cases} f(x) & x \in G \\ (g|_{N \setminus f(G)})^{-1} & x \notin G \end{cases}$$

eine Bijektion. h erfüllt also das Gewünschte.

□

Mit diesem Satz kann man leicht die Gleichmächtigkeit von Mengen nachweisen und mit etwas Aufwand sogar eine Bijektion konstruieren.

Beispiel 0.4.1. Betrachte $f : \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $f(n) := (1, n)$ und $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N}$ mit $g(n, m) := 2^n \cdot 3^m$.

Als Übungsaufgabe ist h anzugeben.

Auch wenn es nicht viel Sinn macht, lassen sich sogar Bijektionen auf *e*iner Menge konstruieren.

Beispiel 0.4.2. Betrachte $f : \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N}$ mit $f(n) := 3 \cdot n$ und $g : \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N}$ mit $g(n) := 2 \cdot n$. Dann ist $(g \circ f)(n) = 6 \cdot n$. Die C-S-B-Menge $G \subseteq M$ ist dann

$$\begin{aligned} G &= (\mathbb{N} \setminus 2 \cdot \mathbb{N}) \cup (6^k \cdot (\mathbb{N} \setminus 2 \cdot \mathbb{N})) \\ &= \{6^k \cdot (2 \cdot l - 1) \mid k \in \mathbb{N}_0 \wedge l \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

G besteht also aus Produkten von 6er-Potenzen mit ungeraden Zahlen. Betrachtet man die Primfaktorenzerlegung von natürlichen Zahlen $m \in \mathbb{N}$

$$n = \prod_{p \text{ Primz.}} p^{\nu_p(m)},$$

wobei $\nu_p(n)$ der Exponent von p in der Primfaktorenzerlegung von m ist[13]. Zu einem gegebenen $m \in \mathbb{N}$ ist $\nu_p(m) \neq 0$ für höchstens endlich viele Primzahlen p. In unserem Fall kommt es besonders auf ν_2 und ν_3 an. Es ist

$$m = 2^{\nu_2(m)} \cdot 3^{\nu_3(m)} \cdot \prod_{\substack{p \text{ Primz.} \\ 2 \neq p \neq 3}} p^{\nu_p(m)}$$

Dabei gilt für alle Zahlen n, die nach dem Teilen durch die maximale mögliche 6-er-Potenz einen ungeraden Quotienten hinterlassen (also alle Elemente von G), dass $\nu_2(n) \leq \nu_3(n)$. Es ist also

$$G = \{n \in \mathbb{N} \mid \nu_2(n) \leq \nu_3(n)\}$$

und

$$N \setminus G = \{n \in \mathbb{N} \mid \nu_2(n) > \nu_3(n)\}.$$

Damit ist die C-S-B-Bijektion $h : \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$ gegeben durch

$$\forall n \in \mathbb{N} : h(n) = \begin{cases} 3 \cdot n & \nu_2(n) \leq \nu_3(n) \\ \frac{1}{2} \cdot n & \nu_2(n) > \nu_3(n) \end{cases}.$$

[13] Formal: $\nu_p(m)$ ist die höchste Zahl $\nu \in \mathbb{N}_0$, so dass $p^\nu | m$.

$\boxed{\text{Satz ohne Nummer.}}$ **Bemerkung zu Satz 0.4.2**
Sei $f \in \mathrm{Inj}(M, N)$, $g \in \mathrm{Inj}(N, M)$ und $G := \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} (g \circ f)^k (M \setminus g(N)) \subseteq M$ die zugehörige C-S-B-Menge. Dann ist die „Größe“ von G ein Maß für die Abweichung von der Bijektivität bei g und f. Genauer:

1. $G = M \Rightarrow f$ bijektiv
2. $G = \varnothing \Leftrightarrow g$ bijektiv

Beweis.

zu (1)

$$\begin{aligned} M = G &\Rightarrow M = (M \setminus g(N)) \cup \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (g \circ f)^k (M \setminus g(N)) \right) \\ &\Rightarrow g(N) \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (g \circ f)^k (M \setminus g(N)) \\ &\Rightarrow \forall y \in N : \exists k \in \mathbb{N} : \exists x' \in (M \setminus g(N)) : g(y) = (g \circ f)(x') \\ &\overset{g \text{ inj.}}{\Longrightarrow} \forall y \in N : \exists k \in \mathbb{N} : \exists x' \in (M \setminus g(N)) : y = f((g \circ f)^{k-1}(x')) \\ &\Rightarrow N = f(G) = f(M) = im(f) \\ &\overset{f \text{ inj.}}{\Longrightarrow} f \text{ bijektiv} \end{aligned}$$

zu (2)

$$\begin{aligned} G = \varnothing &\Leftrightarrow M \setminus g(N) = \varnothing \\ &\Leftrightarrow M = g(N) \\ &\Leftrightarrow g \text{ bijektiv} \end{aligned}$$

□

> $\boxed{\text{SATZ 0.4.3.}}$ **Erster Charakterisierungssatz für endliche und unendliche Mengen.**
> Sei $M \neq \varnothing$ eine Menge.
>
> (a) Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:
>
> (1) M ist unendlich
> (2) $\mathrm{Inj}(\mathbb{N}, M) \neq \varnothing$
> (3) $\mathrm{Surj}(M, \mathbb{N}) \neq \varnothing$
>
> (b) Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:
>
> (1) M ist endlich
> (2) $\mathrm{Inj}(\mathbb{N}, M) = \varnothing$
> (3) $\mathrm{Surj}(M, \mathbb{N}) = \varnothing$

Beweis.
Wir werden nur (a) beweisen, (b) folgt dann, da genau die Gegenaussagen dastehen.

(1)⇒(2) Sei M unendlich, also $\forall n \in \mathbb{N} : \mathbb{N}_n \not\cong M$. Dann

$$\begin{aligned} M \neq \varnothing \Rightarrow \exists x_1 \in M & \qquad\qquad \Rightarrow \{x_1\} \subsetneqq M \\ M \setminus \{x_1\} \neq \varnothing \Rightarrow \exists x_2 \in M \setminus \{x_1\} & \qquad\qquad \Rightarrow \{x_1, x_2\} \subsetneqq M \\ \vdots \qquad\qquad & \qquad\qquad \vdots \\ M \setminus \{x_1, \cdots, x_n\} \neq \varnothing \Rightarrow \exists x_{n+1} \in M \setminus \{x_1, \cdots, x_n\} & \quad \Rightarrow \{x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}\} \subsetneqq M \end{aligned}$$

Es gilt also:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \exists \{x_1, ..., x_n\} \subsetneqq M$$

Durch die Abbildung $f : \mathbb{N} \to M$ mit $f(n) := x_n$ wird jeder natürlichen Zahl ein Element aus M zugeordnet, und f ist injektiv, da alle x_n paarweise verschieden sind.

(2)⇔(3) Dies ist klar, man betrachte z.B. eine Rechts- bzw. Linksinverse zu den injektiven bzw. surjektiven Abbildungen.

(2)⇒(1) Sei $f \in \mathrm{Inj}(\mathbb{N}, M)$ beliebig gegeben. Zu zeigen ist, dass M unendlich ist, also

$$\forall n \in \mathbb{N} : M \not\cong \mathbb{N}_n.$$

Nehmen wir stattdessen an,

$$\begin{aligned}
&\exists n_0 \in \mathbb{N} : M \cong \mathbb{N}_{n_0} \\
\Rightarrow &\exists \theta \in \mathrm{Bij}(M, \mathbb{N}_{n_0}) \\
\Rightarrow &(\theta \circ f) \in \mathrm{Inj}(\mathbb{N}, \mathbb{N}_{n_0}) \\
\Rightarrow &\, \mathrm{Surj}(\mathbb{N}_{n_0}, \mathbb{N}) \neq \varnothing \\
\Rightarrow &\, \mathrm{Surj}(\mathbb{N}_{n_0}, \mathbb{N}_{n_0+1}) \neq \varnothing \\
\Rightarrow &\text{ Widerspruch zu Satz 0.3.4}
\end{aligned}$$

Damit ist unsere Annahme $M \cong \mathbb{N}_{n_0}$ falsch, also ist M unendlich.

□

Satz 0.4.4. Sei $M \neq \varnothing$ eine Menge und $S \subseteq M$. Dann gilt:

1. M endlich $\Rightarrow$ S endlich.
2. M abzählbar $\Rightarrow$ S abzählbar.

Beweis.

zu (1): Sei M endlich. Nehmen wir an,

$$\begin{aligned}
&\exists S \subseteq M : S \text{ unendlich} \\
\Rightarrow &\exists f \in \mathrm{Inj}(\mathbb{N}, S)
\end{aligned}$$

Da außerdem die Inklusionsabbildung $\mathrm{incl} : S \hookrightarrow M$ eine Injektion ist, gilt nach Satz 0.3.5, dass

$$\begin{aligned}
&\mathit{incl} \circ f \in \mathrm{Inj}(\mathbb{N}, M) \\
\Rightarrow &M \text{ ist unendlich.}
\end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, also ist unsere Annahme falsch, also ist S endlich.

zu (2): Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit M eine abzählbar unendliche Menge (wenn M endlich ist, siehe (1)), also $M \cong \mathbb{N}$. Dann gibt es 2 Möglichkeiten:

- S ist endlich, dann ist S nach Def. auch abzählbar.
- S ist unendlich, dann $\exists f \in \mathrm{Inj}(\mathbb{N}, S)$ und $\exists g \in \mathrm{Bij}(M, \mathbb{N})$, also

  $$g \circ f \in \mathrm{Inj}(M, S)$$

  und

  $$\mathrm{incl} \in \mathrm{Inj}(S, M),$$

also sind nach C-S-B die drei Mengen gleichmächtig:

$$S \cong M \cong \mathbb{N}$$

Damit ist S abzählbar unendlich.

□

$\boxed{\text{Satz 0.4.5.}}$ **Surjektive Bilder abzählbarer Mengen sind wieder abzählbar.**
Seien $M \neq \varnothing$, $N \neq \varnothing$, $f \in \mathrm{Surj}(M, N)$. Dann gilt:

1. M endlich $\Rightarrow$ N endlich.
2. M abzählbar unendlich $\Rightarrow$ N ist endlich oder abzählbar unendlich.

Beweis.

1. Sei M endlich, f surjektiv. Damit $\exists g \in \mathrm{Inj}(N, M)$. Wäre N unendlich, so $\exists h \in \mathrm{Inj}(\mathbb{N}, N)$, also $g \circ h : \mathbb{N} \hookrightarrow M$ injektiv, damit wäre M unendlich. Dies ist nicht der Fall, also kann N nicht unendlich sein.
2. Sei $\mathbb{N} \cong M$, also $\exists \varphi \in \mathrm{Bij}(\mathbb{N}, M)$. Wir unterscheiden 2 Fälle:
   - N endlich $\Rightarrow$ fertig.
   - N unendlich. Dann $\exists g : \mathbb{N} \hookrightarrow N$ (Injektion), damit ist $g \circ \varphi^{-1} \in \mathrm{Inj}(M, N)$, also nach C-S-B $N \cong M \cong \mathbb{N}$, also ist N abzählbar unendlich.

□

$\boxed{\text{Satz 0.4.6.}}$ **Abzählbare Vereinigungen abzählbarer Mengen sind wieder abzählbar.**
Sei $I \neq \varnothing$ eine abzählbare Menge, $(M_i)_{i \in I}$ eine Mengenfamilie und

$$\forall i \in I : M_i \text{ ist abzählbar.}$$

Dann gilt:

$$\bigcup_{i \in I} M_i \text{ ist wieder abzählbar.}$$

Beweis.
I ist eine abzählbare Menge, damit $\exists f \in \operatorname{Inj}(I,\mathbb{N})$. Sei $i_0 \in I$ beliebig gewählt. Dann können wir die Mengenfamilie $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definieren durch

$$M_n := \begin{cases} M_i & n = f(i), i \in I \\ M_{i_0} & \text{sonst} \end{cases}$$

Es ist dann

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n = \bigcup_{i\in I} M_i$$

Nach Voraussetzung sind alle M_n, $n \in \mathbb{N}$ abzählbar, d.h.

$$\forall n \in \mathbb{N} : \exists f_n : \mathbb{N} \twoheadrightarrow M_n$$

Damit erhält man die Familie von Abbildungen

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad f_n : \mathbb{N} \twoheadrightarrow M_n \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k$$

Damit können wir eine Abbildung $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} M_k$ definieren durch

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \quad h(n,m) := f_n(m) \in M_n$$

Da die $f_n : \mathbb{N} \twoheadrightarrow M_n$ surjektiv sind, ist nun auch

$$h \in \operatorname{Surj}\left(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n = \bigcup_{n\in I} N_i\right)$$

Damit gibt es zu h auch eine rechtsinverse Injektion

$$g : \bigcup_{i\in I} M_i \hookrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

und es ist auch $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$, also ist $\bigcup\limits_{i\in I} M_i$ eine abzählbare Menge. □

Folgerungen aus diesen Sätzen zur Abzählbarkeit:

1. $\mathbb{Z}$ ist abzählbar, denn

$$\exists h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \quad \big(\text{ z.B. } h(n,m) := n - m\big)$$

2. $\mathbb{Q}$ ist abzählbar, denn es existiert

$$g : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \twoheadrightarrow \mathbb{Q} \quad \big(g(n,m) := \frac{m}{n}\big)$$

3. endliche kartesische Produkte abzählbarer Mengen sind abzählbar:

$$A \cong \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ mal}} = A^n \cong \mathbb{N}$$

4. $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ ist nicht abzählbar, da $\mathbb{N} \ncong \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ (Satz 0.4.1) Damit ist auch $\mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \{0,1\})$ nicht abzählbar.

5. Die Mengen $\mathrm{Abb}(\mathbb{N},\mathbb{N}), \mathrm{Abb}(\mathbb{N},\mathbb{Q}), \mathrm{Abb}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ sind nicht abzählbar, da sonst $\mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \{0,1\})$ abzählbar wäre.

6. Die Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ ist bijektiv äquivalent zu $\mathbb{R}$.

   Beweis.
   Es ist $\mathbb{R} \cong (0,1)$ (siehe Beispiel 0.3.4 auf Seite 31). Damit gilt auch

   $$\mathbb{N} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{N} \times (0,1)$$

   Nun existiert eine Injektion

   $$f : \mathbb{N} \times (0,1) \hookrightarrow \mathbb{R},$$

   z.B. $f(n,\delta) := n + \delta$. Außerdem gibt es eine Injektion

   $$h : \mathbb{R} \to \mathbb{N} \times \mathbb{R},$$

   z.B. mit $h(r) := (1,r)$, Damit ist nach CSB $\mathbb{N} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$. □

Satz 0.4.7. Seien M und N zwei unendliche Mengen derart, dass $N \subseteq M$ und $M \setminus N$ abzählbar ist. Dann gilt

$$M \cong N.$$

Beweis.
N ist unendlich, also

$$\exists f \in \mathrm{Inj}(\mathbb{N}, N).$$

Dann ist $S := f(\mathbb{N}) \cong \mathbb{N}$, (also abzählbar unendlich), also $S \cup (M \setminus N)$ ebenfalls abzählbar unendlich:

$$S \cup (M \setminus N) \cong \mathbb{N} \cong S,$$

also existiert eine Bijektion

$$\vartheta \;:\; S \cup (M \setminus N) \xrightarrow{\sim} S.$$

Wie man außerdem sieht, ist

$$\begin{aligned} M \setminus (S \cup (M \setminus N)) &= (M \setminus (M \setminus N)) \setminus S \\ &= N \setminus S \end{aligned}$$

Damit können wir eine Abbildung $h : M \to N$ konstruieren durch

$$\forall x \in M: \quad h(x) := \begin{cases} \vartheta(x) \in S & x \in S \cup (M \setminus N) \\ x & \text{sonst} \end{cases}$$

h ist injektiv, weil $(N \setminus S) \cap S = \varnothing$, ϑ injektiv und id_M injektiv ist. h ist auch surjektiv, weil $N = (N \setminus S) \cup S = im(id_M|_{N \setminus S}) \cup im(\vartheta)$. Damit ist h bijektiv, also

$$M \cong N.$$

$\square$

Damit gilt auch: Sei $a, \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, a < b$ und die Intervalle

$$\begin{aligned} (a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \\ [a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \\ (a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \\ [a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \end{aligned}$$

gegeben. Dann ist

$$(a,b) \cong [a,b) \cong (a,b] \cong [a,b],$$

weil die Intervalle unendlich sind und jeweils die Differenzmenge endlich (also abzählbar) sind.

Beispiel 0.4.3. Wir können analog zum Beweis des Satzes auch eine Bijektion angeben zwischen den Intervallen $(0,1)$ und $[0,1]$.

Es ist $[0,1] = (0,1) \cup \{0,1\}$, also $M = [0,1], N = (0,1), M \setminus N = \{0,1\}$. Dann bilden wir zunächst eine abzählbar unendliche Menge $S \subseteq N$ durch

$$\begin{aligned} S &:= \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots\right\} \subset (0,1) \\ &= \left\{\frac{1}{k+1} \mid k \in \mathbb{N}\right\} \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$S \cup (M \setminus N) = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right\}$$

Die Bijektion $\vartheta : S \to S \cup (M \setminus N)$ erhalten wir z.B. durch

$$\vartheta(0) := \frac{1}{2}$$
$$\vartheta(1) := \frac{1}{3}$$
$$\vartheta\left(\frac{1}{k+1}\right) := \frac{1}{k+3} \quad k \in \mathbb{N}$$

Unsere endgültige Bijektion $h : [0,1] \to (0,1)$ ist dann gegeben durch

$$h(x) := \begin{cases} \frac{1}{2} & x = 0 \\ \frac{1}{k+2} & x = \frac{1}{k} \wedge k \in \mathbb{N} \\ x & \text{sonst} \end{cases}$$

$\boxed{\text{Satz 0.4.8.}}$ **Zweiter Charakterisierungssatz für endliche und unendliche Mengen**
Sei M eine Menge.

1. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:
   a) M ist unendlich (also $\forall n \in \mathbb{N} : M \neq \mathbb{N}_n$).
   b) $\exists S \subsetneqq M \ : \ M \cong S$.

   (Mit anderen Worten: M ist genau dann unendlich, wenn es eine echte Teilmenge gibt, die zu M gleichmächtig ist.)

2. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:
   a) M ist endlich.
   b) $\forall S \subsetneqq M \ : \ S \ncong M$.

   (Mit anderen Worten: M ist genau dann endlich, wenn es keine echte Teilmenge gibt, die zu M gleichmächtig ist.)

Beweis.

zu (1): **(a)⇒(b)** Sei M eine unendliche Menge. Dann $\exists f \in \mathrm{Inj}(\mathbb{N}, M)$, damit ist $S := f(\mathbb{N}) \subseteq M$ und $S \cong N$. Es ist natürlich $M = S \cup (M \setminus S)$. Nun unterscheiden wir 2 Fälle:

- $M \setminus S$ ist endlich, M und S ist unendlich, damit sind nach Satz 0.4.7 die Menge M abzählbar. Außerdem ist dann auch die Menge $\bar{S} := F(2 \cdot \mathbb{N}) \subsetneqq S \subseteq M$, also $\overline{S} \subsetneqq M$ und

$$\overline{S} \cong 2 \cdot \mathbb{N} \cong \mathbb{N} \cong S \cong M,$$

also erfüllt $\overline{S}$ das Gewünschte.

- $M \setminus S$ ist unendlich, dann ist nach Satz 0.4.7 $M \cong \widetilde{S} := M \setminus S$, also erfüllt $\widetilde{S}$ das Gewünschte.

(b)⇒(a) Sei M eine Menge, so dass

$$\exists S \subsetneqq M : \exists \rho : M \xrightarrow{\sim} S$$

Nehmen wir an, M wäre endlich, also

$$\exists n \in \mathbb{N} : \quad \exists \beta : \mathbb{N}_n \xrightarrow{\sim} M$$

Damit ist $\beta^{-1}(S) \subsetneqq \mathbb{N}_n$ und $\exists x \in M : S \subseteq M \setminus \{x\}$, und wegen

$$M \setminus \{x\} \cong \mathbb{N}_n \setminus \{\beta^{-1}(x)\} \cong \mathbb{N}_{n-1}$$

Existiert also eine Surjektion $h : \mathbb{N}_{n-1} \twoheadrightarrow \S$ und mit $S \cong M \cong \mathbb{N}_n$ folgt, dass $\operatorname{Inj}(N_{n-1}, \mathbb{N}_n) \neq \varnothing$ was ein Widerspruch zu Satz 0.3.4 ist. Damit ist unsere Annahme falsch, also muss M unendlich sein.

zu (2): Der Beweis folgt im Umkehrschluss zu (1).

□

Die Kardinalität von $\mathbb{R}$

Für jede Zahl x im Intervall $(0, 1)$ existiert genau eine dyadische (binäre) Bruchentwicklung

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{2^i} \qquad \forall i \in \mathbb{N} : \alpha_i \in \{0, 1\},$$

wobei wir Darstellungen mit 1-Periode ausschließen, also muss $\alpha_i = 0$ für unendlich viele $i \in \mathbb{N}$ sein.

Es existiert also die sogenannte dyadische Bijektion

$$f : (0, 1) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Abb}(\mathbb{N}, \{0, 1\}) \setminus R,$$

wobei R als

$$R := \{f \in \operatorname{Abb}(\mathbb{N}, \{0, 1\}) \mid \exists m \in \mathbb{N} : \forall n \geq n : f(n) = 1\}$$

definiert ist. Es gilt dann

$$R = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{f \in \operatorname{Abb}(\mathbb{N}, \{0, 1\}) \mid \forall n \geq m : f(n) = 1\}$$
$$R = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} P_m$$

mit

$$P_m := \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \{0,1\}) \mid \forall n \geq m : f(n) = 1\}$$

Nun ist für jedes $m \in \mathbb{N}$ die Menge P_m (also die Menge der Abbildungen mit einer 1-Periode ab Index m) endlich, da sie nur durch die Werte vor diesem Index bestimmt wird. Nach Satz 0.4.6 ist damit R als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen abzählbar.

$$\underbrace{\mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \{0,1\})}_{\text{unendlich}} = \underbrace{\mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \{0,1\}) \setminus R}_{\text{unendlich}} \cup \underbrace{R}_{\text{abzählbar}}$$

nach Satz 0.4.7 ist also

$$\mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \{0,1\}) \cong \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \{0,1\}) \setminus R$$

und damit nach dem nummernlosen Satz auf Seite 32 auch

$$\mathfrak{P}(\mathbb{N}) \cong \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \{0,1\}) \cong \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \{0,1\}) \setminus R \cong (0,1) \cong \mathbb{R}$$

Wir können also als Satz formulieren:

Satz 0.4.9.

$$\mathbb{R} \cong \mathfrak{P}(\mathbb{N})$$

$\mathbb{R}$ ist also überabzählbar.
Folgerungen:

[1] Sei $S \subseteq \mathbb{R}$. Wenn es ein offenes Intervall $(a,b) \subseteq S$ gibt, gilt $S \cong \mathbb{R}$. Die Umkehrung gilt i.a. nicht.

Beweis.
Sei $(a,b) \subseteq S$. Dann gilt

$$\mathbb{R} \cong (0,1) \cong (a,b) \subseteq S \subseteq \mathbb{R}$$

und nach CSB ist $S \cong \mathbb{R}$.

Für die Umkehrung betrachte man die Menge der irrationalen Zahlen, die kein Intervall komplett umfassen (siehe Analysis). □

[2] Seien $a < b < c < d < \alpha < \beta$ reelle Zahlen. Dann existieren Bijektionen $f : (a,b) \cup (c,d) \xrightarrow{\sim} [a,b]$.

Beispiel siehe Übungsaufgabe 2 in Serie 7.

[3] Sei $M \neq \varnothing$ eine Menge. M ist genau dann endlich, wenn gilt:

$$\mathrm{Inj}(M,M) = \mathrm{Surj}(M,M) = \mathrm{Bij}(M,M),$$

d.h. (nur) für Selbstabbildungen endlicher Mengen stimmen die Begriffe „bijektiv“, „injektiv“ und „surjektiv“ überein.

Solche bijektiven Selbstabbildungen nennt man auch Permutationen.

$\boxed{\mathfrak{S}(M)}$ **Definition 0.37.** *Sei $M \neq \varnothing$. Dann heißt die Menge*

$$\mathfrak{S}(M) := \mathrm{Bij}(M,M)$$

die Menge aller ***Permutation****en von M.*

$\boxed{\mathfrak{S}_n}$ **Definition 0.38.** *Speziell bezeichnen wir die Permutationsmengen der Menge der ersten n natürlichen Zahlen mit*

$$\mathfrak{S}_n := \mathfrak{S}(\mathbb{N}_n).$$

$\boxed{card(M)}$ **Definition 0.39.** *Betrachte die Klasse $\mathcal{K}$ aller Mengen. Dann nennen wir für jede Menge $M \in (K)$*

$$card(M) := \{N \in \mathcal{K} \mid N \cong M\},$$

also die „Unterklasse aller derjenigen Mengen, welche zu M bijektiv äquivalent sind“, die ***Kardinalität*** *von M.*

$$Card := \{card(M) \mid M \in \mathcal{K}\}$$

ist dann die Klasse der Kardinalitäten.

Satz ohne Nummer. **Eigenschaften der Kardinalität**

1. $M \in card(M)$
2. $card(M) = card(L) \Leftrightarrow M \cong L$
3. Es gibt eine kanonische Abbildung $\Phi : \mathbb{N} \to Card$ durch

$$\Phi(n) := card(\mathbb{N}_n).$$

Φ ist offenbar injektiv, da

$$\begin{aligned} \Phi(n) &= \Phi(m) \\ card(\mathbb{N}_n) &= card(\mathbb{N}_m) \\ \mathbb{N}_n &\cong \mathbb{N}_m \\ n &= m \end{aligned}$$

Deswegen identifizieren wir die natürlichen Zahlen mit

$$\Phi(\mathbb{N}) = \{card(\mathbb{N}_n) \mid n \in \mathbb{N}\},$$

also

$$n :\overset{ident}{\longleftrightarrow} card(\mathbb{N}_n)$$

Die Kardinalitäten der endlichen Mengen sind also natürliche Zahlen:

$$\mathbb{N} \subseteq Card$$

Außerdem gibt es natürlich die Kardinalitäten der unendlichen Mengen. Dabei werden für wichtige Mengen besondere Bezeichnungen eingeführt:

Definition 0.40. *Wir bezeichnen die Kardinalität abzählbar unendlicher Mengen mit* $\boxed{\aleph_0}$

$$\aleph_0 := card(\mathbb{N})$$

(sprich „Aleph-Null“) und die ***Kardinalität des Kontinuums*** *(das Intervall* $(0,1)$*) und der Menge der reellen Zahlen mit*

$$c := card(\mathbb{R}) = card((0,1))$$

Bevor wir jetzt Operationen auf den Kardinalzahlen definieren, brauchen wir eine neue Mengenoperation.

Definition 0.41. *Sei* $(M_i)_{i\in I}$ *eine Familie nicht-leerer Mengen. Dann heißt die Menge* $\boxed{\coprod_{i\in I} M_i}$

$$\coprod_{i\in I} M_i := \bigcup_{i\in I} (\{i\} \times M_i)$$

disjunkte Vereinigung *der Mengen* M_i*. Für die Vereinigung zweier Mengen schreiben wir* $\boxed{M_1 \amalg M_2}$

$$\begin{aligned} M_1 \amalg M_2 &:= \coprod_{i\in\{1,2\}} M_i \\ &= \bigcup_{i\in\{1,2\}} (\{i\} \times M_i) \\ &= \{1\} \times M_1 \cup \{2\} \times M_2 \\ &= \big\{(1,x) \mid x \in M_1\big\} \cup \big\{(2,x) \mid x \in M_2\big\} \end{aligned}$$

Nun können wir folgende Rechenoperationen definieren:

Definition 0.42. *Die Kardinalzahl* $\boxed{+}$

$$card(M) + card(N) := card(M \amalg N)$$

heißt ***Summe der Kardinalzahlen*** $card(M)$ *und* $card(N)$*.*

Definition 0.43. *Die Kardinalzahl* $\boxed{\cdot}$

$$card(M) \cdot card(N) := card(M \times N)$$

heißt ***Produkt der Kardinalzahlen*** *$card(M)$ und $card(N)$.*

Definition 0.44. *Die Kardinalzahl* $\boxed{\square^{\square}}$

$$card(M)^{card(N)} := card(\mathrm{Abb}(M, N))$$

heißt ***Potenz*** *von $card(M)$ zum Exponenten $card(N)$.*

Schließlich ist noch eine Ordnung sinnvoll:

$\boxed{\leq}$ **Definition 0.45.** *Eine Kardinalzahl $card(M)$ heißt* ***kleiner oder gleich*** *einer Kardinalzahl $card(N)$, falls es eine Injektion von M nach N gibt:*

$$card(M) \leq card(N) :\Leftrightarrow \mathrm{Inj}(M, N) \neq \varnothing$$

Wie man leicht sieht, sind alle diese Begriffe wohldefiniert (also repräsentantenunabhängig) und entsprechen für endliche Mengen den gleichnamigen Operationen (bzw. der $\leq$-Relation) bei den natürlichen Zahlen.

Satz 0.4.10.

$$card(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) = card(\mathbb{R})$$

Bevor wir diesen Satz beweisen, werden wir zunächst ein Lemma aufstellen und beweisen.

Lemma. Seien M, N, L drei nichtleere Mengen. Dann sind die abgeleiteten Mengen

$$\begin{aligned} A &:= \mathrm{Abb}(M, \mathrm{Abb}(N, L)), \\ B &:= \mathrm{Abb}(N, \mathrm{Abb}(M, L)), \\ C &:= \mathrm{Abb}(M \times N, L) \end{aligned}$$

bijektiv äquivalent: $A \cong B \cong C$.

Beweis.
Betrachte die Abbildung $\Phi : A \to C$ mit

$$\forall x \in M, \forall y \in N, \forall h \in A : \quad (\Phi(h))\,(x, y) := (h(x))\,(y).$$

Φ ist injektiv, da für alle $(h, h') \in A^2$ gilt:

$$\begin{aligned} \Phi(h) &= \Phi(h') \\ \Leftrightarrow \forall (x,y) \in (M \times N): \quad (\Phi(h))(x,y) &= (\Phi(h'))(x,y) \\ \Leftrightarrow \forall (x,y) \in (M \times N): \quad (h(x))(y) &= (h'(x))(y) \\ \Leftrightarrow \forall x \in M: \quad (h(x) &= h'(x)) \\ \Leftrightarrow h &= h' \end{aligned}$$

Φ ist auch surjektiv, denn: Sei $\varphi \in C$ beliebig. Dann betrachte $h \in A$ mit

$$\forall (x,y) \in M \times N: \quad (h(x))(y) := \varphi(x,y),$$

also $\Phi(h) = \varphi$. Analog erhalten wir $\Psi : B \xrightarrow{\sim} C$ durch

$$(\Psi(h))(x,y) := (h(y))(x).$$

Damit erhalten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\Phi} & C \\ {\scriptstyle \Lambda = \Phi^{-1} \circ \Psi}\Big\uparrow & & \Big\| \\ B & \xrightarrow{\Psi} & C \end{array}$$

mit den Bijektionen $\Phi \in \mathrm{Bij}(A, C)$, $\Psi \in \mathrm{Bij}(B, C)$ und $\Lambda := \Phi^{-1} \circ Psi \in \mathrm{Bij}(B, A)$. $\square$

Nun können wir Satz 0.4.10 leicht beweisen:

Beweis.

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R} &= \mathrm{Abb}(\{1,2\}, \mathbb{R}) \\ &\cong \mathrm{Abb}\left(\{1,2\}, \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \{0,1\})\right) \\ &\overset{\text{Lemma}}{\cong} \mathrm{Abb}\left(\{1,2\} \times \mathbb{N}, \{0,1\}\right) \\ &\cong \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \{0,1\}) \\ &\cong \mathbb{R} \end{aligned}$$

$\square$

Satz ohne Nummer. Damit folgt auch:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} : \mathbb{R}^n &\cong \mathbb{R} \\ \mathbb{C} &\cong \mathbb{R} \\ \mathbb{C}^n &\cong \mathbb{R} \end{aligned}$$

Es gilt sogar: Ist M eine unendliche Menge, so ist $M \times M \cong M$ und damit

$$M^n \cong M \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

was wir aber erst später beweisen werden (siehe Satz 0.5.6).

Beispiel 0.4.4. Sei $\mathfrak{f}_{\mathbb{N}} := \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ die Menge aller natürlichen Folgen. Dann gilt

$$\mathfrak{f}_{\mathbb{N}} = \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{N}) \hookrightarrow \mathfrak{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \cong \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \cong \mathbb{R}$$

und genauso

$$\mathfrak{f}_{\mathbb{N}} = \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{N}) \hookleftarrow \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \{1, 2\}) \cong \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \{0, 1\}) \cong \mathbb{R}.$$

Damit gilt nach CSB :

$$\mathfrak{f}_{\mathbb{N}} \cong \mathbb{R},$$

also ist die Menge aller natürlichen Zahlenfolgen gleichmächtig zur Menge der reellen Zahlen.

Beispiel 0.4.5. Es gilt auch:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) &\cong \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N})) \\
&\cong \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \{0, 1\})) \\
&\cong \mathrm{Abb}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \{0, 1\}) \\
&\cong \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \{0, 1\}) \\
&\cong \mathbb{R},
\end{aligned}$$

die Menge der reellen Zahlenfolgen ist also auch gleichmächtig zur Menge der reellen Zahlen.

Beispiel 0.4.6. Allerdings ist $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cong \mathfrak{P}(\mathbb{R}) \ncong \mathbb{R}$.

Beispiel 0.4.7. Betrachten wir $\mathbb{R}$ und die Mengen

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}_0 : \mathcal{P}_n^{\mathbb{Z}} := \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \exists (a_0, \cdots, a_n) \in \mathbb{Z}^n : \forall r \in \mathbb{R} : \\
f(r) = a_0 + a_1 \cdot r + a_2 \cdot r^2 + \ldots + a_n \cdot r^n\}
\end{aligned}$$

der ganzzahligen Polynome. Nun können wir definieren:

Definition 0.46. *Eine reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$ heißt **algebraisch** genau dann, wenn*

$$\exists n \in \mathbb{N}_0, \exists f \in \mathcal{P}_n^{\mathbb{Z}} : f(r) = 0$$

$\boxed{\mathrm{Alg}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})}$ *Die Menge*

$$\mathrm{Alg}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R}) := \{r \in \mathbb{R} \mid r \textit{ algebraisch}\}$$

heißt die Menge der algebraischen Zahlen.

$\boxed{\text{Trans}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})}$ *Definition* 0.47. *Ein $r \in \mathbb{R}$ heißt **transzendent**, falls r nicht algebraisch ist. Die Menge*

$$\text{Trans}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R}) := \mathbb{R} \setminus \text{Alg}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$$

ist die Menge der transzendenten Zahlen.

Man sieht leicht:

$$\mathbb{Z} \subseteq \text{Alg}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R}),$$

denn jedes $r \in \mathbb{Z}$ ist Nullstelle von $f(x) := x - r$. Ebenso ist

$$\mathbb{Q} \subseteq \text{Alg}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R}),$$

denn jedes $r = \frac{p}{q}$ ist Nullstelle von $f = q \cdot x - p$. Auch $\sqrt[p]{q}$ mit $p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{Z}$ ist Nullstelle von $f(x) = x^p - q$.

Es scheint also sehr schwer zu sein, transzendente Zahlen zu finden. Folgende Betrachtung zeigt allerdings, dass es welche geben muss: Es ist

$$\text{Alg}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \left\{ r \in \mathbb{R} \mid r \text{ ist Nullstelle eines } f \in \mathcal{P}_n^{\mathbb{Z}} \right\}$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_n^{\mathbb{Z}} &\cong \left\{ (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} \mid a_n \neq 0 \right\} \\ &\cong \mathbb{Z}^{n+1} \\ &\cong \mathbb{N} \end{aligned}$$

also ist $\mathcal{P}_n^{\mathbb{Z}}$ abzählbar unendlich. Jedes dieser Polynome hat höchstens n Nullstellen:

$$\begin{aligned} NS_n &:= \left\{ t \in \mathbb{R} \mid r \text{ ist Nullstelle eines } f \in \mathcal{P}_n^{\mathbb{Z}} \right\} \\ &= \bigcup_{f \in \mathcal{P}_n^{\mathbb{Z}}} NS(f) \\ &\cong \mathcal{P}_n^{\mathbb{Z}} \\ &\cong \mathbb{N} \\ \text{Alg}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R}) &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} NS_n \\ &\cong \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ &\cong \mathbb{N} \end{aligned}$$

Die Menge der algebraischen Zahlen ist also höchstens abzählbar. Für die transzendenten Zahlen gilt damit:

$$\begin{aligned} \text{Trans}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R}) &= \mathbb{R} \setminus \text{Alg}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R}) \\ card(\text{Trans}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})) &= card(\mathbb{R}) - card(\mathbb{N}) \\ &= card(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Beispiele für transzendente Zahlen:

1. Die Eulersche Zahl e (wurde 1873 von Hermite nachgewiesen)
2. Die Ludolfsche Zahl π (Nachweis von Lindemann).
3. Hilbertsche Vermutung: Ist $\alpha \in \mathrm{Trans}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$ und $\beta \in \mathrm{Alg}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R}) \setminus \{0,1\}$, so ist $\beta^\alpha \in \mathrm{Trans}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$.
4. Viele Funktionen haben transzendente Funktionswerte an den meisten rationalen Stellen (z.B. $\sin, \cos, \exp, \ln, \ldots$).

0.5 Geordnete Mengen, Faktormengen, das Zornsche Lemma

Definition 0.48. *Sei $M \neq \varnothing$ eine Menge. Eine Korrespondenz/Relation $R \subseteq M \times M$ heißt **Ordnung** oder **Ordnungsrelation** auf M, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:*

Reflexivität

$$\forall x \in M : (x,x) \in R$$

Antisymmetrie

$$\forall (x,y) \in M^2 : \big((x,y) \in R \wedge (y,x) \in R\big) \Rightarrow x = y$$

Transitivität

$$\forall (x,y,z) \in M^3 : \big((x,y) \in R \wedge (y,z) \in R\big) \Rightarrow (x,z) \in R$$

$\boxed{\leq_R}$ *Statt $(x,y) \in R$ schreibt man auch*

$$xRy \text{ oder } x \leq_R y.$$

Beispiel 0.5.1. Die Standard-Ordnung $R_\leq \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit

$$R_\leq := \big\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha \leq \beta\big\}$$

Beispiel 0.5.2. Die Teilbarkeitsrelation $\Gamma \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit

$$\Gamma := \big\{(n,m) \in \mathbb{N}^2 \mid n|m\big\}$$

Beispiel 0.5.3. Sei $E \neq \varnothing$ Menge, dann kann auf der Potenzmenge die Teilmengenrelation

$$R_\subseteq := \big\{(A,B) \in \mathfrak{P}(E)^2 \mid A \subseteq B\big\}$$

definiert werden.

Definition 0.49. *Ein Paar (M,R) mit $M \neq \varnothing$ Menge (**Trägermenge**) und $R \subseteq M \times M$ Ordnungsrelation auf M heißt **geordnete Menge**.*

Achtung: In einer geordneten Menge muss nicht jedes Paar $(x,y) \in M^2$ vergleichbar sein. Deswegen folgende Definition:

Definition 0.50. *Sei (M, R) eine Ordnungsrelation. R heißt* ***Totalordnung*** *auf M genau dann, wenn*

$$\forall (x, y) \in M^2 : x \leq y \vee y \leq x.$$

(M, R) ist dann ***totalgeordnet****.*

Beispiel 0.5.4.

- $(\mathbb{R}, \leq)$ ist totalgeordnet.
- $(\mathbb{N}, |)$ ist nicht totalgeordnet.
- $(\mathfrak{P}(E), \subseteq)$ ist i.a. nicht totalgeordnet.

Beispiel 0.5.5. Sei $(M, \leq_R)$ geordnet, $x \in M$, $y \in M$, $x \leq_R y$. Dann ist $\big(\{x, y\}, \leq_R |_{\{x,y\}^2}\big)$ totalgeordnet.

Auf jeder Menge M gibt es mindestens eine Ordnung, nämlich

$$R_{id} \subseteq M \times M \text{ mit } R_{id} = \{(x, x) \mid x \in M\}$$

Für $card(M) \geq 2$ gibt es noch weitere Ordnungen.

Definition 0.51. *Sei (M, R) eine geordnete Menge, $N \subseteq M$. Dann heißt*

$$(N, R_i) := (N, R \cap (N \times N))$$

und R_i ist die ***induzierte*** *Ordnung auf N. Man schreibt statt (N, R_i) auch (N, R).*

(M, R) heißt ***induktiv*** *geordnet, falls für jede totalgeordnete Teilmenge (N, R) von (M, R) ein $c \in M$ existiert mit*

$$\forall x \in N : \quad x \leq_R c.$$

Ein Element $x_0 \in M$ heißt ***kleinstes Element*** *oder* ***Minimum*** *in M (bzgl. R) genau dann, wenn* $\boxed{\min M}$

$$\forall y \in M : x_0 \leq_R y$$

Wir schreiben $\min M := x_0$.

Ein Element $x_0 \in M$ heißt ***größtes Element*** *oder* ***Maximum*** *in M (bzgl. R) genau dann, wenn*

$$\forall y \in M : y \leq_R x_0$$

Wir schreiben $\max M := x_0$. $\boxed{\max M}$

Wegen der Antisymmetrie gibt es höchstens ein größtes und höchstens ein kleinstes Element in jeder geordneten Menge.

Definition 0.52. *Sei wieder (M, R) Ordnungsrelation, $N \subseteq M$ nichtleere Teilmenge von M. Ein Element $c \in M$ heißt* ***obere Schranke*** *für N, falls*

$$\forall x \in N : x \leq c.$$

Ein Element $c \in M$ heißt ***untere Schranke*** *für N, falls*

$$\forall x \in N : c \leq x.$$

Ein Element $c_* \in M$ heißt ***kleinste obere Schranke*** *oder* ***Supremum*** *von N, falls* $\boxed{\sup_M(N)}$

- *c_* ist obere Schranke und*
- *$\forall c \in M$ mit $\big(x \leq c \forall x \in N\big) : c_* \leq c$.*

Analog heißt ein $z \in M$ ***größte untere Schranke*** *oder* ***Infimum*** *für N in M, falls*

$$\forall x \in N : z \leq X$$

$\boxed{\inf_M(N)}$ *und*

$$\forall c \text{ mit } \big(c \leq x \forall x \in N\big) \colon c \leq z$$

Obere und untere Schranken müssen nicht immer existieren, wenn sie existieren, sind sie nicht eindeutig. Kleinste obere und größte untere Schranken sind, falls sie existieren, immer eindeutig. Minima und Maxima müssen nicht existieren, aber sie sind eindeutig, falls sie existieren. Jedes Minimum ist natürlich eine größte untere, jedes Maximum eine kleinste obere Schranke.

Beispiel 0.5.6.

1. Bei $(\mathbb{R}, \leq)$ existiert weder $\min(\mathbb{R})$ noch $\max(\mathbb{R})$.
2. Bei $[0,1), \leq)$ existiert $\min([0,1)) = 0$, aber $\max([0,1))$ existiert nicht.
3. Sei $M = \mathbb{R}$ und $N := (0,1)$. Dann ist $1 = \sup_{\mathbb{R}}(N)$ und $0 = \inf_{\mathbb{R}}(N)$.
4. Betrachten wir $(\mathbb{Q}, \leq)$. Sei dort $N_1 := (1,2) \cap \mathbb{Q}$ und $N_2 := \big\{\alpha \in N_1 \mid \alpha^2 \leq 2\big\}$. Hier existiert weder $\max(N_1)$ $\max(N_2)$, $\min(N_1)$ noch $\min(N_2)$. Es ist $\inf_{\mathbb{Q}}(N_1) = \inf_{\mathbb{Q}}(N_2) = 1$, $\sup_{\mathbb{Q}}(N_1) = 2$, aber $\sup_{\mathbb{Q}}(N_2)$ existiert nicht.
5. Sei $M := \mathbb{N} \setminus \{1\} \subseteq \mathbb{N}$. Wir haben hier die natürliche Ordnung $(M, \leq)$. Wir können eine neue Ordnung $\trianglelefteq$ definieren durch

   $$\forall (n,m) \in M^2 : \quad n \trianglelefteq m \Leftrightarrow m|n.$$

   $\min_{\trianglelefteq}(\mathbb{N} \setminus \{1\})$ existiert nicht, denn es existiert kein

   $$n \in \mathbb{N} : \quad n \trianglelefteq m \quad \forall m \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

   das hieße nämlich $m|n \quad \forall m \in \mathbb{N}$, was unmöglich ist (man nehme nur ein $m > n$).
   Ebenso existiert $n = \max_{\trianglelefteq}(\mathbb{N} \setminus \{1\})$ nicht, denn keine Zahl teilt alle anderen (z.B. wird m = n+1 nicht geteilt).
   Allerdings ist $\max_{\trianglelefteq}(\mathbb{N}) = 1$.

Definition 0.53. *Sei $(M, \leq)$ eine beliebige geordnete Menge. $z \in M$ heißt **maximales Element** in M, wenn*

$$\forall x \in M: \quad \big(z \leq x \Rightarrow x = z\big).$$

Definition 0.54. *Bei einer geordneten Menge $(M, \leq)$ schreibt man $x < y$ für $x \leq y \wedge x \neq y$.* $\boxed{x < y}$

Für maximale Elemente z gilt also:

$$\forall x \in M: \quad x \not\geq z$$
$$\Rightarrow x < z \text{ oder x und y nicht sind vergleichbar}$$

Achtung: Größte Elemente sind immer auch maximale Elemente (und, wenn sie existieren, die einzigen maximalen Elemente), aber die Umkehrung gilt nicht immer.

Beispiel 0.5.7. Betrachten wir wieder $(\mathbb{N} \setminus \{1\}, \trianglelefteq)$. Hier gilt: $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ist $\trianglelefteq$-maximal genau dann, wenn keine andere Zahl n teilt, also n Primzahl ist.

Definition 0.55. *Für die Menge der Primzahlen schreibt man* $\boxed{\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})}$

$$\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}) := \{p \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \mid p \textit{ ist Primzahl}\}$$

Die Menge $(\mathbb{N} \setminus \{1\}, \trianglelefteq)$ hat unendliche viele maximale Elemente, aber kein Maximum.

Definition 0.56. *Sei $(M, \leq)$ eine geordnete Menge. Dann heißt $(M, \geq)$ die **oppositionell geordnete Menge**, wenn gilt* $\boxed{(M, \geq)}$

$$x \geq y \quad \Leftrightarrow \quad y \leq x.$$

*Dann bezeichnet man ein Element $z \in M$ als **$\leq$-minimales Element von** M (oder als **minimales Element von** $(M, \leq)$), wenn z ein $\geq$-maximales Element von M (maximales Element von $(M, \geq)$) ist.*

Definition 0.57. *Sei $(M, \leq)$ eine beliebige geordnete Menge. $(M, \leq)$ heißt **induktiv geordnet**, falls gilt: Jede $\leq$-totalgeordnete Teilmenge $N \subseteq M$ hat mindestens eine obere Schranke in M.*

Beispiel 0.5.8.

- $(\mathbb{R}, \leq)$ ist nicht induktiv geordnet.
- Sei $(M, \leq)$ mit $\exists \max(M)$. Dann ist $(M, \leq)$ induktiv geordnet.
- $(\mathbb{N}, \geq)$ ist induktiv geordnet (1 ist für jede Teilmenge eine obere Schranke), die oppositionell geordnete Menge $(\mathbb{N}, \leq)$ hingegen nicht.

Definition 0.58. *Sei $(M, \leq)$ eine geordnete Menge. $(M, \leq)$ heißt **streng induktiv geordnete Menge** genau dann, wenn für jede totalgeordnete Teilmenge $N \subseteq M$ das Supremum $\sup_M(N)$ existiert.*

Man erkennt, dass jede streng induktiv geordnete Menge auch induktiv geordnet ist, denn das Supremum ist ja eine obere Schranke.

Satz 0.5.1. Das Zornsche Lemma
Sei $(M, \leq)$ eine induktiv geordnete Menge. Dann besitzt M mindestens ein $\leq$-maximales Element:

$$\exists c \in M : \forall x \in M : \quad c \leq x \Rightarrow x = c$$

Um diesen mächtigen Satz zu beweisen, formulieren wir erst einige andere Sätze:

Satz 0.5.2. Fixpunkt-Lemma von Bourbaki[14].
Sei $(M, \leq)$ eine streng induktiv geordnete Menge. Sei $f : M \to M$ eine Selbstabbildung mit

$$\forall x \in M : \quad x \leq f(x).^{15}$$

Dann existiert ein Fixpunkt x_0 von f, also $f(x_0) = x_0$.

Beweis zum Fixpunkt-Lemma von Bourbaki

Wir führen den Beweis[16] schrittweise.

Reduktion auf den Spezialfall, dass $\min(M)$ existiert.

Wir wählen ein $a \in M$ beliebig. Dann betrachten wir $S_a := \{x \in M \mid a \leq x\}$. S_a hat folgende Eigenschaften:

1. Es ist $a \in S_a$.
2. Damit ist $S_a \neq \varnothing$.
3. S_a ist f-invariant, d.h. $f(S_a) \subseteq S_a$.

   Beweis.

   $$x \in S_a \Rightarrow a \leq x \wedge x \leq f(x) \Rightarrow a \leq f(x) \Rightarrow f(x) \in S_a$$

   □

[14] Nicolas Bourbaki war ein General unter Napoleon. Sein Name wurde als Pseudonym von einer Gruppe frz. und US-amerikanischer Mathematiker verwendet, die ab 1938 das Gesamtgebiet der Mathematik neu ordnen wollten

[15] Abbildungen mit dieser Eigenschaft werden auch **aszendent** genannt.

[16] In der Vorlesung haben wir diesen Satz erst nach dem Zornschen Lemma bewiesen, ich habe ihn aber hierher geschoben, da der Beweis zum Zornschen Lemma auf dem Lemma von Bourbaki aufbaut.

4. $a = \min(S_a)$

5. S_a ist auch streng induktiv geordnet.

   Beweis.
   Sei $N \subseteq S_a$, $N \neq \varnothing$, $N, \leq$ totalgeordnet. Dann ist $\sup_M(N) \in M$, $x \leq \sup(N) \forall x \in N$, damit $a \leq \sup_M(N)$, also $\sup_M(N) \in S_a$, also $\exists \sup_{S_a}(N)$. □

Betrachten wir nun S_a statt M, $f|_{S_a}$ statt f. Jeder Fixpunkt von $f|_{S_a}$ in S_a ist nun natürlich auch ein Fixpunkt von f in M.

Damit können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass M ein kleinstes Element $a = \min(M)$ besitzt.

Reduktion auf eine Teilmenge $(G, \leq)$, $G \subseteq M$, mit G streng induktiv geordnet, $f(G) = G$, und es existiert $\max(G) \in G$

Zunächst definieren wir:

Definition 0.59. *In $(M, \leq)$ mit $a = \min(M)$, $f : M \to M$ aszendent, heißt eine Teilmenge $D \in \mathfrak{P}(M) \setminus \{\varnothing\}$* ***f-zulässig*** *genau dann, wenn*

1. *$a \in D$ (also $a = \min(D)$),*

2. *$f(D) \subseteq D$ (also D ist f-invariant) und*

3. *D ist wieder streng induktiv geordnet.*

Die Menge $\boxed{\mathfrak{Z}_f}$

$$\mathfrak{Z}_f := \{D \in \mathfrak{P}(M) \mid D \textit{ ist f-zulässig}\}$$

ist die Menge der f-zulässigen Mengen.

Es ist $\mathfrak{Z}_f \neq \varnothing$, weil $M \in \mathfrak{Z}_f$. Betrachten wir nun

$$G := \bigcap_{D \in \mathfrak{Z}_f} D.$$

Hier gilt:

1. $a \in G$, weil $a \in D \quad \forall D \in \mathfrak{Z}_f$.

2. $f(G) \subseteq G$, weil $\forall x \in G$ gilt $x \in D \quad \forall D \in \mathfrak{Z}_f$, damit $f(x) \in D \quad \forall D \in \mathfrak{Z}_f$, also $f(x) \in G$.

3. $\forall N \in \mathfrak{P}(G) \setminus \{\varnothing\}$ mit $(N, \leq)$ totalgeordnet gilt: $\sup(N) \in G$.

Beweis.
Sei $N \neq \varnothing$ totalgeordnet. Dann gilt:

$$\begin{aligned} &\forall x \in N, \forall D \in \mathfrak{Z}_f : x \leq \sup_D(N) \\ &\Rightarrow \sup(N) \in G \end{aligned}$$

□

G ist also auch streng induktiv geordnet.

G ist also f-zulässig. Betrachten wir nun $f|_G : G \to G$.

Definition 0.60. *Ein $c \in G$ heißt ein **f-Extremalpunkt** von G genau dann, wenn*

$$\forall x \in G : \quad \big(x \leq c \Rightarrow f(x) \leq c\big)$$

$\boxed{\mathrm{Ext}(G)}$

Die Menge

$$\mathrm{Ext}(G) := \{c \in G \mid c \ f\text{-}extrem\}$$

ist die Menge der f-Extremalpunkte von G.

Wir sehen, dass $\mathrm{Ext}(G) \neq \varnothing$, weil $a = \min(G) \in \mathrm{Ext}(G)$. Für jeden Extremalpunkt $c \in \mathrm{Ext}(c)$ können wir nun definieren:

$\boxed{G_c}$

Definition 0.61. *Die Menge*

$$G_c := \{x \in G \mid x \leq c \vee f(c) \leq x\}$$

heißt die charakteristische Menge von c.

$G_c \neq \varnothing$, weil $c \in G$. Wir können sogar zeigen:

$$\forall c \in \mathrm{Ext}(G) : \quad G_c = G.$$

Beweis.
Durch Definition ist $G \subseteq G_c$. Es genügt zu zeigen, dass G_c f-zulässig, denn dann gilt

$$G_c \subseteq G = \bigcap_{D \in \mathfrak{Z}_f} D \subseteq G_c.$$

1. $a \in G_c$, weil $a \leq x \quad \forall x \in G$, also auch $a \leq c$.
2. Sei $x \in G_c$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow x \leq c \vee f(c) \leq x \\ &\Rightarrow x < c \vee x = c \vee f(c) \leq x \end{aligned}$$

(c ist Extremalpunkt)

$$\Rightarrow f(x) \leq c \vee x = c \vee f(c) \leq x$$

(f ist aszendent)

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow f(x) \leq c \vee x = c \vee f(c) \leq x \leq f(x) \\
&\Rightarrow f(x) \leq c \vee x = c \vee f(c) \leq f(x) \\
&\Rightarrow f(x) \leq c \vee f(c) \leq f(x) \\
&\Rightarrow f(x) \in G_c
\end{aligned}$$

also ist G_c f-invariant.

3. Sei $N \subseteq G_c$, $(N, \leq)$ totalgeordnet. Dann gilt

$$\forall x \in N : x \leq c \vee f(c) \leq x$$

Hier gibt es zwei Fälle:

- $\forall x \in N : x \leq c$, also ist c obere Schranke für N, also $\sup_G(N) \leq c$, also $\exists \sup_G(N) \in G_c$.
- $\exists x_0 \in N : x_0 \not\leq c$, also $f(c) \leq x_0 \leq \sup_G(N)$, also $f(c) \leq \sup_G(N)$, also $\sup_G(N) \in G_c$.

G_c ist also auch streng induktiv geordnet.

Damit ist $G_c \in \mathfrak{Z}_f$. ☐

Es ist also $G_c = G$. Weiterhin gilt auch

$$\mathrm{Ext}(G) = G,$$

alle Punkte sind also Extremalpunkte.

Beweis.
Wieder genügt zu zeigen: $\mathrm{Ext}(G) \in \mathfrak{Z}_f$, denn dann folgt ja wieder

$$\mathrm{Ext}(G) \supseteq \bigcap_{D \in \mathfrak{Z}_f} D = G \supseteq \mathrm{Ext}(G).$$

1. $a \in \mathrm{Ext}(G)$, weil $x < a$ nicht möglich, also $\big(x < a \Rightarrow f(x) \leq c\big)$ immer wahr.
2. Sei $c \in \mathrm{Ext}(G)$. Sei $x < f(c)$, $x \in G$ beliebig (falls existent). Dann folgt:

$$\begin{aligned}
c \in \mathrm{Ext}(G) \wedge x \in G = G_c& \\
&\Rightarrow x \leq c \vee f(c) \leq x
\end{aligned}$$

Im zweiten Fall ist $f(c) \leq x < f(c)$, was unmöglich ist.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow x \leq c \\
&\Rightarrow x = c \vee x < c \\
&\Rightarrow x = c \vee f(x) \leq c \\
&\Rightarrow f(x) = f(c) \vee f(x) \leq cc \leq f(c) \\
&\Rightarrow f(x) \leq f(c),
\end{aligned}$$

also ist $f(c)$ ebenfalls ein Extremalpunkt, also ist $f(\mathrm{Ext}(G)) \subseteq \mathrm{Ext}(G)$.

3. Sei $N \subseteq \mathrm{Ext}(G)$, $(N, \leq)$ totalgeordnet. Es genügt zu zeigen, dass $\sup_G(N) \in \mathrm{Ext}(G)$, also
$$\forall x \in G : \quad \big(x < \sup_G(N) \Rightarrow f(x) \leq \sup_G(N)\big)$$
Sei $x \in G$, $x < \sup_G(N)$. Dann gilt $\forall c \in N : c \in \mathrm{Ext}(G)$, also $x \in G_c \forall c \in N$, damit
$$\forall c \in N : x \leq c \vee f(c) \leq x$$
Unterscheiden wir wieder die beiden Fälle:
   - $\forall c \in N : c \leq f(c) \leq x$, also $\sup_G(N) \leq x < \sup_G(N)$, was unmöglich ist.
   - $\exists c_0 \in N : x \leq c_0$, also
$$\begin{aligned}
&\Rightarrow x = c_0 \vee x < c_0 \in N \\
&\Rightarrow x = c_0 \vee f(x) \leq c_0 \leq \sup_G(N) \\
&\Rightarrow \underbrace{\sup_G(N) \leq x}_{\text{unmöglich wegen } x < \sup_G(N)} \vee \quad f(x) \leq \sup_G(N)
\end{aligned}$$
$$\Rightarrow \sup_G(N) \in \mathrm{Ext}(G)$$

   Es ist also $f(\mathrm{Ext}(G)) \subseteq f(\mathrm{Ext}(G))$.

Damit ist $\mathrm{Ext}(G) \neq \mathfrak{Z}_f$, also $\mathrm{Ext}(G) = G$. □

Nachweis, dass $(G, \leq)$ sogar totalgeordnet ist.

Die vorhin konstruierte Menge $(G, \leq)$ ist sogar totalgeordnet.

Beweis.

$$\begin{aligned}
\forall (x, y) \in G^2 : &x \in G = G_y \wedge y \in G = G_x \\
&\Rightarrow (x \leq y \vee f(y) \leq x) \wedge (y \leq x \vee f(x) \leq y) \\
&\Rightarrow (x \leq y \vee y \leq f(y) \leq x) \wedge (y \leq x \vee x \leq f(x) \leq y) \\
&\Rightarrow x \leq y \vee y \leq x
\end{aligned}$$

Damit ist G totalgeordnet. □

G ist totalgeordnet und streng induktiv geordnet, damit existiert $\sup_G(G)$, also existiert auch $\max(G) = \sup_G(G)$. Es ist dann

$$\max(G) \leq f(\max(G)) \leq \max(G),$$

also ist $\max(G) = f(\max(G))$, also ist $max(G)$ ein Fixpunkt von f. □

Beweis des Zornschen Lemmas

Nun können wir zunächst den folgenden Satz formulieren und beweisen:

> **Satz 0.5.3. Zornsches Lemma für streng induktiv geordnete Mengen**
> Sei $(M, \leq)$ eine streng induktiv geordnete Menge. Dann besitzt M mindestens ein $\leq$-maximales Element.

Beweis.
Sei $(M, \leq)$ streng induktiv geordnet. Dann treffen wir die Gegenannahme zu der zu beweisenden Aussage: M hat kein maximales Element. Damit gilt:

$$\forall x \in M : M_x := \{y \in M \mid x < y\} \neq \varnothing$$

Die Mengenfamilie $(M_x)_{x \in M}$ ist damit eine Familie nichtleerer Mengen über dem Indexbereich M. Nach dem Auswahlaxiom existiert eine Auswahlfunktion

$$\psi : M \to \bigcup_{x \in M} M_x \subseteq M$$

und durch $f := \text{incl} \circ \psi$ (also $f(x) = \psi(x)$) existiert auch

$$f : M \to M.$$

Wegen $f(x) \in M_x$ gilt auch $f(x) > x$, also ist f eine aszendente Selbstabbildung. $(M, \leq)$ ist nach Voraussetzung streng induktiv geordnet, nach Bourbaki gilt damit:

$$\exists x_0 \in M : f(x_0) = x_0,$$

es sollte aber gelten: $x_0 < f(x_0)$, wo wir einen klaren Widerspruch haben. Damit muss unsere Annahme falsch sein, es gibt also mindestens ein maximales Element. □

Damit können wir nun das Zornsche Lemma beweisen:

Beweis.
Sei $(M, \leq)$ induktiv geordnet (möglicherweise nicht streng). Betrachte nun

$$\mathfrak{M} := \{N \in \mathfrak{P}(M) \setminus \{0\} \mid (N, \leq)\text{totalgeordnet}\}$$

Es ist $\mathfrak{M} \neq \varnothing$, weil $\{x\} \in \mathfrak{M} \forall x \in M$. Mit der Inklusionsrelation ist $(\mathfrak{M}, \subseteq)$ eine geordnete Menge. $(\mathfrak{M}, \subseteq)$ ist streng induktiv geordnet.

Beweis.
Sei $(\mathfrak{N}, \subseteq) \subseteq (\mathfrak{M}, \subseteq)$ eine totalgeordnete Teilmenge. Dann besteht $\mathfrak{N}$ aus totalgeordneten Teilmengen von M.
Damit ist $\bigcup_{A \in \mathfrak{N}} A$ auch $\leq$-totalgeordnet, weil $\mathfrak{N}$ $\subseteq$-totalgeordnet ist und alle $A \in \mathfrak{N}$ $\leq$-totalgeordnet sind.
Daher ist

$$\bigcup_{A \in \mathfrak{N}} A = \sup_{\subseteq}(\mathfrak{N}) \in \mathfrak{M}$$

□

Nach dem Zornschen Lemma für streng induktiv geordnete Mengen

$$\exists N_* \in \mathfrak{M} : \quad N \text{ ist } \subseteq\text{-maximal in } \mathfrak{M},$$

N_* ist also eine inklusionsmaximale, $\leq$-totalgeordnete Teilmenge von M. Damit gilt für alle oberen Schranken c von N_*: $c \in N_*$, denn sonst wäre $N_* \subsetneqq N_* \cup \{c\}$ auch totalgeordnet und N_* nicht maximal. N_* enthält also alle seine oberen Schranken, damit gilt für zwei solche:

$$c_1 \leq c_2 (c_2 \text{ ist obere Schranke}) \wedge c_2 \leq c_1 (c_1 \text{ ist obere Schranke}) \Rightarrow c_1 = c_2,$$

also sind alle oberen Schranken gleich. Es existieren solche, weil $(M, \leq)$ induktiv geordnet waren. Damit ist $\max_{\leq}(N_*)$ ein maximales Element in M. □

Äquivalenz von Zornschen Lemma und Auswahlaxiom

Wir haben also gezeigt, dass aus dem Auswahlaxiom (verwendet beim Beweis des Zornschen Lemmas für streng geordnete Mengen) unter Hinzunahme der anderen Axiome der Mengenlehre das Zornsche Lemma folgt. Dies können wir noch verschärfen:

> **Satz 0.5.4.** Seien alle anderen Axiome der Mengenlehre gültig. Dann gilt das Auswahlaxiom genau dann, wenn das Zornsche Lemma gilt.

Der Beweis in Richtung $\Rightarrow$ ist durch die Sätze 0.5.1 und 0.5.3 gegeben. Der Beweis in die Gegenrichtung folgt hier:

Beweis

Sei das Zornsche Lemma als richtig vorausgesetzt, $(M_i)_{i \in I}$ eine Mengenfamilie mit $\forall i \in I : M_i \neq \varnothing$.

Zu zeigen ist

$$\exists f : I \to \bigcup_{i \in I} \text{ mit } \forall i \in I : f(i) \in M_i.$$

Betrachten wir

$$\mathfrak{M} := \left\{ (I', \varphi_{I'}) \mid \varnothing \neq I' \subseteq I \wedge \varphi_{I'} : I' \to \bigcup_{i \in I} M_i \text{ Auswahlfunktion} \right\}$$

Die $\varphi_{I'}$ werden partielle Auswahlfunktionen genannt. Es ist $\mathfrak{M} \neq \varnothing$, denn

$$\forall i \in I : \exists x_i \in M_i$$

und $\varphi_{\{i\}} : \{i\} \to M_i$ mit $f(i) := x_i$ ist eine Auswahlfunktion auf $I' := \{i\}$. Wir können auf $\mathfrak{M}$ eine Ordnung $\trianglelefteq$ definieren:

$$(I', \varphi_{I'}) \trianglelefteq (I'', \varphi_{I''}) \quad :\Leftrightarrow \quad I' \subseteq I'' \wedge \varphi_{I''}|_{I'} = \varphi_{I'}$$

Wie man leicht sieht, ist diese Relation eine Ordnungsrelation auf $\mathfrak{M}$. $(\mathfrak{M}, \trianglelefteq)$ ist sogar induktiv geordnet.

Beweis.
Sei $\mathfrak{N} = \{(I_k, \varphi_k) \mid k \in K\} \subseteq \mathfrak{M}$ eine beliebige $\trianglelefteq$-totalgeordnete Teilmenge. Dann ist $\bigcup\limits_{k \in K} I_k \subseteq I$. Damit können wir eine Abbildung

$$\varphi : \bigcup_{k \in K} I_k \to \bigcup_{j \in \bigcup\limits_{k \in K} I_k} M_j$$

definieren durch

$$\forall k \in K : \forall i \in I_k : \quad \varphi(i) := \varphi_k(i).$$

φ ist wohldefiniert, weil $(\{I_k \mid k \in K\}, \subseteq)$ totalgeordnet ist und die Auswahlfunktionen φ_k, $k \in K$ jeweils Einschränkungen voneinander sind (also, wenn überhaupt, identische Werte annehmen). Damit ist $\left(\bigcup\limits_{k \in K} I_k, \varphi \right) \in \mathfrak{M}$ und eine obere $\trianglelefteq$-Schranke für $\mathfrak{N}$. Da dies für alle totalgeordneten Teilmengen gilt, ist $\mathfrak{M}$ induktiv geordnet. $\square$

Damit existiert mindestens eine „maximale“ partielle Auswahlfunktion

$$\varphi_* : I_* \to \bigcup_{i \in I} M_i,$$

d.h. (I_*, φ_*) ist $\trianglelefteq$-maximal in $\mathfrak{M}$. Es ist dann sogar $I_* = I$.

Beweis.
Angenommen, $I_* \subsetneqq I$. Dann gilt:

$$\exists i_0 \in I \setminus I_* \Rightarrow \exists y \in M_{i_0}$$

Damit können wir die Menge $\overline{I_*} := I_* \cup \{i_0\}$ bilden und die Abbildung

$$\overline{\varphi_*} : \overline{I_*} \to \bigcup_{i \in I} M_i$$

mit

$$\overline{\varphi_*}(i) = \begin{cases} \varphi_*(i) & i \in I_* \\ y & i = i_0 \end{cases}.$$

Diese Abbildung ist eine Auswahlfunktion und es ist $(I_*, \varphi_*) \trianglelefteq (\overline{I_*}, \overline{\varphi_*})$ und $(I_*, \varphi_*) \neq (\overline{I_*}, \overline{\varphi_*})$, im Widerspruch zu der $\trianglelefteq$-Maximalität von (I_*, φ_*). □

Es ist also $I_* = I$, und

$$\varphi_* : I \to \bigcup_{i \in I} M_i$$

ist eine Auswahlfunktion, also $\varphi_* \in \prod_{i \in I} M_i$. Damit ist das Auswahlaxiom gefolgert. □

Wichtige Anwendungen des Zornschen Lemmas

> $\boxed{\text{Satz 0.5.5.}}$ **Totalordnung der Kardinalitäten**
> Sei $M \neq \varnothing$ und $N \neq \varnothing$. Dann gilt:
>
> $$\mathrm{Inj}(M, N) \neq \varnothing \vee \mathrm{Inj}(N, M) \neq \varnothing.$$
>
> Anders formuliert: $\exists f : M \hookrightarrow N$ oder $\exists g : N \hookrightarrow M$ bzw. $card(M) \leq card(N)$ oder $card(N) \leq card(M)$.

Beweis.
Betrachte $M \neq \varnothing$, $N \neq \varnothing$ und

$$\mathfrak{M} := \{(X, f, Y) \mid \varnothing \neq X \subseteq M \wedge \varnothing \neq Y \subseteq N \wedge f \in \mathrm{Bij}(X, Y)\},$$

die Menge der partiellen Bijektionen. $\mathfrak{M}$ hat folgende Eigenschaften:

1. $(X, f, Y) \in \mathfrak{P}(M) \times \mathfrak{P}(M \times N) \times \mathfrak{P}(N)$, also
$$\mathfrak{M} \in \mathfrak{P}\left(\mathfrak{P}(M) \times \mathfrak{P}(M \times N) \times \mathfrak{P}(N)\right).$$
2. $\mathfrak{M} \neq \varnothing$, denn
$$\exists x \in M \wedge \exists y \in N \Rightarrow \exists f : \{x\} \xrightarrow{\sim} \{y\}$$
3. Auf $\mathfrak{M}$ Lässt sich die Relation $\lhd$ definieren:
$$(X, f, Y) \lhd (X', f', Y') \quad :\Leftrightarrow \quad X \subseteq X' \wedge Y \subseteq Y' \wedge f'|_X = f$$
Man sagt auch: (X', f', Y') ist eine Erweiterung oder Fortsetzung von (X, f, Y). Diese Relation ist eine Ordnung:

Beweis.

- $(X, f, Y) \lhd (X, f, Y)$, weil $X \subseteq X$, $Y \subseteq Y$, $f|_X = f$.
- Sei $(X, f, Y) \lhd (X', f', Y')$ und $(X', f', Y') \lhd (X, f, Y)$. Dann ist $X \subseteq X' \subseteq X$, $Y \subseteq Y' \subseteq Y$ sowie $f'|_X = f$ und $f|_{X'} = f'$. Damit gilt $X = X'$, $Y = Y'$, $f = f'$, also $(X, f, Y) = (X', f', Y')$.
- Sei $(X, f, Y) \lhd (X', f', Y')$ und $(X', f', Y') \lhd (X'', f'', Y'')$ Dann folgt $X \subseteq X' \subseteq X''$, $Y \subseteq Y' \subseteq Y''$ sowie $f''|_{X'} = f'$ und $f'|_X = f$. Damit gilt $X \subseteq X''$, $Y \subseteq Y''$, $f''|_X = f$, also ist $(X, f, Y) \lhd (X'', f'', Y'')$.

□

4. $(\mathfrak{M}, \lhd)$ ist sogar induktiv geordnet.

   Beweis.
   Sei $\mathfrak{N} := \{(X_i, f_i, Y_i) \mid i \in I\} \subseteq \mathfrak{M}$ eine $\lhd$-totalgeordnete Menge. Dann nehmen wir $X := \bigcup\limits_{i \in I} X_i$ und $Y := \bigcup\limits_{i \in I} Y_i$. Nun definieren wir $f : X \to Y$ durch

   $$\forall i \in I : \forall x \in X_i : \quad f(x) := f_i(x).$$

   Diese Abbildung ist wohldefiniert, da wegen der Totalordnung die f_i Einschränkungen voneinander sind. Es ist offensichtlich f wieder eine Bijektion, da die f_i miteinander verträgliche Bijektionen sind. Damit ist

   $$\forall i \in I : \quad (X_i, f_i, Y_i) \lhd (X, f, Y),$$

   also ist (X, f, Y) eine $\lhd$-obere Schranke für $\mathfrak{N}$.

   Damit ist $(\mathfrak{M}, \lhd)$ streng induktiv geordnet. □

Nach dem Zornschen Lemma existiert nun eine $\lhd$-maximale partielle Bijektion $(X_*, f_*, Y_*) \in \mathfrak{M}$, d.h. (X_*, f_*, Y_*) ist in $\mathfrak{M}$ nicht mehr echt fortsetzbar. Es gilt immer $X_* \cong Y_*$, da f_* eine Bijektion zwischen diesen Mengen ist. Wir können nun 4 Fälle unterscheiden:

1. $X_* = M$, $Y_* = N$.
   Dann ist
   $$M = X_* \cong Y_* = N,$$
   also $M \cong N$, damit $\mathrm{Inj}(M, N) \neq \varnothing \neq \mathrm{Inj}(N, M)$.

2. $X_* = M$, $Y_* \subsetneqq N$.
   Dann ist
   $$M = X_* \cong Y_* \subseteq N,$$
   also $\mathrm{Inj}(M, N) \neq \varnothing$.

3. $X_* \subsetneq M$, $Y_* = N$.
   Dann ist
   $$N = Y_* \cong Y_* \subseteq M,$$
   also $\mathrm{Inj}(N, M) \neq \varnothing$.

4. $x_0 \subsetneq M$, $y_0 \subsetneq N$.
   Dann existieren $x_0 \in M \backslash X_*$ und $y_0 \in N \backslash Y_*$, damit ist $\tilde{f}_* : X_* \cup \{x_0\} \xrightarrow{\sim} Y_* \cup \{y_0\}$ mit
   $$\tilde{f}_*(x) := \begin{cases} f_*(x) & x \in X_* \\ y & x = x_0 \end{cases}$$
   eine Bijektion. Dadurch ist
   $$(X_*, f_*, Y_*) \lhd (X_* \cup \{x_0\}, \tilde{f}_*, Y_* \cup \{y_0\})$$
   aber beide Tripel sind nicht gleich. Dies ist ein Widerspruch zur $\lhd$-Maximalität von (X_*, f_*, Y_*), damit kann dieser Fall nicht eintreten.

Es gibt also immer Injektionen zwischen zwei Mengen, die Kardinalzahlen sind also totalgeordnet. ☐

Satz 0.5.6. Sei M eine unendliche Menge. Dann ist $M \times M \cong M$, also

$$card(M) \cdot card(M) = card(M \times M) = card(M)$$

Beweis.
Betrachte die Menge

$$\mathfrak{M} := \{(X, f) \mid X \in \mathfrak{P}(M) \setminus \{\varnothing\} \wedge f \in \mathrm{Bij}(X, X \times X)\}$$

1. Es ist $\mathfrak{M} \neq \varnothing$, weil
   $$\forall x \in M : \exists f_x : \{x\} \to \{x\} \times \{x\}$$
   und diese Abbildung ist bijektiv, also
   $$(\{x\}, f_x) \in \mathfrak{M}$$

2. Da M unendlich ist, gibt es auch abzählbar unendliche Teilmengen $N \subseteq M$. Dort gilt, wie wir schon wissen:
   $$N \cong \mathbb{N} \cong \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong N \times N$$
   Damit gilt:
   $$\exists (X, f) \in M : card(X) \geq \aleph_0$$

3. Auf $\mathfrak{M}$ kann eine Ordnungsrelation $\blacktriangleleft$ definiert werden durch
$$(X,f) \blacktriangleleft (X',f') \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq X' \wedge f'|_X = f$$
Der Nachweis der O-Relation geht analog zum Beweis von Satz 0.5.5.

4. $(\mathfrak{M}, \blacktriangleleft)$ ist sogar induktiv geordnet, was wieder analog zu 0.5.5 gezeigt werden kann.

Damit können wir das Zornsche Lemma auf diese induktiv geordnete Menge anwenden. Es gibt also ein $\blacktriangleleft$-maximales Element $(X_*, f_*) \in \mathfrak{M}$, also $X_* \subseteq M$, $f_* : X_* \xrightarrow{\sim} X_* \times X_*$ und (X_*, f_*) ist nicht echt fortsetzbar. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist (nach (2)) X_* schon unendlich. Wir können nun 2 Hauptfälle unterscheiden:

1. Es ist $X_* = M$, dann sind wir wir fertig.

2. Sonst ist $X_* \subsetneqq M$, also $M \setminus X_* \neq \varnothing$. Hier können wir zwei Fälle unterscheiden:

   (a) $card(M \setminus X_*) \leq card(X_*)$, also
   $$\exists h : M \setminus X_* \hookrightarrow X_*.$$
   Damit existiert mit ebenfalls eine surjektive Abbildung $\widetilde{h} : x_* \twoheadrightarrow M \setminus X_*$. Wir können also eine weitere Surjektion
   $$\Phi : \{1,2\} \times X \twoheadrightarrow (M \setminus X_*) \cup X_* = M$$
   definieren durch
   $$\begin{aligned} \forall x \in X_* : \quad & \Phi(1,x) := \widetilde{h}(x) \in (M \setminus X_*) \\ & \Phi(2,x) := x \in X_* \end{aligned}$$
   Damit existiert umgekehrt eine Injektion von M nach $\{1,2\} \times X_*$ und damit eine Injektionenkette
   $$M \hookrightarrow \{1,2\} \times X_* \hookrightarrow X_* \times X_* \xrightarrow{\sim} X_*,$$
   außerdem ist ja $X_* \hookrightarrow M$, also gilt nach C-S-B $X_* \cong M$, damit
   $$M \times M \cong X_* \times X_* \cong X_* \cong M,$$
   also $M \times M \cong M$, der Satz ist also auch in diesem Fall gültig.

   (b) Sonst ist nach Satz 0.5.5 $card(X_*) \leq card(M \setminus X_*)$. Damit existiert eine Injektion
   $$\rho : X_* \hookrightarrow M \setminus X_*.$$
   Nennen wir das Bild dieser Abbildung $S := \rho(X_*) \cong X_*$. Es gilt dann natürlich, dass $S \cap X_* = \varnothing$. Betrachte dann
   $$(X_* \dot\cup S) \times (X_* \dot\cup S) = (X_* \times X_*) \dot\cup (S \times X_*) \dot\cup (X_* \times S) \dot\cup (S \times S).$$

Dies ist eine disjunkte Zerlegung. Wegen $X_* \cong S$ gelten folgende Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} X_* \times S &\cong X_* \times X_* \cong X_* \cong S \\ S \times X_* &\cong X_* \times X_* \cong X_* \cong S \\ S \times S &\cong X_* \times X_* \cong X_* \cong S \end{aligned}$$

Bevor wir fortfahren, stellen wir noch kurz ein Lemma auf:

> **LEMMA.** Sei $(Z_i)_{i\in I}$ Familie nichtleerer Mengen, I abzählbar, $card(Z_i) \leq card(S)$ für eine gewisse unendliche Menge S mit $S \times S \cong S$. Dann gilt
>
> $$card\left(\bigcup_{i\in I} Z_i\right) \leq card(S)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \forall i \in I: \quad & card(Z_i) \leq card(S) \\ \Rightarrow & \ \forall i \in I : \exists g_i : S \twoheadrightarrow Z_i \\ \Rightarrow & \ \exists g : I \times S \twoheadrightarrow \bigcup_{i\in I} Z_i \\ & \text{mit} \quad g(j,s) := g_j(s) \\ \Rightarrow & \quad \exists \tilde{g} : \left(\bigcup_{i\in I} Z_i\right) \hookrightarrow I \times S \\ \Rightarrow & \quad card\left(\bigcup_{i\in I} Z_i\right) \leq card(I \times S) \\ & \leq card(S \times S) \\ & = card(S) \\ \Rightarrow & \quad card\left(\bigcup_{i\in I} Z_i\right) \leq card(S) \end{aligned}$$

$\square$

Betrachten wir wieder

$$(X_* \dot\cup S) \times (X_* \dot\cup S) = \underbrace{(X_* \times X_*)}_{\cong X_*} \dot\cup \underbrace{\underbrace{(S \times X_*)}_{\cong S} \dot\cup \underbrace{(X_* \times S)}_{\cong S} \dot\cup \underbrace{(S \times S)}_{\cong S}}_{\text{nach Lemma:} \quad \cong S}$$

$$\cong \quad X_* \quad \dot\cup \quad S$$

Damit muss es eine Bijektion

$$\widetilde{f}_* : (X_* \cup S) \to (X_* \cup S) \times (X_* \cup S)$$

geben. Damit wäre $(X_*, f_*) \blacktriangleleft \left(X_* \cup S, \widetilde{f}_*\right)$, im Widerspruch zur Maximalität von (X_*, f_*). Damit tritt dieser Fall nicht ein.

Damit ist immer $M \cong M \times M$, falls M unendlich ist. $\square$

$\boxed{\text{Satz ohne Nummer.}}$ **Korollar.**
Sei M unendliche Menge. Dann gilt:

$$\mathrm{Abb}(M, M) \cong \mathfrak{P}(M)$$

Beweis.

$$\mathrm{Abb}(M, M) \hookrightarrow \mathfrak{P}(M \times M) \cong \mathfrak{P}(M)$$
$$\mathfrak{P}(M) \cong \mathrm{Abb}(M, \{0, 1\}) \hookrightarrow \mathrm{Abb}(M, M),$$

Dann C-S-B anwenden. $\square$

$\boxed{\text{Satz ohne Nummer.}}$ Für unendliche Mengen M gilt auch:

1. $\mathfrak{S}(M) \cong \mathfrak{P}(M)$
2. $\mathfrak{P}^*(M) := \{A \in \mathfrak{P}(M) \mid A \cong M\} \cong \mathfrak{P}(M)$

Beweis.
Siehe Übungsaufgabe 1(b) und 2(a) in Serie 8. $\square$

0.6 Äquivalenzrelationen und Faktormengen

Definition 0.62. *Sei $M \neq \varnothing$ eine Menge. Eine Relation R auf M (also $R \subseteq M \times M$) mit den Eigenschaften* $\boxed{xRy}$

Reflexivität

$$\forall x \in M : \quad (x, x) \in R$$

Symmetrie

$$\forall (x, y) \in M^2 : \quad (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$$

$\boxed{x \sim_R y}$

Transitivität

$$\forall (x,y,z) \in M^3 : \quad (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$$

heißt ***Äquivalenzrelation*** *auf M. Statt $(x,y) \in R$ schreibt man auch xRy oder $x \sim_R y$ oder $x \sim y$ (letzteres nur, wenn kein Zweifel über die gewählte Relation besteht).*

$\boxed{x \sim y}$

Beispiel 0.6.1. $R_= := \{(x,x) \mid x \in M\} \subseteq M \times M$ mit

$$x \sim_{R_=} y \Leftrightarrow x = y$$

ist eine Äquivalenzrelation (die **Gleichheitsrelation**). $R_=$ ist die **feinste** Äquivalenzrelation auf M.

Beispiel 0.6.2. $R_{all} := M \times M$ ist ebenfalls eine Äquivalenzrelation (die **Allrelation**). R_{all} ist die **gröbste** Äquivalenzrelation auf M.

Beispiel 0.6.3. Sei $M \neq \varnothing$, $N \neq \varnothing$, $f \in \mathrm{Abb}(M,N)$. $R_f \subseteq M \times M$ sei definiert durch

$$\forall (x,y) \in M : \quad (x,y) \in R_f :\Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

Auch R_f ist eine Äquivalenzrelation, denn

- $f(x) = f(x) \Rightarrow x \sim_f x$
- $s \sim_f y \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow f(y) = f(x) \Rightarrow y \sim_f x$
- $x \sim_f y \wedge y \sim_f z \Rightarrow f(x) = f(y) \wedge f(y) = f(z) \Rightarrow f(x) = f(z) \Rightarrow x \sim_f z$

Definition 0.63. *Sei $M \neq \varnothing$ eine Menge und $(A_i)_{i \in I}$ eine Mengenfamilie mit den Eigenschaften*

(I) $\forall i \in I : \quad \varnothing \neq A_i \in \mathfrak{P}(M)$

(II) $M = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$

(III) $\forall (i,j) \in I^2 : \quad i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$

Dann nennt man $A_i)_{i \in I}$ eine ***Partition*** *oder* ***Zerlegung*** *von M.*

Allgemeiner kann man auch ein Mengensystem mit sich selbst als Indexmenge verwenden.

Satz ohne Nummer. Sei $\mathfrak{a} := (A_i)_{i \in I}$ eine Zerlegung von M, so ist die Relation $R_\mathfrak{a} \subseteq M \times M$ mit

$$\forall (x,y) \in M^2 : \quad (x,y) \in R_\mathfrak{a} :\Leftrightarrow \exists i \in I : \{x,y\} \subseteq A_i$$

eine Äquivalenzrelation auf M.

Beweis.

- $\forall x \in M : \exists i \in I : x \in A_i$, damit ist $\{x, x\} \subseteq A_i$, also $x \sim_{\mathfrak{a}} x$.
-
$$\begin{aligned}\forall (x,y) \in M^2 : \quad & x \sim_{\mathfrak{a}} y \\ & \Rightarrow \exists i \in I : \{x,y\} \in A_i \\ & \Rightarrow \exists i \in I : \{y,x\} \in A_i \\ & \ \ y \sim_{\mathfrak{a}} x\end{aligned}$$
-
$$\begin{aligned}\forall (x,y,z) \in M^3 \quad & x \sim_{\mathfrak{a}} y \wedge y \sim_{\mathfrak{z}} \\ & \Rightarrow \exists i \in I : \{x,y\} \subseteq A_i \wedge \exists j \in I : \{y,z\} \subseteq A_j \\ & \Rightarrow y \in A_i \cap A_j \\ & \Rightarrow i = j \\ & \Rightarrow \{x,z\} \subseteq A_i = A_j \\ & \Rightarrow x \sim_{\mathfrak{a}} z\end{aligned}$$

□

Definition 0.64. *Sei $R \subseteq M \times M$ eine Äquivalenzrelation auf M. Dann heißt* $\boxed{cls(x)}$

$$\langle x \rangle := \overline{x} := [x] := cls(x) := \{y \in M \mid y \sim_R x\}$$

die Äquivalenzklasse zu x bezüglich $\sim_R$.

Es ist $cls(x) \neq \varnothing$, weil $x \in cls(x)$.

$\boxed{\text{Satz 0.6.1.}}$ Sei $R \subseteq M \times M$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M. Seien x, y zwei Elemente aus M, $\langle x \rangle$, $\langle y \rangle$ ihre Äquivalenzklassen bezüglich R. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

1. $x \sim y$
2. $y \sim x$
3. $x \in \langle y \rangle$
4. $y \in \langle x \rangle$
5. $\langle x \rangle = \langle y \rangle$
6. $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle \neq \varnothing$

Beweis.

(1) ⇔ (2) Gilt durch Symmetrie von R.

(2) ⇒ (3) Nach Definition von $\langle x \rangle$.

(3) ⇔ (4) Wieder durch Symmetrie von R.

(4) ⇒ (5) Gilt durch Transitivität von R.

(5) ⇒ (6) Offensichtlich, da $\langle x \rangle \neq \varnothing$.

(6) ⇒ (1) Sei $z \in \langle x \rangle \cap \langle y \rangle$. Dann ist $z \in \langle x \rangle \wedge z \in \langle y \rangle$ Damit gilt $x \sim z$ und $z \sim y$, also wegen der Transitivität auch $x \sim y$.

□

$\boxed{M/_R}$

Definition 0.65. *Sei $M \neq \varnothing$ eine Menge und sei $R \subseteq M \times M$ eine Äquivalenzrelation auf M. Die Menge der einzelnen Äquivalenzklassen bezüglich R*

$$M/_R := \{\langle x \rangle \mid x \in M\}$$

heißt dann auch die Faktormenge von M nach R.

Es ist $M/_R \subseteq \mathfrak{P}(M)$.

$\boxed{\text{Satz 0.6.2.}}$ Sei $M \neq \varnothing$, $R \subseteq M \times M$ eine Äquivalenzrelation. Dann gilt

1. Das Mengensystem $M/_R$ ist eine Partition von M.
2. Allgemeiner gilt sogar:
   Es gibt eine kanonische bijektive Abbildung zwischen der Menge der Äquivalenzrelationen und der Menge der Partitionen von M.

Beweis.

zu (1)

$$\forall x \in M : x \in \langle x \rangle \Rightarrow M \subseteq \bigcup_{\xi \in M/_R} \xi$$

Damit ist $M/_R$ eine Überdeckung von M. Nach Satz 0.6.1 sind die einzelnen Äquivalenzklassen sogar disjunkt, also ist $M/_R$ eine Partition.

zu (2) Betrachte die Abbildungen

$$R_\square : \{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a} \text{ Partition von } M\} \longrightarrow \big\{R \subseteq M \times M \mid R \text{ Äquivalenzrelation auf } M\big\}$$

mit $R_\square(\mathfrak{a}) := R_\mathfrak{a}$ und

$$M/_\square : \big\{R \subseteq M \times M \mid R \text{ Äquivalenzrelation auf } M\big\} \longrightarrow \{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a} \text{ Partition von } M\}$$

mit $M/_\square(R) := M/R$. Es ist

$$\begin{aligned}(M/_\square \circ R_\square)(\mathfrak{a}) &= M/_{R_\mathfrak{a}} \\ &= \dots \\ &= \mathfrak{a}\end{aligned}$$

und umgekehrt

$$\begin{aligned}(R_\square \circ M/_\square)(R) &= R_{M/_R} \\ &= \dots \\ &= R,\end{aligned}$$

Damit sind $R_\square$ und $M/_\square$ zueinander inverse Bijektionen.

□

Wir haben dann automatisch die kanonische Projektion $\pi : M \twoheadrightarrow M/_R$ mit

$$\forall x \in X : \quad \pi(x) := cls(x)$$

Für die Fasern dieser Abbildung gilt:

$$\pi^{-1}(\underbrace{\xi}_{\text{als Element von } M/_R}) = \pi^{-1}(\{\xi\}) = \underbrace{\xi}_{\text{als Teilmenge von } M}$$

Wie jede Surjektion hat auch $\pi : M \twoheadrightarrow M/_R$ mindestens eine rechtsinverse Injektionsabbildung $s : M/_R \hookrightarrow M$, für die also gilt $\pi \circ s = id_{M/_R}$ und

$$\forall (\xi, \upsilon) \in (M/_R)^2 : \quad \xi \neq \upsilon \Leftrightarrow s(\xi) \nsim s(\upsilon)$$

Jede Rechtsinverse zur Projektion π liefert also eine Teilmenge $M_0 := S\,(M/_R)$, die aus lauter inäquivalenten Elementen besteht, die aber andererseits auch alle Äquivalenzklassen repräsentieren.

Definition 0.66. *Ein solches M_0 heißt auch vollständiges **Repräsentantensystem** von $M/_R$.*

Es ist natürlich $M_0 \cong M/_R$.

Beispiel 0.6.4. Betrachten wir $M := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Die Relation $R \subseteq M \times M$ sei definiert durch

$$\forall\, ((n,m),(k,l)) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N})^2 : \quad (k,l) \sim (n,m) :\Leftrightarrow n + l = k + m$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \langle (n,m) \rangle &= \{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n + l = k + m\} \\ &= \{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n - m = k - l\} \end{aligned}$$

Wir haben also eine Bijektion

$$\rho : (\mathbb{N} \times \mathbb{N})\, /_R \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$$

mit $\rho(\langle (n,m) \rangle) := n - m$.

Auf diese Art und Weise kann man die Menge der ganzen Zahlen konstruieren.

Beispiel 0.6.5. Betrachten wir $M := \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$. Die Relation $R_{Quot} \subseteq M \times M$ sei definiert durch

$$\forall \big((a,b),(c,d)\big) \in M^2 : \quad (a,b) \sim_{R_{Quot}} (c,d) :\Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Wie man leicht sieht, ist R_{Quot} eine Äquivalenzrelation auf $Z \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$. Als Äquivalenzklassen ergibt sich

$$\begin{aligned} \langle (a,b) \rangle &= \{(c,d) \in M \mid a \cdot d = c \cdot b\} \\ &= \left\{(c,d) \in M \mid \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}\right\} \end{aligned}$$

Hier erhalten wir eine Bijektion

$$\alpha : (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}))\, /_{R_{Quot}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}$$

mit $\alpha\left(\langle (a,b) \rangle\right) := \frac{a}{b}$. Auf diese Art kann die Menge der rationalen Zahlen konstruiert werden.

Wir haben gesehen, dass man die Menge der ganzen und dann der rationalen Zahlen durch Faktormengenbildung aus einem Kreuzprodukt der jeweils vorhergehenden Menge (also natürliche und ganze Zahlen) konstruieren kann. Es stellt sich die Frage, ob man nun auch die reellen Zahlen als Faktormenge eines Kreuzproduktes der Menge der rationalen Zahlen konstruieren kann. Demgegenüber steht der folgende Satz:

SATZ OHNE NUMMER. Es gibt keine Mengen S, T mit $S \cong \mathbb{Q}$, $T \cong \mathbb{Q}$, so dass $\mathbb{R} \cong (S \times T)/_\sim$, mit einer beliebigen Äquivalenzrelation $\sim$ auf $S \times T$.

Beweis.
Nehmen wir an, $\mathbb{R} \cong (S \times T)/_\sim$, also existiert eine Bijektion

$$\theta : (S \times T)/_\sim \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}.$$

Verketten wir diese mit der Projektion

$$\pi : (S \times T) \twoheadrightarrow (S \times T)/_\sim,$$

so erhalten wir eine Surjektion

$$\theta \circ \pi : S \times T \twoheadrightarrow \mathbb{R}.$$

Damit gibt es umgekehrt eine Injektion

$$\mathbb{R} \hookrightarrow S \times T \cong \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \cong \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N},$$

damit ist $card(\mathbb{R}) \leq card(\mathbb{N})$, was unmöglich ist, da $\mathbb{R}$ überabzählbar ist. □

Konstruktion von $\mathbb{R}$ als Faktormenge

Trotz des eben aufgeführten Satzes kann man $\mathbb{R}$ als Faktormenge darstellen, allerdings nicht aus abzählbaren Mengen.

Definition 0.67. *Betrachte* $\boxed{f_{\mathbb{Q}}}$

$$f_{\mathbb{Q}} := \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{Q}),$$

die Menge der rationalen Zahlenfolgen.

Definition 0.68. *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in f_{\mathbb{Q}}$ heißt eine **Cauchy-Folge** genau dann, wenn*

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Die Menge der Cauchy-Folgen bezeichnen wir mit $\boxed{\mathfrak{C}_{\mathbb{Q}}}$

$$\mathfrak{C}_{\mathbb{Q}} := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in f_{\mathbb{Q}} \mid (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Cauchy-Folge}\}$$

Definition 0.69. *Eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in f_{\mathbb{Q}}$ heißt **Nullfolge** genau dann, wenn*

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |b_n| \leq \varepsilon$$

Die Menge der rationalen Nullfolgen bezeichnen wir mit $\boxed{\mathfrak{N}_{\mathbb{Q}}}$

$$\mathfrak{N}_Q := \{(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in f_{\mathbb{Q}} \mid (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Nullfolge}\}$$

Wir sehen leicht:

$$\mathfrak{N}_{\mathbb{Q}} \subseteq \mathfrak{C}_{\mathbb{Q}} \subseteq f_Q$$

Nun können wir auf der Menge der Cauchy-Folgen eine Relation $R_{null} \subseteq \mathfrak{C}_{\mathbb{Q}} \times \mathfrak{C}_{\mathbb{Q}}$ definieren durch

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}} :\Leftrightarrow (a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{N}_{\mathbb{Q}}$$

Man kann zeigen, dass R_{null} eine Äquivalenzrelation ist[17]. Die Äquivalenzklassen entsprechen dann den reellen Zahlen.

[17] Das habe ich mir leider nicht genau mitgeschrieben. Wenn jemand den Nachweis mitgeschrieben hat, soll er sich bei mir melden. – Das geht wohl so ähnlich wie bei der Vervollständigung metrischer Räume, siehe Analysis-Vorlesung Satz 2.31

Weitere Beispiele für Faktormengen und Äquivalenzklassen

18

Beispiel 0.6.6. Sei jetzt $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$. Hier definieren wir $R_{Gerade} \subseteq M \times M$ durch

$$\forall\big((x,y),(u,v)\big) \in M^2 : \quad (x,y) \sim_{R_{Gerade}} (u,v) :\Longleftrightarrow \text{„}(x,y) \text{ und } (u,v) \text{ liegen auf der selben Gerade durch } (0,0)\text{“}$$

Auch diese Relation ist eine Äquivalenzrelation (jeder Punkt liegt genau auf einer der Geraden durch $(0,0)$). Die Äquivalenzklassen sind

$$\langle (x,y) \rangle = \{(u,v) \mid \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : (u,v) = (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y)\}$$

$\boxed{\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}}$ *Definition* 0.70. *Die Faktormenge dieser Relation* $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$

$$\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} := \left(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\right) /_{R_{Gerade}},$$

also die Menge aller Geraden durch den Nullpunkt (jeweils ohne diesen), heißt die ***projektive reelle Gerade****.*

Ein Repräsentantensystem ist z.B.

$$S^1_+ := \{(\cos(t), \sin(t)) \mid 0 \le t < \pi\}$$

(also die obere Hälfte des Einheitskreises) oder auch

$$G = \{(1,t) \mid t \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,1)\} \cong \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

(also eine senkrechte Gerade + ein einzelner Punkt). Für ersteres erhalten wir eine Projektion $\vartheta : \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\sim} S^1_+$ durch

$$\vartheta\left(cls((x,y))\right) := \begin{cases} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & y \ge 0 \\ \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & y < 0 \end{cases},$$

für das zweite Repräsentantensystem lässt sich viel einfacher eine Projektion $\tau : \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\sim} G$ finden durch

$$\tau\left(cls((x,y))\right) := \begin{cases} (1, \frac{y}{x}) & x \neq 0 \\ (0,1) & x = 0 \end{cases}$$

Beispiel 0.6.7. **Die reelle projektive Ebene** Betrachten wir in $\mathbb{R}^3$ die Menge aller Geraden durch den Nullpunkt $(0,0,0)$. Jede solche Gerade ist durch einen Punkt in $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ eindeutig bestimmt. Die dazugehörige Äquivalenzrelation ist $R^* \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ mit

$$(x,y,z) \sim_{R^*} (u,v,w) :\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \quad u = \lambda \cdot x \wedge v = \lambda \cdot y \wedge w = \lambda \cdot z$$

$\boxed{\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}}$ Die Menge aller Äquivalenzklassen, also die Faktormenge

$$\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} := \left(\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}\right) /_{R^*}$$

wird **reelle projektive Ebene** genannt. Sie entspricht der Menge aller Geraden durch den Ursprung. Die projektive reelle Ebene kann durch eine Halbkugel mit einem halben Äquator veranschaulicht / repräsentiert werden. Eine andere Variante ist, eine Ebene (z.B. in $z = 1$) und zusätzlich eine projektive reelle Gerade (für $z = 0$) zu verwenden. Es ist also

$$\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^2 \dot\cup \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^2 \dot\cup \mathbb{R} \dot\cup \{\infty\},$$

wobei hier $\cong$ im Sinne einer stetigen (noch nicht definiert) Abbildung zu verstehen ist (die Mengen haben sowieso alle die Kardinalität des Kontinuums).

Beispiel 0.6.8. **Koordinatenfreie Beschreibung der Kreislinie S^1.** Betrachten wir $\mathbb{R}$ und die Relation $R_{\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit

$$\forall (r,s) \in \mathbb{R}^2 : \quad r \sim_{\mathbb{Z}} s :\Leftrightarrow r - s \in \mathbb{Z}$$

$\mathbb{R}_{\mathbb{Z}}$ ist offensichtlich eine Äquivalenzrelation, und es gilt [19]:

$$\begin{aligned} &\forall (r,s) \in \mathbb{R}^2 : \\ &\qquad r = [r] + \delta \qquad\qquad 0 \leq \delta < 1 \\ &\qquad s = [s] + \varepsilon \qquad\qquad 0 \leq \varepsilon < 1 \end{aligned}$$

Und damit

$$\begin{aligned} r \sim_{\mathbb{Z}} s &\Leftrightarrow [r] + \delta - [s] - \varepsilon \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow [r] - [s] + \delta - \varepsilon \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \delta - \varepsilon \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

und wegen $-1 < \delta - \varepsilon < 1$ ergibt sich

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \delta - \varepsilon = 0 \\ &\Leftrightarrow \delta = \varepsilon, \end{aligned}$$

Und dies ist genau dann der Fall, wenn r und s den selben Dezimalanteil hinter dem Komma haben.

Es gilt also

$$\forall r \in \mathbb{R} : \quad cls(r) = cls(r - [r]) = cls(\delta)$$

[18] In diesem Abschnitt ist in meinen Mitschriften die Reihenfolge der Blätter etwas durcheinander geraten. Falls jemand Korrekturen hat, kann er sich melden, ich werde dann die Reihenfolge anpassen.

[19] Hier bedeutet $[x] := \sup\{k \in \mathbb{Z} \mid k < x\}$ das größte Ganze von x.

Damit ist das halboffene Intervall $[0,1)$ ein vollständiges Repräsentantensystem für $\mathbb{R}/R_{\mathbb{Z}}$. Wir können nun eine Bijektion von diesem Repräsentantensystem und damit von der Faktormenge auf die Einheitskreislinie aufstellen:

$$\theta : [0,1) \xrightarrow{\sim} S^1$$

mit $\theta(x) := (\cos(2 \cdot \pi \cdot x), \sin(2 \cdot \pi \cdot x))$. Wir erhalten dann durch Verkettung mit der Projektionsabbildung von der Faktormenge auf das Repräsentantensystem die Bijektion

$$\psi : \mathbb{R}/_{\mathbb{Z}} := \mathbb{R}/_{R_{\mathbb{Z}}} \xrightarrow{\sim} S^1$$

mit

$$\psi(cls(r)) := (\cos(2 \cdot \pi \cdot r), \sin(2 \cdot \pi \cdot r))$$

Wir haben hier sinnbildlich das Intervall $[0,1)$ zu einem Kreis zusammen gebogen, dies entspricht der Aufwicklung der reellen Achse auf diesen Kreis, wobei alle ganzen Zahlen auf $(1,0)$ zu liegen kommen.

Beispiel 0.6.9. Betrachten wir nun $M := \mathbb{R}^2$. Hier definieren wir die Relation $R_{\mathbb{Z}^2} \subseteq M \times M$ durch

$$\begin{aligned} \forall\, ((x,y),(u,v)) \in M^2 : (x,y) \sim_{\mathbb{Z}^2} (u,v) &:\Leftrightarrow (x-y, u-v) \in \mathbb{Z}^2 \\ &\Leftrightarrow x-u \in \mathbb{Z} \wedge y-v \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x \sim_{\mathbb{Z}} u \wedge y \sim_{\mathbb{Z}} v \end{aligned}$$

Diese Relation ist natürlich ebenfalls eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen lassen sich schreiben als

$$\begin{aligned} cls((x,y)) &= cls\left(([x]+\delta, [y]+\varepsilon)\right) \\ &= cls(\delta, \varepsilon) \end{aligned}$$

Damit ist $[0,1) \times [0,1)$ ein vollständiges Repräsentantensystem für $\mathbb{R}^2/_{\mathbb{Z}^2}$. Dieses lässt sich neben der Darstellung als Quadrat mit 2 offenen Seiten durch Zusammenbiegen auch als Zylinder[20] (mit einer offenen Kante) oder gar als Torus[21] auffassen.

Beispiel 0.6.10. Betrachten wir die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$. Sei weiterhin eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Dann können wir eine Relation $\sim_n \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ einführen durch

$$\forall (k,l) \in \mathbb{Z}^2 : \quad k \sim_n l \Leftrightarrow n|(k-l)$$

Man sieht leicht, dass diese Relation eine Äquivalenzrelation ist, die Äquivalenzklassen (hier als $\overline{k} := [k] := cls(k)$ geschrieben) bestehen jeweils aus den Zahlen, die bei Division durch n den gleichen Rest lassen. Man schreibt auch

$$k \equiv l \pmod{n} \qquad \text{für} \qquad k \sim_n l$$

[20] Dadurch kann man das Schachspiel auf einem quadratischem Brett zu einem auf einem Zylinder erweitern, Spalte **h** ist dann direkt neben Spalte **a**. Diese Variante ist als Mantelschach bekannt.

[21] Hier kann man nicht vernünftig Schach spielen, da Weiß mit dem ersten Zug sofort den schwarzen König schlagen kann.

Die Faktormengen

$$\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} := \mathbb{Z}/_{\sim_n}$$

nennen wir Restklassenmengen über $\mathbb{Z}$. Sie haben jeweils n Elemente, da n verschiedene Reste möglich sind. Wir können auf diesen Mengen sogar Rechenoperationen einführen:

1. Es existiert eine Abbildung $\boxplus : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ mit der Eigenschaft, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \arrow[r, "+"] \arrow[d, "\pi\times\pi"'] & \mathbb{Z} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \arrow[r, "\boxplus"'] & \mathbb{Z}_n \end{tikzcd}$$

   kommutativ ist, also

$$\pi(a+b) = \pi(a) \boxplus \pi(b)$$

2. Gleiches gilt für $\boxdot$ und $\cdot$.

Dafür definieren wir uns diese Rechenoperationen „brutal“:

Definition 0.71.

$$\begin{aligned} \forall (k,l) \in \mathbb{Z}^2 : \\ & [k] \boxplus [l] := [k+l] \\ & [k] \boxdot [l] := [k \cdot l] \end{aligned}$$

Bei so einer Definition muss natürlich erst die Repräsentantenunabhängigkeit nachgewiesen werden:

$$\begin{aligned} [k] = [k'] \wedge [l] = [l'] \\ & \Rightarrow k - k' = n \cdot q \wedge l - l' = n \cdot p \quad (p, q \in \mathbb{Z}) \\ & \Rightarrow (k+l) - (k'+l') = n \cdot (p+q) \\ & \Rightarrow n | (k+l) - (k'+l') \\ & \Rightarrow [k+l] = [k'+l'] \end{aligned}$$

Damit ist $\boxplus : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ wohldefiniert. Für $\boxdot$ ergibt sich der Beweis analog.

Normalerweise schreibt man statt $\boxplus$ einfach $+$ und statt $\boxdot$ einfach $\cdot$, da die Bedeutung ja eindeutig ist.

Invariante Abbildungen und Homomorphiesatz für Mengen

Definition 0.72. *Seien $M \neq \varnothing$, $N \neq \varnothing$ Mengen, $R \subseteq M \times M$ eine Äquivalenzrelation auf M. Eine Abbildung $f \in \mathrm{Abb}(M, N)$ heißt* ***R-invariant*** *genau dann, wenn*

$$\forall (x,y) \in M^2 : \quad x \sim_R y \Rightarrow f(x) = f(y)$$

$\boxed{\text{Lemma.}}$ Seien $M \neq \varnothing$, $N \neq \varnothing$ Mengen, $R \subseteq M \times M$ eine Äquivalenzrelation auf M und $\pi : M \twoheadrightarrow M/_R$ die Projektionsabbildung (also $\pi(x) := cls(x)$). Dann gilt:

1. Ist $f \in \text{Abb}(M, N)$ R-invariant, so $\exists! \tilde{f} \in \text{Abb}(M/_R, N)$, so dass $f = \tilde{f} \circ \pi$.
2. Es gibt eine kanonische Bijektion

$$\widehat{\square} : \text{Abb}(M/_R, N) \xrightarrow{\sim} \text{Abb}^{R-inv}(M, N) := \{g \in \text{Abb}(M, N) \mid g \text{ ist } R\text{-invariant}\}.$$

Beweis.

ad (1) Die Existenz ist einfach zu zeigen:
Wir „definieren“ einfach $\tilde{f} \in \text{Abb}(M/_R, N)$ durch die Festlegung

$$\forall \xi = cls(x) \in M/_R : \quad \tilde{f}(\xi) := f(x).$$

Diese Definition ist repräsentantenunabhängig:

$$\begin{aligned} cls(x) &= cls(y) \\ &\Rightarrow x \sim_R y \\ &\Rightarrow f(x) = f(y) \\ &\Rightarrow \tilde{f}(xls(x)) = \tilde{f}(xls(y)) \end{aligned}$$

Dann können wir überprüfen:

$$\begin{aligned} \forall x \in M : \quad \left(\tilde{f} \circ \pi\right)(x) &= \tilde{f}(cls(x)) \\ &= f(x) \\ \Rightarrow \quad \tilde{f} \circ \pi &= f \end{aligned}$$

Nun zur Eindeutigkeit dieser Abbildung: Nehmen wir an, es gäbe 2 Abbildungen $\tilde{f}$ und $\tilde{\tilde{f}}$, so dass gilt

$$f = \tilde{f} \circ \pi = \tilde{\tilde{f}} \circ \pi$$

Weil π surjektiv ist $\exists h : M/_R \hookrightarrow M$, so dass $\pi \circ h = id_{M/_R}$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \tilde{f} \circ \pi \circ h &= \tilde{\tilde{f}} \circ \pi \circ h \\ \Rightarrow \quad \tilde{f} \circ id_{M/_R} &= \tilde{\tilde{f}} \circ id_{M/_R} \\ \Rightarrow \quad \tilde{f} &= \tilde{\tilde{f}} \end{aligned}$$

Alle Abbildungen mit der angegebenen Eigenschaft sind also identisch.

ad (2) Wie eben gezeigt wurde, ist die Abbildung $\tilde{\Box} : \mathrm{Abb}^{R-inv}(M,n) \to \mathrm{Abb}(M/_R, N)$ eine Injektion. Umgekehrt ist nun für alle $g \in \mathrm{Abb}(M/_R, N)$ die Abbildung $\widehat{g} := g \circ \pi : M \to N$ R-invariant, denn

$$\begin{aligned} x \sim_R x &\Rightarrow \pi(x) = \pi(y) \\ &\Rightarrow \widehat{g}(x) = g(\pi(x)) = g(\pi(y)) = \widehat{g}(y) \\ &\Rightarrow \widehat{g}(x) = \widehat{g}(y), \end{aligned}$$

und nach Konstruktion ist $\widetilde{(\hat{g})} = g$, also ist $\tilde{\Box}$ auch surjektiv, also bijektiv. Die Umkehrabbildung davon ist dann natürlich $\widehat{\Box}$, also ist auch diese bijektiv.

$\Box$

Betrachten wir nun einen Spezialfall: Sei $f : M \to N$ eine beliebige Abbildung. Dann ist die Relation $R_f \subseteq M \times M$ mit

$$x \sim_f y :\Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

eine Äquivalenzrelation auf M. Dadurch ist natürlich nun f R_f-invariant. Auch hier können wir die Abbildung $\widetilde{f}$ finden, und hier ist $\widetilde{f}$ sogar injektiv:

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(cls(x)) = \widetilde{f}(cls(y)) &\Rightarrow f(x) = f(y) \\ &\Rightarrow x \sim_f y \\ &\Rightarrow cls(x) = cls(y) \end{aligned}$$

Ebenfalls gilt:

$$\begin{aligned} im(f) &= \{f(x) \mid x \in M\} \\ &= \left\{\widetilde{f}(cls(x)) \mid x \in M\right\} \\ &= \left\{\widetilde{f}(\xi) \mid \xi \in M/_R\right\} \\ &= im\left(\widetilde{f}\right) \end{aligned}$$

Die Abbildungen haben also das gleiche Bild, wir können also folgendes Diagramm zeichnen:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & im(f) \\ \pi\big\downarrow & & \big\| \\ M/_R & \xrightarrow{\widetilde{f}} & im(f) \end{array},$$

wobei f und π surjektiv, und $\widetilde{f}$ sogar bijektiv ist. [22]

[22] Im Original hatten wir natürlich diverse Diagramme, in denen auch noch Diagonalen auftauchen (also ein dreieckiges Diagramm) und die Pfeile entsprechend gekennzeichnet sind. Ich habe keine Möglichkeit gefunden, so etwas in LaTeX einzugeben. (Eine Möglichkeit wäre wohl die Einbindung als Bild.)

Damit haben wir den letzten Satz dieses Kapitels hergeleitet:

Satz 0.6.3. Der Homomorphiesatz für Mengen
Ist $f : M \to N$ eine beliebige Mengenabbildung, $\widetilde{f}$ die (eindeutige) Faktorisierungsabbildung für f bezüglich R_f, so vermittelt $\widetilde{f}$ eine Bijektion

$$\widetilde{f} : M/_{R_f} \xrightarrow{\sim} im(f)$$

Index