Stoff für die Spezialisierungsprüfung

Paul Ebermann
ebermann@math.hu-berlin.de

28. Februar 2008

Nach diversen Vorlesungen bei Dr. Kleinert (siehe Einleitung).

Überblick

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Inhalt

Ich habe im Hauptstudium meines Diplom-Mathematik-Studiums eine Reihe von Vorlesungen gehört. Jetzt, da sich mein Studium dem Ende zuneigt, muss ich für die Spezialisierungsprüfung einige davon wiederholen[1] – dies betrifft die folgenden Vorlesungen:

- Algebra II (oder „Höhere Algebra“)
- Algebraische Geometrie I
- Algebraische Geomerie II
- Kohomologietheorien und ihre Anwendung

Erfreulicherweise habe ich alle diese Vorlesungen bei Dr. Kleinert gehört (welcher mich hoffentlich auch darüber prüfen wird).

Inzwischen (2008-02-28) habe ich alle Vorlesungen abgeschrieben, und werde gleich anfangen, den letzten Stand auszudrucken.

Technik

Für dieses Skript[2] habe ich eine eigene LaTeX-Dokumentenklasse alg-script sowie mehrere LaTeX-Packages geschrieben – diese sind auf meiner Homepage zu finden, ebenso wie eine Dokumentation dazu. Ich entwickele diese Pakete weiter, während ich dieses Skript schreibe, je nach meinen Bedürfnissen. Zum Verarbeiten einer neuen Version des Skriptes sind daher i.a. die aktuellsten Versionen dieser Pakete notwendig. Eine Liste aller zur Verarbeitung verwendeten Dateien (mit Datum und Versionsnummern) findet sich im Anhang ab Seite 659.

[1] „wiederholen“ im Sinne von „den Stoff lernen“.

[2] und ein weiteres, *Einführung in die naive Mengenlehre*, mit dem Stoff der ersten Hälfte des ersten Semesters „Lineare Algebra“, auch bei Herrn Kleinert

Teil I

Algebra II

Überblick der Vorlesung

Noethersche Ringe und Moduln

I.1 Spezielle Elemente und Ideale in Ringen

I.2 Noethersche Ringe und Moduln

I.3 Fundamentale Struktursätze für noethersche Ringe

I.4 Analyse der Lasker-Noether-Zerlegung: (Gegen-)Beispiele, Anwendungen, Verallgemeinerungen

Arithmetik in Ringen

II.1 Faktorielle Ringe, ggT-kgV-Ringe, Bezout-Ringe, etc.

II.2 Polynomringe über faktoriellen Ringen

Lokale und globale Algebra

III.1 Lokalisierung

III.2 Exkurs aus der multilinearen Algebra: Weitere universale Objekte – Freier Modul und Tensorprodukt

Homologische Methoden in der Algebra

IV.1 Projektive Moduln

IV.2 Der Rang projektiver Moduln und die Picard-Gruppe eines Ringes.

IV.3 Injektive Moduln

IV.4 Flache Moduln

1 Noethersche Ringe und Moduln

1.1 Spezielle Elemente und Ideale in Ringen

Vereinbarung 1.1. *Alle betrachteten **Ringe** seien kommutativ und unitär (d.h. mit Einselement* $1 \neq 0$*), falls nichts anderes gesagt wurde.*

Definition 1.2. *Sei A ein Ring.* $\boxed{A^*}$

$$A^* := \{a \in A \mid \exists b \in A : a \cdot b = 1\}$$

*heißt Menge der **Einheiten** bzw.* (multiplikativ) invertierbaren Elemente *von A.*

Satz ohne Nummer.

(1) $(A^*, \cdot) \subseteq (A, \cdot)$ ist Untergruppe des Monoids $(A, \cdot)$

(2) $0 \notin A^*$

(3) $\mathbb{Z}^* = \{-1, 1\}$,
$\left(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}\right)^* = \{[a] \mid 1 \leq a \leq n-1,\ \mathrm{ggT}(a,n) = 1\}$

Definition 1.3.

$$\varphi(n) := \#\left(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}\right)^*$$

$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *heißt **Eulersche φ-Funktion**.* $\boxed{\varphi(n)}$

SATZ OHNE NUMMER. Eigenschaften von φ:

(1) $\varphi(n)$ ist die Anzahl der zyklisch erzeugenden Elemente in $(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}, +)$.

(2) $\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$, falls $ggT(n,m) = 1$.

(3) $\varphi(p^n) = p^n - p^{n-1} = p^n \cdot \left(1 - \frac{1}{p}\right)$ (für p Primzahl)

(4) Ist

$$\begin{aligned} n &= p_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{\nu_s} \\ &= \prod_{\substack{p \mid n \\ p \text{ prim}}} p^{\nu_p(n)} \end{aligned}$$

so folgt

$$\varphi(n) = n \cdot \prod_{\substack{p \mid n \\ p \text{ prim}}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

(5) $n = \sum_{d \mid n} \varphi(d)$

(6) Sei K Körper, $(G, \cdot)$ *endliche* Untergruppe von $(K, \cdot)$. Dann ist G *zyklisch.*

SATZ OHNE NUMMER. $(\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}})^*$ ist (für p prim) zyklisch der Ordnung $p-1$ und hat $\varphi(p-1)$ zyklische Erzeugende (p-te primitive Einheitswurzeln).

NT(A) **Definition 1.4.** *Sei A ein Ring.*

$$\mathrm{NT}(A) := \{a \in A \mid \exists b \in A \setminus \{0\} : b \cdot a = 0\}$$

heißt Menge der ***Nullteiler*** *von A.*

SATZ OHNE NUMMER.

(1) $0 \in \mathrm{NT}(A)$ (sogenannter **trivialer Nullteiler**), daher $\mathrm{NT}(A) \neq \varnothing$.

(2) Falls $a \in \mathrm{NT}(A) \setminus \{0\}$, so heißt a **echter Nullteiler**.

(3) $\mathrm{NT}(A) \cap A^* = \varnothing$ bzw. $\mathrm{NT}(A) \subseteq A \setminus A^*$.

(4) $\mathrm{NT}(\mathbb{Z}) = \{0\}$ (keine echten Nullteiler)

(5) $\mathrm{NT}(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}) = \{[a] \in \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} \mid \mathrm{ggT}(a,n) > 1\}$, $\mathrm{NT}(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}) \,\dot\cup\, \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}{}^* = \mathbb{Z}_{n\mathbb{Z}}$

Definition 1.5. *Ein Ring A heißt* ***Integritätsbereich*** *oder* ***nullteilerfrei****, falls* $NT(A) = \{0\}$.

BEMERKUNG 1.

(1) Ist K ein Körper, so ist K auch ein Integritätsbereich. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

(2) Für die endlichen Faktorringe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (mit $n \in \mathbb{N}$) gilt:
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist Integritätsbereich $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist Körper $\Longleftrightarrow$ n ist Primzahl.

Beispiel 1.1.1. Betrachte den Ring der differenzierbaren reellen Funktionen $\boxed{C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})}$

$$C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist differenzierbar}\}.$$

$(C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}), +, \cdot)$ ist ein (kommutativer, unitärer) Ring. Die Einheitengruppe ist

$$\begin{aligned} C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})^* &= \left\{f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(a) \neq 0 \forall a\right\} \\ &= \left\{f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f \text{ hat keine Nullstellen}\right\} \end{aligned}$$

Allerdings gibt es hier nichttriviale Nullteiler, also f, g mit $f \cdot g = 0$ und $f \neq 0$, $g \neq 0$ (das geht etwa mit $f|_{[0,\infty)} = 0$ und $g|_{[-\infty,0]} = 0$). Daher ist $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ kein Integritätsbereich. Es ist genauer sogar

$$\mathrm{NT}(C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})) = \left\{f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \exists a < b \in \mathbb{R} : f|_{[a,b]} = 0\right\}$$

Beispiel 1.1.2. Betrachte den Ring der holomorphen Funktionen auf $\mathbb{C}$: $\boxed{\mathcal{H}ol(\mathbb{C})}$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}ol(\mathbb{C}) &:= \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid f \text{ holomorph}\} \\ &= \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid f \text{ komplex differenzierbar}\} \\ &= \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid f \text{ lokale in Potenzreihe entwickelbar}\} \\ &= \left\{ f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{c} \forall z_0 \in \mathbb{C} : \ \exists \varepsilon > 0 : \ \exists P \in \mathbb{C}[\![x]\!] : \\ P(z) = f(z) \ \forall \, |z - z_0| < \varepsilon \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\mathcal{H}ol(\mathbb{C})^* = \{f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{C}) \mid f \text{ hat keine Nullstellen}\}$$

und

(*) $\qquad \mathrm{NT}(\mathcal{H}ol(\mathbb{C}^*)) = \{0\}.$

Fazit. $\mathcal{H}ol(\mathbb{C})$ ist ein Integritätsbereich, $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ nicht.

$\boxed{\mathrm{NNT}(A)}$ **Definition 1.6.** *Sei A ein Ring. Dann nennen wir*

$$\mathrm{NNT}(A) := A \setminus \mathrm{NT}(A)$$

die Menge der ***Nichtnullteiler****.*

Bemerkung. Es ist

$$\begin{aligned}\mathrm{NNT}(A) &= \{a \in A \mid \forall b \in A \setminus \{0\} : \ b \cdot a \neq 0\} \\ &= \{a \in A \mid \forall b \in A : \ a \cdot b = 0 \Rightarrow b = 0\} \\ &= \{a \in a \mid \forall b, c \in A : \ (a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c)\}\end{aligned}$$

EIGENSCHAFTEN.

(1) $A^* \subseteq \mathrm{NNT}(A)$. (Die Umkehrung gilt nicht immer.)

(2) $(\mathrm{NNT}(A), \cdot)$ ist ein Untermonoid von $(A, \cdot)$, also multiplikativ abgeschlossen.

(3) $1 \in \mathrm{NNT}(A)$, $0 \notin \mathrm{NNT}(A)$.

$\boxed{\mathrm{Nil}(A)}$ **Definition 1.7.** *Wir nennen*

$$\mathrm{Nil}(A) := \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} : a^n = 0\}$$

die Menge der ***nilpotenten Elemente****.*

$0 \in \mathrm{Nil}(A)$ *ist das* ***triviale nilpotente Element****. Ist $a \in \mathrm{Nil}(A) \setminus \{0\}$, so heißt*

$$\mathrm{nilp}(a) := \min\{\nu \in \mathbb{N} : a^\nu = 0\}$$

der ***Nilpotenzgrad*** *von a.*

Bemerkung. Es ist $\mathrm{Nil}(A) \subseteq \mathrm{NT}(A)$, denn es ist ja $a \cdot a^{\mathrm{nilp}(a)-1} = a^{\mathrm{nilp}(a)} = 0$.

FAZIT. Damit gelten die folgenden Inklusionsketten:

$$\begin{gathered}\varnothing \subsetneqq \{0\} \subseteq \mathrm{Nil}(A) \subseteq \mathrm{NT}(A) \subseteq A \setminus A^* \subseteq A \setminus \{1\} \subsetneqq A \\ \varnothing \subsetneqq \{1\} \subseteq A^* \subseteq \mathrm{NNT}(A) \subseteq A \setminus \mathrm{Nil}(A) \subseteq A \setminus \{0\} \subsetneqq A\end{gathered}$$

Definition 1.8. *Die Menge*

$$\mathrm{Idem}(A) := \left\{a \in A \mid a^2 = a\right\}$$

heißt die Menge der ***idempotenten Elemente*** *von A*

Bemerkung.

(1) Es ist $\{0,1\} \subseteq \mathrm{Idem}(A)$ (die sogenannten trivialen Idempotenten).

(2) $\mathrm{Idem}(A) \setminus \{0,1\} \subseteq \mathrm{NT}(A)$ (weil für $a^2 = a \neq 1$ dann $a \cdot (a-1) = a^2 - a = a - a = 0$ ist, mit $a - 1 \neq 0$).

Definition 1.9. *Ein Ring A heißt* ***Boolescher Ring****, falls $a^2 = a$ für alle $a \in A$, d.h. $A = \mathrm{Idem}(A)$.*

Bemerkung.

(1) Ist A ein Boolescher Ring, so ist $\mathrm{char}(A) = 2$ (weil $2 = 1 + 1 = (1+1)^2 = 4$, also $0 = 2$).

(2) Es gibt Boolesche Ringe, z.B. ist für jede Menge X der Mengenring

$$(A, +, \cdot) := (\mathfrak{P}(X), \triangle, \cap)$$

ein Boolescher Ring.

(3) Ist A ein Ring und $a \in \mathrm{Idem}(A) \setminus \{0,1\}$. Dann ist A zerlegbar in

$$A \cong {}^{A}\!/_{A \cdot a} \times {}^{A}\!/_{A \cdot (a-1)}$$

nach dem chinesischem Restsatz.

(4) Ein Ring ist genau dann **einfach**, (d.h. nicht isomorph zu einem Produktring), wenn $\mathrm{Idem}(A) = \{0,1\}$ ist. ($\Rightarrow$ nach (3), und bei einem Produktring sind ja $(0,1)$ und $(1,0)$ idempotent.)

Spezielle Ideale in Ringen

Definition 1.10. *Eine Menge $\mathfrak{a} \in \mathfrak{P}(A) \setminus \{\varnothing\}$ (d.h. $\varnothing \neq \mathfrak{a} \subseteq A$) heißt* ***Ideal****, falls gilt:*

(a) $\forall a, b \in \mathfrak{a} : \ a + b \in \mathfrak{a}$.

(b) $\forall (r, a) \in A \times \mathfrak{a} : \ r \cdot a \in \mathfrak{a}$.

Bemerkung.

(1) Jedes Ideal in A ist eine Untergruppe von $(A, +)$.

(2) $\{0\} =: (0)$ ist ein Ideal (das **Nullideal**).

(3) $A =: (1)$ ist ein Ideal (das **Einsideal**).

(4) Ein Ideal $\mathfrak{a} \subsetneqq A$ heißt **echtes Ideal**.

(5) $\left\{ n \cdot \mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{Z}^{\geq 0} \right\}$ ist die Menge der Ideale in $\mathbb{Z}$.

Definition 1.11. *Ist $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal, so ist $({}^{A}\!/_{\mathfrak{a}}, +)$ zunächst als Faktorgruppe wohldefiniert und*

$$\begin{aligned} \cdot : {}^{A}\!/_{\mathfrak{a}} \times {}^{A}\!/_{\mathfrak{a}} &\longrightarrow {}^{A}\!/_{\mathfrak{a}} \\ ([a],[b]) &\longmapsto [a]\cdot[b] := [a\cdot b] \end{aligned}$$

$\boxed{{}^{A}\!/_{\mathfrak{a}}}$ *ist wegen (b) wohldefiniert und wir erhalten $({}^{A}\!/_{\mathfrak{a}}, +, \cdot)$ als Ring, den sogenannten* ***Faktorring*** *von A nach $\mathfrak{a}$. Dabei ist auch die kanonische Projektion*

$$\begin{aligned} \pi := \pi_{\mathfrak{a}} : A &\longrightarrow {}^{A}\!/_{\mathfrak{a}} \\ a &\longmapsto [a] = a + \mathfrak{a} \end{aligned}$$

ein (unitärer) Ringhomomorphismus.

$\boxed{\text{Lemma.}}$ Sei A ein Ring und $\mathfrak{a} \subsetneqq$ ein echtes Ideal. Dann gibt es eine 1–1-Korrespondenz

$$\begin{aligned} \{\text{Ideale } \mathfrak{b} \text{ mit } \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \subseteq A\} &\leftrightarrow \left\{\text{Ideale in } {}^{A}\!/_{\mathfrak{a}}\right\} \\ \pi^{-1}(\mathfrak{B}) &\leftarrow\!\shortmid \mathfrak{B} \\ \mathfrak{b} &\mapsto {}^{\mathfrak{b}}\!/_{\mathfrak{a}} \end{aligned}$$

Beweis. Klar. □

$\boxed{\text{Lemma.}}$ Sei $f : A \to B$ ein Homomorphismus unitärer Ringe (d.h. insbesondere $f(1_A) = 1_B$). Dann gilt:

(a) Ist $\mathfrak{b} \subseteq B$ Ideal, so ist auch $f^{-1}(\mathfrak{b}) \subseteq A$ ein Ideal.

(b) Die Umkehrung gilt nicht: Ist $\mathfrak{a} \subseteq A$ Ideal, so ist $f(\mathfrak{a}) \subseteq B$ i.a. kein Ideal.

(c) Ist aber $f : A \twoheadrightarrow B$ auch surjektiv (also **Epimorphismus**), so gilt doch: $\mathfrak{a} \subseteq A$ Ideal $\Rightarrow$ $f(\mathfrak{a}) \subseteq B$ Ideal.

Beweis.

(a) Sei $(x,y) \in f^{-1}(\mathfrak{b})^2$, so ist $(f(x), f(y)) \in \mathfrak{b}^2$, also

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \in \mathfrak{b} \quad \Rightarrow \quad x + y \in f^{-1}(\mathfrak{b})$$

und analog für $\cdot$.

(b) Betrachte z.B. die Ringeinbettung $i : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$, mit $i(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, aber $\mathbb{Z}$ ist kein Ideal in $\mathbb{Q}$, da in $\mathbb{Q}$ nur $\{0\}$ und $\mathbb{Q}$ Ideale sind.

(c)
- Sei $x = f(a) \in f(\mathfrak{a})$, $y = f(\mathfrak{b}) \in f(\mathfrak{a})$, dann ist $x+y = f(a)+f(b) = f(a+b) \in f(\mathfrak{a})$.
- Sei $x = f(a) \in f(\mathfrak{a})$, $r \in B$. Dann existiert $s \in A$ mit $f(s) = r$, also

$$r \cdot x = f(s) \cdot f(a) = f(\underbrace{f \cdot a}_{\in \mathfrak{a}}) \in f(\mathfrak{a}).$$

Bemerkung. Nur hier wird die Surjektivität benötigt – bei Gruppenhomomorphismen vererbt sich die Untergruppeneigenschaft auch ohne Surjektivität auf Bilder. □

Operationen mit Idealen

Definition 1.12. *Sei A ein Ring. Ist $\varnothing \neq S \subseteq A$, so heißt* $\boxed{\mathrm{Ideal}(S)}$

$$\mathrm{Ideal}\, S = \mathrm{Ideal}(S) := \bigcap_{\substack{\mathfrak{a} \subseteq A \text{ Ideal} \\ S \subseteq \mathfrak{a}}} \mathfrak{a}$$

*das **von S erzeugte Ideal** oder auch die **Idealhülle** von S.*

Bemerkung. Es gilt

$$\mathrm{Ideal}(S) = \left\{ \sum_{s \in S} a_s \cdot s \;\middle|\; (a_s)_{s \in S} \in A^S, a_s = 0 \text{ p.p.} \right\}$$

Definition 1.13. *Sei $f : A \to B$ Ringhomomorphismus, $\mathfrak{a} \subseteq A$ Ideal. Dann heißt* $\boxed{\mathfrak{a}_{\mathrm{ext}}}$

$$\mathfrak{a}_{\mathrm{ext}} := \mathrm{Ideal}(f(\mathfrak{a})) = f(\mathfrak{a}) \cdot B$$

*das **Extensionsideal** von $\mathfrak{a}$ in B bezüglich f.*
Umgekehrt: Ist $\mathfrak{b} \subseteq B$ Ideal, so heißt $\boxed{\mathfrak{b}_{\mathrm{cont}}}$

$$\mathfrak{b}_{\mathrm{cont}} := f^{-1}(\mathfrak{b})$$

*das **Kontraktionsideal** von $\mathfrak{b}$ in A bezüglich f.*

BEMERKUNG 1. Dabei gilt (mit obigen Bezeichnungen):

$$(\mathfrak{a}_{\mathrm{ext}})_{\mathrm{cont}} \supseteq \mathfrak{a}$$

und

$$(\mathfrak{b}_{\mathrm{cont}})_{\mathrm{ext}} \subseteq \mathfrak{b},$$

die Gleichheit gilt i.a. nicht.

Beweis. Siehe Seite 118 f. □

$\boxed{\sum_{i\in I} a_i}$ **Definition 1.14.** *Sei $(\mathfrak{a}_i)_{i\in I} \subseteq A$ Familie von Idealen in A, indiziert über I. Dann ist zwar $\bigcup_{i\in I} \mathfrak{a}_i$ i.a. kein Ideal, aber*

$$\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i := \mathrm{Ideal}\left(\bigcup_{i\in I} \mathfrak{a}_i\right)$$

*ist eines und heißt **Idealsumme** der Familie $(\mathfrak{a}_i)_{i\in I}$.*

$\boxed{\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}}$ **Definition 1.15.** *Seien $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ zwei Ideale in A. Dann ist $\{a\cdot b \mid a\in\mathfrak{a}, b\in\mathfrak{b}\}\subseteq A$ kein Ideal, aber*

$$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} := \mathrm{Ideal}\left(\{a\cdot b \mid a\in\mathfrak{a}, b\in\mathfrak{b}\}\right)$$

*ist eines und heißt **Idealprodukt**.*

$\boxed{\mathfrak{a}^n}$ **Definition 1.16.** *Ist $\mathfrak{a}\subseteq A$ Ideal, $n\in\mathbb{N}$, so ist $\mathfrak{a}^n := \mathfrak{a}\cdot\ldots\cdot\mathfrak{a}$ ein Ideal und heißt die n-te **Idealpotenz** (oder auch nur Potenz) von $\mathfrak{a}$.*

$\boxed{(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})}$ **Definition 1.17.** *Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Ideale in A, so ist*

$$(\mathfrak{a}:\mathfrak{b}) := \{a\in A \mid \forall b\in\mathfrak{b}:\ a\cdot b\in\mathfrak{a}\}$$

*wieder ein Ideal und heißt das **Quotientenideal** $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{b}$.*

Bemerkung.

$\boxed{\bigcap_{i\in I}\mathfrak{a}_i}$

(1) $\bigcap_{i\in I}\mathfrak{a}_i$ ist offenbar schon selbst ein Ideal.

(2) Es ist
$$\sum_{i\in I} a_i = \left\{\sum_{i\in I}\alpha_i \,\middle|\, \alpha_i\in\mathfrak{a}_i\forall i\in I, \alpha_i = 0 \text{ p.p.}\right\}.$$

$\boxed{\bigcup_{i\in I}\mathfrak{a}_i}$

(3) Ist $\{\mathfrak{a}_i \mid i\in I\}$ bezüglich $\subseteq$ totalgeordnet, so ist $\bigcup_{i\in I}\mathfrak{a}_i$ doch selbst ein Ideal und $\bigcup_{i\in I}\mathfrak{a}_i = \sum_{i\in I}\mathfrak{a}_i$.

(4) Es ist
$$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} = \left\{\sum_{i=1}^r a_i b_i \,\middle|\, r\in\mathbb{N}, a_i\in\mathfrak{a}, b_i\in\mathfrak{b}\right\}$$

(5) Es ist
$$\mathfrak{a}^n = \left\{\sum_{i=1}^r a_1^{(i)}\cdot\ldots\cdot a_n^{(i)} \,\middle|\, r\in\mathbb{N}, \mathfrak{a}_k^{(i)}\in\mathfrak{a}\forall i\in\{1,\cdots,r\}, \forall k\in\{1,\cdots,n\}\right\}.$$

(6) Es ist $\mathfrak{a}\subseteq(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})$, die Gleichheit gilt i.a. nicht.

Beweis für (3). Sind $a_1, a_2 \in \bigcup_{i\in I} \mathfrak{a}_i$, so existieren $i_1, i_2 \in I$ mit $a_1 \in \mathfrak{a}_{i_1}$ und $a_2 \in \mathfrak{a}_{i_2}$. Dann ist $\mathfrak{a}_{i_1} \subseteq \mathfrak{a}_{i_2}$ (oder andersherum, ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei diese Richtung angenommen), also $a_1 \in \mathfrak{a}_{i_2}$. Damit ist auch $a_1 + a_2 \in \mathfrak{a}_{i_2} \subseteq \bigcup_{i\in I} \mathfrak{a}_i$.

Für die Abgeschlossenheit bezüglich $\cdot$ braucht man nicht einmal die Totalordnung: Ist $a_1 \in \bigcup_{i\in I} \mathfrak{a}_i$, etwa $a_1 \in \mathfrak{a}_{i_1}$, $r \in A$, so ist $r \cdot a_1 \in \mathfrak{a}_{i_1} \subseteq \bigcup_{i\in I} \mathfrak{a}_i$.)

Ist nun $\bigcup_{i\in I} \mathfrak{a}_i$ selbst ein Ideal, ist es natürlich laut Definition seine eigene Idealhülle, also gleich $\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i$. □

Bemerkung. Die Eigenschaft (3) wird in Zukunft (bei Anwendungen des Zornschen Lemmas) häufiger eine Rolle spielen.

Achtung: $\bigcup_{i\in I} \mathfrak{a}_i$ ist nicht unbedingt (wie im endlichen Fall) eines (das größte) der vereinigten Ideale – im unendlichen Fall muss so etwas nicht existieren, dann ist die Vereinigung größer als alle einzelnen Ideale.

Radikale von Idealen

Definition 1.18. *Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Dann heißt*

$$\sqrt{\mathfrak{a}} := \{\mathfrak{a} \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} : a^n \in \mathfrak{a}\}$$

*das **Radikal** von $\mathfrak{a}$.*

BEMERKUNG 1.	Das Radikal eines Ideals ist wieder ein Ideal.

Beweis. Seien $b, a \in \sqrt{\mathfrak{a}}$, also etwa $a^n \in \mathfrak{a}$, $b^m \in \mathfrak{a}$. Dann ist

$$(a+b)^{m+n} = \sum_{\nu=0}^{m+n} \underbrace{\binom{m+n}{\nu}}_{\in A} \cdot \underbrace{a^\nu}_{(*)} \cdot \underbrace{b^{m+n-\nu}}_{(**)}$$

Dabei ist $(*) \in \mathfrak{a}$ für $\nu \geq n$ und $(**) \in \mathfrak{a}$ für $\nu \leq n$, also ist $(a+b)^{m+n} \in \mathfrak{a}$, also $a + b \in \sqrt{\mathfrak{a}}$. □

$\boxed{\text{Eigenschaften.}}$

(1) $\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$.

(2) I.a. gilt in (1) nicht die Gleichheit.

(3) Für alle Ideale $\mathfrak{a} \subseteq A$:
$$\sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}} = \sqrt{\mathfrak{a}}$$

(4) Elementare Rechenregeln:
$$\begin{aligned} &\text{(i)} && \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \;\Rightarrow\; \sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq \sqrt{\mathfrak{b}} \\ &\text{(ii)} && \sqrt{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}} = \sqrt{\mathfrak{a}} \cap \sqrt{\mathfrak{b}} \\ &\text{(iii)} && \sqrt{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}} = \sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}} + \sqrt{\mathfrak{b}}}. \end{aligned}$$

(5) $\sqrt{\{0\}} = \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} : a^n = 0\} = \mathrm{Nil}(A)$.
Das heißt, $\mathrm{Nil}(A)$ ist ein Ideal, sogar ein Radikal, und wird daher **Nilradikal** genannt.

(6) Sei A ein Ring, $\mathfrak{a} \subseteq A$ Ideal und ${}^{A}\!/_{\mathfrak{a}}$ der Faktorring. Dann ist $\mathrm{Nil}({}^{A}\!/_{\mathfrak{a}}) = {}^{\sqrt{\mathfrak{a}}}\!/_{\mathfrak{a}}$.

Beweis der nichttrivialen Teile.

(2) In $\mathbb{Z}$ ist etwa $\sqrt{4\mathbb{Z}} = 2\mathbb{Z}$.

(3) Sei $a \in \sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}}$. Dann
$$\begin{aligned} & \exists n \in \mathbb{N} : && a^n \in \sqrt{\mathfrak{a}} \\ \Rightarrow\quad & \exists n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} : && (a^n)^m \in \mathfrak{a} \\ \Rightarrow\quad & \exists n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} : && a^{n \cdot m} \in \mathfrak{a} \\ \Rightarrow\quad & && a \in \sqrt{\mathfrak{a}}. \end{aligned}$$

(6) Ausrechnen:
$$\begin{aligned} \mathrm{Nil}({}^{A}\!/_{\sqrt{\mathfrak{a}}}) &= \sqrt{\{[0]\}} \\ &= \left\{[a] \in {}^{A}\!/_{\mathfrak{a}} \mid a \in A, \exists n \in \mathbb{N} : [a]^n = [0]\right\} \\ &= \left\{[a] \in {}^{A}\!/_{\mathfrak{a}} \mid a \in A, \exists n \in \mathbb{N} : a^n \in \mathfrak{a}\right\} \\ &= \left\{[a] \in {}^{A}\!/_{\mathfrak{a}} \mid a \in \sqrt{\mathfrak{a}}\right\} \\ &= {}^{\sqrt{\mathfrak{a}}}\!/_{\mathfrak{a}} \end{aligned}$$

$\square$

Definition 1.19. *Ein Ring A heißt **reduziert**, falls* $\mathrm{Nil}(A) = \{0\}$*, d.h. falls A keine echten nilpotenten Elemente hat.*

Für jeden Ring A sei $\boxed{A_{\mathrm{red}}}$

$$A_{\mathrm{red}} := A/\mathrm{Nil}(A)$$

*die **Reduzierung** von A.*

Bemerkung.

(1) Offenbar ist

$$\mathrm{Nil}(A_{\mathrm{red}}) = \mathrm{Nil}\left(A/\mathrm{Nil}(A)\right) = \sqrt{0_{A/\sqrt{0_A}}} = \sqrt{\sqrt{0}}/\sqrt{0} = \sqrt{0}/\sqrt{0} = (0),$$

also ist A_{red} wirklich ein reduzierter Ring.

(2) Ist A Integritätsbereich, so hat A keine echten Nullteiler, also erst recht keine echten Nilpotenten, ist also reduziert.

(3) Die Umkehrung von (2) gilt nicht, etwa ist $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ zwar reduziert, aber kein Integritätsbereich.

Prim- und Maximalideale

Definition 1.20.

*(1) Ein Ideal $\mathfrak{p} \subsetneqq A$ heißt **Primideal**, falls der Faktorring $A/\mathfrak{p}$ ein Integritätsbereich ist.*

*(2) Ein Ideal $\mathfrak{m} \subsetneqq A$ heißt **Maximalideal**, falls der Faktorring $A/\mathfrak{m}$ ein Körper ist.*

(3) Die Menge der Primideale $\boxed{\mathrm{Spec}\, A}$

$$\mathrm{Spec}\, A := \{\mathfrak{p} \subsetneqq A \mid \mathfrak{p} \text{ Primideal}\}$$

*heißt das **Primspektrum** oder auch nur **Spektrum** von A.*

(4) Die Menge der Maximalideale $\boxed{\mathrm{Specm}\, A}$

$$\mathrm{Specm}\, A := \{\mathfrak{p} \subsetneqq A \mid \mathfrak{p} \text{ Maximalideal}\}$$

*heißt das **Maximalspektrum***

Bemerkung.

(1) Es ist $\mathrm{Specm}(A) \subseteq \mathrm{Spec}\, A$, denn $A/\mathfrak{m}$ Körper impliziert $A/\mathfrak{m}$ Integritätsbereich.

(2) Es ist $\mathrm{Specm}(\mathbb{Z}) \,\dot\cup\, \{(0)\} = \mathrm{Spec}\, \mathbb{Z}$.

Satz 1.1.1. Sei A Ring, $\mathfrak{a} \subsetneq A$ ein echtes Ideal. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) $\mathfrak{a}$ ist ein Maximalideal (d.h. $\mathfrak{a} \in \operatorname{Specm} A$, ${}^{A}\!/\!_{\mathfrak{a}}$ Körper).

(2) Für alle echten Ideale $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \subsetneq A$ gilt: $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$, d.h. $\mathfrak{a}$ ist $\subseteq$-maximal in der Menge der echten Ideale von A.

(3) Für alle $x \in A \setminus A$ gilt: $\mathfrak{a} + A \cdot x = A$.

Beweis.

(1) $\Rightarrow$ (3):

$$\begin{aligned}
& & x &\in A \setminus \mathfrak{a} \\
&\Rightarrow & [x]_{\mathfrak{a}} &\neq [0]_{\mathfrak{a}} \quad \text{in } {}^{A}\!/\!_{\mathfrak{a}} \text{ (Körper)} \\
&\Rightarrow & [x] &\in \left({}^{A}\!/\!_{\mathfrak{a}}\right)^* \\
&\Rightarrow & \exists y \in A: \quad [x] \cdot [y] &= [1] \\
&\Rightarrow & \exists y \in A: \quad x \cdot y - 1 &\in \mathfrak{a} \\
&\Rightarrow & 1 &\in \mathfrak{a} + A \cdot x \\
&\Rightarrow & \mathfrak{a} + A \cdot x &= A
\end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$ (3): Ist $x \in A \setminus \mathfrak{a}$, so ist ja das von $\mathfrak{a}$ und x erzeugte Ideal $\mathfrak{a} + Ax$ echt größer als $\mathfrak{a}$ (weil x drin liegt), also kann es nach (2) kein echtes Ideal sein, ist also A.

(3) $\Rightarrow$ (2): Angenommen, wir haben ein $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{a} \subsetneq \mathfrak{b} \subsetneq A$. Dann gibt es ein $x \in \mathfrak{b} \setminus \mathfrak{a}$, und natürlich ist $Ax \subseteq \mathfrak{b}$. Also ist auch $A \cdot x + \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{b} \neq A$, im Widerspruch zu (3). Also ist unsere Annahme falsch, d.h. wir haben (2).

(3) $\Rightarrow$ (1): Sei $[x] \in {}^{A}\!/\!_{\mathfrak{a}} \setminus \{[0]\}$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad x \notin \mathfrak{a}. \\
&\underset{(3)}{\Longrightarrow} \quad \mathfrak{a} + A \cdot x = A \\
&\Rightarrow \quad \exists \alpha \in \mathfrak{a}, \exists r \in A: \quad \alpha + r \cdot x = 1 \\
&\Rightarrow \quad \underbrace{[\alpha]}_{[0]} + [r] \cdot [x] = 1 \\
&\Rightarrow \quad [r] \cdot [x] = 1 \\
&\Rightarrow \quad [x] \in \left({}^{A}\!/\!_{\mathfrak{a}}\right)^*
\end{aligned}$$

Damit ist $\left({}^{A}\!/\!_{\mathfrak{a}}\right)^* = {}^{A}\!/\!_{\mathfrak{a}} \setminus \{[0]\}$, also ${}^{A}\!/\!_{\mathfrak{a}}$ ein Körper. $\square$

$\boxed{\text{Satz 1.1.2.}}$ *(Existenz von Maximalidealen)*
Sei A ein Ring. Dann gilt:

(1) $\operatorname{Specm}(A) \neq \varnothing$.

(2) Für alle echten Ideale $\mathfrak{a} \subseteq A$ gilt: $\exists \mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} A : \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$.

Beweis.

(1) folgt aus (2) durch $\mathfrak{a} := (0)$.

(2) Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Wir betrachten die Menge

$$\mathfrak{M} := \mathfrak{M}_{\mathfrak{a}} := \{\mathfrak{b} \mid \mathfrak{b} \subsetneqq A \text{ Ideal}, \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}\}$$

der Oberideale von $\mathfrak{a}$ (ohne A). Offenbar ist $\mathfrak{a} \in \mathfrak{M}$, also $\mathfrak{M} \neq \varnothing$. $(\mathfrak{M}, \subseteq)$ ist teilgeordnet, sogar induktiv geordnet (für jede totalgeordnete Teilmenge $\mathfrak{N}$ von Idealen ist $\bigcup_{\mathfrak{b} \in \mathfrak{N}} \mathfrak{b}$ wieder Ideal, umfasst $\mathfrak{a}$ und ist damit obere Schranke für $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{M}$). Nach dem Zornschen Lemma hat also $\mathfrak{M}$ ein maximales Element, welches damit auch ein maximales Ideal ist. $\square$

Beispiele wichtiger Maximalideale

Beispiel 1.1.3. Sei X eine Menge, und $\operatorname{Abb}(X, \mathbb{R}) := \{f : X \to \mathbb{R}\}$ die Menge der reellen Funktionen auf X. Dann bildet $(\operatorname{Abb}(X, \mathbb{R}), +, \cdot)$ (mit der werteweisen Definition von $+$ und $\cdot$) einen Ring. Für $x \in X$ ist dann $\boxed{\mathfrak{m}_x}$

$$\mathfrak{m}_x := \{f \in \operatorname{Abb}(X, \mathbb{R}) \mid f(x) = 0\}$$

ein Maximalideal.

Beweis. Betrachten wir die natürliche Evaluationsabbildung

$$\begin{aligned} \varepsilon_x : \operatorname{Abb}(X, \mathbb{R}) &\twoheadrightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto f(x), \end{aligned}$$

so ist ε_x ein Ring-Epimorphismus, mit

$$\ker(\varepsilon_x) = \{f \in \operatorname{Abb}(X, \mathbb{R}) \mid f(x) = 0\} = \mathfrak{m}_x.$$

Der Homomorphiesatz für Ringe liefert

$$\operatorname{Abb}(X, \mathbb{R}) / \mathfrak{m}_x = \operatorname{Abb}(X, \mathbb{R}) / \ker(\varepsilon_x) \cong \operatorname{im}(\varepsilon_x) = \mathbb{R},$$

also ein Körper, und damit ist $\mathfrak{m}_x$ ein Maximalideal. $\square$

Fazit. Wir haben also eine kanonische Abbildung $\boxed{\mathfrak{m}_\square}$

$$\mathfrak{m}_\square : X \longrightarrow \operatorname{Specm}(\operatorname{Abb}(X, \mathbb{R})).$$

Eine interessante Frage ist es, wann (d.h. für welche X) $\mathfrak{m}_\square$ injektiv, surjektiv oder bijektiv ist.

$\boxed{\mathbb{Z}_{(p)}}$ *Beispiel* 1.1.4. Betrachte $\mathbb{Z}$ und eine fixierte Primzahl $p \in \mathbb{N}$. Dann nennen wir

$$\mathbb{Z}_{(p)} := \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \,\middle|\, \mathrm{ggT}(a,b) = 1 \vee a = 0, p \nmid b \right\} \subsetneq \mathbb{Q}$$

die Menge der **p-adischen Zahlen**. Dabei gilt:

(i) $(\mathbb{Z}_{(p)}, +, \cdot)$ ist ein echter Unterring von $\mathbb{Q}$.

(ii) Die Einheitengruppe ist

$$\begin{aligned} (\mathbb{Z}_{(p)})^* &= \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \,\middle|\, \begin{array}{c} \exists (c,d) \in \mathbb{Z}^2, d \neq 0, \mathrm{ggT}(a,b) = \mathrm{ggT}(c,d) = 1, \\ \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = 1, p \nmid b, p \nmid d \end{array} \right\} \\ &\subseteq \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \,\middle|\, \mathrm{ggT}(a,b) = 1, p \nmid b, p \nmid a \right\} \\ &\subseteq (\mathbb{Z}_{(p)})^* \qquad \text{wegen } \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1. \end{aligned}$$

Damit haben wir

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_{(p)} \setminus (\mathbb{Z}_{(p)})^* &= \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \,\middle|\, \mathrm{ggT}(a,b) = 1, p \nmid b, p | a \right\} \\ &= p \cdot \mathbb{Z}_{(p)}. \end{aligned}$$

Bezüglich der Inklusion $\mathbb{Z} \xhookrightarrow{\mathrm{incl}} \mathbb{Z}_{(p)}$ haben wir dabei $p \cdot \mathbb{Z}_{(p)} = (p \cdot \mathbb{Z})_{\mathrm{ext}}$, also ist $\mathbb{Z}_{(p)} \setminus (\mathbb{Z}_{(p)})^* = p \cdot \mathbb{Z}_{(p)}$ ein echtes Ideal in $\mathbb{Z}_{(p)}$. Damit bildet die Menge der Nichteinheiten in $\mathbb{Z}_{(p)}$ also das größte echte Ideal in $\mathbb{Z}_{(p)}$, also ist das Maximalspektrum

$$\mathrm{Specm}(\mathbb{Z}_{(p)}) = \left\{ p \cdot \mathbb{Z}_{(p)} \right\}$$

einelementig und außerdem

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_{(p)}) = \left\{ (0), p \cdot \mathbb{Z}_{(p)} \right\}.$$

Daher ist $\mathbb{Z}_{(p)} / p \cdot \mathbb{Z}_{(p)}$ ein Körper, wobei es sogar die folgende Isomorphie gibt:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_{(p)} / p \cdot \mathbb{Z}_{(p)} &\cong \mathbb{Z} / p \cdot \mathbb{Z} \\ \frac{a}{b} &\mapsto [a] \cdot [b]^{-1} \end{aligned}$$

Als Verallgemeinerung des Beispiels definieren wir:

Definition 1.21. *Sei A ein Ring. Falls* $\mathrm{Specm}(A) = \{\mathfrak{m}\}$, *so heißt A (bzw. das Paar $(A, \mathfrak{m})$) ein **lokaler Ring**.*

Beispiel 1.1.5.

- $(\mathbb{Z}_{(p)}, p \cdot \mathbb{Z}_{(p)})$ ist ein lokaler Ring.
- Jeder Körper ist ein lokaler Ring $(K, (0))$.

Satz 1.1.3. *(Charakterisierung lokaler Ringe)*
Sei A ein Ring. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) $(A, \mathfrak{m})$ ist ein lokaler Ring.

(2) $A \setminus A^*$ ist ein Ideal.

In diesem Falle gilt $A \setminus A^* = \mathfrak{m}$.

Beweis. mittels *axiom grabbing* (d.h. folgt direkt aus den Definitionen). □

Beispiel 1.1.6. Sei K Körper, $K[X_1, \cdots, X_n]$ der Polynomring in n Variablen: $\boxed{K[X_1, \cdots, X_n]}$

$$K[X_1, \cdots, X_n] = \left\{ \sum_{(\nu_y, \cdots, \nu_n) \in \mathbb{N}_0^n} a_{\nu_1, \cdots, \nu_n} \cdot X_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot X_n^{\nu_n} \;\middle|\; a_{\nu_1, \cdots, \nu_n} \in K, a_{\nu_1, \cdots, \nu_n} = 0 \text{ p.p.} \right\}$$

Betrachten wir nun ein Tupel $(a_1, \cdots, a_n) \in K^n$ sowie die linearen Polynome $X_i - a_i \in K[X_1, \cdots, X_n]$ und das von ihnen erzeugte Ideal

$$(X_1 - a_1, \cdots, X_n - a_n) = \sum_{i=1}^{n} (X_i - a_i) \cdot K[X_1, \cdots, X_n] \subsetneqq K[X_1, \cdots, X_n].$$

Dann hat man wieder einen Evaluierungshomomorphismus

$$\varepsilon_{(a_1, \cdots, a_n)} : K[X_1, \cdots, X_n] \longrightarrow K$$
$$\sum_{(\nu_1, \cdots, \nu_n)} a_{\nu_1, \ldots a_n} \cdot X_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot X_n^{\nu_n} = P \longmapsto P(a_1, \cdots, a_n) := \sum_{(\nu_1, \cdots, \nu_n)} a_{\nu_1, \ldots a_n} \cdot a_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{\nu_n},$$

Dieser ist surjektiv, weil $K \subset K[X_1, \cdots, X_n]$. Dabei gilt

$$\ker(\varepsilon_{(a_1, \cdots, a_n)}) = \{P \in K[X_1, \cdots, X_n] \mid P(a_1, \cdots, a_n) = 0\} = (X_1 - a_1, \cdots, X_n - a_n)$$

Fazit. Wir haben eine natürliche Abbildung

$$K^n \xrightarrow{\beta} \operatorname{Specm}(K[X_1, \cdots, X_n])$$
$$(a_1, \cdots, a_n) \mapsto \beta(a_1, \cdots, a_n) := (X_1 - a_1, \cdots, X_n - a_n)$$

Beweis. Es ist

$$K[X_1, \cdots, X_n] / \beta(a_1, \cdots, a_n) = K[\overline{X_1}, \cdots, \overline{X_n}]$$

mit $\overline{X_i} = \overline{a_i} \in K[X_1, \cdots, X_n] / \beta(a_1, \cdots, a_n)$. Wir haben für die Kette

$$K \hookrightarrow K[X_1, \cdots, X_n] \twoheadrightarrow K[\overline{X_1}, \cdots, \overline{X_n}]$$

daher

$$\begin{aligned} K[\overline{X_1}, \cdots, \overline{X_n}] &= K[\overline{a_1}, \dots \overline{a_n}] \\ &\cong K[a_1, \cdots, a_n] \\ &= K, \end{aligned}$$

und das ist ein Körper. □

Achtung. Im Allgemeinen ist β nicht surjektiv, d.h.

$$\{(X_1 - a_1, \cdots, X_n - a_n) \mid (a_1, \cdots, a_n) \in K^n\} \subsetneqq \operatorname{Specm}(K[X_1, \cdots, X_n]).$$

Etwa ist für $K = \mathbb{R}$ das von $X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$ erzeugte Ideal ein Maximalideal (es ist $\mathbb{R}[X]/(X^2+1) \cong \mathbb{C}$), aber $(X^2 + 1)$ ist nicht von der Form $(X - a, X - b)$, weil $X^2 + 1$ keine Nullstelle in $\mathbb{R}$ hat.

Beispiel 1.1.7. Betrachte die Polynomringkette $Z[X] \subsetneqq \mathbb{Q}[X] \subsetneqq \mathbb{R}[X] \subsetneqq \mathbb{C}[X]$. Hier ist $(X) = X \cdot \mathbb{Q} \subsetneqq \mathbb{Q}[X]$ ein Maximalideal (weil $\mathbb{Q}[X]/(X) \cong \mathbb{Q}$), also $(X) \in \operatorname{Specm} \mathbb{Q}[X]$.

Aber: $(X) = X \cdot \mathbb{Z} \subsetneqq \mathbb{Z}[X]$ ist ein Primideal, kein Maximalideal, da $\mathbb{Z}[X]/(X) \cong \mathbb{Z}$ kein Körper ist.

Hier haben wir aber das Ideal $(2, X)$, welches sich (mit $\mathbb{Z}[X]/(2, X) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) als Maximalideal herausstellt.

Das Jacobson-Radikal eines Ringes

Wir wissen bereits $\operatorname{Nil}(A) = \cap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A} \mathfrak{p}$. Analog definieren wir

Definition 1.22. *Das Ideal*

$$\operatorname{Jac}(A) := \bigcap_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} A} \mathfrak{m}$$

*heißt das **Jacobson-Radikal** von A.*

Bemerkung.

(1) $\operatorname{Jac}(A)$ ist wirklich ein Ideal.

(2) $(0) \subseteq \operatorname{Nil}(A) \subseteq \operatorname{Jac}(A)$.

(3) Ist $\operatorname{Jac}(A) = 0$, so ist auch $\operatorname{Nil}(A) = (0)$, also A reduziert.

$\boxed{\text{Satz 1.1.4.}}$ *(Charakterisierung von* Jac*)*
Sei A ein Ring, $\operatorname{Jac}(A) = \bigcap_{\mathfrak{m}} \mathfrak{m}$ das Jacobson-Ideal, $a \in A$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) $a \in \operatorname{Jac}(A)$.

(2) Für alle $b \in A$ gilt: $1 + b \cdot a \in A^*$.

Anders formuliert:

$$\operatorname{Jac}(A) = \{a \in A \mid \forall b \in A :\ 1 + b \cdot a\} = \{a \in A \mid 1 + (a) \subseteq A^*\}$$

Beweis. Sei $T := \{a \in A \mid 1 + (a) \subseteq A^*\}$.

(1) ⇒ (2): Sei $a \in \operatorname{Jac} A$. Angenommen, $a \notin T$, so $\exists b \in A$ mit $1 + b \cdot a \notin A^*$, also wäre das Ideal $(1 + b \cdot a) \subsetneqq A$ echt. Es läge also in einem Maximalideal $\mathfrak{m}_0 \in \operatorname{Specm}(A)$, also ist $1 + ba = m_0 \in \mathfrak{m}_0$. Da aber $a \in \operatorname{Jac} A$ ist, ist insbesondere $a \in \mathfrak{m}_0$, also auch $1 = m_0 - ba \in \mathfrak{m}_0$, was nicht geht.

(2) ⇒ (1): Sei $a \in T$. Angenommen, $a \notin \operatorname{Jac} A$, so $\exists \mathfrak{m}_1 \in \operatorname{Spec} A$ mit $a \notin \mathfrak{m}_1$. Also ist $(a) + \mathfrak{m}_1 = A$, es existieren also $r \in A$, $m_1 \in \mathfrak{m}_1$ mit $r \cdot a + m_1 = 1$. Es ist also $m_1 = 1 + (-r) \cdot a \in A^*$ (wegen $a \in T$), was zu $\mathfrak{m}_1 = A$ führt, also ein Widerspruch. □

Beispiel 1.1.8. Ist $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring, ist $\operatorname{Jac}(A) = \mathfrak{m}$. Ist A außerdem reduziert, aber kein Körper, so ist $\operatorname{Jac}(A) = \mathfrak{m} \neq (0) = \operatorname{Nil}(A)$.

Bemerkung. Es ist $\sqrt{\operatorname{Jac}(A)} = \operatorname{Jac}(A)$, d.h. $\operatorname{Jac}(A)$ trägt den Namen „Radikal“ zu recht.

Kommen wir zu einigen Anwendungen des Jacobson-Radikals.

Definition 1.23. *Sei A ein Ring, M ein A-Modul, $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein echtes Ideal. Dann bezeichne* $\boxed{\mathfrak{a}M}$

$$\mathfrak{a}M := \mathfrak{a} \cdot M := \operatorname{span}_A(\{a \cdot x \mid a \in \mathfrak{a}, x \in M\})$$ $\boxed{\mathfrak{a} \cdot M}$

den von $\mathfrak{a}$ erzeugten A-Untermodul von M.

Definition 1.24. *Sei A ein Ring, M ein A-Modul. Dann nennen wir* $\boxed{\operatorname{Ann}_A(M)}$

$$\operatorname{Ann}_A(M) := \{a \in A \mid a \cdot M = (0)\}$$

*den **Annullator** von M in A.*

Bemerkung.

(1) Es ist $\mathfrak{a}M = \{\sum_{i=1}^r a_i \cdot x_i \mid r \in \mathbb{N}, a_i \in \mathfrak{a}, x_i \in M\}$.

(2) Es ist $\operatorname{Ann}_A(M) \subseteq A$ ein Ideal in A.

(3) Es ist $\operatorname{Ann}_A(M) \cdot M = (0)$, und $\operatorname{Ann}_A(M)$ ist das größte Ideal mit dieser Eigenschaft.

(4) Der Faktormodul $M/\mathfrak{a}M$ ist ein A-Modul, aber auch ein $A/\mathfrak{a}$-Modul, via der kanonischen Skalar-Multiplikation

$$\begin{aligned} \odot : A/\mathfrak{a} \times M/\mathfrak{a}M &\longrightarrow M/\mathfrak{a}M \\ ([a],[x]) &\longmapsto [a] \odot [x] := [a \cdot x]. \end{aligned}$$

Dies ist wohldefiniert und macht $M/\mathfrak{a}M$ zu einem $A/\mathfrak{a}$-Modul. Wir erhalten das folgende kanonische kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd} A \times M \arrow[r, "\cdot"] \arrow[d, "\pi \times p"'] & M \arrow[d, "p"] \\ A/\mathfrak{a} \times M/\mathfrak{a}M \arrow[r, "\odot"] & M/\mathfrak{a}M \end{tikzcd}$$

Satz 1.1.5. *(„Lemma von Nakayama")*
Sei A ein Ring, $\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{Jac}(A)$ ein Ideal im Jacobson-Radikal, M ein endlich erzeugter (**f.g.**) A-Modul (also $M = \sum_{i=1}^n A \cdot x_i$). Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) $M = (0)$.

(2) $M = \mathfrak{a}M$.

Beweis.

(1) ⇒ (2) Klar.

(2) ⇒ (1) Sei also $M = \mathfrak{a}M = \sum_{i=1}^n Ax_i$. Für alle i ist dann $x_i \in \mathfrak{a}M$, es sind also die x_i darstellbar als

$$\sum_j \delta_{ij} x_j = x_i = \sum_j \alpha_{ji} x_j, \qquad \text{mit } \alpha_{ij} \in \mathfrak{a}.$$

(Auf der linken Seite sind die Kroneckerschen δ-Symbole verwendet.) Kurzes Umstellen ergibt

$$\sum_{j=1}^n (\delta_{ji} - \alpha_{ji}) \cdot x_j = 0 \qquad \forall i \in \{1, \cdots, n\}.$$

Der Noethersche Determinantentrick (siehe den folgenden Unter-Abschnitt ab Seite 35) liefert jetzt für alle $j \in \{1, \cdots, n\}$:

$$\underbrace{\det\left((\delta_{ji} - \alpha_{ji})_{i,j}\right)}_{\in A} \cdot x_j = 0,$$

genauer

$$(1+\alpha) \cdot x_j = 0, \qquad \alpha \in \mathfrak{a},$$

folglich

$$(1+\alpha) \cdot M = (0),$$

(d.h. $1+\alpha \in \operatorname{Ann}_A(M)$). Wegen $\alpha \in \operatorname{Jac}(A)$ ist $1+\alpha \in A^*$, also $M = (0)$. □

KOROLLAR. Sei A Ring, $\mathfrak{a} \subseteq \operatorname{Jac}(A)$ Ideal, M f.g. A-Modul, $N \subseteq M$ A-Untermodul. Ist nun $N + \mathfrak{a}M = M$, so ist $N = M$.

Beweis. Aus $N + \mathfrak{a}M = M$ folgt

$$M/N = N + \mathfrak{a}M/N = \mathfrak{a}M/N = \mathfrak{a} \cdot M/N,$$

und aus Satz 1.1.5 folgt $M/N = ([0])$, also $M = N$. □

KOROLLAR. *(Nakayama für lokale Ringe)*
Sei $(A, \mathfrak{m})$ lokaler Ring, $\mathfrak{a} \subsetneqq A$ ein beliebiges Ideal und sei M ein f.g. A-Modul. Dann gilt:

(1) $M = \mathfrak{a} \cdot M \Leftrightarrow M = (0)$

(2) $N + \mathfrak{a}M = M \Leftrightarrow N = M$.

Beweis. Es ist hier einfach immer $\mathfrak{a} \subseteq \operatorname{Jac}(A)$. □

Der Determinantentrick von Emmy Noether und Richard Dedekind

LEMMA. Sei A ein Ring, M ein beliebiger A-Modul. Dann gibt es einen Ring, so dass M auch als Ideal in diesem Ring aufgefasst werden kann.

Beweis. Wir betrachten die Menge $A \times M$ und definieren Ringoperationen darauf:

$$\begin{aligned} + : (A \times M) \times (A \times M) &\to (A \times M) \\ (a, x) + (b, y) &:= (a +_A b, x +_M y). \end{aligned}$$

Dies ergibt schon einmal eine abelsche Gruppe, da ja A und M solche waren. Die Multiplikation ist etwas komplizierter:

$$\begin{aligned} \cdot : (A \times M) \times (A \times M) &\to (A \times M) \\ (a, x) \cdot (b, y) &:= (a \cdot_A b, a \cdot_M y +_M b \cdot_M x) \end{aligned}$$

Dies ergibt einen Ring mit $(0_A, 0_M)$ als 0-Element, $(1_A, 0_M)$ als 1-Element.

Bemerkung.

(1) Wir haben zwei kanonische Abbildungen, den Ringhomomorphismus

$$\begin{aligned} i : A &\hookrightarrow A \times M \\ a &\mapsto (a, 0) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} j : M &\hookrightarrow A \times M \\ x &\mapsto (0, x), \end{aligned}$$

welcher ein A-Modulhomomorphismus ist, mit der durch i induzierten A-Modulstruktur auf $A \times M$.

(2) $M \cong j(M) = \{0\} \times M$ ist ein Ideal in $A \times M$.

(3) Es gelten alle denkbaren Verträglichkeitsbedingungen, das heißt, die folgenden Diagramme sind kommutativ:

$$\begin{tikzcd} A \times M \arrow[r, "\cdot_M"] \arrow[d, "i \times j"] & M \arrow[d, "j"] \\ (A \times M) \times (A \times M) \arrow[r, "\cdot"] & A \times M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \times M \arrow[r, "+_M"] \arrow[d, "j \times j"] & M \arrow[d, "j"] \\ (A \times M) \times (A \times M) \arrow[r, "+"] & A \times M \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A \times A \arrow[r, "\cdot_A"] \arrow[d, "i \times i"] & A \arrow[d, "i"] \\ (A \times M) \times (A \times M) \arrow[r, "\cdot"] & A \times M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \times A \arrow[r, "+_A"] \arrow[d, "i \times i"] & A \arrow[d, "i"] \\ (A \times M) \times (A \times M) \arrow[r, "+"] & A \times M \end{tikzcd}$$

□

LEMMA. *(Determinanten-Trick von Emmy Noether)*
Sei A ein Ring, M ein f.g. A-Modul, $M = \sum_{i=1}^{n} Ax_i$, $\mathfrak{a} \subsetneqq A$ echtes Ideal, $M = \mathfrak{a} \cdot M$. Gilt dann $x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} \cdot x_j$ für alle i, so ist $\det\left((\delta_{ji} - \alpha_{ji})_{i,j}\right) \cdot M = (0)$, also $\det\left((\delta_{ji} - \alpha_{ji})_{i,j}\right) \in \operatorname{Ann}_A(M)$.

Beweis. Wir haben folgende Implikationskette:

$$
\begin{aligned}
&& x_i &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} \cdot x_j \\
&\Rightarrow & \sum_{j=1}^{n} (\delta_{ji} - \alpha_{ji}) x_j &= 0 \\
&\xRightarrow[\text{in } A \times M]{} & \sum_{j=1}^{n} (\delta_{ji} - \alpha_{ji}, 0) \cdot (0, x_j) &= (0,0) \quad \forall i \in \{1, \cdots, n\}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} (1-\alpha_{11},0) & (-\alpha_{12},0), & \dots & (-\alpha_{14},0) \\ (-\alpha_{21},0) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & (-\alpha_{(n-1)n},0) \\ (-\alpha_{n1},0) & \dots & (-\alpha_{n(n-1)},0) & (1-\alpha_{nn},0) \end{pmatrix}}_{=:\mathfrak{A}} \cdot \begin{pmatrix} (0,x_1) \\ \vdots \\ (0,x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0,0) \\ \vdots \\ (0,0) \end{pmatrix}
$$

Die Anwendung der Cramerschen Regel $(\mathrm{Adj}(\mathfrak{A}) \cdot \mathfrak{A} = \mathfrak{A} \cdot \mathrm{Adj}(A) = \det(\mathfrak{A}) \cdot I_n)$ liefert:

$$
\begin{aligned}
&& \det(\mathfrak{A}) \cdot (0, x_i) &= (0,0) \quad \forall i \in \{1, \cdots, n\} \\
&\Rightarrow & (\det((\delta_{ji} - \alpha_{ji})_{i,j}), 0) \cdot (0, x_i) &= (0,0) \quad \forall i \\
&\Rightarrow & \det((\delta_{ji} - \alpha_{ji})_{i,j}) \cdot x_i &= 0 \quad \forall i \\
&\Rightarrow & \det((\delta_{ji} - \alpha_{ji})_{i,j}) \cdot M &= (0)
\end{aligned}
$$

□

Definition 1.25. *Sei A ein Ring, M ein A-Modul.*

*(a) $x \in M$ heißt **Torsionselement** in M, falls $\exists a \in \mathrm{NNT}(A) : a \cdot x = 0$.*

*(b) M heißt **Torsionsmodul**, falls alle Elemente Torsionselemente sind.*

$\boxed{\mathrm{Tors}_A(M)}$

(c) $\mathrm{Tors}_A(M) := \{x \in M \mid x \text{ Torsionselement}\}$ ist der Torsionsuntermodul von M (und immer ein Torsionsmodul).

*(d) M heißt **torsionsfrei** (bzw. A-torsionsfrei), falls $\mathrm{Tors}_A(M) = (0)$.*

$\boxed{\text{Korollar.}}$ Sei A ein Ring, $F = \bigoplus_{i=1}^{n} A \cdot e_i$ ein freier A-Modul mit endlicher Basis $U = (e_1, \cdots, e_n)$. Sei $f \in \mathrm{End}_A(F)$ ein A-Modulendomorphismus von F, $f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \cdot e_j$, $B_U^U(f) = (\alpha_{ij})_{ij} \in \mathrm{Mat}_A(n,n)$ die Darstellungsmatrix von f bezüglich U, $\det(f) = \det(B_U^U(f)) \in A$ die Determinante von f (basisunabhängig). Dann gilt:

(1) $\det(f) \cdot F \subseteq \mathrm{im}(f)$ bzw. $\det f \cdot \underbrace{F/_{\mathrm{im}\, f}}_{=:\mathrm{coker}\, f} = (0)$.

(2) Ist $\det f \in \mathrm{NNT}(A)$, so ist $\mathrm{coker}\, f$ ein Torsionsmodul.

Beweis.

(1) Wir betrachten die Basisdarstellung von f wieder in $A \times F$ und erhalten

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\}: \quad (0, f(e_i)) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{ji}, 0) \cdot (0, e_j).$$

Der Determinanten-Trick liefert

$$\det((\alpha_{ji})_{i,j}) \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = \mathrm{Adj}((\alpha_{ji} =_{ij}) \cdot \begin{pmatrix} f(e_1) \\ \vdots \\ f(e_n) \end{pmatrix},$$

also

$$\det(\alpha_{ji})_{i,j}) \cdot e_i \in \mathrm{span}_A(f(e_1), \cdots, f(e_n)),$$

folglich

$$\det(f) \cdot F \subseteq \mathrm{span}_A(f(e_1), \cdots, f(e_n)) = \mathrm{im}(f)$$

(2) ist eine Folgerung aus (1). □

1.2 Noethersche Ringe und Moduln

Definition 1.26. *Sei A ein Ring, $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Ein Primideal $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ heißt* ***$\mathfrak{a}$-minimal****, falls*

(1) $\mathfrak{a} \subseteq p$ *und*

(2) $\forall \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A$ *mit* $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$ *gilt:* $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$.

Die Menge

$$J_{\mathfrak{a}} := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{p} \textit{ ist } \mathfrak{a}\textit{-minimal}\}$$

$\boxed{J_{\mathfrak{a}}}$ *ist die Menge der $\mathfrak{a}$-minimalen Primideale.*

Bemerkung. Ist $\mathfrak{a} = A$, so ist $J_{\mathfrak{a}} = J_A = \varnothing$.

Der folgende Satz zeigt uns, dass auch $\Leftarrow$ gilt.

$\boxed{\text{SATZ 1.2.1.}}$ *(Existenz $\mathfrak{a}$-minimaler Primideale, andere Darstellung für $\sqrt{\Box}$)*
Sei A ein Ring, $\mathfrak{a} \subsetneq A$ ein echtes Ideal. Dann gilt:

(1) $J_\mathfrak{a} \neq \varnothing$, d.h. es gibt mindestens ein $\mathfrak{a}$-minimales Primideal.

(2) Für alle $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A$ mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{q}$ existiert ein $\mathfrak{p} \in J_\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$, d.h. jedes Oberprimideal von $\mathfrak{a}$ enthält mindestens ein $\mathfrak{a}$-minimales Primideal.

(3) $\sqrt{a} = \bigcap\limits_{\substack{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A \\ \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{q}}} \mathfrak{q} = \bigcap\limits_{p \in J_\mathfrak{a}} \mathfrak{p}$

(4) $\sqrt{0} = \operatorname{Nil}(A) = \bigcap\limits_{p \in J_{(0)}} \mathfrak{p}$ (der Durchschnitt aller absolut minimalen Primideale).

Beweis.

(1) Folgt aus (2), mit $\mathfrak{q} := \mathfrak{m}$ ein beliebiges Maximalideal mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$.

(2) Seien $\mathfrak{a} \subsetneq A$ und $q \in \operatorname{Spec} A$ mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{q}$ fixiert. Betrachte

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{q},\mathfrak{a}} := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}\}.$$

Es ist $\mathfrak{M}_{\mathfrak{q},\mathfrak{a}} \neq \varnothing$, weil $\mathfrak{q} \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{q},\mathfrak{a}}$. Wir betrachten die Ordnungsrelation $\supseteq$ auf $\mathfrak{M}_{\mathfrak{q},\mathfrak{a}}$. Sei nun $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}_{\mathfrak{q},\mathfrak{a}}$ eine beliebige *totalgeordnete* Teilmenge, so ist $\mathfrak{b} := \bigcap_{\mathfrak{q} \in \mathfrak{N}} \mathfrak{q}$ zunächst ein Ideal.

$\mathfrak{b}$ ist sogar ein Primideal, denn wäre $x \in A \setminus \mathfrak{b}$, $y \in A \setminus \mathfrak{b}$ mit $x \cdot y \in \mathfrak{b} = \bigcap_{\mathfrak{q} \in \mathfrak{N}} \mathfrak{q}$, so gälte $x \notin \mathfrak{q}_1$ für ein $\mathfrak{q}_1 \in \mathfrak{N}$ und $y \notin \mathfrak{q}_2$ für ein $\mathfrak{q}_2 \in \mathfrak{N}$, mit ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\mathfrak{q}_1 \subseteq \mathfrak{q}_2$, also $y \notin \mathfrak{q}_1, x \notin \mathfrak{q}_1$, d.h. $x \cdot y \notin q_1 \supseteq \mathfrak{b}$, im Widerspruch zu $x \cdot y \in \mathfrak{b}$.

Damit ist $\mathfrak{b} = \bigcap_{\mathfrak{q} \in \mathfrak{N}} \mathfrak{q} \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{q},\mathfrak{a}}$ eine obere Schranke für $\mathfrak{N}$, also ist $\mathfrak{M}_{\mathfrak{q},\mathfrak{a}}$ induktiv geordnet, nach dem Zornschen Lemma existiert also ein maximales Element in $(\mathfrak{M}_{\mathfrak{q},\mathfrak{a}}, \supseteq)$, also $\exists \mathfrak{q}_* \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{q},\mathfrak{a}}$, $\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{q}_* \supseteq \mathfrak{a}$, und $\mathfrak{q}_*$ ist $\subseteq$-minimal. Also ist $\mathfrak{q}_* \in J_\mathfrak{a}$.

(3) $\sqrt{a} = \bigcap\limits_{\substack{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A \\ \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{q}}} \mathfrak{q}$ ist bekannt, und $\bigcap\limits_{\substack{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A \\ \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{q}}} \mathfrak{q} \subseteq \bigcap_{\mathfrak{p} \in J_\mathfrak{a}} \mathfrak{p}$ ist trivial. Umgekehrt: Ist $x \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in J_\mathfrak{a}} \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ ein beliebiges Primideal mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{q}$, so existiert nach (2) ein minimales Primideal $\mathfrak{a}_*$ mit $x \in \mathfrak{a}_* \subseteq \mathfrak{q}$, also $x \in \mathfrak{q}$. Damit ist auch $\bigcap\limits_{\substack{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A \\ \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{q}}} \mathfrak{q} \supseteq \bigcap_{\mathfrak{p} \in J_\mathfrak{a}} \mathfrak{p}$, also $=$.

(4) Folgt aus (3) mit $\mathfrak{a} := (0)$. $\square$

Fragen.

(1) Ist $J_{\mathfrak{a}}$ endlich für alle Ideale $\mathfrak{a} \subsetneqq A$ und beliebige A?

(2) (falls Nein:) Unter welchen Bedingungen an A ist $J_{\mathfrak{a}}$ stets endlich $\forall \mathfrak{a} \subsetneqq A$?

Definition 1.27.

(1) Ein Ring A heißt ***noetherscher Ring****, falls für alle Ideale $\mathfrak{a} \subseteq A$ gilt:*

$$\mathfrak{a} = \sum_{i=1}^{t} A \cdot a_i, \quad a_i \in \mathfrak{a}$$

(d.h. jedes Ideal ist endlich erzeugt*)*

(2) Ein A-Modul M heißt ***noetherscher A-Modul****, (bzw. A-****noetherscher Modul****) falls für alle A-Untermoduln $N \subseteq M$ gilt:*

$$N = \sum_{i=1}^{t} A \cdot x_i, \quad x_i \in N$$

Offensichtlich ist (2) ein Spezialfall von (1), d.h. noethersche Ringe sind genau diejenigen Ringe, die als Modul über sich selbst noethersche Moduln sind.

Beispiel 1.2.1.

(a) $\mathbb{Z}$ ist noetherscher Ring.

(b) Allgemeiner: Ist A ein Hauptidealring (HIR), so ist A ein noetherscher Ring. (Wird jedes Ideal von einem Element erzeugt, so erst recht von endlich vielen.)

(c) Ist K ein Körper, so ist K auch noetherscher Ring. (Beide Ideale – das sind $K = (1)$ und (0) – werden von je einem Element erzeugt.)

(d) $K[X]$ ist (für K Körper) auch noetherscher Ring (da HIR).

(e) Ist K ein Körper, V ein K-Vektorraum mit $\dim_K V < \infty$, so ist V auch ein noetherscher K-Modul.

$\boxed{\text{SATZ 1.2.2.}}$ *(Charakterisierung der Noether-Eigenschaft für Ringe und Moduln)*

Sei A ein Ring. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) A ist ein noetherscher Ring, d.h. jedes Ideal in A ist endlich erzeugt.

(2) In jeder Menge $\mathfrak{M} \neq \varnothing$ von Idealen in A existiert mindestens ein $\subseteq$-maximales Element $\mathfrak{a}_* \in \mathfrak{M}$, d.h. $\forall \mathfrak{b} \subseteq A$ Ideal: $\mathfrak{a}_* \subsetneq \mathfrak{b} \Rightarrow \mathfrak{b} \notin \mathfrak{M}$.

(3) In A wird jede aufsteigende Inklusionskette von Idealen $\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_1 \subseteq \ldots$ stationär (d.h. es existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n = a_{n_0} \forall n > n_0$).

Für einen A-Modul M sind entsprechend folgende Bedingungen äquivalent:

(1') M ist A-noetherscher Modul.

(2') In jeder Menge $\mathfrak{M} \neq \varnothing$ von A-Untermoduln von M giblt es mindestens ein maximales Element $N_* \subseteq M$ (Untermodul, $\subseteq$-maximal in $\mathfrak{M}$).

(3') Jede aufsteigende Inklusionskette von A-Untermoduln wird stationär.

Beweis. Die Äquivalenz „(1') $\Leftrightarrow$ (2') $\Leftrightarrow$ (3')“ wird genauso wie „(1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3)“ gezeigt.

(1) $\Rightarrow$ (2): Sei also in A jedes Ideal endlich erzeugt, $\mathfrak{M} \neq \varnothing$ eine Menge von Idealen in A. $(\mathfrak{M}, \subseteq)$ ist geordnete Menge, sogar induktiv geordnet:

Ist $\mathfrak{N} \subseteq M$ eine $\subseteq$-totalgeordnete Teilmenge von $\mathfrak{M}$, so ist $\bigcup_{\mathfrak{N}} = \bigcup_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{N}} \mathfrak{a}$ ein Ideal, und wegen (1) endlich erzeugt, etwa $\bigcup_{\mathfrak{N}} = \sum_{i=1}^{t} \alpha_t \cdot A$ mit $t \in \mathbb{N}$, $\alpha_i \in \mathfrak{a}_i$. Da $\mathfrak{N}$ totalgeordnet ist, liegen die $\mathfrak{a}_i$ schon in einem dieser, etwa $\mathfrak{a}_{i_0} \in \mathfrak{N}$, also haben wir

$$\mathfrak{a}_{i_0} \subseteq \bigcup_{\mathfrak{N}} = \sum_{i=1}^{t} \alpha_t \cdot A \subseteq \mathfrak{a}_{i_0},$$

also ist $\mathfrak{a}_{i_0} \in \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ obere Schranke für $\mathfrak{N}$.

Das Zornsche Lemma liefert uns, dass $(\mathfrak{M}, \subseteq)$ ein maximales Element enthält, also gilt (2).

(2) $\Rightarrow$ (3): Sei $\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \ldots \subseteq a_k \subseteq \ldots$ eine unendliche aufsteigende Idealkette, $\mathfrak{M} = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Offenbar ist $\mathfrak{M} \neq \varnothing$, also existiert nach (2) ein maximales Element $\mathfrak{a}_{k_0}$ in $\mathfrak{M}$. Damit wird die Kette stationär, da $\mathfrak{a}_{k_0} = \mathfrak{a}_{k_0+1} = \ldots$.

(3) ⇒ (1): Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ beliebiges Ideal. (z.z: $\mathfrak{a}$ ist endlich erzeugt.) Angenommen, $\mathfrak{a}$ wäre nicht endlich erzeugbar (also insbesondere $\mathfrak{a} \neq (0)$).

$$\begin{array}{lllll}
\Rightarrow & \exists x_1 \in \mathfrak{a} \setminus (0) & \Rightarrow & (x_1) \subsetneqq \mathfrak{a} & \text{(laut Annahme).} \\
\Rightarrow & \exists x_2 \in \mathfrak{a} \setminus (x_1) & \Rightarrow & (x_1, x_2) \subsetneqq \mathfrak{a} & \text{(laut Annahme).} \\
\Rightarrow & \exists x_3 \in \mathfrak{a} \setminus (x_1, x_2) & \Rightarrow & (x_1, x_2, x_3) \subsetneqq \mathfrak{a} & \text{(laut Annahme).} \\
 & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

Wir erhalten also

$$(0) \subsetneqq (x_1) \subsetneqq (x_1, x_2) \subsetneqq (x_1, x_2, x_3) \subsetneqq \dots$$

als nicht stationäre aufsteigende Idealkette, im Widerspruch zu (3).

Damit war unsere Annahme falsch, also ist $\mathfrak{a}$ endlich erzeugbar. □

Beispiel 1.2.2.

(1) Betrachte $A := C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (den Ring der stetigen reellwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$).

A ist nicht noethersch, denn $\mathfrak{a}_i := \left\{ f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f|_{[0, \frac{1}{i}]} = 0 \right\}$ liefert eine echt aufsteigende, nicht-stationäre Idealkette.

(2) $\mathbb{Z}[X_1, X_2, \cdots, X_n, \dots]$ ist nicht noethersch, denn $(X_1) \subsetneqq (X_1, X_2) \subsetneqq (X_1, X_2, X_3) \subsetneqq \dots$ ist nicht stationäre aufsteigende Kette von Idealen.

Definition 1.28.

*(1) Seien A ein Ring, $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ A-Modulhomomorphismen (d.h. M', M, M'' A-Moduln). (f, g) heißt **exakt**, falls $\ker(g) = \operatorname{im}(f)$. (f, g) heißt **komplexartig**, falls $g \circ f = 0$ (also $\operatorname{im}(f) \subseteq \ker(g)$).*

*(2) $\mathbb{M} := \left(\dots \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} \dots \right)$ heißt **Komplex** (von Modulhomomorphismen), falls „$\mathbb{M}$ ist an jeder Stelle komplexartig“, d.h. $\forall i : f_i \circ f_{i+1} = 0$.*

*(3) $\mathbb{M}$ heißt **exakte Sequenz**, falls $\mathbb{M}$ an jeder Stelle exakt ist, d.h. $\ker f_i = \operatorname{im}(f_{i+1})$ für alle i.*

$\boxed{H^i(\mathbb{M})}$

(4) Sei $\mathbb{M} = \left(0 \xrightarrow{0} M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \dots \right)$ ein Komplex von A-Moduln (d.h. $f_i \circ f_{i-1} = 0$, also $\operatorname{im}(f_{i-1}) \subseteq \ker(f_i)$), dann heißt

$$H^i(\mathbb{M}) := {}^{\ker f_i}\!/_{\operatorname{im} f_{i+1}}$$

*der i-te **Homologiemodul** des Komplexes $\mathbb{M}$.*

(5) Der Produkt-Modul

$$H^*(M) := \bigoplus_{i \geq 0} H^i(M)$$

*heißt der **graduierte** oder **totale Homologiemodul** des Komplexes $\mathbb{M}$.*

> $\boxed{\text{BEMERKUNG 1.}}$ Wir haben also offenbar: Ein Komplex $\mathbb{M}$ ist eine exakte Sequenz (auch *azyklisch*) $\iff H^i(\mathbb{M}) = (0)$ für alle $i \in \mathbb{N} \iff H^*(M) = (0)$.

Definition 1.29. *Eine **kurze exakte Sequenz** ist eine exakte Sequenz der Form*

$$0 \xrightarrow{0} M' \overset{f}{\hookrightarrow} M \overset{g}{\twoheadrightarrow} M'' \xrightarrow{0} 0,$$

d.h.

(1) $\ker(f) = \mathrm{im}(0) = (0)$ *(also f injektiv)*

(2) $\mathrm{im}(g) = \ker(0) = M''$ *(also g surjektiv)*

(3) $im(f) = \ker(g)$.

> $\boxed{\text{SATZ 1.2.3.}}$ *(Noether-Eigenschaft und exakte Folgen)*
>
> Seien A ein k&u-Ring, M, M', M'' A-Moduln und $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ eine exakte Sequenz. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:
>
> (1) M ist A-noethersch.
>
> (2) M' und M'' sind A-noethersch.

Beweis. Die Exaktheit der Folge bedeutet: f injektiv, g surjektiv und $\ker g = \mathrm{im}\, f$.

(1) $\Rightarrow$ (2): Sei M noethersch.

- Sei $N' \subseteq M'$ beliebiger Untermodul, dann ist $f(N') \cong N'$ der entsprechende Untermodul von M. Da M noethersch ist, ist $f(N')$ endlich erzeugt, also (f injektiv) auch N' endlich erzeugt. Damit ist M' noethersch.
- Sei $N'' \subseteq M$ beliebiger Untermodul. Dann ist $g^{-1}(N'') \subseteq M$ Untermodul, also $g^{-1}(N'')$ endlich erzeugt. Außerdem ist $g(g^{-1}(N'')) = N''$ (weil g surjektiv), also (weil Bild eines endlich erzeugten Moduls) auch endlich erzeugt. Damit ist auch M'' noethersch.

(2) $\Rightarrow$ (1): Seien M' und M'' noethersche A-Moduln. (z.z.: M ist noethersch.) Sei $N \subseteq M$ beliebiger A-Untermodul. Dann haben wir $g(N) \subseteq M''$ und M'' ist noethersch, also

$$g(N) = \sum_{j=1}^{s} A \cdot g(y_i) \quad \text{mit } y_i \in N$$

Da g ein Homomorphismus ist, gilt für $x \in N$:

$$g(x) = \sum_{i=1}^{s} r_i \cdot g(y_i) \quad \text{mit } r_i \in A,$$

also

$$g\left(x - \sum_{i=1}^{s} r_i \cdot y_i\right) = 0.$$

Es ist also

$$\begin{aligned} &\left(x - \sum_{i=1}^{s} r_i \cdot y_i\right) \in \ker(g) = \operatorname{im}(f) \\ \Rightarrow \quad &\underbrace{x - \sum_{i=1}^{s} r_i \cdot y_i}_{\in N} = f(z) \quad \text{mit } z \in f^{-1}(N) \subseteq M' \end{aligned}$$

Da M' ebenfalls noethersch ist, ist auch $f^{-1}(N)$ endlich erzeugt, also

$$f^{-1}(N) = \sum_{j=1}^{t} A \cdot v_j, \quad \text{mit } f(v_j) \in N.$$

Zusammen mit vorigem erhalten wir

$$\begin{aligned} \forall x \in N: \quad x - \sum_{i=1}^{s} r_i \cdot y_i &= \sum_{j=1}^{t} b_j \cdot f(v_j) \quad \text{mit } b_j \in N, \\ \Rightarrow \quad & x \in \operatorname{span}_A \{y_1, \cdots, y_s, f(v_1), \cdots, f(v_t)\} \\ \Rightarrow \quad & N \subseteq \operatorname{span}_A \{y_1, \cdots, y_s, f(v_1), \cdots, f(v_t)\}. \end{aligned}$$

Dabei gilt sogar

$$N \subseteq \underbrace{\sum_{i=1}^{s} A \cdot \underbrace{y_i}_{\in N}}_{\subseteq N} + \underbrace{\sum_{j=1}^{t} A \cdot \underbrace{f(v_j)}_{\in N}}_{\subseteq N} \subseteq N,$$

also ist N endlich erzeugt. Damit ist M noethersch. □

$\boxed{\text{KOROLLAR.}}$ Sei

$$0 \xrightarrow{0} M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \xrightarrow{0} 0$$

eine kurze exakte Folge. Dann ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "\wr", "f"'] & M \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, equal] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\wr", "\tilde{g}"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & f(M') \arrow[r, tail, "\mathrm{incl}"'] & M \arrow[r, two heads, "\pi"'] & M/f(M) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

kommutativ mit exakten Zeilen. Anders formuliert: Jede kurze exakte Folge ist isomorph zu einer Standardfolge ($N \subseteq M \to N/M$).

$\boxed{\text{KOROLLAR.}}$ Wir haben dabei auch das folgende bewiesen: Ist

$$0 \xrightarrow{0} M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \xrightarrow{0} 0$$

exakt, M' und M'' endlich erzeugt, so ist auch M endlich erzeugt. Die Umkehrung gilt nicht (die Endlichkeit vererbt sich auf M'', aber nicht unbedingt auf M').

$\boxed{\text{SATZ 1.2.4.}}$ *(Moduln über noetherschen Ringen)*
Sei A ein *noetherscher Ring* und M ein A-Modul. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) M ist noetherscher A-Modul.

(2) M ist endlich erzeugt.

Beweis.

(1) $\Rightarrow$ (2): ist trivialerweise richtig.

(2) $\Rightarrow$ (1):

Schritt 1: Sei $M \cong A^n$, $n \in \mathbb{N}$, also M frei vom Rang n, $M = \sum_{i=1}^{n} A \cdot e_i$ mit einer Basis $\{e_1, \cdots, e_n\}$. Wir führen eine Induktion über n durch. ($n \in \{0,1\}$ ist klar.)

$n = 2$**:** Wir betrachten die kurze exakte Folge

$$0 \to A \xhookrightarrow{i_1} A^2 \xrightarrow{\pi_2} A \to 0$$

$$a \mapsto (a, 0)$$

$$(a, b) \mapsto b$$

Da A als Ring noethersch ist, ist A auch ein noetherscher A-Modul, und nach Satz 1.2.3 ist damit auch A^2 noethersch.

$n \geq 3$: (Induktionsschluss) Wir betrachten die kurze exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccc} 0 \to A \hookrightarrow & A^n & \twoheadrightarrow A^{n-1} \to 0 \\ a \mapsto (a, 0, \cdots, 0) & & \\ & (a_1, \cdots, a_n) \mapsto (a_2, \cdots, a_n) & \end{array}$$

A ist noethersch und nach Induktionsvoraussetzung ist auch A^{n-1} noethersch, also ist nach Satz 1.2.3 auch A^n noethersch.

Das heißt, über noetherschen Ringen sind endlich erzeugte freie Moduln stets noethersch.

KOROLLAR. Endlich erzeugte freie abelsche Gruppen (also $\mathbb{Z}$-Moduln) sind noethersche $\mathbb{Z}$-Moduln, also alle Untergruppen sind endlich erzeugt (und sogar $\mathbb{Z}$-frei, da $\mathbb{Z}$ HIR ist).

Schritt 2: Sei nun M ein beliebiger endlich erzeugter A-Modul, $M = \sum_{i=1}^{n} A \cdot x_i$, $\{x_1, \cdots, x_n\}$ ein Erzeugendensystem von M. Wir haben dann die kurze exakte Folge (*Auflösung* von M):

$$\begin{array}{ccc} 0 \to \ker \epsilon \xhookrightarrow{\text{incl}} & A^n & \xrightarrow{\epsilon} M \to 0 \\ & (a_1, \cdots, a_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i & \end{array}$$

Damit gilt auch hier: weil A^n noethersch ist, ist A^n noethersch (nach Schritt 1), und damit (wieder Satz 1.2.3) auch M noethersch. □

SATZ 1.2.5. *(Faktorringe noetherscher Ringe)*

Sei A ein noetherscher Ring, $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein echtes Ideal. Dann ist $A/\mathfrak{a}$ ein noetherscher Ring.

Beweis. Die Ideale in $A/\mathfrak{a}$ sind von der Form $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{b}$ Oberideal von $\mathfrak{a}$. $\mathfrak{b}$ ist dabei (weil A noethersch) immer A-endlich erzeugt, also $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ über $A/\mathfrak{a}$ endlich erzeugt. □

1.3 Fundamentale Struktursätze für noethersche Ringe

SATZ 1.3.1. *(Hilberts Basissatz, 1893)*

Sei A ein Ring. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) A ist ein noetherscher Ring.

(2) $A[X]$ ist noethersch.

(3) $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $A[X_1, \cdots, X_n]$ ist ein noetherscher Ring.

Beweis.

(1) $\Rightarrow$ (2): Sei A noethersch. Wir nehmen an, $A[X]$ wäre nicht noethersch. Dann gibt es ein echtes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A[X]$, so dass $\mathfrak{a}$ nicht endlich erzeugbar (insbesondere also $\mathfrak{a} \neq (0)$). Also existiert ein $f \in \mathfrak{a} \backslash \{0\}$, wobei f so gewählt sei, dass $\deg(f_1) =: d_1 \geq 0$ minimal sei. Aufgrund unserer Annahme ist $\mathfrak{a} \supsetneqq (f_1)$. Daher können wir $f_2 \in \mathfrak{a} \backslash (f_1)$ wählen, von minimalen Grad $\deg f_2 =: d_2$, mit $d_2 \geq d_1$. Aufgrund unserer Annahme ist auch $(f_1, f_2) \subsetneqq \mathfrak{a}$.

Induktiv so fortfahrend erhält man eine Folge von Polynomen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_{n+1} \in \mathfrak{a} \setminus (f_1, \cdots, f_n)$ und $\deg f_{n+1} = d_{n+1}$ minimal $\forall n \in \mathbb{N}$. Außerdem ist $d_1 \leq d_2 \leq d_3 \ldots$ eine aufsteigende Kette natürlicher Zahlen.

Für jedes dieser Polynome f_n sei b_n der Leitkoeffizient, also

$$f_n = \sum_{\nu=0}^{d_n} a_\nu^{(n)} \cdot X^\nu, \quad 0 \neq a_{d_n}^{(n)} =: b_n$$

Dann erhalten wir eine Idealkette in A:

$$(b_1) \subseteq (b_1, b_2) \subseteq (b_1, b_2, b_3) \subseteq \ldots$$

Da A noethersch ist, wird diese Kette stationär, etwa von $k \in \mathbb{N}$ an, also haben wir

$$\begin{aligned}(b_1, \cdots, b_k) &= (b_1, \cdots, b_k, b_{k+1}) \\ &= (b_1, \cdots, b_{k+j}) \quad \forall j \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

Insbesondere ist b_{k+1} eine Linearkombination der b_i davor, etwa

$$b_{k+1} = a_{d_{k+1}}^{(k+1)} = \sum_{\nu=1}^{k} r_\nu \cdot b_\nu \quad r_\nu \in A.$$

Betrachten wir das Polynom

$$g := f_{k+1} - \sum_{\nu=1}^{n} r_\nu \cdot f_\nu \cdot X^{d_{k+1} - d_\nu} \in \mathfrak{a}$$

Der Koeffizient für $X^{d_{k+1}}$ in g ist $b_{k+1} - \sum_{\nu=1}^{k} r_\nu \cdot b_\nu = 0$, also ist $\deg g < d_{k+1} = \deg f_{k+1}$. Daher ist $g \notin \mathfrak{a} \setminus (f_1, \cdots, f_k)$, weil es sonst schon vor f_{k+1} hätte gewählt werden müssen, also $g \in (f_1, \cdots, f_k)$. Damit ist

$$f_k = g + \sum r_\nu X^{d_{k+1} - d_\nu} \cdot f_\nu \in (f_1, \cdots, f_k),$$

im Widerspruch zur Wahl von f_{k+1}. Damit ist unsere Annahme falsch, also ist $A[X]$ noethersch.

(2) ⇒ (3): Wir machen eine Induktion mit Hilfe von „(1) ⇒ (2)“:

Ist $A[X_1]$ noethersch, so ist auch $A[X_1][X_2] = A[X_1, X_2]$ noethersch. Analog: Ist $A[X_1, \dots X_n]$ noethersch, so ist auch $A[X_1, \dots X_n][X_{n+1}] = A[X_1, \cdots, X_{n+1}]$ noethersch.

(3) ⇒ (2): Klar (setze $n = 1$).

(2) ⇒ (1): Es ist $A \cong A[X]/(X)$, und Faktorringe noetherscher Ringe sind nach Satz 1.2.5 wieder noethersch. □

> KOROLLAR. Sei A ein noetherscher Ring, $\mathfrak{a} \subsetneqq A[X_1, \cdots, X_n]$ ein Polynomideal. Dann ist $A[X_1, \cdots, X_n]/\mathfrak{a}$ auch noethersch.

Definition 1.30. *Sei A ein noetherscher Ring, B eine A-Algebra mit Strukturmorphismus $\varphi : A \to B$.*

*(a) B heißt **endliche A-Algebra**, falls B als A-Modul endlich erzeugt ist, also*

$$\exists (b_1, \cdots, b_s) \in B^s : \quad \forall \beta \in B : \quad \beta = \sum_{i=1}^{s} a_i * b_i = \sum_{i=1}^{s} \varphi(a_i) \cdot b_i$$

oder einfacher

$$\exists (b_1, \cdots, b_s) \in B^s : \quad B = \sum_{i=1}^{s} \varphi(A) \cdot b_i.$$

*(b) B heißt (als A-Algebra) **endlich erzeugt über** A, falls B als Ring endlich erzeugt ist über dem Unterring $\varphi(A) \subseteq B$, also*

$$\exists (b_1, \cdots, b_s) \in B^s : \quad \forall \beta \in B : \quad \beta = \sum_{(i_1, \cdots, i_s) \in \mathbb{N}_0^s} \varphi(\alpha_{i_1, \dots i_s}) \cdot s_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot b_s^{i_s},$$

$$\alpha_{i_1, \cdots, i_s} \in A, \varphi(\alpha_{i_1, \cdots, i_s}) = 0 \ p.p.$$

bzw.

$$\exists (b_1, \cdots, b_s) \in B^s : \quad B = \varphi(A)[b_1, \cdots, b_s]$$

Bemerkung. Äquivalente Formulierungen für (2) sind:

$$B \cong \varphi(A)[X_1, \cdots, X_s]/\mathfrak{a} \qquad \text{mit } \mathfrak{a} \subsetneqq \varphi(A)[X_1, \dots X_s] \text{ Ideal}$$

und auch

$$B \cong A[X_1, \dots X_s]/\mathfrak{a}, \qquad \text{mit } \mathfrak{a} \subsetneqq A[X_1, \dots X_s] \text{ Ideal.}$$

KOROLLAR. Sei A noetherscher Ring, B eine A-Algebra mit Strukturhomomorphismus $\varphi : A \to B$.

(a) Ist B endlich erzeugte A-Algebra (bzgl. φ), so ist B auch noethersch (als Ring).

(b) Wenn B endliche A-Algebra (bzgl. φ) ist, so ist B a priori ebenfalls endlich erzeugte A-Algebra und damit ebenfalls noetherscher Ring. (Außerdem ist B als A-Modul noethersch.)

Beweis zu (a). Dies folgt aus der Bemerkung und dem vorangegangenen Korollar. □

Beispiel 1.3.1. $Z[X_1, \cdots, X_n]$ ist noethersch, da $\mathbb{Z}$ als HIR noethersch ist.

Beispiel 1.3.2. Ist K Körper, so ist ${K[X_1, \cdots, X_n]}/{\mathfrak{a}}$ noethersch, d.h. endlich erzeugte k-Algebren über Körpern sind insbesondere noethersche Ringe.

SATZ 1.3.2. *(Cohens Charakterisierungssatz für noethersche Ringe)*
Sei A ein Ring. dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) A ist ein noetherscher Ring

(2) Für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ gilt: $\mathfrak{p}$ ist endlich erzeugbar.

Beweis.

(1) ⇒ (2): ist klar (jedes Primideal ist ein Ideal).

(2) ⇒ (1): Seien also alle Primideale endlich erzeugt. Nehmen wir an, es seien nicht alle Ideale endlich erzeugt, also die Menge

$$\mathfrak{M} := \{\mathfrak{a} \subseteq A \mid \mathfrak{a} \text{ Ideal, nicht endlich erzeugbar}\}$$

nicht leer. Dann ist $(\mathfrak{M}, \subseteq)$ natürlich teilgeordnet.

Sei $\mathfrak{N} \subseteq M$ eine totalgeordnete Teilmenge, so ist $\hat{\mathfrak{a}} \bigcup_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{N}} \mathfrak{a}$ wieder ein Ideal. Wäre $\hat{\mathfrak{a}}$ endlich erzeugt, etwa $\hat{\mathfrak{a}} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_s)$ mit $\alpha_i \in \mathfrak{a}_i \in \mathfrak{N}$, so ist aufgrund der Totalordnung $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_s\} \subseteq \mathfrak{a}_j$ für ein $j \in \{1, \cdots, s\}$, also

$$\hat{\mathfrak{a}} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_s) \subseteq \mathfrak{a}_j \subseteq \bigcup_{i\in I} \mathfrak{a}_i = \hat{\mathfrak{a}},$$

also $\mathfrak{a}_j$ endlich erzeugt, im Widerspruch zur Annahme, also also ist $\hat{\mathfrak{a}}$ nicht endlich erzeugt, somit eine obere Schranke für $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{M}$.

Damit ist $\mathfrak{M}$ induktiv geordnet, hat nach dem Zornschen Lemma ein maximales Element $\mathfrak{a}^*$. $\mathfrak{a}^*$ ist dann ein nicht endlich erzeugbares Ideal, und für alle $\mathfrak{b} \subsetneq A$ gilt:

Ist $\mathfrak{a}^* \subsetneqq \mathfrak{b}$, so ist $\mathfrak{b}$ endlich erzeugt. Insbesondere ist $\mathfrak{a}^*$ wegen (2) kein Primideal, also

$$\begin{aligned} \exists x \in A, \exists y \in A: \quad & x \notin \mathfrak{a}^*, y \notin \mathfrak{a}^*, x \cdot y \in \mathfrak{a}^*. \\ \Rightarrow \quad & \mathfrak{a}^* \subseteq \mathfrak{a} + A \cdot x \quad \text{und} \quad \mathfrak{a}^* \subseteq \mathfrak{a} + A \cdot y \\ \Rightarrow \quad & \mathfrak{a} + A \cdot x \quad \text{und} \quad \mathfrak{a} + A \cdot y \quad \text{sind endlich erzeugte Ideale.} \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}^* + Ax &= (\alpha_1 + r_1 x, \cdots, \alpha_s + r_s x) \quad \text{mit } s \in \mathbb{N}, \alpha_i \in \mathfrak{a}, r_i \in A. \\ &= (\alpha_1, \cdots, \alpha_s) + Ax \\ &= (\alpha_1, \cdots, \alpha_s, x) \end{aligned}$$

Betrachte das „Hilfsideal“

$$\begin{aligned} J &:= (\mathfrak{a}^* : x) = (\mathfrak{a}^* : (x)) \\ &= \{c \in A \mid c \cdot x \in \mathfrak{a}^*\} \\ &\supseteq A \cdot y + \mathfrak{a}^* \\ &\supsetneqq \mathfrak{a}^* \end{aligned}$$

Es ist J (als echtes Oberideal von $\mathfrak{a}^*$) endlich erzeugt, etwa $J = (d_1, \cdots, d_t)$ mit $d_i \cdot x \in \mathfrak{a}_*$ für alle t. Damit folgt insgesamt

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in \mathfrak{a}^*: \quad & \alpha \in \mathfrak{a}^* + Ax \\ \Rightarrow \quad & \alpha = \sum_{i=1}^{s} \xi_i \cdot \alpha_i + r \cdot x \quad (\xi_i \in A) \\ \Rightarrow \quad & rx \in \mathfrak{a}^* \\ \Rightarrow \quad & r \in J \\ \Rightarrow \quad & r = \sum_{i=1}^{t} \eta_j \cdot d_j \quad (\eta_j \in A) \\ \Rightarrow \quad & \alpha = \sum_{i=1}^{s} \xi_i \cdot \alpha_i + \sum_{j=1}^{t} \eta_j \cdot (d_j \cdot x) \\ \Rightarrow \quad & \alpha \in (\alpha_1, \cdots, \alpha_s, d_1 \cdot x, \cdots, d_j \cdot x) \subseteq \mathfrak{a}^* \end{aligned}$$

Wir haben also $\mathfrak{a}^* = (\alpha_1, \cdots, \alpha_s, d_1 \cdot x, \cdots, d_j \cdot x)$, d.h. $\mathfrak{a}^*$ ist endlich erzeugt, also die Annahme falsch, also sind alle Ideale von A endlich erzeugt, d.h. A noethersch. □

$\boxed{\text{Satz 1.3.3.}}$ *(Endlichkeit der Menge $J_\mathfrak{a}$ in noetherschen Ringen)*
Sei A ein noetherscher Ring. Dann gilt für alle echten Ideale $\mathfrak{a} \subsetneqq A$:

$$J_\mathfrak{a} = \{\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_s\}.$$

Beweis. Nehmen wir das Gegenteil an, also sei die Menge

$$\mathfrak{M} := \{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a} \subsetneqq A \text{ Ideal}, J_{\mathfrak{a}} \text{ unendlich}\} \neq \varnothing$$

nicht leer. Da A noethersch ist, gibt es (nach Satz 1.2.2) ein maximales Element in $\mathfrak{M}$, etwa $\mathfrak{a}_*$ mit $J_{\mathfrak{a}_*}$ unendlich. Offenbar ist $\mathfrak{a}_* \notin \operatorname{Spec} A$ (sonst wäre $J_{a_*} = \{a_*\}$). Damit existieren

$$x, y \in A \quad \text{mit} \quad x \notin \mathfrak{a}_*, y \notin \mathfrak{a}_*, x \cdot y \in \mathfrak{a}_*.$$

Damit haben wir $\mathfrak{a}^* \subsetneqq \mathfrak{a}_* + Ax$ und $\mathfrak{a}^* \subsetneqq \mathfrak{a}_* + Ay$. Aufgrund der Maximalität von $\mathfrak{a}^*$ sind $J_{\mathfrak{a}_*+Ax}$ und $J_{\mathfrak{a}^*+Ay}$ endlich. Sei nun $\mathfrak{p} \in J_{a_*}$ ein beliebiges $\mathfrak{a}_*$-minimales Primideal. Dann ist

$$\begin{aligned}
& x \cdot y \in \mathfrak{a}_* \subseteq \mathfrak{p} \\
\Rightarrow \quad & x \in \mathfrak{p} \quad \text{oder} \quad x \in \mathfrak{p} \\
\Rightarrow \quad & \mathfrak{a}_* + Ax \subseteq \mathfrak{p} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{a}_* + Ay \subseteq \mathfrak{p} \\
\Rightarrow \quad & \mathfrak{p} \in \{J\}_{\mathfrak{a}_*+Ax} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{p} \in \{J\}_{\mathfrak{a}_*+Ay},
\end{aligned}$$

denn ansonsten wäre $\mathfrak{p}$ schon nicht $\mathfrak{a}_*$-minimal gewesen. Damit haben wir

$$J_{\mathfrak{a}_*} \subseteq J_{\mathfrak{a}_*+Ax} \cup J_{\mathfrak{a}_*+Ay},$$

also eine Vereinigung zweier unendlicher Mengen. Dies ist ein Widerspruch, also ist unsere Annahme falsch, d.h. alle $J_{\mathfrak{a}}$ sind wirklich endlich. □

> KOROLLAR. Sei A noetherscher Ring, $\mathfrak{a} \subsetneqq A$ echtes Ideal. Dann ist
>
> $$\sqrt{a} = \bigcap_{\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}} \mathfrak{p} = \bigcap_{ideal p \in J_{\mathfrak{a}}} \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_s,$$
>
> das heißt, jedes *Radikal* ist Durchschnitt von endlich vielen Primidealen.

Frage. Wie sieht es mit $\mathfrak{a}$ selbst aus? Gibt es eine ähnliche Zerlegung?

Definition 1.31. *Ein Durchschnitt $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{a}_n$ von endlich vielen Idealen heißt **verkürzbar**, falls ein $i \in \{1, \cdots, n\}$ existiert mit $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \cap \ldots \cap \cancel{\mathfrak{a}_i} \cap \ldots \cap \mathfrak{a}_n$. Andernfalls heißt die Darstellung **unverkürzbar**.*

Bemerkung. Diese Darstellung $\sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_s$ ist die einzige *unverkürzbare* Darstellung von $\sqrt{a}$ als Durchschnitt von Primidealen, wie die folgenden Betrachtungen zeigen.

Bei Durchschnitten von Primidealen $\mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_n$ bedeutet Verkürzbarkeit auch:

$$\begin{aligned}
& \exists i : \quad \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \cancel{\mathfrak{p}_i} \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_n \subseteq \mathfrak{p}_i \\
\Rightarrow \quad & \exists i : \quad \mathfrak{p}_1 \cdot \ldots \cdot \cancel{\mathfrak{p}_i} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_n \subseteq \mathfrak{p}_i \\
\xRightarrow{\mathfrak{p}_j \text{prim}} \quad & \exists i, j, i \neq j : \quad \mathfrak{p}_j \subseteq \mathfrak{p}_i \\
\Rightarrow \quad & \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_n \text{verkürzbar}
\end{aligned}$$

Fazit.

- $\mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_n$ ist verkürzbar $\Leftrightarrow \exists i \neq j : \ \mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{p}_j$
- $\mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_n$ ist unverkürzbar $\Leftrightarrow \forall i \neq j : \ \mathfrak{p}_i \not\supseteq p_j$, d.h. die Faktoren stehen paarweise in keiner Inklusionsbeziehung.

Bemerkung. Die Darstellung $\sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_s$ mit $\{\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_s\} = J_\mathfrak{a}$ in noetherschen Ringen ist also unverkürzbar, da alle $\mathfrak{p}_i$ $\mathfrak{a}$-minimal sind und verschieden.

> LEMMA. Seien A ein Ring, $\mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_s = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_t$ zwei unverkürzbare Durchschnitte von Primidealen.
> Dann ist $s = t$ und es existiert eine Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_s$ mit
>
> $$\forall i \in \{1, \cdots, s\} : \mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_{\sigma(i)},$$
>
> d.h. die Faktoren stimmen bis auf Reihenfolge überein.

Beweis. Es ist (für alle i) $\mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap p_s \subseteq q_i$, also (da $\mathfrak{q}_i$ prim) $\exists k \in \{1, \cdots, s\} : \mathfrak{p}_k \subseteq \mathfrak{q}_i$. Analog gilt auch $\mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_t \subseteq \mathfrak{p}_k$, also $\exists l \in \{1, \cdots, t\} : \mathfrak{q}_l \subseteq \mathfrak{p}_k \subseteq \mathfrak{q}_l$. Damit muss $l = i$ sein, also $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{p}_k$. Dies geht analog für jedes $\mathfrak{q}_j$, also haben wir

$$\{\mathfrak{q}_1, \cdots, \mathfrak{q}_t\} \subseteq \{\mathfrak{p}_1, \cdots, p_s\} \subseteq \{\mathfrak{q}_1, \cdots, \mathfrak{q}_t\},$$

woraus die Behauptung folgt. □

Definition 1.32. *Die Zerlegung $\sqrt{a} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in J_\mathfrak{a}} \mathfrak{p}$ wird auch **Lasker-Noether-Zerlegung** von $\sqrt{a}$ genannt.*

Die allgemeine Primärzerlegung in noetherschen Ringen

Ziel. Sei A ein beliebiger Ring, $\mathfrak{a} \subsetneqq A$ echtes Ideal. Finde eine Darstellung $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap q_s$, unverkürzbar, eindeutig, mit Idealen $\mathfrak{q}_i$, die *primzahlpotenzähnlich* ist.

Definition 1.33. *Sei A ein beliebiger Ring, $\mathfrak{a} \subsetneqq A$ echtes Ideal. $\mathfrak{a}$ heißt **Primärideal**, falls $NT\left(A/_\mathfrak{a}\right) = \mathrm{Nil}\left(A/_\mathfrak{a}\right)$, d.h. wenn in $A/_\mathfrak{a}$ alle Nullteiler schon nilpotent sind.*

Bemerkung. Es ist A Primärideal

$$\begin{aligned}
&\iff \forall(\overline{a}, \overline{b}) \in \left(A/_\mathfrak{a}\right)^2 : \left(\overline{a} \cdot \overline{b} = 0 \Rightarrow \overline{a} = \overline{0} \text{ oder } \exists \nu > 0 : \overline{b}^\nu = \overline{0}\right) \\
&\iff \forall(a, b) \in A^2 : \ \left(a \cdot b \in \mathfrak{a} \Rightarrow a \in \mathfrak{a} \text{ oder } b \in \sqrt{\mathfrak{a}}\right) \\
(*) \qquad &\iff \forall(a, b) \in A^2 : \ \left(a \cdot b \in \mathfrak{a}, a \notin \mathfrak{a} \Rightarrow b \in \sqrt{\mathfrak{a}}\right) \\
&\iff \forall(a, b) \in A^2 : \ \left(a \cdot b \in \mathfrak{a}, b \in \sqrt{\mathfrak{a}} \Rightarrow a \in \mathfrak{a}\right) \\
&\iff \forall(a, b) \in A^2 : \ \left(a \cdot b \in \mathfrak{a} \Rightarrow a \in \mathfrak{a} \text{ oder } b \in \mathfrak{a} \text{ oder } a, b \in \sqrt{\mathfrak{a}}\right)
\end{aligned}$$

Bedingung (*) wird in den meisten Büchern als Definition verwendet.

Beispiel 1.3.3. Betrachte $A := \mathbb{Z}$, $\mathfrak{a} = n\mathbb{Z}$, $n \geq 2$. Dann gilt: $n\mathbb{Z}$ ist Primärideal in $\mathbb{Z} \Leftrightarrow n = p^\nu$, p Primzahl (also n Primzahlpotenz).

Beweis.

$\Rightarrow$: Angenommen, ein Primärideal $n\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$ hätte nicht diese Form, also etwa $n = p_1^{\nu_1} \cdot \ldots p_s^{\nu_s}$ mit $s \geq 2$ und $\nu_i \geq 1$ für alle i. Dann ist das Produkt $p_1^{\nu_1} \cdot (p_2^{\nu_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\nu_n}) \in n\mathbb{Z}$, aufgrund der Primäridealeigenschaft also $p_1^{\nu_1} \in n\mathbb{Z}$ oder $(p_2^{\nu_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\nu_n})^k \in n\mathbb{Z}$ mit einem geeignetem k. Daraus folgt $n|p_1$ (was nach unserer Annahme unmöglich ist) oder $n|\,(p_2^{\nu_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\nu_n})^k$, also $p_1|\,(p_2^{\nu_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\nu_n})^k$, was ebenfalls unmöglich ist.

$\Leftarrow$: $a \cdot b \in p^\nu \cdot \mathbb{Z} \Rightarrow p^\nu | a \cdot b, p \not| a \Rightarrow p|b$. □

> $\boxed{\text{Satz 1.3.4.}}$ Sei A beliebiger Ring, $\mathfrak{q} \subsetneqq A$ ein Primärideal. Dann gilt: $\sqrt{\mathfrak{q}} \in \operatorname{Spec} A$.
> Das heißt, Radikale von Primäridealen sind stets Primideale.

Beweis. Sei $a \cdot b \in \sqrt{\mathfrak{q}}$, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $(a \cdot b)^n \in \mathfrak{q}$, also $a^n \cdot b^n \in \mathfrak{q}$. Ist $a^n \in \mathfrak{q}$, so ist $a \in \sqrt{q}$.

Ist aber $a^n \notin \mathfrak{q}$, so ist (weil $\mathfrak{q}$ Primärideal) $b^n \in \sqrt{\mathfrak{q}}$, also $b \in \sqrt{\sqrt{\mathfrak{q}}} = \sqrt{\mathfrak{q}}$. □

Deshalb nennt man ein Primärideal $\mathfrak{q}$ mit $\sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ ein **$\mathfrak{p}$-Primärideal**.

Achtung. Die Umkehrung $\sqrt{\mathfrak{q}} \in \operatorname{Spec} A \Rightarrow \mathfrak{q}$ Primärideal gilt i.A. nicht. (Ein Gegenbeispiel ist Übungsaufgabe.)

> $\boxed{\text{Satz 1.3.5.}}$ Sei A beliebiger Ring, $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$ p-primäre Ideale (d.h. $\sqrt{\mathfrak{q}_1} = \sqrt{\mathfrak{q}_2} = \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$).
> Dann ist $\mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2$ ebenfalls ein p-primäres Ideal.

Beweis.

(a) Zunächst gilt für Ideale $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ ja generell $\sqrt{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}} = \sqrt{\mathfrak{a}} \cap \sqrt{\mathfrak{b}}$.

(b) In unserem Fall folgt daraus $\sqrt{\mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2} = \sqrt{\mathfrak{q}_1} \cap \sqrt{\mathfrak{q}_2} = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{p}$.

(c) Sei $a \cdot b \in \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2$, also ist $a \cdot b \in \mathfrak{q}_1$ und $a \cdot b \in \mathfrak{q}_2$. Ist $a \notin \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2$, so ist $a \notin \mathfrak{q}_1$, also $b \in \sqrt{\mathfrak{q}_1} = \sqrt{\mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2}$, oder $a \notin \mathfrak{q}_2$, also $b \in \sqrt{\mathfrak{q}_2} = \sqrt{\mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2}$. Damit ist $\mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2$ ein Primärideal. □

$\boxed{\text{SATZ 1.3.6.}}$ Sei a ein Ring, $\mathfrak{a} \subsetneqq A$ echtes Ideal. Dann gilt:

(1) Ist $\sqrt{\mathfrak{a}}$ ein endlich erzeugtes Ideal, so existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $\left(\sqrt{\mathfrak{a}}\right)^n \subseteq \mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$.

(2) Ist A noethersch, so gilt für alle echten Ideale $\mathfrak{a}$:

$$\exists n \in \mathbb{N} : \left(\sqrt{\mathfrak{a}}\right)^n \subseteq \mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$$

Beweis.

(1) Sei $\sqrt{a} = (c_1, \cdots, c_s)$ endlich erzeugt, Dann gilt für $i \in \{1, \cdots, s\} : \exists n_i \in \mathbb{N} : c_i^{n_i} \in \mathfrak{a}_i$. Sei $n := n_1 + \ldots + n_s$. Dann ist

$$(\sqrt{\mathfrak{a}})^n = \left\{ \sum_{\substack{(i_1,\cdots,i_s) \\ i_1+\ldots+i_s=n}} \alpha_{i_1,\cdots,i_n} \cdot c_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot c_s^{i_s} \,\middle|\, \alpha_{i_1,\cdots,i_n} \in A \right\}$$

Wenn aber für ein solches i-Tupel $i_1 + \ldots + i_s = n$ ist, muss mindestens eines der i_ks $\geq$ dem entsprechenden n_k sein: $\exists k_0 : i_{k_0} \geq n_{k_0}$, und dann ist $c_{k_0}^{i_{k_0}} \in \mathfrak{a}$, also auch $c_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot c_s^{i_s} \in \mathfrak{a}$.

Damit ist $(\sqrt{\mathfrak{a}})^n \subseteq \mathfrak{a}$.

(2) Ist nach (1) klar, da jedes Ideal endlich erzeugt ist. □

Ziel. Sei A noetherscher Ring, $\mathfrak{a} \subsetneqq A$ echtes Ideal. Dann ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_s$ mit

(1) $\mathfrak{q}_i$ Primärideale

(2) Die Darstellung ist unverkürzbar

(3) $\mathfrak{p}_i := \sqrt{\mathfrak{q}_i}$ sind paarweise verschieden.

(4) Die Darstellung ist in gewisser Weise eindeutig.

Definition 1.34. *Sei A ein Ring, $\mathfrak{a} \subsetneqq A$ ein echtes Ideal. $\mathfrak{a}$ heißt **unzerlegbar** (engl. **indecomposible**), falls für alle Ideale $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ gilt: Ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}$, so ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$.*

Bemerkung. Äquivalent dazu ist die folgende Charakterisierung:

$$\forall \mathfrak{b}, \mathfrak{c} : \mathfrak{a} \not\subseteq b, \mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{c} \Rightarrow \mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c},$$

d.h. $\mathfrak{a}$ ist nicht Durchschnitt zweier echter Oberideale.

Satz 1.3.7. Sei A ein noetherscher Ring, $\mathfrak{a} \subsetneqq A$ ein echtes Ideal. Dann ist $\mathfrak{a}$ darstellbar als Durchschnitt endlich vieler *unzerlegbarer* Ideale.

Beweis. Nehmen wir an, nicht jedes (echte) Ideal ist so zerlegbar. Dann ist die Menge

$$\mathfrak{M} := \left\{ \mathfrak{a} \;\middle|\; \begin{array}{c} \mathfrak{a} \subsetneqq A \text{ echtes Ideal} \\ \mathfrak{a} \text{ nicht Durchschnitt von endl.} \\ \text{vielen unzerlegbaren Idealen} \end{array} \right\}$$

nicht leer. Da A noethersch ist, hat $\mathfrak{M}$ mindestens ein maximales Element $\mathfrak{a}_*$. Es ist also $\mathfrak{a}_*$ nicht Durchschnitt von endlich vielen unzerlegbaren Idealen, und für alle Ideale $\mathfrak{b} \subsetneqq A$ mit $\mathfrak{a}_* \subsetneqq \mathfrak{b}$ gilt: $\mathfrak{b}$ ist Durchschnitt von endlich vielen unzerlegbaren Idealen. Insbesondere ist $\mathfrak{a}_*$ selbst nicht unzerlegbar, also etwa $\mathfrak{a}_* = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}$, mit $\mathfrak{a}_* \subsetneqq \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}_* \subsetneqq \mathfrak{c}_*$. Diese beiden Ideale sind aber (da echt größer als $\mathfrak{a}_*$) Durchschnitt von endlich vielen unzerlegbaren Idealen, etwa $\mathfrak{b} = \mathfrak{d}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{d}_s$, $\mathfrak{c} = \mathfrak{e}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{e}_t$, und $\mathfrak{d}_1, \ldots d_s, e_1, \cdots, e_s$ sind sämtlich unzerlegbar. Damit ist

$$\mathfrak{a}_* = \mathfrak{d}_1 \cap \ldots \mathfrak{d}_s \cap \mathfrak{e}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{e}_t$$

Durchschnitt von endlich vielen unzerlegbaren Idealen. Dies ist ein Widerspruch, also ist unsere Annahme falsch und der Satz wahr. □

Satz 1.3.8. *(Existenz der Primärzerlegung in Noetherschen Ringen)* Sei A ein noetherscher Ring.

(1) Ist $\mathfrak{c} \subsetneqq A$ echtes Ideal und unzerlegbar, so ist $\mathfrak{c}$ ein Primärideal.

(2) Ist $\mathfrak{a} \subsetneqq A$ ein echtes Ideal, so besitzt $\mathfrak{a}$ eine Primärzerlegung der Form $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n$ ($\mathfrak{q}_i$ ist $\sqrt{\mathfrak{q}_i}$-primär für $i \in \{1, \cdots, n\}$.

Beweis.

(1) Sei $\mathfrak{c} \subsetneqq A$ ein unzerlegbares Ideal. (Wir wollen zeigen, dass $\mathfrak{c}$ ein Primärideal ist.) Sei $(a, b) \in A^2$ mit $a \cdot b \in \mathfrak{c}$. Sei $b \notin \sqrt{\mathfrak{c}}$. Dann ist für alle $n \in \mathbb{N}$ auch $b^n \notin \mathfrak{c}$. Betrachten wir nun die Ideale

$$\mathfrak{c}_n := (\mathfrak{c} : b^n) = \{t \in A \mid t \cdot b \in \mathfrak{c}\}\,.$$

Die $\mathfrak{c}_n$ sind echte Ideale (sonst wäre ja $b_n \in \mathfrak{c}$) und $\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{c}_n$. Wir erhalten eine aufsteigende Kette

$$\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{c}_1 \subseteq \mathfrak{c}_2 \subseteq \ldots$$

(denn $t \in \mathfrak{c}_k \Rightarrow t \cdot b^k \in \mathfrak{c} \Rightarrow t \cdot b^{k+1} \in \mathfrak{c} \Rightarrow t \in \mathfrak{c}_{k+1}$) mit $a \in \mathfrak{c}_1$.

Da A noethersch ist, wird die Kette stationär, d.h. $\exists k \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{c}_n = \mathfrak{c}_k \forall n \geq k$. Insbesondere ist für dieses k auch $\mathfrak{c}_{2k} = \mathfrak{k}$. Sei nun $\mathfrak{b} := \mathfrak{c} + A \cdot b^k$. Es ist offenbar $\mathfrak{c} \subsetneqq \mathfrak{b}$ ($\neq$, weil $b^k \notin \mathfrak{c}$), und $\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}_k$.

Andererseits: Ist $t \in \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}_k$, so ist

$$\begin{aligned} & t = \alpha + r \cdot b^k, \quad (\alpha \in \mathfrak{c}) \quad \text{und} \quad t \cdot b^k \qquad \in \mathfrak{c} \\ \Rightarrow \quad & \underbrace{t \cdot b^k}_{\in \mathfrak{c}} = \underbrace{\alpha \cdot b^k}_{\in \mathfrak{c}} + \underbrace{r \cdot b^k \cdot b^k}_{\Rightarrow \in \mathfrak{c}}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} & r \in \mathfrak{c}_{2k} = \mathfrak{c}_k \\ \Rightarrow\ & r \cdot b^k \in \mathfrak{c} \\ \Rightarrow\ & t \in \mathfrak{c} \end{aligned}$$

Wir haben also $\mathfrak{c} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}_k$. Da $\mathfrak{c}$ unzerlegbar ist und $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{c}$, ist $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_k$, unsere Idealkette kollabiert zu

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_1 = \ldots = \mathfrak{c}_k = \cdots,$$

es ist also $a \in \mathfrak{c}$.

Damit haben wir gezeigt, dass $\mathfrak{c}$ ein Primärideal ist.

(2) folgt aus (1) mit Satz 1.3.7. □

Bemerkung. Sei $\mathfrak{a} \subsetneqq A$ echtes Ideal, A noethersch, $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_m$ eine (ja immer existierende) Primärzerlegung von $\mathfrak{a}$. Wir bezeichnen die Indexmenge mit $I_0 := \{1, \cdots, m\}$.

Wir vereinfachen (falls möglich):

(1) Zunächst machen wir die Darstellung unverkürzbar, indem redundante Primärkomponenten $\mathfrak{q}_i$ weggelassen werden: Jeweils sei (solange möglich)

$$i_k := \min \left\{ \nu \mid \nu \in I_{k-1}, \bigcap_{j \in I_{k-1} \setminus \{\nu\}} \mathfrak{q}_j \subseteq \mathfrak{q}_\nu \right\}$$

und dann $I_k := I_{k-1} \setminus \{i_k\}$. Das Verfahren bricht bei $k_* < m$ ab und wir erhalten eine unverkürzbare Primärzerlegung

$$\mathfrak{a} = \bigcap_{i \in I_{k_*}} \mathfrak{q}_i.$$

(2) Nun fassen wir alle Primärkomponenten $\mathfrak{q}_i$, $i \in I_{k_*}$, mit gleichem Radikal $\sqrt{\mathfrak{q}_i}$ zu einem Durchschnittsideal zusammen – dieses ist nach Satz 1.3.5 wieder ein Primärideal mit selbem Radikal.

Die Unverkürzbarkeit geht in diesem Prozess nicht verloren, da ja nur größere Ideale durch kleinere ersetzt werden, welche aber den selben Schnitt ergeben.

Wir erhalten eine Primärzerlegung

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{q}'_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}'_s,$$

wobei die $\mathfrak{q}'_i$ sämtlich Primärideale sind, die Darstellung unverkürzbar ist, und die Radikale $\sqrt{\mathfrak{q}_i}$ paarweise verschieden sind.

Definition 1.35. *Eine Primärzerlegung* $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n$ *heißt* ***normal****, falls*

(1) die Zerlegung unverkürzbar ist und

(2) alle Radikale $\sqrt{\mathfrak{q}_i}$ *verschieden sind.*

> Fazit. Sei A noetherscher Ring, $\mathfrak{a} \subsetneqq A$ Ideal. Dann existiert eine normale Primärzerlegung.

Achtung. Die Normalität impliziert nur die *Verschiedenheit* der assoziierten Primideale $\sqrt{\mathfrak{q}_i}$, nicht aber die Unverkürzbarkeit der Darstellung

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{q}_1} \cap \ldots \cap \sqrt{\mathfrak{q}_n}.$$

Es kann vorkommen, dass für $i \neq j$ gilt: $\sqrt{q_i} \subsetneqq \sqrt{q_i}$.

Damit gilt nicht allgemein für normale Primärzerlegungen $J_{\mathfrak{a}} = \{\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n\}$ (mit $\mathfrak{p}_i := \sqrt{\mathfrak{q}_i}$).

Bei Noetherschen Ringen gilt aber zumindest $J_{\mathfrak{a}} \subseteq \{\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n\}$, und sogar

$$J_{\mathfrak{a}} = \{\mathfrak{p}_i \,|\, i \in \{1, \cdots, n\}\,, \mathfrak{p}_i \text{ minimal in } \{\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n\}\}\,,$$

wie wir gleich sehen werden.

> Satz 1.3.9. *(Die „gewisse Eindeutigkeit“ der* ***Lasker-Noether-Zerlegung*** *von Idealen)*
>
> Seien A noetherscher Ring, $\mathfrak{a} \subsetneqq A$ Ideal, $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n = \mathfrak{q}'_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}'_m$ zwei *normale* Primärzerlegungen von $\mathfrak{a}$ mit Radikalen $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i} \in \operatorname{Spec} A$, $\mathfrak{p}'_i = \sqrt{\mathfrak{q}'_i} \in \operatorname{Spec} A$. Dann gilt:
>
> (1) $n = m$.
>
> (2) $\{\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n\} = \{\mathfrak{p}'_1, \cdots, \mathfrak{p}'_n\}$.

Bemerkung. Dies bedeutet: Obwohl $\{\mathfrak{q}_1, \cdots, \mathfrak{q}_n\}$ gelten kann, sind doch die assoziierten Primideale (= Radikale) für beide Darstellungen gleich.

Beweis. Es genügt, für eine normale Primärzerlegung $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n$ die assoziierten Primärideale (Radikale) $\sqrt{\mathfrak{q}_i}$ explizit genug (nur in Abhängigkeit von $\mathfrak{a}$) anzugeben.

Wir werden zeigen: $\{\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n\} = \{(ideala : x) \mid x \in A \setminus \mathfrak{a} \text{ und } (\mathfrak{a} : x) \text{ ist Primideal}\}$.

Sei also $\mathfrak{a} \subsetneqq A$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n$, $\mathfrak{p}_i := \sqrt{\mathfrak{q}_i}$ eine normale Primärzerlegung. Sei nun $i \in \{1, \cdots, n\}$ beliebig (fixiert). Wir setzen

$$\mathfrak{b} := \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \cancel{\mathfrak{q}_i} \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n \supsetneqq \mathfrak{a}$$

Nach Satz 1.3.6 gibt es wegen $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$ ein $\nu \in \mathbb{N}$ mit

$$\mathfrak{p}_i^\nu \subseteq \mathfrak{q}_i \subseteq \mathfrak{p}_i.$$

Multiplikation mit $\mathfrak{b}$ ergibt für solche ν:

$$\mathfrak{p}^\nu \cdot \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{q}_i \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{q}_i \cap (\mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \cancel{\mathfrak{q}_i} \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n) = \mathfrak{a}$$

Wir wählen ν minimal mit $\mathfrak{p}_i^\nu \cdot \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$. Dabei ist offenbar $\nu \geq 1$ (sonst wäre schon $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$), und $\mathfrak{p}_i^{\nu-1} \cdot \mathfrak{b} \nsubseteq \mathfrak{a}$. Es gibt also ein

$$x \in (\mathfrak{p}_i^{\nu-1} \cdot \mathfrak{b}) \setminus \mathfrak{a}.$$

Insbesondere gilt $x \notin \mathfrak{a}$, $x \in \mathfrak{b}$, also $x \notin \mathfrak{q}_i$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}(\mathfrak{a} : x) &= \{t \in A \mid t \cdot x \in \mathfrak{a}\} \\ &\subseteq (\mathfrak{q}_i : x) \\ &\subseteq \mathfrak{p}_i\end{aligned}$$

Andererseits ist auch

$$\begin{aligned} & \mathfrak{p}_i \cdot x \subseteq \mathfrak{p}_i \cdot (\mathfrak{p}_i^{\nu-1} \cdot b) \subseteq \mathfrak{p}_i^\nu \cdot \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \\ \Rightarrow \quad & \mathfrak{p}_i \subseteq (\mathfrak{a} : x) \subseteq, \end{aligned}$$

und damit ist $\mathfrak{p}_i = (\mathfrak{a} : x)$ für ein $x \in A \setminus \mathfrak{a}$. insgesamt haben wir also

$$\{\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n\} \subseteq \{(\mathfrak{a} : x) \mid x \in A \setminus \mathfrak{a}, (\mathfrak{a} : x) \in \operatorname{Spec} A\} =: I_\mathfrak{a} \subseteq \operatorname{Spec} A$$

$\boxed{I_\mathfrak{a}}$ $I_\mathfrak{a}$ heißt die Menge der **isolierten Komponenten** von A.

Wir zeigen nun die umgekehrte Inklusion:

Sei $(\mathfrak{a} : x) \in I_\mathfrak{a}$, also $x \in A \setminus \mathfrak{a}$ und $(\mathfrak{a} : x) =: \mathfrak{p}$ ein Primideal sowie $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n$ eine normale Primärzerlegung von $\mathfrak{a}$. (Wir wollen zeigen, dass $\mathfrak{p}$ eines der $\mathfrak{p}_i$ ist.)

Es ist $x \notin A$, also $\exists i \in \{1, \cdots, n\}$ mit $x \notin \mathfrak{q}_i$. Betrachte das Produkt aller dieser Ideale:

$$\mathfrak{c} := \prod_{x \notin q_j} \mathfrak{q}_j \subseteq \bigcap_{x \notin \mathfrak{q}_j} \mathfrak{q}_j$$

Es ist nun $x \cdot \mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{q}_i$ für alle i (entweder ist $x \in \mathfrak{q}_i$ oder $\mathfrak{c} \in q_i$), also ist $x \cdot \mathfrak{c} \subseteq \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{q}_i = \mathfrak{a}$, d.h. $\mathfrak{c} \subseteq (\mathfrak{a} : x)$. Wir haben also

$$\mathfrak{c} = \prod_{x \notin \mathfrak{q}_j} \mathfrak{q}_j \subseteq (\mathfrak{a} : x) = \mathfrak{p},$$

und weil die rechte Seite ein Primideal ist, muss mindestens einer der Faktoren schon drinliegen:

$$\exists k : \quad \mathfrak{q}_k \subseteq \mathfrak{p},$$

und das Anwenden des Radikal-Operators davon ergibt

$$\mathfrak{p}_k = \sqrt{\mathfrak{q}_k} \subseteq \sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p},$$

also $\mathfrak{p}_k \subseteq \mathfrak{p}$. Schließlich ist auch

$$\begin{aligned}\mathfrak{p} = (\mathfrak{a} : x) &\subseteq (\mathfrak{q}_k : x) \\ &= \{a \in A \mid a \cdot x \in \mathfrak{q}_a\} \\ &\xlongequal[\text{ideal}]{\mathfrak{q}_k \text{ Primär-}} \{a \in A \mid x \in \mathfrak{q}_a \text{ oder } a \in \sqrt{\mathfrak{q}_a}\} \\ &\xlongequal{x \notin \mathfrak{q}_k} \sqrt{\mathfrak{q}_k} = \mathfrak{p}_k,\end{aligned}$$

Damit ist $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_k$, also $I_\mathfrak{a} \subseteq \{\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_k\}$. Damit ist also $I_\mathfrak{a} = \{\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_k\}$, und wir haben die Eindeutigkeit der Primideale $\mathfrak{p}_i$ (und Unabhängigkeit von der gewählten Primärzerlegung) gezeigt. □

Definition 1.36. *Die Primideale $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$ nennt man auch* ***Primkomponenten*** *von $\mathfrak{a}$, womit also*

$$I_\mathfrak{a} = \{\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n\} = \{(\mathfrak{a} : x) \mid x \in A \setminus \mathfrak{a}, (\mathfrak{a} : x) \in \operatorname{Spec} A\}$$

die Menge der Primkomponenten ist.

BEMERKUNG 1. $\boxed{\mathfrak{M}_\mathfrak{a}}$

(1) Ist A ein noetherscher Ring und $\mathfrak{a} \subsetneqq A$ ein Ideal, dann ist $I_\mathfrak{a}$ endlich und $I_\mathfrak{a} \neq \varnothing$.

(2) Sei $\mathfrak{a} \subsetneqq A$ ein Ideal, $\mathfrak{M}_\mathfrak{a} := \{(\mathfrak{a} : x) \mid x \in A \setminus A\}$. Dann gilt:

Falls $\mathfrak{M}_\mathfrak{a}$ maximale Elemente besitzt (z.B. für A noethersch), so sind diese Primideale. Achtung: Es können auch nicht-maximale Elemente $(\mathfrak{a} : z) \in \mathfrak{M}_\mathfrak{a}$ Primideale sein.

(3) Sei $a \subsetneqq A$, $x \in A \setminus \mathfrak{a}$. Betrachte $A/\mathfrak{a}$ als A-Modul (mit $\overline{x} \neq \overline{0}$) sowie den A-Annullator von $\overline{x}$:

$$\begin{aligned}\operatorname{Ann}_A(\overline{x}) &= \left\{t \in A \mid t \cdot \overline{x} = \overline{0}\right\} \\ &= \left\{t \in A \mid \overline{tx} = \overline{0}\right\} \\ &= \{t \in A \mid tx \in \mathfrak{a}\} \\ &= (\mathfrak{a} : x)\end{aligned}$$

Mit anderen Worten: $(\mathfrak{a} : x)$ ist ein Annulatorideal für ein Ideal x im Faktormodul $A/\mathfrak{a}$.

Beweis für (2). Sei $(\mathfrak{a} : y)$ ein in $\mathfrak{M}_\mathfrak{a}$ maximales Element. Sei $a \cdot b \in (\mathfrak{a} : y)$ mit $a \notin (\mathfrak{a} : y)$. Dann ist $a \cdot b \cdot y = b \cdot (a \cdot y) \in \mathfrak{a}$, also $b \in (\mathfrak{a} : a \cdot y) \supseteq (\mathfrak{a} : y)$. Es ist (wegen $a \cdot y \notin \mathfrak{a}$) $(\mathfrak{a} : a \cdot y) \in \mathfrak{M}_\mathfrak{a}$, und wegen der Maximalität von $(\mathfrak{a} : y)$ dort sind beide Quotientenideale gleich, also haben wir schon $b \in (\mathfrak{a} : y)$.

Damit ist $(\mathfrak{a} : y)$ ein Primideal. □

Definition 1.37. *Daher nennt man die maximalen Elemente $(\mathfrak{a} : x)$ in $\mathfrak{M}_{\mathfrak{a}}$ auch* ***maximale Annulatoren****.*

Fazit. Maximale Annulatoren sind stets Primideale.

$\boxed{\text{Lemma.}}$ Sei $\mathfrak{a} \subsetneq A$ echtes Ideal, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) $\exists x \in A \setminus A \mid \mathfrak{p} = (\mathfrak{a} : x)$, (bzw. $\mathfrak{p} \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{a}}$, $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}_A([x]_{\mathfrak{a}})$).

(2) $\operatorname{Mono}_A(A/\mathfrak{p}, A/\mathfrak{a}) \neq \varnothing$ (d.h. $\exists f : A/\mathfrak{p} \hookrightarrow A/\mathfrak{a}$ als A-Modulhomomorphismus, injektiv).

Beweis.

(1) ⇒ (2) Sei $\mathfrak{p} = (\mathfrak{a} : x) \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{a}}$, also $x \notin \mathfrak{a}$. Betrachte den A-Modulhomomorphismus

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{\tau_x} A/\mathfrak{a} \\ a &\mapsto \tau_x(a) := [x \cdot a], \end{aligned}$$

insbesondere mit $\tau_x(1) = [x]$. Es ist also $\operatorname{im}(\tau_x) = A \cdot [x] \subseteq A/\mathfrak{a}$. Der Homomorphiesatz liefert

$$\operatorname{im}(\tau_x) \cong A/\ker(\tau_x)$$

mit

$$\begin{aligned} \ker(\tau_x) &= \{a \in Aa \cdot [x] = 0\} \\ &= \{a \in A \mid a \cdot x \in \mathfrak{a}\} \\ &= (\mathfrak{a} : x) = p \end{aligned}$$

Damit haben wir einen Monomorphismus:

$$\begin{aligned} A/\mathfrak{p} &\cong A \cdot [x] \subseteq A/\mathfrak{a} \\ \overline{a} &\mapsto [a \cdot x] \end{aligned}$$

(2) ⇒ (1) Sei $A/\mathfrak{p} \xrightarrow{\psi} A/\mathfrak{a}$ ein A-Modulhomomorphismus. Dann ist $\operatorname{im}(\psi) = A \cdot \psi(\overline{1})$. Betrachten wir die induzierte Abbildung $\hat{\psi} \circ \pi$:

$$\begin{tikzcd}
A/\mathfrak{p} \arrow[r, "\sim", "\hat{\psi}"'] \arrow[rr, bend left, "\psi"] & A \cdot \psi(\overline{1}) \arrow[r, tail, "\mathrm{incl}"'] & A/\mathfrak{a} \\
A \arrow[u, "\pi"] \arrow[ur, dashed, "\hat{\psi}\circ\pi"'] & &
\end{tikzcd}$$

Dabei folgt aus dem Homomorphiesatz, dass $A/_{\ker(\hat{\psi}\circ\pi)} \cong \operatorname{im}(\hat{\psi}\circ\pi)?A\cdot\psi(1)$, wobei

$$\begin{aligned}\ker(\hat{\psi}\circ\pi) &= \ker(\pi) = \mathfrak{p} \\ &= \left\{a \in A \mid a\cdot\psi(\overline{1}) = \overline{0}\right\} \\ &= \{a \in A \mid a\cdot\overline{z} = 0\} \quad \text{mit } \overline{z} := \psi(\overline{1}) \\ &= \{a \in A \mid a\cdot z \in \mathfrak{a}\} \\ &= (\mathfrak{a} : z)\end{aligned}$$

$\mathfrak{p}$ ist also ein Annulator $(\mathfrak{a} : z)$ mit $z \in \psi(1)$. □

Bemerkung. Sei A wieder ein noetherscher Ring, $\mathfrak{a} \subsetneqq A$ echtes Ideal, $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n$ eine normale Primärzerlegung von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}_i := \sqrt{\mathfrak{q}_i}$ die zugehörigen Primkomponenten. Außerdem ist auch

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_n = \bigcap_{\mathfrak{p}\in J_{\mathfrak{a}}} \mathfrak{p},$$

wobei $J_{\mathfrak{a}} = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}, \mathfrak{p} \text{ ist } \mathfrak{a}\text{-minimal}\}$ endlich ist. Die Darstellung des Radikals als $\bigcap_{\mathfrak{p}\in J_{\mathfrak{a}}} \mathfrak{p}$ ist unverkürzbar, hingegen könnte $\mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_n$ eventuell verkürzbar sein. Daher erhalten wir

$$J_{\mathfrak{a}} = \{\mathfrak{p} \in I_{\mathfrak{a}} \mid \mathfrak{p} \text{ ist } \subseteq\text{-minimal in } I_{\mathfrak{a}}\} \subseteq I_{\mathfrak{a}} = \{(\mathfrak{a} : x) \mid x \in A, (\mathfrak{a} : x) \in \operatorname{Spec} A\}$$

Dies führt zur folgenden Definition:

Definition 1.38. *Sei A ein Ring, $\mathfrak{a} \subsetneqq A$ ein echtes Ideal. Ist $J_{\mathfrak{a}} \subsetneqq I_{\mathfrak{a}}$ (d.h. $I_{\mathfrak{a}} \setminus J_{\mathfrak{a}} \neq \varnothing$), so nennt man $\mathfrak{a}$ ein Ideal mit* ***eingebetteten Primkomponenten****.*

Falls $I_{\mathfrak{a}} = J_{\mathfrak{a}}$, so heißt $\mathfrak{a}$ ein Ideal ohne eingebettete Primkomponenten bzw. ***Ideal mit isolierten Primkomponenten****.*

LEMMA. Sei A ein noetherscher Ring, und $(0) = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_i$ eine normale Primärzerlegung des Nullideals, mit den zugehörigen Primkomponenten $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$, $I_{(0)} = \{\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n\}$. Dann gilt:

(1) $$\sqrt{(0)} = \operatorname{Nil}(A) = \bigcap_{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec} A} \mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{p}\in J_{(0)}} \mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{p}\in I_{(0)}} \mathfrak{p}$$

(Neu ist die letzte Identität, welche im noetherschen Fall gilt.)

(2) $$\operatorname{NT}(A) = \bigcup_{\mathfrak{p}\in I_{(0)}} \mathfrak{p} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$$

Beweis.

(1) Folgt aus $J_{(0)} \subseteq I_{(0)} \subseteq \operatorname{Spec} A$.

(2) $\subseteq$: Es ist

$$\begin{aligned} NT(A) &= \{a \in A \mid \exists x \in A \setminus (0), x \cdot a = 0\} \\ &= \{a \in A \mid \exists x \in A \setminus (0) : a \in ((0) : x)\} \\ &= \bigcup_{x \in A \setminus (0)} ((0) : x) \\ &\supseteq \bigcup_{\substack{x \in A \setminus (0) \\ ((0):x) \in \operatorname{Spec} A}} ((0) : x) \\ &= \bigcup_{\mathfrak{p} \in I_{(0)}} \mathfrak{p} \end{aligned}$$

$\supseteq$: Umgekehrt: Sei $t \in \mathrm{NT}(A)$, so existiert $x \in A \setminus (0)$, mit $t \in ((0) : x)$.

1. Fall: Ist $((0) : x)$ maximal in $\mathfrak{M}_{(0)}$, dann ist $((0) : x) \in I_{(0)}$, also $t \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in I_{(0)}} \mathfrak{p}$.

2. Fall: Ist $((0) : x)$ nicht maximal in $\mathfrak{M}_{(0)}$, so ist

$$\mathfrak{N}_{((0):x)} := \{((0) : y) \mid y \in A \setminus (0), ((0) : y) \supseteq ((0) : x)\} \neq \varnothing,$$

besitzt (da A noethersch ist) ein maximales Element $((0) : y_*)$, welches dann natürlich auch maximal in $\mathfrak{M}_{(0)}$ ist. Es ist also $t \in ((0) : y_*) \in I_{(0)}$, d.h. auch hier $t \in \bigcup_{\mathfrak{p} \in I_{(0)}} \mathfrak{p}$.

Wir haben also auch $NT(A) \subseteq \bigcup_{\mathfrak{p} \in I_{(0)}} \mathfrak{p}$. □

1.4 Analyse der Lasker-Noether-Zerlegung: (Gegen-)Beispiele, Anwendungen, Verallgemeinerungen

LEMMA. Sei A ein Ring, $\mathfrak{q} \subsetneq A$ ein $\mathfrak{p}$-Primärideal, $x \in A \setminus \mathfrak{q}$. Dann ist $(\mathfrak{q} : x) = \{t \in A \mid t \cdot x \in \mathfrak{q}\}$ ebenfalls $\mathfrak{p}$-primär.

Bemerkung. Wenn $x \in \mathfrak{q}$, dann ist natürlich $(\mathfrak{q} : x) = A$. Ansonsten ist $(\mathfrak{q} : x) \subsetneq A$.

Beweis. Ist $t \in (\mathfrak{q} : x)$, so ist $t \cdot x \in \mathfrak{q}$, $x \notin \mathfrak{q}$, also $t \in \sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{p}$. Damit haben wir

$$\begin{aligned} & \mathfrak{q} \subseteq (\mathfrak{q} : x) \subseteq \mathfrak{p} \\ \Rightarrow \quad & \mathfrak{p} \subseteq \sqrt{(\mathfrak{q} : x)} \subseteq \mathfrak{p} \\ \Rightarrow \quad & \mathfrak{p} = \sqrt{(\mathfrak{q} : x)} \end{aligned}$$

Weiter: Sei $a \cdot b \in (\mathfrak{q} : x)$, $b \notin \sqrt{(\mathfrak{q} : x)} = \mathfrak{p}$. Dann ist $a \cdot b \cdot x \in \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$, also (da q primär ist) $a \cdot x \in \mathfrak{q}$, also $a \in (\mathfrak{q} : x)$.

Damit ist auch $(\mathfrak{q} : x)$ ein $\mathfrak{p}$-primäres Ideal. □

$\boxed{\text{BEMERKUNG 1.}}$ Sei A ein Ring und $\mathfrak{q} \subsetneq A$ ein echtes Ideal. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent::

(1) $\mathfrak{q}$ ist primär.

(2) Für alle $a \in A$ ist die Homothetie

$$\begin{aligned} h_a : A/\mathfrak{q} &\to A/\mathfrak{q} \\ \overline{x} &\mapsto a \cdot \overline{x} = \overline{a \cdot x} = \overline{a} \cdot \overline{x} \end{aligned}$$

entweder injektiv oder nilpotent.

Beweis. Ist $\overline{a} \in \mathrm{NT}(A/\mathfrak{q})$, so ist $\overline{a}$ (laut Definition von Primärideal) bereits nilpotent, also auch h_a.

Andernfalls ist $\ker(h_a) = \left\{ t \in A/\mathfrak{q} \,\middle|\, t \cdot \overline{a} = 0 \right\} = \{0\}$, also h_a injektiv. □

$\boxed{\text{LEMMA.}}$ Sei A ein Ring, $\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} A$, und $\mathfrak{a}$ ein Ideal mit $\mathfrak{m}^n \subseteq \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.
Dann ist $\mathfrak{a}$ ein $\mathfrak{m}$-primäres Ideal.

Beweis. Es ist offenbar $\sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{m}$.

Sei also $a \cdot b \in \mathfrak{a}$ und $a \notin \sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{m}$. Daher ist $\mathfrak{m} + A \cdot a = A$, also

$$\exists m_0 \in \mathfrak{m}, \exists r \in A : m_0 + r = 1$$

Im Restklassenring $A/\mathfrak{a}$ ergibt das

$$\overline{r} \cdot \overline{a} = \overline{1} - \overline{m_0}$$

mit $m_0^n \in \mathfrak{m}^n \subseteq \mathfrak{a}$, also $m_0 \in \mathrm{Nil}(A/\mathfrak{a})$, also

$$\begin{aligned} &\overline{1} - \overline{m}_0 \in (A/\mathfrak{a})^* \\ \Rightarrow \quad &\overline{a} \in \overline{1} - \overline{m}_0 \in (A/\mathfrak{a})^* \\ \xRightarrow{\overline{a}\cdot\overline{b}=0} \quad &\overline{b} = \overline{0} \\ &b \in \mathfrak{a} \end{aligned}$$

Damit ist $\mathfrak{a}$ ein $\mathfrak{m}$-Primärideal. □

Achtung. Die beiden Lemmas gelten nicht, wenn man in der Voraussetzung *maximal* durch *prim* ersetzt, d.h.

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}^n \subseteq \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p} &\not\Rightarrow \mathfrak{a} \text{ ist } (\mathfrak{p}\text{-})\text{primär} \\ \sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{p} &\not\Rightarrow \mathfrak{a} \text{ ist } (\mathfrak{p}\text{-})\text{primär.} \end{aligned}$$

Beispiel 1.4.1. Der Ring $K[X,Y]$ ist Integritätsbereich und (nach Hilbert) noethersch. Wir betrachten die Ideale $\mathfrak{a} := (X^2, Y)$ und $\mathfrak{m} := (X,Y) \in \operatorname{Specm}(K[X,Y])$ (weil $K[X,Y]\big/_{(X,Y)} \cong K$).

Dabei ist $\mathfrak{m}^2 = (X^2, X \cdot Y, Y^2)$, mit $X \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{a} = (X,Y) \setminus (X^2, Y)$ und $Y \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{m}^2$. Wir haben also $\mathfrak{m}^2 \subseteq \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$ (also ist $\mathfrak{a}$ ein $\mathfrak{m}$-primäres Ideal), sogar $\mathfrak{m}^2 \subsetneqq \mathfrak{a} \subsetneqq \mathfrak{m}$.

Fazit. Es gibt Primärideale, die keine Primidealpotenzen sind.

Hingegen haben wir den folgenden Satz:

$\boxed{\text{SATZ 1.4.1.}}$ Ist A ein Hauptidealring (insbesondere auch Integritätsbereich und noethersch), so sind die Primärideale genau die Potenzen von Primidealen.

Als Korollar ergibt sich, dass $K[X,Y]$ kein HIR ist.

Beweis. Sei $(p) \in \operatorname{Spec} A$ ein Primideal (Hauptideal, erzeugt von einem Primelement p), $(p) \neq (0)$. Dann ist $(p) \subseteq (m) \in \operatorname{Specm} A$ für ein geeignetes $m \in A$, also $p = t \cdot m$. Da (p) prim ist, ist dann $m \in (p)$ (dann ist $(p) = (m)$), oder $t \in (p)$, was via $t = s \cdot p \Rightarrow p = s \cdot p \cdot m \Rightarrow 1 = s \cdot m \Rightarrow 1 \in (m)$ zu einem Widerspruch zur Specm-Angehörigkeit von m führt.

Wir haben also $(p) \in \operatorname{Specm} A$ bzw. $\operatorname{Spec} A = \operatorname{Specm} A \,\dot\cup\, (0)$.

Ist nun (q) ein (p)-primäres Ideal, also $\sqrt{(q)} = (p)$, so ist (nach Satz 1.3.6, weil A noethersch) auch $(p)^n \subseteq (q) \subseteq (p)$ für ein $n \in \mathbb{N}$. In Elementen geschrieben heißt dies

$$\begin{aligned} \exists n \in \mathbb{N}: \quad & p^n = t \cdot q, \qquad t \in A, q = s \cdot p \\ & p^n = t \cdot s \cdot p \\ \Rightarrow \quad & p^{n-1} = t \cdot s, \end{aligned}$$

und (p) ist Primideal, also ist einer der Faktoren durch p teilbar, was ausgeklammert werden kann. Fortsetzung dessen ergibt schließlich

$$1 = \tilde{t} \cdot \tilde{s}, \qquad t = \tilde{t} \cdot p^r, s = \tilde{s} \cdot p^{n-1-r}, 0 \leq r \leq n-1$$

Es ist also hier $(\tilde{t}, \tilde{s}) \in (A^*)^2$, und

$$\begin{aligned} p^n &= \tilde{t} \cdot p^r \cdot q, \\ q &= \underbrace{\tilde{s}}_{\in A^*} \cdot p^{n-r}, \end{aligned}$$

also

$$(q) = (p^{n-r}) = (p)^{n-r}$$

Damit sind also (für Hauptidealringe) alle Primärideale (außer (0)) Potenzen von Maximalidealen, und Potenzen von Maximalidealen sind bekanntermaßen auch Primärideale. (Das Nullideal hat als einzige Potenzen sich selbst und ist auch Primideal.) $\square$

Beispiel 1.4.2. Betrachte $A := K[X,Y]$ für einen Körper K, $\mathfrak{a} = (X^2, X\cdot Y)$, $\mathfrak{p} = (X) \in \operatorname{Spec}(K[X,Y])$ (denn es ist ${}^{K[X,Y]}\!\diagup_{(X)} \cong K[Y]$ ein Integritätsbereich). Wir haben hier die Inklusionskette

$$\mathfrak{p}^2 = (X^2) \subsetneqq (X^2, X\cdot Y) \subsetneqq (X) = \mathfrak{p},$$

denn $X\cdot Y \notin \mathfrak{p}^2$ und $X \notin \mathfrak{a}$, und $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{(X^2, X\cdot Y)} = (X) = \mathfrak{p}$. Aber $(X^2, X\cdot Y)$ ist nicht primär, da $X\cdot Y \in \mathfrak{a}$, $X \notin \mathfrak{a}$ und $Y \notin \sqrt{\mathfrak{a}} = (X)$.

Frage. Da $K[X,Y]$ noethersch ist, muss $\mathfrak{a}$ eine LNZ haben. Wie sieht eine solche aus? Wie kann sie berechnet werden? Wie eindeutig ist sie?

Ein Maximalideal, welches $\mathfrak{a}$ enthält, ist $\mathfrak{m} := (X,Y)$, mit $\mathfrak{m}^2 = (X^2, X\cdot Y, Y^2)$. Es ist $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p} \cap \mathfrak{m}^2$, und diese Darstellung ist auch unverkürzbar, weil $X \notin \mathfrak{m}^2$ und normal, weil $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$. Unsere Hoffnung ist nun, dass auch $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{m}^2 \subseteq \mathfrak{a}$ ist, dann wären wir ja fertig.

Sei also

$$\begin{aligned}
&F \in \mathfrak{p} \cap \mathfrak{m}^2, \quad \text{d.h.}\\
&F = G(X,Y)\cdot X^2 + H(X,Y)\cdot X\cdot Y + R(X,Y)\cdot Y^2\\
&F = S(X,Y)\cdot X,
\end{aligned}$$

Gleichsetzen und umstellen ergibt

$$\begin{aligned}
&R(X,Y)\cdot Y^2 = X\cdot T(X,Y)\\
&\qquad\qquad (\text{mit } T(X,Y) = S(X,Y) - Y\cdot H(X,Y) - X\cdot G(X,Y))
\end{aligned}$$

Ein Koeffizienten-Vergleich liefert

$$R = X\cdot \tilde{R}(X,Y),$$

also

$$\begin{aligned}
&F = G(X,Y)\cdot X^2 + X\cdot Y\cdot \underbrace{\tilde{\tilde{R}}(X,Y)}_{H(X,Y)+Y\cdot\tilde{R}(X,Y)}\\
\Rightarrow\quad &F \in (X^2, X\cdot Y) = \mathfrak{a}
\end{aligned}$$

Wir haben also wirklich $\mathfrak{a} = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{m}$, $I_{\mathfrak{a}} = \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}\}$ mit $\mathfrak{p} \subsetneqq \mathfrak{m}$, d.h. $\mathfrak{a}$ hat eine eingebettete Komponente, und es ist $J_{\mathfrak{a}} = \{\mathfrak{p}\}$. Dies offenbart sich auch beim Betrachten von Nil und NT des Faktorrings:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Nil}\left({}^{K[X,Y]}\!\diagup_{(X^2, X\cdot Y)}\right) &= {}^{(X)}\!\diagup_{(X^2, X\cdot Y)}\\
&\subsetneqq {}^{(X,Y)}\!\diagup_{(X^2, X\cdot Y)}\\
&= \operatorname{NT}\left({}^{K[X,Y]}\!\diagup_{(X^2, X\cdot Y)}\right)
\end{aligned}$$

Beispiel 1.4.3. Wir betrachten jetzt $A = K[X, Y, Z]$ für einen Körper K und das Ideal $(X^2, XY, XZ, YZ) \subsetneq A$. Gesucht ist wieder eine LNZ von $\mathfrak{a}$. Es ist $\mathfrak{a} \subsetneq (X, Y) =: \mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{a} \subsetneq (X, Z) =: \mathfrak{p}_2$. (Offenbar sind $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \in \operatorname{Specm} A$.)

Wir haben hier $\mathfrak{a} \subsetneq \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$ (wegen $X \in \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \setminus \mathfrak{a}$), sogar $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$, also noch keine Primärzerlegung. Betrachte nun

$$\begin{aligned} \mathfrak{m} &:= (X, Y, Z) \\ \mathfrak{m}^2 &= (X^2, Y^2, Z^2, XY, YZ, Y^2, Z^2) \end{aligned}$$

Man sieht (Übung) $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \mathfrak{m}^2$, und das ist eine LNZ.

LNZ in beliebigen Ringen

Sei A ein Ring, $\mathfrak{a} \subsetneq A$ echtes Ideal. Angenommen, $\mathfrak{a}$ habe eine Lasker-Noether-Zerlegung $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n$, $\mathfrak{q}_i$ primär, $\sqrt{\mathfrak{q}_i} = \mathfrak{p}_i \in \operatorname{Spec} A$.

Frage. Ist diese LNZ „eindeutig“ in dem Sinne, das $\{\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n\}$ eindeutig von $\mathfrak{a}$ bestimmt ist?

> SATZ 1.4.2. *Sei A ein beliebiger Ring, $\mathfrak{a} \subsetneq A$ beliebiges Ideal mit LNZ $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n$ (d.h. unverkürzbar und normal, $\sqrt{\mathfrak{q}_i} =: \mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_j \forall i \neq j$). Dann gilt:*
>
> $$\{\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n\} = \left\{ \sqrt{(\mathfrak{a} : x)} \mid x \in A \setminus \mathfrak{a}, \sqrt{(a : x)} \in \operatorname{Spec} A \right\},$$
>
> *d.h. $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n$ hängen nur von $\mathfrak{a}$ und nicht von der gewählten LNZ ab.*

Beweis. Sei $\mathfrak{a}$ wie im Satz gegeben. Für alle $x \in A \setminus \mathfrak{a}$ gilt dann für das Quotientenideal:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{a} : x) &= \left(\bigcap \mathfrak{q}_i : x \right) \\ &= \{ t \mid \forall i : t \cdot x \in \mathfrak{q}_i \} \\ &= \bigcap_{i=1}^{n} (\mathfrak{q}_i : x) \\ &= \bigcap_{\substack{j \in \{1, \cdots, n\} \\ x \notin \mathfrak{q}_i}} (\mathfrak{q}_i : x) \\ &\subsetneq A, \end{aligned}$$

wobei $(\mathfrak{q}_i : x)$ jeweils entweder A (für $x \in \mathfrak{q}_i$) oder primär (für $x \notin \mathfrak{q}_i$) ist.

Fazit. Hat $\mathfrak{a}$ eine LNZ und ist $x \notin \mathfrak{a}$, so hat auch $(\mathfrak{a} : x)$ eine LNZ.

Das Radikal davon ist

$$\begin{aligned}\sqrt{(\mathfrak{a}:x)} &= \bigcap_{\substack{j\in\{1,\cdots,n\}\\ x\notin\mathfrak{q}_j}} \sqrt{(\mathfrak{q}_j:x)}\\ &= \bigcap_{\substack{j\in\{1,\cdots,n\}\\ x\notin\mathfrak{q}_j}} \mathfrak{p}_j\end{aligned}$$

Betrachten wir nun die Mengengleichheit der Behauptung:

$$\{\mathfrak{p}_1,\cdots,\mathfrak{p}_n\} = \left\{\sqrt{(\mathfrak{a}:x)} \mid x\in A\setminus\mathfrak{a}, \sqrt{(a:x)}\in \operatorname{Spec} A\right\}$$

Wir beweisen beide Inklusionen einzeln.

$\subseteq$: Aufgrund der Unverkürzbarkeit der Darstellung $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n$ gilt

$$\begin{aligned}\forall i: &\quad \mathfrak{q}_i \supsetneqq \mathfrak{q}_1\cap\ldots\cap\cancel{\mathfrak{q}_i}\cap\ldots\cap\mathfrak{q}_n\\ \forall i: &\quad \exists x_i\in(\mathfrak{q}_1\cap\ldots\cap\cancel{\mathfrak{q}_i}\cap\ldots\cap\mathfrak{q}_n)\setminus\mathfrak{q}_i\end{aligned}$$

und damit (weil $(\mathfrak{a}:x_i)$ ein Primärideal ist, also sein Radikal prim)

$$\forall i: \quad \sqrt{(\mathfrak{a}:x_i)} = \mathfrak{p}_i$$

Es ist also für alle $i\in\{1,\cdots,n\}$ wirklich $\mathfrak{p}_i$ von der Form $\sqrt{(\mathfrak{a}:x)}$, mit $x\in A\setminus\mathfrak{a}$.

$\supseteq$: Sei $x\in A\setminus\mathfrak{a}$ derart, dass $\sqrt{(\mathfrak{a}:x)}$ ein Primideal ist. Wir haben dann nach der Vorbetrachtung

$$\sqrt{(\mathfrak{a}:x)} = \bigcap_{\substack{x\in\mathfrak{q}_j\\ i\in\{1,\cdots,n\}}} \mathfrak{p}_j$$

und da $\sqrt{(\mathfrak{a}:x)}$ prim ist,

$$\exists k\in\{1,\cdots,n\}: \quad \mathfrak{p}_k\subseteq\sqrt{(\mathfrak{a}:x)}, x\notin\mathfrak{q}_k$$

also

$$\exists k: \quad \mathfrak{p}_k\subseteq\sqrt{\mathfrak{a}:x} = \bigcap_{\substack{j\\ x\notin\mathfrak{q}_j}} \mathfrak{p}_j\subseteq\mathfrak{p}_k,$$

das heißt

$$\exists k: \mathfrak{p}_k = \sqrt{(\mathfrak{a}:x)}. \qquad \square$$

Beispiel 1.4.4. Sei X ein topologischer Raum, $C_X := C(X,\mathbb{R})$ der Ring der stetigen reellwertigen Funktionen auf X. Wir wissen, dass C_X zwar reduziert, aber i.a. weder noethersch noch Integritätsbereich ist. Auch das Ideal $(0) = \sqrt{(0)}$ ist dann (wenn X nicht I-Bereich) kein Primärideal.

Fragen.

(1) Hat (0) eine LNZ?

(2) Wie sehen die Primärideale in C_X überhaupt aus?

Wir wissen: Falls eine solche LNZ existiert, ist $(0) = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n$ mit $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i} \in \operatorname{Spec} C_X$, mit $\mathfrak{p}_i = \sqrt{((0) : f_i)}$ für alle i, $f_i \in C_X \setminus \{0\}$. Dabei ist offenbar

$$\begin{aligned}
\sqrt{(0 : f_i)} &= \{g \mid \exists n : g^n \cdot f_i = 0\} \\
&= \left\{g \mid \exists n : g^n|_{D(f_i)} = 0\right\} \\
&= \left\{g \mid g|_{D(f_i)} = 0\right\} \\
&= \{g \mid g \cdot f_i = 0\} \\
&= (0 : f_i)
\end{aligned}$$

Dabei ist

$$(0 : f_i) \subseteq \overline{(0 : f_i)}^{C_X},$$

und im Falle kompakter X (dann wird C_X mittels $\|f\| := \max_{x\in X} |f(x)|$ ein normierter Raum) gilt sogar

$$(0, f_i) = \overline{(0, f_i)}^{C_X}.$$

Beweis. Ist $h \in \overline{(0 : f_i)}^{C_X}$, so existiert eine Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $g_n \in (0 : f_i)$ für alle n, mit $g_n \xrightarrow[(n)]{} h$ und $g_n \cdot f_i = 0$. Aufgrund der Kompaktheit gilt

$$\|g_n \cdot f_i - h \cdot f_i\| \leq \underbrace{\|g_n - h\|}_{\to 0} \cdot \|f_i\|,$$

also ist $0 = g \cdot f_i \xrightarrow[(n)]{} h \cdot f_i$, d.h. $h \in (0 : f_i)$. ☐

Fazit. Ist X kompakt, $C_X = C(X,\mathbb{R})$, so hat (0) eine LNZ der Form $(0) = \bigcap_{i=1}^{n} (0 : f_i)$, mit $(0 : f_i) \in \operatorname{Spec}(C_X) \cap \operatorname{Abgid}(C_X)$.

Damit ist auch

$$\begin{aligned}
X &= V((0)) \\
&= \bigcup V\left((0 : f_i)\right)
\end{aligned}$$

mit $I(V(O : f_i)) = \overline{(0 : f_i)}^{C_X} = (0 : f_i)$. Für das weitere benötigen wir etwas mehr Topologie (daher setzen wir das Beispiel nach den folgenden Definitionen und Sätzen fort).

Definition 1.39. *Sei $X \neq \varnothing$ beliebiger topologischer Raum. X heißt (topologisch)* ***irreduzibel****, falls für alle $A, B \in \operatorname{Abg}(X)$ mit $X = A \cup B$ gilt: $A = X$ oder $B = X$.*

Definition 1.40. *Eine Menge A in einem topologischen Raum heißt* ***irreduzibel****, falls A als topologischer Raum mit der von X induzierten Unterraumtopologie irreduzibel ist.*

Ein Raum (bzw. eine Menge) ist also irreduzibel, falls sie sich nicht echt als Vereinigung abgeschlossener Teilmengen darstellen lässt.

Definition 1.41. *Zur Verkürzung schreiben wir für die nichtleeren offenen Mengen eines topologischen Raumes* $\boxed{\operatorname{Off}'(X)}$

$$\operatorname{Off}'(X) := \operatorname{Off}(X) \setminus \{\varnothing\}\,.$$

$\boxed{\text{SATZ 1.4.3.}}$ *(Charakterisierung irreduzibler topologischer Räume)*
Sei $X \neq \varnothing$ ein topologischer Raum. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) X ist irreduzibler topologischer Raum.

(2) Für alle $U \in \operatorname{Off}'(X)$ gilt $\overline{U}^X = X$ (d.h. jede nichtleere offene Menge liegt dicht in X).

(3) Für alle $U_1, U_2 \in \operatorname{Off}'(X)$ gilt: $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$.

(4) Für alle $U_1 \in \operatorname{Off}'(X)$ gilt: U ist zusammenhängend.

Beweis.

(1) $\Rightarrow$ (2) Sei X irreduzibel. Angenommen, es gibt ein $U \in \operatorname{Off}'(X)$ mit $\overline{U}^X \subsetneqq X$, und dabei natürlich $X = U \,\dot\cup\, (X \setminus U)$. Dann könnten wir X zerlegen in

$$X = \underbrace{\overline{U}^X}_{\neq X,\text{ abg.}} \cup \underbrace{X \setminus U}_{\neq X,\text{ abg.}},$$

X wäre also nicht mehr irreduzibel, im Widerspruch zu (1). $\square$(1) $\Rightarrow$ (2)

(2) $\Rightarrow$ (3) Seien $U_1, U_2 \in \operatorname{Off}'(X)$. Wäre $U_1 \cap U_2 = \varnothing$, dann ist $U_2 \subseteq X \setminus U_2$, also $X = \overline{U_1}^X \subseteq \overline{X \setminus U_2}^X = X \setminus U_2$, also $U_2 = \varnothing$, im Widerspruch zur Annahme. $\square$(2) $\Rightarrow$ (3)

(3) $\Rightarrow$ (4) Sei $U \in \operatorname{Off}'(X)$. Angenommen, U ist nicht zusammenhängend, etwa $U = U_1 \,\dot\cup\, U_2$ mit $U_1, U_2 \in \operatorname{Off}'(X)$. Nach (3) gilt $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$, im Widerspruch zur Disjunktheit von U_1 und U_2. $\square$(3) $\Rightarrow$ (4)

(4) ⇒ (1) Angenommen, X sei nicht irreduzibel, also $X = A \cup B$ mit $(A, B) \in (\mathrm{Abg}(X) \setminus \{X\})^2$. Es ist dann $A \cap B \neq \varnothing$ (sonst wären A und B auch offen, und X nicht mehr zusammenhängend) und abgeschlossen. Betrachte $U := X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$ (also Vereinigung offener Mengen). Es ist damit (weil U zusammenhängend ist)

$$\varnothing \neq (X \setminus A) \cap (X \setminus B) = X \setminus (A \cup B) = X \setminus X = \varnothing,$$

offenbar ein Widerspruch. □(4) ⇒ (1)

□

$\boxed{\text{Korollar.}}$ Sei X ein T_2-Raum (Hausdorff). Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(a) X topologisch irreduzibel

(b) $\mathrm{card}(X) = 1$ (also $X = \{x_0\}$).

Ist $\mathrm{card}(X) \geq 2$, so ist X nicht irreduzibel.

Beweis. Einelementige Räume sind offenbar immer irreduzibel.

In T_2-Räumen mit mindestens zwei Punkten gibt es (Trennungsaxiom) immer zwei disjunkte offene Mengen, die jeweils einen dieser Punkte enthalten (also nichtleer sind) – nach Punkt (3) sind diese also nicht irreduzibel. □

$\boxed{I(A)}$ **Definition 1.42.** *Sei X ein topologischer Raum. Für eine Menge $A \subseteq X$ heißt*

$$I(A) := \{f \in C_X \mid f|_A = 0\}$$

*das **Verschwindungsideal** von A.*

Durch Nachrechnen kann man sich überzeugen, dass $I(A)$ wirklich immer ein Ideal ist.

$\boxed{\text{Satz 1.4.4.}}$ Sei (X, d) ein topologischer Raum (nicht unbedingt metrisch). (Bekanntlich gilt dann $\mathrm{Abg}(X) = \{V(\mathfrak{a}) \mid \mathfrak{a} \subseteq C_X \text{ Ideal}\} = \{V(f) \mid f \in C_X\}$). Dann gilt:

(1) $\forall A \in \mathrm{Abg}(X) : A$ ist irreduzibel $\Longleftrightarrow I(A) \in \mathrm{Spec}\, A$.

Für Ideale $\mathfrak{a} \subseteq C_X$ gilt entsprechend: $V(\mathfrak{a})$ ist irreduzibel $\Longleftrightarrow I(V(\mathfrak{a})) \in \mathrm{Spec}(C_X)$.

(2) Ist X außerdem kompakt, so gilt stärker: $V(\mathfrak{a})$ ist irreduzibel $\Leftrightarrow \overline{\mathfrak{a}}^{C_X} \in \mathrm{Spec}(C_X)$.

Beweis.

(1) $\Rightarrow$: Sei A irreduzibel, $I(A) \in \mathrm{Abgid}(C_X)$. Wir müssen zeigen, dass $I(A)$ schon ein Primideal ist. Seien also $f, g \in C_X$ mit $f \cdot g \in I(A)$. Dann ist

$$V(f) \cup V(g) = V(f \cdot g) \supseteq V(I(A)) = A$$

, d.h. $V(f) \cup V(g) \supseteq A$. Da nun A irreduzibel ist, muss es schon in $V(f)$ oder $V(g)$ enthalten sein, also ohne Beschränkung der Allgemeinheit etwa $f \in I(A)$ sein, d.h. $I(A)$ ist prim.

$\Leftarrow$: Sei $A \in \mathrm{Abg}(X)$, $I(A) \in \mathrm{Spec}(C_X)$. (Wir müssen zeigen, dass A irreduzibel ist.) Sei $A = B \cup C$ mit $B, C \in \mathrm{Abg}(X)$. Dann ist $B = V(g)$ und $C = V(h)$ für geeignete $g, h \in C_X$, also

$$A = V(g) \cup V(h) = V(g \cdot h).$$

Damit ist insbesondere $g \cdot h \in I(A)$. Da nun $I(A)$ prim ist, ist (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) $g \in I(A)$, d.h. $V(g) \supseteq V(I(A)) = A \supseteq B = V(g)$, also $A = B$. Es ist also A irreduzibel.

(2) folgt sofort aus (1) mit $\overline{(}^{C_X}\mathfrak{a}) = I(V(\mathfrak{a}))$ für kompakte Räume.

$\square$

SATZ 1.4.5. Sei A ein noetherscher Ring, $A \subsetneqq A$ ein echtes Ideal, $\mathfrak{c} := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{a}^n$. Dann gilt: $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.

Beweis. Die Inklusion $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{c}$ ist klar.

Zunächst eine Vorbetrachtung: Sei $\mathfrak{q}$ ein $\mathfrak{p}$-Primärideal mit $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{q}$, $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}}$ und $\mathfrak{p}^{n_0} \subseteq \mathfrak{q}$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$.

BEHAUPTUNG. Ist $\mathfrak{a} \cdot c \subseteq q$ und q primär, so ist bereits $\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{q}$.

Beweis. Andernfalls wäre $\mathfrak{c} \not\subseteq \mathfrak{q}$, also $\exists c \in \mathfrak{c} \setminus \mathfrak{q}$. Für $a \in A$ ist aber $a \cdot c \in \mathfrak{q}$, also (da $\mathfrak{q}$ Primärideal und $c \notin \mathfrak{q}$) $\forall a \in \mathfrak{a} : a \in \sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{p}$. Das heißt $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$, folglich

$$\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{a}^{n_0} \subseteq \mathfrak{p}^{n_0} \subseteq \mathfrak{q}.$$

Das heißt, aus $\mathfrak{c} \not\subseteq \mathfrak{q}$ folgt $\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{q}$, ein offensichtlicher Widerspruch. $\square$

Betrachte nun die LNZ $\mathfrak{a} \cdot c = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_s$, und dabei $\mathfrak{q}_i$ Primärideale. Dann ist

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{q}_i \quad \forall i \in \{1, \cdots, s\}$$

und nach obiger Betrachtung

$$\begin{aligned} & \mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{q}_i \quad \forall i \in \{1, \cdots, s\}. \\ \Rightarrow \quad & \mathfrak{c} \subseteq \bigcap_i \mathfrak{q}_i \\ & \quad = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{c}, \end{aligned}$$

also $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$. $\square$

Als Folgerung erhalten wir

Satz 1.4.6. *(Krulls Durchschnittssatz)*
Sei A noetherscher Ring, $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal, $\mathfrak{c} := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{a}^n$. Dann gilt:

(1) Es existiert $a \in \mathfrak{a}$ mit $(1-a)\cdot\mathfrak{c} = 0$.

(2) Ist $\mathfrak{a} \subseteq \operatorname{Jac}(A)$, so ist $\mathfrak{c} = (0)$.

(3) Ist $(A, \mathfrak{m})$ auch lokaler Ring, so ist $\mathfrak{c} = (0)$.

(4) Ist A ein Integritätsbereich, so ist $\mathfrak{c} = (0)$.

Beweis.

(1) Aus Satz 1.4.5 folgt $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{c} = \mathfrak{c} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{a}^n$, und $\mathfrak{c} = (c_1, \cdots, c_n)$ ist ein endlich erzeugtes Ideal. Daher lassen sich die c_i als Linearkombination darstellen, etwa mittels

$$c_i = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{ji}\cdot c_j, \quad \text{mit } \alpha_{ji} \in \mathfrak{a} \forall i,j \Rightarrow \quad 0 \qquad = \sum_{j=1}^{r} (\delta_i j - \alpha_i j)\cdot c_j \quad \forall i,$$

und nach dem Determinantentrick ergibt sich

$$0 = \det\left((\delta_i j - \alpha_i j)_{i,j}\right)\cdot c_j \quad \forall j$$

Das heißt, $a := 1 - \det\left((\delta_i j - \alpha_i j)_{i,j}\right) \in \mathfrak{a}$ erfüllt die Behauptung $(1-a)\cdot\mathfrak{c} = (0)$.

(2) Wir haben nach Vorraussetzung und Satz 1.1.4:

$$\mathfrak{a} \subseteq \operatorname{Jac}(A) = \{x \in A \mid \forall y \in A : 1 + x\cdot y \in A^*\}$$

Das heißt, für alle $a \in \mathfrak{a}$ gilt auch $a \in \operatorname{Jac}(A)$, also $1 - a \in A^*$. Dies gilt auch für das $a \in \mathfrak{a}$ aus (1) mit $(1-a)\cdot\mathfrak{c} = (0)$, also ist $\mathfrak{c} = (0)$.

(3) Ist $(A, \mathfrak{m})$ lokaler Ring, so ist $\operatorname{Jac}(A) = \mathfrak{m}$, und jedes echte Ideal $\mathfrak{a} \subsetneqq A$ liegt im Jacobson-Radikal. (2) liefert das Ergebnis.

(4) Ist A ein (noetherscher) Integritätsbereich, $\mathfrak{a} \subsetneqq A$, so existiert weiterhin nach (1) ein $a \in \mathfrak{a}$ mit $(1-a)\cdot\mathfrak{c} = (0)$, wobei $1 - a \neq 0$ ist (sonst wäre $1 \in \mathfrak{a}$), also (weil Integritätsbereich) $1 - a \in \operatorname{NNT}(A)$. Wir haben weiterhin

$$\begin{aligned} (1-a)\cdot c &= 0 \forall c \in \mathfrak{c} \\ \Rightarrow \quad c &= 0 \forall c \in \mathfrak{c} \\ \Rightarrow \quad \mathfrak{c} &= (0) \end{aligned}$$

□

$\boxed{\text{SATZ 1.4.7.}}$ *(Lemma von Artin-Rees)*
Sei A ein noetherscher Ring, M endlich erzeugter (d.h. noetherscher) A-Modul, $N \subseteq M$ ein A-Untermodul (und damit ebenfalls endlich erzeugt). Betrachte nun ein echtes Ideal $\mathfrak{a} \subsetneqq A$, und seine Potenzen $(\mathfrak{a}^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sowie die A-Untermoduln $\mathfrak{a}^n \cdot M \subseteq M$ und $(\mathfrak{a}^n \cdot M) \cap N \subseteq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Dann existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$(\mathfrak{a}^n \cdot M) \cap N = \mathfrak{a}^{n-n_0} \cdot ((\mathfrak{a}^{n_0} \cdot M) \cap N)$$

Beweis. Da A noethersch ist, ist $\mathfrak{a}$ endlich erzeugt, etwa durch $a_1, \cdots, a_r \in \mathfrak{a}$.
Wir betrachten zunächst die äußere direkte Summe

$$\begin{aligned} P &:= \bigoplus_{i\in\mathbb{N}_0} \mathfrak{a}^i \cdot M \\ &= M \oplus \mathfrak{a} \cdot M \oplus \mathfrak{a}^2 \cdot M \oplus \dots \\ &= \left\{ \xi = (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \in \bigtimes_{i\in\mathbb{N}_0} \mathfrak{a}^i \cdot M \;\middle|\; \xi_i = 0 \text{ p.p.} \right\} \end{aligned}$$

P ist ein A-Modul, aber (außer für $M = (0)$ oder $\mathfrak{a} = (0)$) nicht mehr endlich erzeugt. Für alle $\xi \in P$ ist $\xi_i \in \mathfrak{a}^i \cdot M$, d.h.

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{t_i} \alpha_j^{(i)} \cdot y_j^{(i)}, \quad \text{mit } \alpha_j^{(i)} \in \mathfrak{a}^i, y_j^{(i)} \in M,$$

wobei sich die $\alpha_j^{(i)}$ wieder darstellen lassen als

$$\alpha_j^{(i)} = \sum_{\substack{(\nu_1,\cdots,\nu_r) \\ \sum_k \nu_k = i}} \gamma_{(\nu_1,\cdots,\nu_n)} \cdot a_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot a_r^{\nu_r},$$

mit $(\nu_1, \cdots, \nu_r) \in \mathbb{N}_0$, $\gamma_{(\nu_1\cdots,\nu_r)} \in A$. Damit kann man auch $\alpha_j^{(i)} = p_j^{(i)}(a_1, \cdots, a_r)$ schreiben, wobei die $p_j^{(i)} \in A[X_1, \cdots, X_r]$ als homogene Polynome vom Grad i definiert sind durch

$$P_j^{(i)} = \sum_{\substack{(\nu_1,\cdots,\nu_r) \\ \sum_k \nu_k = i}} \gamma_{(\nu_1,\cdots,\nu_n)} \cdot X_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot X_r^{\nu_r}$$

$\boxed{\text{BEHAUPTUNG.}}$ P wird durch die folgende Skalarmultiplikation auch zu einen $A[X_1, \cdots, X_r]$-Modul:

$$\begin{aligned} \cdot : A[X_1, \cdots, X_r] \times P &\longrightarrow P \\ (F(X_1, \cdots, X_r), (\xi_i)_{i \in \mathbb{N}_0}) = &\longmapsto \Bigg(\sum_{\substack{(k,j) \in \mathbb{N}_0^2 \\ k \leq \deg F \\ k+j=i}} F_k(a_1, \cdots, a_r) \cdot \xi_j \Bigg)_{i \in \mathbb{N}_0}, \end{aligned}$$

wobei F_k die homogene Komponente von F mit Grad k ist.

Beweis der Behauptung. Wir haben für ein Polynom

$$F = \sum_{(\nu_1, \cdots, \nu_r)} \beta_{(\nu_1, \cdots, \nu_r)} \cdot X_1^{\nu_1} \cdot \ldots X_r^{\nu_r}$$

die Zerlegung

$$F = F_0 + \ldots + F_N = \sum_{i=1}^{N} F_i$$

in homogene Bestandteile vom Grad i

$$F_i = \sum_{\substack{(\nu_1, \cdots, \nu_r) \\ \nu_1 + \ldots + \nu_r = i}} \beta_{(\nu_1, \cdots, \nu_r)} \cdot X_1^{\nu_1} \cdot \ldots X_r^{\nu_r}$$

Damit ergibt sich

$$F(a_1, \cdots, a_r) \cdot \xi_j = \sum_{k=1}^{N} F_k(a_1, \cdots, a_r) \cdot \xi_j$$

$\square$

P ist also nun ein endlich erzeugter Modul über dem (dank Hilberts Basissatz, Satz 1.3.1) noetherschen Ring $A[X_1, \ldots X_r]$, und

$$\begin{aligned} Q &:= \bigoplus_{i \in \mathbb{N}_0} (\mathfrak{a}^i \cdot M \cap N) \\ &= N \oplus (\mathfrak{a} \cdot M \cap N) \oplus (\mathfrak{a}^2 \cdot M \cap N) \oplus \ldots \end{aligned}$$

ist ein $A[X_1, \ldots X_n]$-Untermodul von P. Dabei gilt offenbar

(i) $P = \sum_{i=1}^{s} A[X_1, \ldots X_s] \cdot (x_i, 0, \ldots)$, wobei $\{x_1, \cdots, x_s\}$ ein A-Erzeugendensystem von M bildet.

(ii) P ist noethersch über $A[X_1, \cdots, X_n]$, $Q \subseteq P$ ist ein $A[X_1, \cdots, X_n]$-Untermodul, also ebenfalls noethersch über $A[X_1, \cdots, X_n]$.

Damit ist Q ein endlich erzeugter $A[X_1, \cdots, X_n]$-Modul, besitzt also ein endliches Erzeugendensystem $\hat{\xi}_1, \dots \hat{\xi}_k$, wobei sich diese schreiben lassen als

$$\hat{\xi}_i = (\hat{\xi}_\nu^{(i)})_{\nu \in \mathbb{N}_0}, \quad \text{mit } \hat{\xi}_\nu^{(i)} \in \mathfrak{a}^\nu \cdot M \cap N$$

d.h.

$$\hat{\xi}_i = \sum_{\nu \in \mathbb{N}_0} (0, \cdots, 0, \underset{(i)}{\hat{\xi}_\nu^{(i)}}, 0, \dots),$$

wobei diese Summen jeweils endlich sind (da Q eine direkte Summe war). Damit existiert (durch Aufdröseln der Summen) auch ein Erzeugendensystem $\left\{\tilde{\xi}_1, \cdots, \tilde{\xi}_m\right\}$ mit

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_i &= (0, \cdots, 0, \tilde{\xi}_{\nu_i}^{(i)}, 0, \dots) \\ &\in (0) \oplus \dots \oplus (0) \oplus (\mathfrak{a}^{\nu_i} \cdot M \cap N) \oplus (0) \oplus \dots \end{aligned}$$

Setzen wir nun

$$n_0 := \max \{\nu_i \mid i \in \{1, \cdots, m\}\},$$

so ist für alle $n \geq n_0$ und $\eta \in \mathfrak{a}^n \cdot M \cap N$ das Tupel $(0, \cdots, 0, \underset{(n)}{\eta}, 0, \dots) \in \mathbb{Q}$, und es lässt sich daher η darstellen als

$$\eta = \sum_{l=1}^m F_l \cdot \tilde{\xi}_l$$

mit

$$\begin{aligned} & \deg F_l = n - \nu_l \\ \xRightarrow{n \geq n_0 \geq \nu_l} \quad & \deg F_l = (n - n_0) + (n_0 - \nu_l), \end{aligned}$$

also kann von F_l ein homogener Faktor vom Grad $n - n_0$ abgespalten werden, d.h.

$$\eta \in \mathfrak{a}^{n-n_0} \cdot (\mathfrak{a}^{n_0} \cdot M \cap N),$$

und damit haben wir die Inklusion $\mathfrak{a}^n \cdot M \cap N \subseteq \mathfrak{a}^{n-n_0} \cdot (\mathfrak{a}^{n_0} \cdot M \cap N)$ gezeigt. Die umgekehrte Inklusion ist trivial, und damit haben wir die Behauptung

$$\exists n_0 : \forall n \geq n_0 : \quad \mathfrak{a}^n \cdot M \cap N = \mathfrak{a}^{n-n_0} \cdot (\mathfrak{a}^{n_0} \cdot M \cap N)$$

gezeigt. □

2 Arithmetik in Ringen

2.1 Faktorielle Ringe, ggT-kgV-Ringe, Bezout-Ringe, etc.

Definition 2.1. *Sei A ein Ring, so ist* $\boxed{A^0}$

$$A^* := \{a \in A \mid \exists b : a \cdot b = 1\}$$ $\boxed{A^*}$

*die **Einheitengruppe**,*

$$A^0 := A \setminus \{0\}$$

und

$$A^\heartsuit := A^\bullet := A \setminus (\{0\} \cup A^*) = A^0 \setminus A^*$$

*heißt das **Herz** des Ringes. Ist $A^\bullet = \varnothing$, so heißt A **herzlos**.* $\boxed{A^\bullet}$

BEMERKUNG 1.	A ist herzlos $\Longleftrightarrow$ A ist ein Körper.

$\boxed{A^\heartsuit}$

Generell enthält das Herz die *interessanten* Elemente des Ringes (und aus arithmetischer Sicht sind Körper uninteressant).

Fragen.

(1) Wie groß ist das Herz?

(2) Wie viele nilpotente Elemente bzw. Nullteiler gibt es?

Vereinbarung 2.2. *Sei für diesen Abschnitt A immer ein Integritätsbereich, also $NT(A) = (0)$.*

Definition 2.3. *Für alle $a, b \in A^0$ seien die Relationen $\mid$ und $\sim$ definiert als* $\boxed{\mid}$

$$\begin{aligned} a|b &:\Longleftrightarrow \exists c \in A: \ b = c \cdot A \\ &\Longleftrightarrow (b) \subseteq (a) \end{aligned}$$ $\boxed{\sim}$

*(a ist **Teiler** von b) und*

$$\begin{aligned} a \sim b &:\Longleftrightarrow a|b \wedge b|a \\ &\Longleftrightarrow (a) = (b) \\ &\Longleftrightarrow \exists \varepsilon \in A^*: \ a = \varepsilon \cdot b \end{aligned}$$

*(a und b sind **assoziiert**).*

Die Relationen sind mit $a|0 \forall a$, $0|a \Leftrightarrow a = 0$ und $a \sim 0 \Leftrightarrow a = 0$ auf ganz $A = A^0 \cup \{0\}$ erweiterbar.

EIGENSCHAFTEN.

(1) $|$ ist eine Teilordnung in A^0 und in A (weil $\subseteq$ eine Teilordnung für Ideale ist).

(2) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation in A (und in A^0).

(3) $A^0/\sim$ ist eine Faktormenge.

Definition 2.4. *Eine Menge $A \subseteq A^0$ heißt* ***volles Repräsentantensystem****, falls die verkettete Abbildung*

$$S \overset{i}{\hookrightarrow} A \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} A^0/\sim$$

bijektiv ist.

Definition 2.5. *Sei $a \in A^\bullet$. a heißt* ***irreduzibel*** *in A, falls*

$$\forall b, c \in A^0 : \quad a = b \cdot c \Rightarrow b \in A^* \vee c \in A^*$$

Eine äquivalente Formulierung ist, dass a nicht echt zerlegbar ist:

$$\nexists b, c \in A^\bullet : \quad a = b \cdot c$$

Definition 2.6. *Ein Element $a \in A^\bullet$ heißt* ***Primelement****, falls $(a) \in \operatorname{Spec} A$ ist (das von a erzeugte Hauptideal ist ein Primideal).*

Äquivalent dazu ist

$$\forall c, b \in A : \quad c \cdot b \in (a) \Rightarrow c \in (a) \vee b \in (a)$$

bzw.

$$\forall (c, b) \in A : \quad a|c \cdot b \Rightarrow a|b \vee a|c$$

Prim

Irr

Definition 2.7. *Wir bezeichnen mit*

$$\operatorname{Irr}(A) := \{a \in A^\bullet \mid a \textit{ irreduzibel}\}$$

die Menge der irreduziblen Elemente und mit

$$\operatorname{Prim}(A) := \{a \in A^\bullet \mid (a) \in \operatorname{Spec}(A)\}$$

die Menge der Primelemente von A.

BEMERKUNG 2.

(1) $\mathrm{Prim}(A) \subseteq \mathrm{Irr}(A)$

(2) Ist A ein Hauptidealring, so ist $\mathrm{Prim}(A) = \mathrm{Irr}(A)$.

(3) Im allgemeinen ist aber $\mathrm{Prim}(A) \subsetneqq \mathrm{Irr}(A)$.

Beweis.

(1) Sei $a \in \mathrm{Prim}(A)$, $a = b \cdot c$. Dann ist $(a) \in \mathrm{Spec}(A)$ und $b \cdot c \in (a)$. Damit ist $b \in (a)$ oder $c \in (a)$, also $b = t \cdot a$ oder $c = b \cdot a$, das heißt $b = t \cdot b \cdot c$ oder $c = s \cdot b \cdot c$. Das heißt, $1 = t \cdot c$ oder $1 = s \cdot b$, also $c \in A^*$ oder $b \in A^*$.

(2) Es bleibt zu zeigen, dass für HIR auch $\mathrm{Irr}(A) \subseteq \mathrm{Prim}(A)$ ist. Sei also $q \in \mathrm{Irr}(A)$. Dann liegt (q) in einem Maximalideal (m), d.h. $m|q$, $q = t \cdot m$ mit $t \in A$. Da q irreduzibel ist, muss $t \in A^*$ sein (weil $m \notin A^*$), also $(q) = (m)$, $(q) \in \mathrm{Specm}\, A \subseteq \mathrm{Spec}\, A$, d.h. $q \in \mathrm{Prim}(A)$.

(3) Wir geben ein Gegenbeispiel an:

BEHAUPTUNG. In $A := \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \mathbb{Z}[i \cdot \sqrt{5}]$ gilt $\mathrm{Irr}(A) \supsetneqq \mathrm{Prim}(A)$.

Beweis. Es ist in diesem Ring

$$2 \cdot 3 = 6 = (1 + \sqrt{-5}) \cdot (1 - \sqrt{-5}),$$

damit ist 2 nicht prim. Aber 2 ist irreduzibel, denn bei $a \cdot b = 2$ müssten $|a| \leq 2$ oder $|b| \leq 2$ sein. Nun kann man einfach alle Elemente mit dieser Eigenschaft (das sind $\{0, 1, -1, 2, -2\}$) überprüfen, und findet nur Zerlegungen mit Einheits-Faktoren. □

□

Definition 2.8. *Seien A ein Integritätsbereich, $a, b \in A^0$.*

(1) Dann heißt $\boxed{\mathrm{Div}(a,b)}$

$$\begin{aligned}\mathrm{Div}(a,b) &:= \{c \in A \mid c|a \textit{ und } c|b\} \\ &= \{c \in A \mid (a) \subseteq (c) \textit{ und} (b) \subseteq (c)\} \\ &= \{c \in A \mid (a) + (b) \subseteq (c)\}\end{aligned}$$

*die Menge der **gemeinsamen Teiler** von a und b.*

(2) Die Menge $\boxed{\mathrm{Mult}(A,B)}$

$$\begin{aligned}\mathrm{Mult}(a,b) &:= \{d \in A \mid a|d \textit{ und } b|d\} \\ &= \{d \in A \mid (d) \subseteq (a) \cap (b)\}\end{aligned}$$

*heißt Menge der **gemeinsamen Vielfachen** von a und b.*

$\boxed{\mathrm{Mult}^*(a,b)}$ *(3) Die Menge*

$$\begin{aligned}\mathrm{Mult}^*(a,b) := \{d \in \mathrm{Mult}(a,b) \mid d|a\cdot b\}&\\ &= \{d \in A \mid (a\cdot b) \subseteq (d) \subseteq (a)\cap(b)\}\\ &\subseteq \mathrm{Mult}(a,b)\end{aligned}$$

*heißt Menge der **speziellen gemeinsamen Vielfachen** von a und b.*

> $\boxed{\text{SATZ 2.1.1.}}$ Es existiert eine kanonische Bijektion
>
> $$\varphi : \mathrm{Div}(a,b) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mult}^*(a,b)$$

Beweis. Sei $c \in \mathrm{Div}(a,b)$, dann ist (eindeutig)

$$a = r_c \cdot c, \quad b = s_c \cdot c,$$

also $a\cdot b = r_c \cdot s_c \cdot c^2$, insbesondere also $c|a\cdot b$ und $\frac{a\cdot b}{c} = r_c \cdot s_c \cdot c \in A$. Wir können also

$$\varphi(c) := \frac{a\cdot b}{c}$$

definieren, wobei $\varphi(c) = a\cdot s_c = b\cdot r \in \mathrm{Mult}^*(a,b)$ ist. Umgekehrt definieren wir

$$\begin{aligned}\psi : \mathrm{Mult}^*(a,b) &\longrightarrow \mathrm{Div}(a,b)\\ m &\mapsto \frac{a\cdot b}{m},\end{aligned}$$

was wegen $(a\cdot b) \subseteq (m) \subseteq (a)\cap(b)$ und entsprechend $a\cdot b = t\cdot m$, also $\frac{ab}{m} = t \in A$, mit $m|a\cdot b$ definierbar ist. Dabei ist $\psi(m) = \frac{a\cdot b}{m} \in \mathrm{Div}(a,b)$, denn $\frac{m}{b} \in A$ und $\frac{m}{b} \in A$.

ψ und φ sind offenbar einander invers, also bijektiv. □

Definition 2.9. *Sei wieder A ein Integritätsbereich und $a, b \in A^0$. Dann haben wir die*
$\boxed{D(a,b)}$ *Idealmengen*

$\boxed{M^*(a,b)}$

$\boxed{M(a,b)}$

$$\begin{aligned}D(a,b) &:= \{(c) \mid c \in \mathrm{Div}(a,b)\}\\ &= \{(c) \mid (a)+(b) \subseteq (c)\},\\ M^*(a,b) &= \{(d) \mid d \in \mathrm{Mult}^*(a,b)\}\\ &= \{(d) \mid (a\cdot b) \subseteq (d) \subseteq (a)\cap(b)\}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}M(a,b) &= \{(d) \mid d \in \mathrm{Mult}(a,b)\}\\ &= \{(d) \mid (d) \subseteq (a)\cap(b)\}\end{aligned}$$

Hierbei gibt es kanonische Projektionen und entsprechende Bijektionen:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Div}(a,b) \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & \mathrm{Div}(a,b)/\sim \arrow[dl, "\sim"] \\ D(a,b) & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mult}(a,b) \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & \mathrm{Mult}(a,b)/\sim \arrow[dl, "\sim"] \\ M(a,b) & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mult}^*(a,b) \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & \mathrm{Mult}^*(a,b)/\sim \arrow[dl, "\sim"] \\ M^*(a,b) & \end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{Korollar.}}$ Man hat folgendes kommutative Diagramm mit horizontalen Bijektionen:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Div}(a,b) \arrow[r, "\varphi", "\sim"'] \arrow[d, two heads, "(\square)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Mult}^*(a,b) \arrow[d, two heads, "(\square)"] \\ D(a,b) \arrow[r, "\hat{\varphi}", "\sim"'] & M^*(a,b) \end{tikzcd}$$

Dabei ist $\hat{\varphi}((c)) := (\varphi(c))$ wohldefiniert und ergibt eine bijektive Abbildung. Dabei gilt für $c, c' \in \mathrm{Div}(a,b)$ immer $c|c' \Rightarrow \frac{a \cdot b}{c'} | \frac{a \cdot b}{c}$, d.h. φ und $\hat{\varphi}$ sind antimonoton bzgl. $|$ bzw. $\subseteq$.

Definition 2.10. *Seien* $(a,b) \in (A^0)^2$.

Das Paar (a,b) *besitzt ein* ggT*-Ideal bzw. einen* ***größten gemeinsamen Teiler****, falls* $D(a,b)$ *ein (bzgl.* $\subseteq$*) kleinstes Element besitzt.*

(a,b) *besitzt ein* kgV***-Ideal*** *(bzw. ein* ***kleinstes gemeinsames Vielfaches****), falls* $M(a,b)$ *ein* $\subseteq$*-größtes Element besitzt.*

Die (bis auf Einheitsfaktoren eindeutigen) erzeugenden Elemente dieser größten bzw. kleinsten Ideale bezeichnen wir mit $\mathrm{ggT}(a,b)$ *und* $\mathrm{kgV}(a,b)$*.* $\boxed{\mathrm{ggT}(a,b)}$

$\boxed{\mathrm{kgV}(a,b)}$

$\boxed{\text{Satz 2.1.2.}}$ Sei A ein Integritätsbereich. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) Für alle $a, b \in A^0$ existiert ein größter gemeinsamer Teiler (d.h. A ist ein ggT-**Ring**).

(2) Für alle $a, b \in A^0$ gilt: $(a) \cap (b)$ ist Hauptideal, d.h. Schnitte von Hauptidealen in A sind Hauptideale.

(3) Für alle $a, b \in A^0$ existiert ein kleinstes gemeinsames Vielfaches (d.h. A ist kgV-**Ring**).

Beweis.

(3) $\Rightarrow$ (2): Sei A ein kgV-Ring, $(m) \in M(a,b)$ ein größtes Element in $M(a,b)$, also $(m) \subseteq (a) \cap (b)$. Wir haben zu zeigen, dass auch die umgekehrte Inklusion gilt.

Sei $t \in (a) \cap (b)$, also $(t) \subseteq (a) \cap (b)$. Da (m) maximal war, ist auch $(t) \subseteq (m)$, also $t \in (m)$.

Damit ist $(m) = (a) \cap (b)$ ein Hauptideal.

(2) $\Rightarrow$ (3): Ist $(a) \cap (b) = (\delta)$ ein Hauptideal, so ist (δ) offenbar das größte Element in $M(a,b)$.

(3) $\Rightarrow$ (1): Sei A ein kgV-Ring, $a, b \in A^0$. Dann existiert ein $(m) = \max M(a,b)$, und da $(a \cdot b)$ auch in $M(a,b)$ liegt, ist sogar

$$(a \cdot b) \subseteq (m) \subseteq (a) \cap (b).$$

Das heißt, $(m) \in M^*(a,b)$, und offenbar auch das größte Element in $M^*(a,b)$. Wegen der Antimonotonie und Bijektivität von $\hat{\varphi}$ existiert entsprechend auch ein kleinstes Element in $D(a,b)$, nämlich $\hat{\varphi}((m)) = (\varphi(m)) = \left(\frac{a \cdot b}{m}\right)$.

Damit ist A auch ein ggT-Ring.

(1) $\Rightarrow$ (3): Sei A ein ggT-Ring, $a, b \in A^0$, (c) ein kleinstes Element in $D(a,b)$, insbesondere also $(a) + (b) \subseteq (c)$. Dann ist (wieder wegen $\hat{\varphi}$) $\left(\frac{a \cdot b}{c}\right) =: (m)$ ein größtes Element in $M^*(a,b)$. Sei nun $x \in A^0$ mit $(x) \subseteq (a) \cap (b)$. Es genügt zu zeigen, dass auch $(x) \subseteq (m)$ ist.

Da A ein ggT-Ring ist, existiert auch $(\delta) := \min D(x, m)$. Damit ist

$$\frac{a \cdot b}{m} = m = t \cdot \delta \quad \text{für ein } t \in A^0,$$

also $a \cdot b = c \cdot t \cdot \delta$, d.h. $(a \cdot b) \subseteq (\delta)$. Zusammen haben wir

$$\begin{array}{rlr}
 & (x) \subseteq (a) \cap (b), & (a \cdot b) \subseteq (m) \subseteq (a) \cap (b) \\
\Rightarrow & (x) \subseteq (a), & (x) \subseteq (b), \\
 & (m) \subseteq (a), & (m) \subseteq (b). \\
\Rightarrow & (x) + (m) \subseteq (a), & (x) + (m) \subseteq (b) \\
\Rightarrow & (x) + (m) \subseteq (a) \cap (b) &
\end{array}$$

und außerdem ist $(x) + (m) \subseteq (\delta)$, (δ) ist das kleinste Element in $D(x, m)$.

$$\Rightarrow \quad (a \cdot b) \subseteq (\delta) \subseteq (a) \cap (b), \qquad (a \cdot b) \subseteq (m) \subseteq (a) \cap (b)$$

Da nun m das größte Element mit dieser Eigenschaft ist,haben wir

$$(\delta) \subseteq (m),$$

und $(m) \subseteq \delta$ gilt ja wegen $(\delta) = \mathrm{ggT}(x, m)$ sowieso, also

$$\begin{array}{rl}
 & (\delta) = (m) \\
\Rightarrow & (x) \subseteq (x) + (m) \subseteq (m) \\
\Rightarrow & (x) \subseteq (m)
\end{array}$$

Das heißt, (m) ist größtes Element in $M(a, b)$, also ist A wirklich ein kgV-Ring. □

Definition 2.11. *Ein Integritätsbereich A heißt* ggT-kgV***-Ring****, falls eine der äquivalenten Bedingungen aus Satz 2.1.2 gilt.*

KOROLLAR. Das heißt, folgende Bedingungen sind für einen Integritätsbereich äquivalent:

(1) A ist ein ggT-kgV-Ring.

(2) A ist ein ggT-Ring.

(3) A ist ein kgV-Ring.

(4) $\forall a, b \in A : \quad (a) \cap (b)$ ist Hauptideal.

(5) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall a_1, \cdots, a_n \in A : \quad \bigcap_{i=1}^{n} (a_i)$ ist Hauptideal.

Bemerkung.

(1) Alle Hauptidealringe sind offenbar auch ggT-kgV-Ringe.

(2) Die Umkehrung gilt nicht. (Z.B. ist $\mathcal{H}ol(\mathbb{C})$ ein ggT-kgV-Ring, aber kein HIR, nicht einmal noethersch. $\mathbb{Z}[X]$ ist noethersch, ggT-kgV-Ring, aber kein HIR.)

(3) Für HIR gilt das sogenannte **Lemma von Bezout**:

$\boxed{\text{Lemma von Bezout.}}$ Jedes Erzeugende des ggT-Ideals für (a, b) ist eine Linearkombination von a und b:

$$(\mathrm{ggT}(a, b)) = (a) + (b).$$

(4) In beliebigen ggT-kgV-Ringen A ist zwar $(a) \cap (b)$ wieder ein Hauptideal, aber $(a)+(b)$ muss kein Hauptideal sein, obwohl $D(a, b)$ ein kleinstes Element hat. (Ein Beispiel ist $\mathbb{Z}[X]$.)

(5) Für Integritätsbereiche A gilt allgemein: Ist für alle $a, b \in A^0$ die Summe $(a) + (b)$ ein Hauptideal, so ist auch der Schnitt zweier Hauptideale stets ein Hauptideal.

Definition 2.12. *Ein Integritätsbereich A heißt **Bezout-Ring**, falls in A das **Lemma von Bezout** gilt, d.h.*

$$\forall a, b \in A^2 : \quad (a) + (b) \text{ ist ein Hauptideal}$$

$\boxed{\text{Bemerkung 3.}}$ Wir haben also folgende Inklusionskette:

$$\{\mathrm{HIR}\} \subsetneqq \{\text{Bezout-Ringe}\} \subsetneqq$$
$$\subsetneqq \{\text{ggT-kgV-Ringe}\} \subsetneqq \{\text{Integritätsbereiche}\}$$

Arithmetisches Studium der Ringe $\mathcal{H}ol(\Omega)$

Erinnerung. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, d.h. offen und zusammenhängend. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt **holomorph**, falls für alle $z_0 \in \Omega$ die Funktion f in z_0 komplex differenzierbar ist.

Äquivalent dazu ist:

$$\forall z_0 \in \Omega : \ \exists P \in \mathbb{C}[[X]], \ P = \sum_{\nu \geq 0} a_\nu X^\nu,$$
$$P \text{ konvergent in einer Umgebung } U \text{ von } z_0, \text{ und } f|_U = P|_U$$

sowie (auf dieser Umgebung U)

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{\nu \geq 1} \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!} \cdot (z - z_0)^\nu$$

Definition 2.13. *Wir bezeichnen mit*

$$\mathcal{H}ol(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f \text{ holomorph}\}$$
$$\mathcal{H}ol'(\Omega) := \mathcal{H}ol(\Omega) \setminus \{0\}$$

die Mengen der holomorphen (bzw. nichttrivialen holomorphen) Funktionen auf Ω.

Definition 2.14. *Sei $f \in \mathcal{H}ol(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$, $f(z_0) = 0$ (d.h. $z_0 \in V(f)$). Dann kann man f darstellen als*

$$\begin{aligned} f(z) &= (z - z_0)^k \cdot \sum_{\nu \geq 0} b_\nu \cdot (z - z_0)^\nu, \quad k \geq 1 \\ &= (z - z_0)^k \cdot g(z), \quad g(z_0) \neq 0 \end{aligned}$$

Für solche Funktionen heißt dann $\boxed{m(f, z_0)}$

(2.1) $$m(f, z_0) := \max \left\{ l \in \mathbb{N} \mid f = (z - z_0)^l \cdot \psi, \psi \in \mathcal{H}ol(\Omega) \right\}$$

die ***Vielfachheit*** *der Nullstelle z_0 von f.*

Bemerkung. Es ist dann auch

$$\begin{aligned} m(f, z_0) &= \max \left\{ l \in \mathbb{N} \mid f^{(l)}(z_0) = 0 \right\} \\ &= \max \left\{ l \in \mathbb{N} \mid a_l = 0, \ f = \sum_{\nu \geq 0} a_\nu \cdot (X - z_0)^\nu \right\} \end{aligned}$$

Analog definiert man

Definition 2.15. *Ist $f(z_1) = w \in \mathbb{C}$, so heißt z_1 eine w-Stelle von f der* ***Vielfachheit*** *$k = m(f - w, z_1)$.*

Ist $f \in \mathcal{H}ol'(\Omega)$, so ist $V(f) \subsetneqq \Omega$ diskret, also erst recht höchstens abzählbar. Das führt uns zu der folgenden Definition:

Definition 2.16. *Sei $Z \subsetneqq \Omega$ eine diskrete Teilmenge, $m : Z \to \mathbb{N}_0$ eine Abbildung. Dann heißt (Z, m) eine* ***Nullstellenverteilung*** *auf $\Omega \subseteq \mathbb{C}$.*

Frage. Sei (Z, m) eine Nullstellenverteilung auf Ω. Existiert dann immer ein $f \in \mathcal{H}ol(\Omega)$ mit $V(f) = Z$ und $m(f, z) = m(z) \forall z \in Z$?

Diese Frage beantwortet der folgende Satz:

> Satz ohne Nummer. *(Weierstraßscher Produktsatz)*
> Für jede Nullstellenverteilung (Z, m) auf einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ existiert mindestens ein $f \in \mathcal{H}ol(\Omega)$ mit $V(f) = Z$ und $m(f, z) = m(z)$ für alle $z \in Z$.

Beweisidee. Eine Idee zum konstruktiven Beweis kommt schon aus dem Namen des Satzes, man nehme etwa $f := \prod_{z \in Z} (X - z)^{m(z)}$ und überprüfe, dass das die Behauptung erfüllt. □

Es gilt sogar noch allgemeiner def folgende Satz:

$\boxed{\text{Satz ohne Nummer.}}$ *(Interpolationssatz von Weierstraß/Mittag-Leffler)*
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, (Z, m) eine Nullstellenverteilung in Ω und $(w_{z,n} \in \mathbb{C} \mid z \in Z, n \in \{0, \cdots, m(z)\})$ eine Familie komplexer Zahlen (bzw. $(P_z \in \mathbb{C}[X])_{z \in Z}$ eine Familie von Polynomen, mit $P_z \leq m(z)$).
Dann existiert ein $f \in \mathcal{H}ol(\Omega)$ mit

$$\forall z \in \mathbb{Z}, \forall n \in \{0, \cdots, m(z)\} : \quad f^{(n)}(z) = n! \cdot w_{z,n}$$

(bzw. $f(\xi) = P_z(\xi) + \sum\limits_{k > m(z)} \frac{f^{(k)}(z)}{k!} \cdot (\xi - z)^k$ für alle $z \in Z$).

Das führt uns unserem eigentlichen Ziel näher:

$\boxed{\text{Satz 2.1.3.}}$ Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann gilt:

(1) $\mathcal{H}ol(\Omega)$ ist ein Bezout-Ring.

(2) Für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subsetneqq \mathcal{H}ol(\Omega)$ gilt: $\mathfrak{a}$ ist entweder ein Hauptideal oder nicht endlich erzeugt.

(3) $\mathcal{H}ol(\Omega)$ ist ein ggT-kgV-Ring.

Beweis.

(1) Wir haben zunächst zu zeigen, dass $\mathcal{H}ol(\Omega)$ ein Bezout-Ring ist, also für alle $f, g \in \mathcal{H}ol(\Omega)$ das Ideal $(f) + (g)$ auch ein Hauptideal ist.

Fall 1 Betrachten wir zunächst den Fall $V(f) \cap V(g) = \varnothing$, d.h. f und g haben keine gemeinsamen Nullstellen. Dann haben wir die Nullstellenverteilungen von f und g,

$$\begin{aligned} \big(V(f), \quad & m_f : V(f) \to \mathbb{N}_0\big) \\ & \alpha \mapsto m(f, \alpha) \\ \big(V(g), \quad & m_g : V(g) \to \mathbb{N}_0\big). \\ & \alpha \mapsto m(g, \alpha) \end{aligned}$$

$V(f) \,\dot\cup\, V(g)$ ist wieder diskret. Der Interpolationssatz liefert die Existenz eines $\varphi \in \mathcal{H}ol(\Omega)$ mit
(i) $m(1 - \varphi, \beta) = m(g, \beta) \forall \beta \in V(g)$,
(ii) $m(\varphi, \alpha) = m(f, \alpha) \forall \alpha \in V(f)$.
Dann ist $h_2 := \frac{1-\varphi}{g} \in \mathcal{M}er(\Omega)$, und wegen (i) auch in $\mathcal{H}ol(\Omega)$, da „sich die Nullstellen von g mit denen von $1 - \varphi$ wegkürzen". Wir haben also $\varphi = 1 - h_2 \cdot g$. Die Funktion $h_1 := \frac{\varphi}{f} = \frac{1 - h_2 \cdot g}{f}$ ist wegen (ii) ebenfalls holomorph, und wir erhalten $h_1 \cdot f + h_2 \cdot g = 1$. Es ist also $(f) + (g) = (1)$, das triviale Hauptideal.

Fall 2 Ist $V(f) \cap V(g) \neq \varnothing$, dann definieren wir

$$\begin{aligned} m : V(f) \cap V(g) &\longrightarrow \mathbb{N}_0 \\ \gamma &\longmapsto \min\{m(f,\gamma), m(g,\gamma)\} \end{aligned}$$

Nach dem Interpolationssatz existiert ein $\varphi \in \mathcal{H}ol(\Omega)$ mit Nullstellenverteilung $(V(f) \cap V(g), m)$. Betrachte nun $\frac{f}{\varphi}$ und $\frac{g}{\varphi}$. Diese sind beide in $\mathcal{H}ol(\Omega)$, mit $V(\frac{f}{\varphi}) \cap V(\frac{g}{\varphi}) = \varnothing$. Nach den Überlegungen aus Fall 1 existieren nun $h_1, h_2 \in \mathcal{H}ol(\Omega)$ mit

$$h_1 \cdot \frac{f}{\varphi} + h_2 \cdot \frac{g}{\varphi} = 1,$$

also $h_1 \cdot f + h_2 \cdot g = \varphi$. Wir haben also $(\varphi) \subseteq (f) + (g)$, mit $f = \varphi \cdot \frac{f}{\varphi} \in (\varphi)$ und entsprechend $g \in \varphi$, also auch $(f) + (g) \subseteq (\varphi)$, also

$$(f) + (g) = (\varphi),$$

ein Hauptideal.

$V(\Omega)$ ist also ein Bezout-Ring.

(2) folgt aus (1): Sei ein Ideal $\mathfrak{a}$ endlich erzeugt, also $\mathfrak{a} = (f_1, \cdots, f_n)$. Ist $n = 1$, so ist $\mathfrak{a}$ ein Hauptideal. Ist $n = 2$, so ist $(f_1, f_2) = (f_1) + (f_2)$ aufgrund der Bezout-Eigenschaft ein Hauptideal. Induktiv gilt dies nun auch für weitere $n \in \mathbb{N}$.

(3) Dies ist eine Folgerung aus (1), nach Bemerkung 3 (auf Seite 84).

□

Man kann nun fragen:

Fragen.

(1) Existieren irreduzible Elemente in $\mathcal{H}ol(\Omega)$?

(2) Existieren Primelemente in $\mathcal{H}ol(\Omega)$?

(3) Falls sie existieren, wie sehen sie aus?

LEMMA. Sei A ein ggT-kgV-Ring. Dann gilt $\mathrm{Irr}(A) = \mathrm{Prim}(A)$.

Beweis. $\mathrm{Prim}(A) \subseteq \mathrm{Irr}(A)$ gilt stets. Wir untersuchen also die Gegenrichtung.
Sei $q \in \mathrm{Irr}(A)$. Dann gilt für alle $a \in A^0$:

$$\mathrm{ggT}(q,a) = \begin{cases} q & \text{falls } q|a \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir haben also $q = \Lambda \cdot \mathrm{ggT}(q,a)$, mit $\lambda \in A^*$ oder $\mathrm{ggT}(q,a) \in A^*$. Sei nun $b \cdot c \in (q)$, und $b \notin (q)$. Es ist dann $b \cdot c = q \cdot t$, mit $t \in A$, $b|q \cdot t$, also $\mathrm{ggT}(b,q) = 1$. Damit ist $b|t$, $t = \beta \cdot b$, $\beta \in A$. Folglich ist $c = q \cdot \beta$, also $c \in (q)$. (q) ist also ein Primideal, d.h. $q \in \mathrm{Prim}(A)$. Damit ist wirklich $\mathrm{Prim}(A) = \mathrm{Irr}(A)$. □

SATZ 2.1.4. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet. Dann gilt:

$$\text{(1)}\quad \operatorname{Irr}(\mathcal{H}ol(\mathbb{C})) = \left\{ f \in \mathcal{H}ol(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{c} V(f) = \{z_0\} \subsetneqq \Omega, \\ m(z_0, f) = 1 \end{array} \right\}$$
$$= \left\{ f \in \mathcal{H}ol(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists z_0 \in \Omega, g \in \mathcal{H}ol(\Omega) : \\ f(z) = (z - z_0) \cdot g(z), V(g) = \varnothing \end{array} \right\}$$

$$\text{(2)}\quad \operatorname{Irr}(\mathcal{H}ol(\Omega)) = \operatorname{Prim}(\mathcal{H}ol(\Omega))$$

Beweis.

(1) Sei $f \in \operatorname{Irr}(\mathcal{H}ol(\Omega))$. Dann ist $f \neq 0$, und $f \notin \mathcal{H}ol(\Omega)^*$, d.h. $V(f) \neq \varnothing$. Damit existiert $z_0 \in \Omega$ mit $f = (z - z_0) \cdot h$, $h \in \mathcal{H}ol(\Omega)$. Da f irreduzibel war, muss $h \in \mathcal{H}ol(\Omega)^*$ sein, also $V(h) = \varnothing$.

Umgekehrt: Sei $f = \varphi \cdot \psi$ mit $\varphi, \psi \in \mathcal{H}ol(\Omega)$, mit $V(\varphi) \cup V(\psi) = V(f) = \{z_0\}$ und $m(f, z_0)$. Dann muss $V(\varphi) = \varnothing$ oder $V(\psi) = \varnothing$ sein, also $\varphi \in \mathcal{H}ol(\Omega)^*$ oder $\psi \in \mathcal{H}ol(\Omega)^*$. □(1).

(2) Dies folgt aus dem vorangegangenen Lemma.

□

BEMERKUNG 1. Aus dem bisherigen folgt sofort (für Integritätsbereiche):

$$A \text{ ist HIR} \Longleftrightarrow A \text{ ist noethersch und Bezoutring}$$

Beweis.

$\Rightarrow$: Klar.

$\Leftarrow$: A noethersch $\Rightarrow$ jedes Ideal ist endlich erzeugt.
A Bezoutring $\Rightarrow$ jedes endlich erzeugte Ideal ist ein Hauptideal.
$\Rightarrow$ Jedes Ideal ist ein Hauptideal. □

SATZ 2.1.5. *(Verallgemeinertes Gauß'sches Lemma für* ggT-kgV-*Ringe)*
Sei A ein ggT-kgV-Ring, $a, b, c \in A^0$. Dann gilt:

(1) $\operatorname{ggT}(a \cdot c, b \cdot c) = \operatorname{ggT}(a, b) \cdot c$

(2) Ist $\operatorname{ggT}(a, b) = 1$ und $a | b \cdot c$, so $a | c$.

(3) Ist $\operatorname{ggT}(a, b) = 1$, so ist $a \cdot b | c$ genau dann, wenn $a | c$ und $b | c$.

(4) Es ist $(\operatorname{ggT}(a, b) = 1 \text{ und } \operatorname{ggT}(a, c) = 1) \Longleftrightarrow \operatorname{ggT}(a, b \cdot c) = 1$.

Dies gilt insbesondere auch im nichtnoetherschen Ring $\mathcal{H}ol(\Omega)$, wo keine Primzerlegung existiert.

Beweis.

(1) Sei $\mathrm{ggT}(a,b) = r$ (d.h. $(a)+(b) \subseteq (r)$ und (r) minimal mit dieser Eigenschaft, d.h. minimal in $D(a,b)$.), sei $\mathrm{ggT}(ac,bc) = \delta$ (d.h. (δ) minimal in $D(ac,bc)$). Es ist dann $a = \alpha \cdot r$, $b = \beta \cdot r$ mit geeigneten $\alpha, \beta \in A$, und $a \cdot c) + (b \cdot c) \subseteq (r \cdot c)$. Daher haben wir auch $(\delta) \subseteq (r \cdot c)$, mit $\delta = t \cdot r \cdot c$ für ein geeignetes $t \in A$. Weiterhin ist $a \cdot c = u \cdot \delta$ und $b \cdot c = v \cdot \delta$ mit geeigneten $u, v \in A$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} a \cdot c &= u \cdot t \cdot r \cdot c \\ b \cdot c &= v \cdot t \cdot r \cdot c \\ \Rightarrow \quad a &= u \cdot t \cdot r \\ b &= v \cdot t \cdot r \\ \Rightarrow \quad (a) &\subseteq (t \cdot r), \quad (b) \subseteq (t \cdot r) \\ \Rightarrow \quad (a)+(b) &\subseteq (t \cdot r) \end{aligned}$$

und weil (r) minimal mit dieser Eigenschaft ist, ist auch

$$\begin{aligned} (r) &\subseteq (t \cdot r) \\ \Rightarrow \quad (r) &= (t \cdot r), t \in A^* \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad (\delta) = (r \cdot c) \Rightarrow \quad (\mathrm{ggT}(ac,bc)) = (\delta) = (rc) = (\mathrm{ggT}(a,b) \cdot c)$$

(2) Sei $\mathrm{ggT}(a,b) = 1$, $a|b \cdot c$. Nach (1) ist $\mathrm{ggT}(ac,bc) = c$, mit $a|ac$, $a|bc$. also ist $a \mid \mathrm{ggT}(ac,bc) = c$, d.h. $a|c$.

(3) und (4) Übungsaufgabe.

□

Man kann die Definitionen von D, M, M^* auch verallgemeinern:

Definition 2.17. *Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ definieren wir die Idealmengen*

$$\begin{aligned} D(a_1, \cdots, a_n) &:= \left\{ (c) \mid \sum_{i=1}^{n} (a_i) \subseteq (c) \right\} \\ M(a_1, \cdots, a_n) &:= \left\{ (m) \mid (m) \subseteq \bigcup_i (a_i) \right\} \\ M^*(a_1, \cdots, a_n) &:= \left\{ (\delta) \mid (a_1 \cdot \ldots \cdot a_n) \subseteq (m) \subseteq \bigcup_i (a_i) \right\} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathrm{ggT}(a_1,\dots a_n)}$

$\boxed{\mathrm{kgV}(a_1,\cdots,a_n)}$

BEMERKUNG 2. Durch Induktion über n erhalten wird, dass es in ggT-kgV-Ringen in D $\subseteq$-kleinste, in M bzw. M^* $\subseteq$-größte Elemente (Ideale) gibt. Deren (wieder bis auf Einheitsfaktoren eindeutige) erzeugende Elemente nennen wir analog **größter gemeinsamer Teiler** $\mathrm{ggT}(a_1,\dots a_n)$ und **kleinstes gemeinsames Vielfaches** $\mathrm{kgV}(a_1,\cdots,a_n)$. Dabei gilt:

$$\begin{aligned}\mathrm{ggT}(a_1,\cdots,a_n) &= \mathrm{ggT}(\mathrm{ggT}(a_1,\cdots,a_{n-1}),a_n)\\ \mathrm{kgV}(a_1,\cdots,a_n) &= \mathrm{kgV}(\mathrm{kgV}(a_1,\cdots,a_{n-1}),a_n)\end{aligned}$$

Faktorialität

BEMERKUNG 1. Sei A ein Integritätsbereich. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) Für jede Menge $\mathfrak{M}$ von Hauptidealen gilt: $\mathfrak{M}$ hat (mindestens) ein maximales Element.

(2) Jede aufsteigende Kette von Hauptidealen

$$(a_1) \subseteq (a_2) \subseteq \ldots \subseteq (a_n) \subseteq \ldots$$

wird stationär.

Definition 2.18. *Ein Integritätsbereich A, der die Bedingungen aus der vorangehenden Bemerkung erfüllt, heißt* ***quasifaktoriell****.*

Definition 2.19. *Ein Integritätsbereich A heißt* ***semifaktoriell*** *oder* E_0***-Ring****, falls gilt:*

$$\forall a \in A^\bullet : \quad \exists n \in \mathbb{N} : \quad \exists (q_1,\cdots,q_n) \in \mathrm{Irr}(A)^n : \quad a = q_1 \cdot \ldots \cdot q_n,$$

in Worten: Jedes $a \in A^\bullet$ ist zerlegbar in ein Produkt aus endlich vielen irreduziblen Faktoren.

Beispiel 2.1.1.

- $\mathbb{Z}$ ist semifaktoriell und quasifaktoriell.
- $\mathcal{H}ol(\Omega)$ ist nicht semifaktoriell, da sonst jedes $f \in \mathcal{H}ol(\Omega)$ nur endlich viele Nullstellen hätte.

BEMERKUNG 2. Es gilt folgende Inklusionskette:

$$\left\{\begin{matrix}\text{Noethersche}\\ \text{Integritätsbereiche}\end{matrix}\right\} \overset{(1)}{\subseteq} \left\{\begin{matrix}\text{quasifaktorielle}\\ \text{Ringe}\end{matrix}\right\} \overset{(2)}{\subseteq} \left\{\begin{matrix}\text{semifaktorielle}\\ \text{Ringe}\end{matrix}\right\}$$

Beweis.

(1) ist klar. (Die Bedingungen gelten ja schon für alle Ideale, erst recht für Hauptideale.)

(2) Sei A ein quasifaktorieller Ring. Angenommen, A ist nicht semifaktoriell, dann ist die Menge

$$\mathfrak{M} := \left\{ (a) \;\middle|\; a \in A^\bullet, \begin{array}{c} a \text{ ist nicht zerlegbar in} \\ \text{irreduzible Elemente} \end{array} \right\}$$

nicht leer. Da A quasifaktoriell ist, existiert ein maximales Element (a_*) in $\mathfrak{M}$. Es ist $a_* \in A^\bullet \setminus \mathrm{Irr}(A)$. Damit existieren $b, c \in A^\bullet$ mit $a_* = b \cdot c$, also $(a_*) \subsetneqq (b)$ und $(a_*) \subsetneqq (c)$. Da (a_*) maximal in $\mathfrak{M}$ war, ist $(b) \notin \mathfrak{M}$ und $(c) \notin \mathfrak{M}$, also sind b und c zerlegbar in endlich viele irreduzible Elemente. Wir haben also

$$a_* = b \cdot d = \underbrace{q_1 \cdot \ldots \cdot q_r}_{b} \cdot \underbrace{q_1' \cdot \ldots \cdot q_s'}_{c},$$

damit ist a_* also doch als endliches Produkt irreduzibler Elemente darstellbar. Die Annahme war also falsch, A ist semifaktoriell. □

$\boxed{\text{KOROLLAR.}}$ Ist A quasifaktoriell (oder gar noethersch) und nicht herzlos, so ist $\mathrm{Irr}(A) \neq \varnothing$.

Definition 2.20. *Sei A ein Integritätsbereich. A heißt* ***faktorieller Ring*** *oder* ***ZPE-Ring*** *(für „Zerlegung in Primelemente") bzw.* ***UFD*** *(für „Unique Factorization Domain"), falls*

(1) A ist semifaktoriell

(2) Die (nach (1) existierende) Faktorisierung eines Elementes $a \in A^\bullet$ ist im wesentlichen eindeutig, d.h. für

$$q_1 \cdot \ldots \cdot q_r = q_1' \cdot \ldots \cdot q_s$$

mit irreduziblen q_i und q_j' gilt

$$r = s, \quad \exists \sigma \in \mathfrak{S}_r : \quad q_j \sim q'_{\sigma(j)}$$

Bemerkung.

(1) Bei faktoriellen Ringen A können die Faktorisierungen in irreduzible Elemente sogar eindeutig gemacht werden, indem ein vollständiges Repräsentantensystem $\mathcal{P}$ für $\mathrm{Irr}(A)$ gewählt wird, also ein $\mathcal{P} \subseteq \mathrm{Irr}(\mathcal{A})$ mit

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P} \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend right, "\sim"'] & \mathrm{Irr}(A) \arrow[r, two heads] & \mathrm{Irr}(A)/\sim \end{tikzcd}$$

Dann gilt:

$$\forall a \in A^0 : \quad a = \varepsilon \cdot q_1 \cdot \ldots \cdot q_r, \quad \text{mit} \quad r \in \mathbb{N}_0, \forall i : q_i \in \mathcal{P}$$

(2) Man schreibt (bei fixiertem $\mathcal{P}$) auch

$$a = \epsilon \cdot \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\nu_p(a)},$$

wobei für alle $p \in \mathcal{P}$ wir die Funktion

$$\begin{aligned} \nu_p : A^0 &\longrightarrow \mathbb{N}_0 \\ a &\longmapsto \nu_p(a) = \begin{array}{c} \text{Anzahl des Auftretens} \\ \text{von } p \text{ in } \{q_1, \cdots, q_n\} \end{array} \end{aligned}$$

haben, mit $\nu_p(a) = 0$ p.p.

SATZ 2.1.6. *(Erste Charakterisierung der Faktorialität)*
Sei A ein Integritätsbereich. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) A ist faktoriell.

(2) A ist semifaktoriell und $\mathrm{Irr}(A) = \mathrm{Prim}(A)$.

(3) A ist quasifaktoriell und $\mathrm{Irr}(A) = \mathrm{Prim}(A)$.

Beweis.

(1) $\Rightarrow$ (2): Sei A faktoriell. Dann ist A natürlich semifaktoriell, und $\mathrm{Prim}(A) \subseteq \mathrm{Irr}(A)$ gilt auch stets. Sei $q \in \mathrm{Irr}(A)$. (Wir müssen zeigen, dass $q \in \mathrm{Prim}(A)$ ist.)

Sei $a \cdot b \in (q)$, d.h. $a \cdot b = t \cdot q$, und ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a \notin A^*$ und $b \notin A^*$ (ansonsten ist natürlich das jeweils andere in (q), und wir sind fertig). Da A faktoriell ist, lassen sich a, b und t in irreduzible Elemente zerlegen, etwa

$$a = q_1 \cdot \ldots \cdot q_r, \quad b = q_1' \cdot \ldots q_s', \quad t = q_1'' \cdot \ldots \cdot q_k''.$$

Dies ergibt (mit $a \cdot b = t \cdot q$)

$$q_1 \cdot \ldots \cdot q_r \cdot q_1' \cdot \ldots \cdot q_s' = q_1'' \cdot \ldots q_k'' \cdot q$$

als zwei Zerlegungen in irreduzible Elemente. Aufgrund der Eindeutigkeit solcher Zerlegungen haben wir $r + s = k + 1$, und q muss (modulo eines Einheitsfaktors) unter den q_i oder q_i' vorkommen. Damit ist q ein Teiler von a oder von b, also $q \in \mathrm{Prim}(A)$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Sei A semifaktoriell und $Prim(A) = \mathrm{Irr}(A)$. (Wir müssen die *wesentliche Eindeutigkeit* zeigen.)

Sei also $q_1 \cdot \ldots \cdot q_r = q_1' \cdot \ldots \cdot q_s'$, mit irreduziblen q_i und q_i' und ohne Beschränkung der Allgemeinheit $r \geq s$. Nach Voraussetzung sind die q_i und q_i' auch prim.

Insbesondere ist $q_1 \cdot \ldots \cdot q_r \in (q'_1) \in \operatorname{Spec} A$, also existiert ein $i_1 \in \{1, \cdots, r\}$ mit $q_{i_1} \in (q'_1)$, d.h. $q_{i_1} = t_1 \cdot q'_1$. Da q_{i_1} irreduzibel ist (sogar prim), ist $t_1 \in A^*$, also $(q_{i_1}) = (q'_1)$. Wir erhalten

$$t_1 \cdot q_1 \cdot \ldots \cdot \cancel{q_{i_1}} \cdot \ldots \cdot q_r = q'_2 \cdot \ldots \cdot q'_s,$$

und fahren induktiv fort mit q'_2 bis q'_s. Wir erhalten

$$\underbrace{t_1 \cdot \ldots \cdot t_s}_{=\delta \in A^*} \cdot \prod_{\substack{i \in \{1, \cdots, r\} \\ i \notin \{i_1, \cdots, i_s\}}} q_i = 1$$

Es ergibt sich $r = s$ (d.h. $\{1, \cdots, r\} = \{i_1, \cdots, i_s\}$) und $\delta = 1$ sowie

$$q'_1 \sim q_{i_1}, \quad \cdots, \quad q'_s \sim q_{i_s}$$

Die Zerlegung ist also (bis auf Einheitsfaktoren) eindeutig.

(3) $\Rightarrow$ **(2)** Klar, denn quasifaktoriell impliziert semifaktoriell.

(2) $\Rightarrow$ **(3)** Sei A ein semifaktorieller Ring und $\operatorname{Prim}(A) = \operatorname{Irr}(A)$, d.h. A auch faktoriell (wie oben gezeigt).

Angenommen, A ist nicht quasifaktoriell, dann existierte eine echt aufsteigende Hauptidealkette

$$(a_1) \subsetneqq (a_2) \subsetneqq \cdots,$$

wobei wir jeweils $a_i = b_i \cdot a_{i+1}$ haben, mit $b_i \in A^\bullet$. Definieren wir für $a \in A^0$ und ein Repräsentantensystem $\mathcal{P}$ der irreduziblen Elemente

$$l(a) := \sum_{p \in \mathcal{P}} \nu_p(a)$$

für

$$a = \varepsilon \cdot \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\nu_p(a)}$$

Dies ist eine endliche Summe (bzw. ein endliches Produkt), da A ja faktoriell ist, und $l(b_i) \geq 1$, da $b_i \notin A^*$. Es ergibt sich für alle $i \in \mathbb{N}$

$$l(a_i) = l(a_{i+1}) + l(b_i) \geq l(a_{i+1}) + 1,$$

also für $n \in \mathbb{N}$ immer

$$l(a_1) \geq l(a_2) + 1 \geq \ldots \geq l(a_n) + n - 1 \geq l(a_{n+1}) + n \geq n,$$

d.h. $l(a_1) \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, was unmöglich ist. Damit ist die Annahme falsch, also A auch quasi-faktoriell. $\square$

$\boxed{\text{Satz 2.1.7.}}$ *(Zweite Charakterisiesierung der Faktorialität im Noetherschen Fall.)*
Sei A ein noetherscher Integritätsbereich. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) A ist faktoriell.

(2) A ist ein ggT-kgV-Ring

(3) $\mathrm{Prim}(A) = \mathrm{Irr}(A)$.

Beweis.

(1) ⇒ (2): Dies gilt allgemein (auch im nicht-noetherschen Fall): Sei

$$a = \varepsilon \cdot \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\nu_p(a)}, \quad b = \delta \cdot \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\nu_p(b)},$$

dann ist (jeweils bis auf einen Einheitsfaktor)

$$\begin{aligned} \mathrm{ggT}(a,b) &= \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\min\{\nu_p(a),\nu_p(b)\}} \\ \mathrm{kgV}(a,b) &= \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\max\{\nu_p(a),\nu_p(b)\}} \end{aligned}$$

(2) ⇒ (3): Dies ist bekannt (ebenfalls auch im nicht-noetherschen Fall, war ein Lemma).

(3) ⇒ (1): Da A noethersch ist, ist A semifaktoriell, und zusammen mit $\mathrm{Prim}(A) = \mathrm{Irr}(A)$ folgt schon die Behauptung. □

Bemerkung. Die Noether-Eigenschaft (bzw. Semifaktorialität) ist für „(3) ⇒ (1)“ wirklich notwendig, da z.B. $\mathcal{H}ol(\Omega)$ ein nicht-noetherscher (und nicht semi-faktorieller, also auch nicht faktorieller) ggT-kgV-Ring ist.

$\boxed{\text{Satz 2.1.8.}}$ *(Vollständige Charakterisierung der Hauptidealringe unter den faktoriellen Ringen)*

Sei A ein Integritätsbereich, kein Körper (= nicht herzlos). Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) A ist ein Hauptidealring

(2) A ist noethersch und jedes Maximalideal ist ein Hauptideal ($\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} A \Rightarrow \mathfrak{m} = (m)$)

(3) A ist faktoriell und jedes Primideal ist ein Hauptideal ($\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \Rightarrow \mathfrak{p} = (p)$)

(4) A ist faktoriell und $\dim_{\text{Krull}} A = 1$ (d.h. Primidealketten maximaler Länge sind von der Form $(0) \subsetneqq \mathfrak{p}$)

(5) A ist faktoriell und $\operatorname{Specm} A = \operatorname{Spec} A \setminus \{(0)\}$.

(6) A ist faktoriell und Bezout-Ring

(7) A ist noethersch und Bezout-Ring

Beweis.

(1) $\Leftrightarrow$ (7): ist bekannt.

(1) $\Rightarrow$ (2): Klar: Hauptideale sind erst recht endlich erzeugt, und alle Maximalideale sind Hauptideale.

(2) $\Rightarrow$ (3) (a) Ist A noethersch, so erst recht semifaktoriell. Sei $q \in \operatorname{Irr}(A)$, dann liegt (q) in einem Maximalideal $\mathfrak{m} = (m) \subsetneqq A$. Es ist $q = t \cdot m$, und weil q irreduzibel ist, ist $t \in A^*$, $(q) = (m) \in \operatorname{Specm} A \subseteq \operatorname{Spec} A$, also $q \in \operatorname{Prim}(A)$. Damit ist A auch faktoriell.

(b) Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$. (Wir müssen zeigen, dass $\mathfrak{p}$ ein Hauptideal ist.) (0) ist ein Hauptideal, sei also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\mathfrak{p} \neq (0)$. Dann gibt es ein $a \in \mathfrak{p}$ mit $a \neq 0$, insbesondere also $a \in A^\bullet$, d.h. es gibt eine Faktorisierung (in irreduzible Elemente) $a = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n \in \mathfrak{p}$, und (da $\mathfrak{p}$ ein Primideal) gibt es ein $p = p_i \in \mathfrak{p}$. Wir haben also die Idealkette $(p) \subseteq \mathfrak{p} \subseteq (m) \in \operatorname{Specm}$, wobei p irreduzibel ist. Damit ist $(p) = (m)$, also $\mathfrak{p} = (m)$ ein Hauptideal.

(3) $\Rightarrow$ (1) Sei A faktoriell und jedes Primideal ein Hauptideal, also insbesondere endlich erzeugt. Nach Satz 1.3.2 ist A dann noethersch.

Angenommen, nicht jedes Ideal ist ein Hauptideal, dann ist die Menge

$$\mathfrak{M} = \left\{ \mathfrak{a} \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathfrak{a} \subsetneqq A \text{ echtes Ideal,} \\ \mathfrak{a} \text{ nicht Hauptideal} \end{array} \right\}$$

nicht leer. $\mathfrak{M}$ besitzt (da A noethersch ist, Satz 1.2.2) ein maximales Element $\mathfrak{a}_*$, $\mathfrak{a}_* \subsetneqq \mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} A$, mit $\mathfrak{m} = (p)$ ein Hauptideal (daher $\neq$). Betrachten wir das Quotientenideal

$$\begin{aligned} J &:= \{x \in A \mid x \cdot p \in \mathfrak{a}_*\} \\ &= (\mathfrak{a}_* : (p)) \supseteq \mathfrak{a}_* \end{aligned}$$

Wir wollen nun zeigen, dass J echt größer ist als $\mathfrak{a}_*$.

Sei $a \in \mathfrak{a}_*$ mit minimalem $l(a)$ (Länge der Primfaktorzerlegung – existent, da A faktoriell). Wir haben

$$(a) \subseteq \mathfrak{a}_* \subsetneqq (p) = \mathfrak{m} \in \operatorname{Specm},$$

Damit ist $a \notin \operatorname{Irr}(A)$ (sonst wäre wieder $(a) = (p)$), also $a = b \cdot c$ mit $b \notin A^*$, $c \notin A^*$. Wir haben $l(a) = l(b) + l(c)$, insbesondere $l(a) > l(b)$, $l(a) > l(c)$. Da $l(a)$ minimal (für $\mathfrak{a}_*$) war, haben wir $b, c \notin \mathfrak{a}_*$. Dagegen ist $a = b \cdot c \in (p)$, mit dem Primideal (p), also $b \in (p)$ $(b = t \cdot p)$ oder $c \in (p)$ $(c = s \cdot p)$.

Es ergibt sich $a = t \cdot p \cdot c$ oder $a = b \cdot s \cdot p$, d.h. $l(a) = l(t \cdot c) + 1$ oder $l(a) = l(b \cdot s) + 1$, d.h. es ist mindestens $t \cdot c \notin \mathfrak{a}_*$ oder $b \cdot s \notin a_*$, aber jedenfalls sind diese Produkte in J.

Wir haben also $\mathfrak{a}_* \subsetneqq J$, J ist daher ein Hauptideal, $J = (\mathfrak{a}_* : p) = (d)$, mit $d \cdot p \in \mathfrak{a}_*$.

Sei nun $e \in \mathfrak{a}_* \subseteq (p)$ beliebig. Dann ist $b = l \cdot p$ für ein $l \in A$, dabei ist $l \in J = (d)$, also $l = k \cdot d$, d.h. $b = k \cdot d \cdot p \in (d \cdot p)$.

Wir haben also $\mathfrak{a}_* \subseteq (d \cdot p) \subseteq \mathfrak{a}_*$, damit ist $\mathfrak{a}_* = (d \cdot p)$ selbst ein Hauptideal. Dies ist ein Widerspruch, die Annahme war also falsch, in A ist jedes Ideal ein Hauptideal, (1) ist erfüllt.

(4) $\Rightarrow$ (5): Gäbe es weitere Primideale $\mathfrak{p}$ mit $(0) \neq \mathfrak{p} \notin \operatorname{Specm} A$, so hätten wir ja die Primidealkette $(0) \subsetneqq \mathfrak{p} \subsetneqq \mathfrak{m}$ mit einem Maximalideal $\mathfrak{m}$, welches über $\mathfrak{p}$ liegt, also eine Krulldimension von mindestens 2.

(5) $\Rightarrow$ (4): Derartige Primidealketten (aus (0) und einem Maximalideal) gibt es für Integritätsbereiche, die keine Körper sind, immer. Längere kann es nicht geben, da dann die dazwischenliegenden Primideale weder (0) noch ein Maximalideal sind.

(1) $\Leftrightarrow$ (4), (5) $\Leftrightarrow$ (6): Übungsaufgabe $\square$

2.2 Polynomringe über faktoriellen Ringen

Sei A ein faktorieller Ring, $A[X]$ der zugehörige Polynomring.

Fragen.

(1) Vererbt sich die Faktorialität von A auf $A[X]$?

(2) Wie sieht $\operatorname{Spec}(A[X])$ bzw. $\operatorname{Specm}(A[X])$ aus?

Definition 2.21. *Sei $F \in A[X]$, $n = \deg(F) \geq 1$,*

$$F = a_0 + a_1 \cdot X + \ldots + a_n \cdot X^n, \quad a_n \neq 0.$$

*Der **Inhalt** $c(F)$ sei definiert durch* $\boxed{c(F)}$

$$c(F) := \mathrm{ggT}(\{a_i \mid i \in \{1, \cdots, n\}, a_i \neq 0\}),$$

*(eindeutig nur modulo A^*, d.h. $\sim$). F heißt **primitives Polynom**, falls $c(F) \sim 1$.*

$\boxed{\text{Lemma.}}$ Sei A faktoriell, $F, G \in A[X]$. Dann ist

$$c(F \cdot G) = c(F) \cdot c(G) \cdot \eta, \quad \eta \in A^*,$$

d.h. c ist ein Halbgruppenhomomorphismus $(A[X], \cdot) \to (A/\sim, \cdot)$.

Beweis.

Fall 1: F und G seien primitive Polynome, d.h. $c(F) = c(G) = 1$. Angenommen, $c(F \cdot G) \neq 1$ (d.h. keine Einheit), dann existiert ein $p \in \mathrm{Prim}(A)$ mit $p | c(F \cdot G)$, wobei aber p nicht alle Koeffizienten von F und nicht alle von G teilt. Es sei

$$\begin{aligned} F &= a_0 + a_1 \cdot X + \ldots + a_n \cdot X^n \\ G &= b_0 + b_1 \cdot X + \ldots + b_m \cdot X^m, F \cdot G \quad = c_0 + c_1 \cdot X + \ldots + c_{m+n} \cdot X^{m+n} \end{aligned}$$

mit $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$. Es gibt dann ein $i_0 \in \{0, \cdots, n\}$ mit $p \nmid a_{i_0}$ und $p \mid a_i \forall i < i_0$, und ein $j_0 \in \{0, \cdots, m\}$ mit $p \nmid b_{j_0}$ und $p \mid b_j \forall i < j_0$. Wegen $p | c(F \cdot g)$ teilt p auch alle $c_l = \sum_{k=0}^{l} a_k \cdot b_{l-k}$, insbesondere teilt p auch

$$\begin{aligned} c_{i_0+j_0} &= \sum_{\nu=0}^{i_0+j_0} a_\nu \cdot b_{i_0+j_0-\nu} \\ &= a_{i_0} \cdot b_{j_0} + \sum_{j<j_0} a_\nu \cdot b_{i_0+j_0-\nu} + \sum_{\mu>i_0} a_\mu \cdot b_{\underbrace{i_0 + j_0 - \mu}_{<j_0}}, \end{aligned}$$

wobei hier offenbar p jeden der in den beiden $\sum$ vorkommenden Summanden teilt. Damit muss p auch $a_{i_0} \cdot b_{j_0}$ teilen, also (wegen der Prim-Eigenschaft von p) auch a_{i_0} oder b_{j_0}. Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von i_0 und j_0, damit ist unsere Annahme falsch, also ist $c(F \cdot G)$ ebenfalls eine Einheit, also $c(F \cdot G) = c(F) \cdot c(G)$.

Fall 2: Seien F und G nun beliebige Polynome, dann ist

$$\begin{aligned} F &= c(F) \cdot \tilde{F}, \quad \tilde{F} \text{ primitiv, gleicher Grad,} \\ G &= c(G) \cdot \tilde{G}, \quad \tilde{F} \text{ primitiv, gleicher Grad,} \end{aligned}$$

und es ergibt sich

$$F \cdot G = c(F) \cdot c(G) \cdot \tilde{F} \cdot \tilde{G},$$

also

$$\begin{aligned} c(F \cdot G) &= c(F) \cdot c(G) \cdot \underbrace{c(\tilde{F} \cdot \tilde{G})}_{=1} \\ &= c(F) \cdot c(G) \end{aligned}$$

□

SATZ 2.2.1. Sei A faktorieller Ring. Dann gilt:

(1) $A[X]$ ist faktoriell.

(2) $A[X_1, \cdots, X_n]$ ist faktoriell für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Offensichtlich ist (2) eine direkte Folgerung von (1) (vollständige Induktion, $A[X_1, \cdots, X_n] = A[X_1, \cdots, X_{n-1}][X_n]$.) Wir müssen daher nur (1) zeigen.

Schritt 1: Bestimmung von $\mathrm{Irr}(A[X])$.

(i) Sei $P \in \mathrm{Irr}(A) = \mathrm{Prim}(A)$, dann ist auch $P \in A[X]$, $\deg(P) = 0$, $P \notin A[X]^* = A^*$. Dann ist die Folge

$$0 \longrightarrow P \cdot A[X] \hookrightarrow A[X] \twoheadrightarrow \underbrace{\underbrace{\left(A/_{P \cdot A}\right)}_{\text{Int-bereich}}[X]}_{\text{Int-bereich}} \longrightarrow 0$$

exakt, und somit ist (Homomorphiesatz)

$$A[X]/_{P \cdot A[X]} \cong A/_{P \cdot A}[X]$$

ein Integritätsbereich, also $P \cdot A[X]$ ein Primideal. Wir haben also

$$\mathrm{Irr}(A) \subseteq \mathrm{Irr}_0(A[X]) \subseteq \mathrm{Irr}(A[X]),$$

$\boxed{\mathrm{Irr}_d(A[X])}$

wobei $\mathrm{Irr}_d(A[X])$ die Menge der **irreduziblen Polynome vom Grad** d bezeichne. Umgekehrt: Ist $a \in \mathrm{Irr}_0(A[X])$ (d.h. $a \in A$ und a irreduzibel in $A[X]$), so ist natürlich auch $a \in \mathrm{Irr}(A)$, wegen $A(X)^* = A^*$.

FAZIT.

$$\mathrm{Irr}_0(A[X]) = \mathrm{Irr}(A).$$

(ii) Sei $F \in \mathrm{Irr}(A[X])$ mit $\deg(F) \geq 1$ (also $F \in \mathrm{Irr}_{\deg F}(A)$). Wegen $F = c(F) \cdot \tilde{F}$ mit $\tilde{F}$ primitiv und $\deg(\tilde{F}) = \deg(F) \geq 1$, ist dann $\tilde{F} \notin A[X]^*$, also $c(F) \in A[X]^* = A^*$, also $F = \tilde{F}$ primitiv.

$\boxed{\text{Behauptung.}}$ Ist $K = Q(A)$ der Quotientenkörper von A mit der zugehörigen Einbettung $A[X] \hookrightarrow K[X]$ ($K[X]$ ist ein HIR), so ist $F \in \operatorname{Irr}(A[X])$ auch irreduzibel in $K[X]$.
Genauer: Für $d \geq 1$ ist

$$\operatorname{Irr}_d(A[X]) = \{F \in A[X] \mid c(F) = 1, F \in \operatorname{Irr}_d(K[X])\}$$

Beweis. Sei also $F \in \operatorname{Irr}_d(A[X])$ mit $d \geq 1$. Ist $F = P \cdot Q$ in $K[X]$ (mit $P \cdot Q \in K[X]$), so ist

$$P = \sum_{i=0}^{l} \frac{a_i}{b_i} \cdot X^i$$

($bdf = \operatorname{kgV}((b_i)_{i=1}^{l})$, $a_i^* := a_i \cdot \frac{b}{b_i} \in A$)

$$= \frac{1}{b} \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{l} a_i^* \cdot X^i}_{\in A[X]}$$

($a := \operatorname{ggT}((a_i)_{i=0}^{l}) = c\left(\sum_{i=0}^{l} a_i^* \cdot X^i\right)$, $a_i^{**} := \frac{a_i^*}{a}$)

$$\begin{aligned} &= \frac{a}{b} \cdot \sum_{i=0}^{l} a_i^{**} \cdot X^i \\ &= \frac{a}{b} \cdot \tilde{P}, \end{aligned}$$

wobei $\tilde{P}$ ein primitives Polynom in $A[X]$ ist. Analog erhalten wir

$$Q = \frac{c}{d} \cdot \tilde{Q}, \quad \tilde{Q} \in A[X] \text{ primitiv}.$$

Wir haben also

$$\underbrace{F}_{\substack{\text{primitiv} \\ \text{in } A[X]}} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \cdot \underbrace{\tilde{P} \cdot \tilde{Q}}_{\substack{\text{primitiv} \\ \text{in } A[X]}} .$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & b \cdot d \cdot \tilde{F} = a \cdot c \cdot \tilde{P} \cdot \tilde{Q} \\ \Rightarrow \quad & b \cdot d \cdot \underbrace{c(F)}_{\in A^*} = a \cdot c \cdot \underbrace{c(\tilde{P})}_{\in A^*} \cdot \underbrace{c(\tilde{Q})}_{\in A^*} \\ & \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \delta \in A^* \\ \Rightarrow \quad & F = \delta \cdot \tilde{P} \cdot \tilde{Q}, \end{aligned}$$

also ist (da F irreduzibel in $A[X]$) $\tilde{P} \in A[X]^*$ oder $\tilde{Q} \in A[X]^*$, d.h. $P \in K[X]^*$ oder $Q \in K[X]^*$, also ist F auch irreduzibel in $K[X]$.
Umgekehrt: Ist $c_A(F) = 1$, $F \in \operatorname{Irr}(K[X])$, so ist F erst recht irreduzibel in $A[X]$ (denn jede Zerlegung in $A[X]$ ist auch eine in $K[X]$). □

BEHAUPTUNG. Sei A faktoriell. Dann ist $A[X]$ semifaktoriell.

Schritt 2: *Beweis.* Sei $F \in A[X]^\bullet$.

1. Fall: $\deg F = 0$, d.h. $F = a \in A^\bullet$.
Da A faktoriell ist, ist a irreduzibel in A (also auch in $A[X]$), oder a zerfällt in (endlich viele) irreduzible Faktoren, welche ja auch irreduzibel in $A[X]$ sind. Jedenfalls zerfällt $F = a$ auch in $A[X]$.

2. Fall: $\deg(F) \geq 1$.
Es ist auch $F \in K[X]^\bullet$ (und $K[X]$ ist HIR), also zerfällt F in $K[X]$, sei etwa dort eine Primfaktorzerlegung

$$F = Q_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot Q_s^{\nu_s},$$

mit $Q_i \in \operatorname{Irr}(K[X])$, $\nu_i = \nu_{Q_i}(F)$ für alle i. Dabei ist (nach Schritt 1) $Q_i = \frac{a_i}{b_i} \cdot \tilde{Q}_i$, mit $\tilde{Q}_i \in A[X]$ primitiv (für alle i). Wir haben also

$$\begin{aligned} F &= \prod_{i=1}^{s} \left(\frac{a_i}{b_i}\tilde{Q}_i\right)^{\nu_i} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^{s} a_i^{\nu_i}}{\prod_{i=1}^{s} b_i^{\nu_i}} \cdot \prod_{i=1}^{s} \tilde{Q}_i^{\nu_i} \\ \Rightarrow \quad F \cdot \prod_{i=1}^{s} b_i^{\nu_i} &= \prod_{i=1}^{s} a_i^{\nu_i} \cdot \prod_{i=1}^{s} \tilde{Q}_i^{\nu_i} \end{aligned}$$

Sehen wir uns nun den Inhalt an:

$$\begin{aligned} c(F) \cdot \prod_{i=1}^{s} b_i^{\nu_i} &= \prod_{i=1}^{s} a_i^{\nu_i} \cdot \underbrace{\prod_{i=1}^{s} c(\tilde{Q}_i^{\nu_i})}_{=\eta \in A^*} \\ \Rightarrow \quad \frac{c(F)}{\eta} &= \frac{\prod_{i=1}^{s} a_i^{\nu_i}}{\prod_{i=1}^{s} b_i^{\nu_i}} \in A \\ \Rightarrow \quad F &= \frac{c(F)}{\eta} \cdot \prod_{i=1}^{s} \tilde{Q}_i^{\nu_i}, \quad \tilde{Q}_i \in \operatorname{Irr}(A[X]) \forall i \end{aligned}$$

Außerdem: $\frac{c(F)}{\eta}$ zerfällt (in A) in ein endliches Produkt $q_1 \cdot \ldots \cdot q_t$, $q_j \in \operatorname{Irr}(A) = \operatorname{Irr}_0(A[X])$, wir haben also eine Zerlegung

$$F = q_1 \cdot \ldots \cdot q_t \cdot \tilde{Q}_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot Q_s^{\nu_s}$$

in irreduzible Elemente. $A[X]$ ist also wirklich semifaktoriell.

□

> $\boxed{\text{Behauptung.}}$
>
> $$\mathrm{Irr}(A[X]) \subseteq \mathrm{Prim}(A[X])$$

Schritt 3: *Beweis.* Sei $F \in \mathrm{Irr}(A[X])$.

1. Fall: Ist $\deg(F) = 0$, dann haben wir

$$F = p \in \mathrm{Prim}(A) = \mathrm{Irr}(A) = \mathrm{Irr}_0(A[X]).$$

Dabei gilt

$$A[X]/_{(F)} = A[X]/_{p \cdot A[X]} = A/_{(p)}[X],$$

letzteres ist ein Integritätsbereich, also ist $(F) \in \mathrm{Spec}(A[X])$.

2. Fall: Betrachten wir nun $\deg(F) \geq 1$, und das Diagramm mit den kanonischen Projektionen

$$\begin{tikzcd}
A[X] \arrow[r, tail, "j", "\text{incl}"'] \arrow[d, two heads, "\pi_A"'] & K[X] \arrow[d, two heads, "\pi_K"] \\
A[X]/_{F \cdot A[X]} \arrow[r, "\hat{\jmath}"'] & K[X]/_{F \cdot K[X]}
\end{tikzcd}$$

Dabei ist $\hat{\jmath}$ durch j definiert via $\hat{\jmath}(\pi_A(P)) := \pi_K(j(P))$, das Diagramm ist also kommutativ (weil $F \cdot A[X] \subseteq F \cdot K[X]$). Betrachten wir nun $\hat{\jmath}$ genauer: Es ist

$$\ker(\hat{\jmath}) = \left\{ \overline{P} \mid P \in A[X], P = F \cdot Q, Q \in K[X] \right\}$$

Das heißt, $\ker(\hat{\jmath}) = (0)$, falls

$$F \cdot K[X] \cap A[X] \subseteq F \cdot A[X]$$

gilt. (Die andere Inklusion gilt sowieso.) Sei also $G \in F \cdot K[X] \cap A[X]$, d.h. $G = F \cdot Q$, $Q \in K[X]$, und nach obiger Betrachtung $Q = \frac{a}{b} \cdot \tilde{Q}$, $\tilde{Q} \in A[X]$ primitiv. Es ist also

$$\begin{aligned}
& b \cdot G = a \cdot F \cdot \tilde{Q} \quad (\text{in } A[X]) \\
\Rightarrow \quad & b \cdot c(G) = a \cdot c(F) \cdot c(Q) \quad (\text{in } A/_{\sim}) \\
\Rightarrow \quad & c(G) \cdot b = a
\end{aligned}$$

Damit ist $b|a$, und $\frac{a}{b} \in A$, $\frac{a}{b} \sim c(G)$ ($\frac{a}{b} = \eta \cdot c(G)$, $\eta \in A^*$), und

$$\begin{aligned}
& G = F \cdot \underbrace{\underbrace{c(G) \cdot \eta}_{\in A} \cdot \underbrace{\tilde{Q}}_{\in A[X]}}_{\in A[X]} \\
\Rightarrow \quad & G \in F \cdot A[X].
\end{aligned}$$

Das heißt, $\ker(\hat{\jmath}) = (0)$, also ist $\hat{\jmath}$ ebenfalls injektiv. Also ist

$$A[X] / F \cdot A[X] \quad \text{eingebettet in} \quad K[X] / F \cdot K[X],$$

wobei $F \cdot K[X]$ ein Primideal (sogar Maximalideal) im Hauptidealring $K[X]$ ist, d.h. $K[X] / F \cdot K[X]$ ist ein Integritätsbereich, und $A[X] / F \cdot A[X]$ ist als Unterring davon ebenfalls ein Integritätsbereich, also ist $F \cdot A[X]$ ein Primideal in $A[X]$, d.h. F ein Primelement. □

□

Achtung. Faktorialität vererbt sich nicht auf Faktorringe.

Beispiel 2.2.1. Der Ring $\mathbb{Z}[X]$ ist faktoriell, aber

$$Z[X] / (X^2 + 5) \cong \mathbb{Z} \oplus \sqrt{-5} \cdot \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$$

ist nicht faktoriell, da z.B. 2 zwar irreduzibel, aber nicht prim ist (es ist $2 \cdot 3 = 6 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$).

Beispiel 2.2.2. Ist K ein Körper, so ist $K[X, Y]$ faktoriell (aber kein Hauptidealring), und der Faktorring

$$K[X, Y] / (Y^2 - X^3)$$

ist Integritätsbereich, nicht faktoriell, da $\overline{Y}$ irreduzibel, aber nicht prim ist ($\overline{Y}^2 = \overline{X}^3$).

Anwendung: Prim- und Maximalideale in Polynomringen $A[X]$ über Hauptidealringen A

Sei A ein Hauptidealring (z.B. $A = \mathbb{Z}$ oder $A = K[X]$, K ein Körper).

Frage. Wie sieht $\operatorname{Spec} A$ bzw. $\operatorname{Specm} A$ aus? Sind diese eventuell explizit bestimmbar?

$\boxed{\text{SATZ 2.2.2.}}$ Sei A ein Hauptidealring (kein Körper!), $A[X]$ sein Polynomring in einer Variable. Dann gilt:

(1)

$$\begin{aligned}\operatorname{Spec}(A[X]) = \{(0)\} \cup \{(f) \mid f \text{ irreduzibel in } A[X]\} \cup \\ \cup \left\{(p, f) \,\middle|\, p \in \operatorname{Irr}(A), [f]_p \in \operatorname{Irr}\left({}^{A}\!/_{(p)}[X]\right)\right\}\end{aligned}$$

(2) Die Ideale (p, f) mit $p \in \operatorname{Irr}(A)$, $[f] \in \operatorname{Irr}\left({}^{A}\!/_{(p)}[X]\right)$ sind stets Maximalideale. Enthält A unendlich viele Primideale, so ist sogar

$$\operatorname{Specm}(A[X]) = \left\{(p, f) \,\middle|\, p \in \operatorname{Irr}(A), [f]_p \in \operatorname{Irr}\left({}^{A}\!/_{(p)}[X]\right)\right\}$$

(3) Ist A ein unendlicher Hauptidealring mit endlicher Einheitengruppe, so hat A unendliche viele Primideale und daher gilt

$$\operatorname{Specm}(A[X]) = \left\{(p, f) \,\middle|\, p \in \operatorname{Irr}(A), [f]_p \in \operatorname{Irr}\left({}^{A}\!/_{(p)}[X]\right)\right\}$$

Beweis.

(1)
- Es ist $A[X]$ ein Integritätsbereich (sogar faktorieller Ring) und damit $(0) \in \operatorname{Spec}(A[X])$.
- Wegen $\operatorname{Irr}(A) = \operatorname{Prim}(A)$ sind alle weiteren primen Hauptideale durch durch irreduzible Elemente gegeben (das sind entweder irreduzible Elemente aus A, oder primitive Polynome, wie im Beweis für Satz 2.2.1 betrachtet), und alle solchen erzeugen auch prime Hauptideale.
- Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A[X])$ ein Primideal, welches kein Hauptideal ist. Wegen $\mathfrak{p} \neq (0)$ gibt es ein $f \in \mathfrak{p} \setminus \{0\}$, und es ist (aufgrund der Faktorialität) f entweder irreduzibel ist oder zerlegbar in irreduzible Faktoren. Da $\mathfrak{p}$ prim ist, existiert mindestens ein $g \in \mathfrak{p}$ mit $g \in \operatorname{Irr}(A[X])$ (ein Primfaktor von f). Da $\mathfrak{p}$ kein Hauptideal war, ist $(g) \subsetneqq \mathfrak{p}$, und es gibt ein $\varphi \in \mathfrak{p} \setminus (g)$, mit $\varphi \notin (A[X])^*$, ebenso $\varphi \not\sim g$. Auch φ hat nun Primfaktoren, und daher

$$\exists g \in \mathfrak{p}, \exists h \in \mathfrak{p}, g \not\sim h, \text{ beide irreduzibel.}$$

$\boxed{\text{BEHAUPTUNG.}}$ $\mathfrak{p} \cap A \neq (0)$.

Beweis. Ist g oder h vom Grad 0, also $g \in A$ oder $h \in A$, so ist die Behauptung gezeigt.

Andernfalls ist $\deg(g) \geq 1$ und $\deg(h) \geq 1$, also beides primitive Polynome in $A[X]$. Bezeichnen wir nun mit $K := Q(A)$ den Quotientenkörper von A und betrachten wieder die kanonische Inklusion der Polynomringe, so haben wir auch

$g \not\sim h$ in $K[X]$. (Sonst wäre $g = \frac{a}{b} \cdot h$, also $b \cdot g = a \cdot h$, und Anwenden von $c(...)$ ergibt $b \sim a$ (in A), also $g \sim h$ in A^*.)
Da $K[X]$ ein Hauptidealring ist, haben wir $P, Q \in K[X]$ mit $P \cdot g + Q \cdot h = 1$, wobei sich (wie üblich) P und Q als $P = \frac{a}{b}\tilde{P}$, $Q = \frac{c}{d} \cdot \tilde{Q}$ mit $\tilde{P}, \tilde{Q} \in A[X]$ primitiv, darstellen lassen. Es ist also

$$\frac{a}{b} \cdot \tilde{P} \cdot g + \frac{c}{d} \cdot \tilde{Q} \cdot h = 1,$$

also $\underbrace{b \cdot g}_{\in A} \in (g, h) \subseteq \mathfrak{p}$, insbesondere $\mathfrak{p} \cap A \neq (0)$. □

Wir haben also $\mathfrak{p} \cap A \neq (0)$, das heißt, es ist $\mathfrak{p} \cap A = (p) \in \operatorname{Spec} A$, $p \in \operatorname{Irr}(A)$. Betrachten wir nun die *Reduktion modulo p*,

$$\begin{aligned} A[X] &\xrightarrow{\pi} A/(p)[X] \\ \sum_{i=0}^{r} a_i X^i &\longmapsto \sum_{i=0}^{r} \overline{a}_i X^i. \end{aligned}$$

Dies ist ein Epimorphismus mit $\ker(\pi) = p \cdot A[X] \subseteq \mathfrak{p}$, deswegen ist $\pi(\mathfrak{p})$ wieder ein Primideal im „reduziertem“ Ring. Es ist $A/(p)[X]$ ein Hauptidealring (weil $A/(p)$ ein Körper ist), also haben wir $\pi(\mathfrak{p}) = (\pi(f))$ mit einem $f \in \mathfrak{p}$, $\pi(f) = \overline{f} \in \operatorname{Irr}(A/(p)[X])$.
Es gilt also für alle $\varphi \in \mathfrak{p}$:

$$\begin{aligned} \pi(\varphi) &= \overline{\varphi} \\ &= \overline{\gamma} \cdot \overline{f} \in A/(p)[X], \\ \Rightarrow \quad \varphi &= f \cdot \gamma + p \cdot \psi, \end{aligned}$$

mit $\gamma, \psi \in A[X]$ geeignet. Es ist also $\varphi \in (p, f)$, d.h. $\mathfrak{p} \subseteq (p, f)$, und wegen $p \in \mathfrak{p}$ und $f \in \mathfrak{p}$ ist sogar $\mathfrak{p} = (p, f)$.
Fazit. Alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A[X])$ sind, falls nicht Hauptideale, von der Form $\mathfrak{p} = (p, f)$ mit $p \in \operatorname{Irr}(A)$, $(p) = \mathfrak{p} \cap A$, $f \in A[X]$, $\deg f \geq 1$, $\overline{f} \in \operatorname{Irr}\left(A/(p)[X]\right)$.
Umgekehrt: Ist $p \in \operatorname{Irr}(A)$ und $\overline{f} \in \operatorname{Irr}(A/(p)[X])$, so ist

$$A[X]/(p, f) \cong \underbrace{\left(\underbrace{A/(p)}_{\text{Körper}}[X]\right)/(\overline{f})}_{\text{Körper}},$$

also (p, f) ebenfalls ein Maximalideal, also erst recht ein Primideal.

(2) $(p, f) \in \operatorname{Specm}(A[X])$ ist schon gezeigt. Ist ${}^{\operatorname{Irr}(A)}\!/\!_{\sim}$ unendlich, d.h. $\operatorname{Spec} A$ unendlich, so gilt für alle $f \in \operatorname{Irr}(A[X])$ mit $\deg(f) \geq 1$: $(f) \subsetneqq (p, f)$ für alle $p \in \operatorname{Irr}(A)$, $(p, f) \subsetneqq A[X]$ für mindestens ein p, da sonst $p \nmid a_n$ für alle $p \in \operatorname{Irr}(A)$ ($a_n \neq 0$ der Leitkoeffizient von f), was ein Widerspruch ist. Damit sind alle Maximalideale von der Form (f, p), und wir haben wirklich

$$\operatorname{Specm}(A[X]) = \left\{ (p, f) \,\middle|\, p \in \operatorname{Irr}(A), [f]_p \in \operatorname{Irr}\left({}^{A}\!/\!_{(p)}[X] \right) \right\}.$$

(3) Dies folgt aus einer Übungsaufgabe (Serie 8) mit (2). □

> FAZIT. Ist A ein Hauptidealring und $\operatorname{Spec}(A)$ (bzw. ${}^{\operatorname{Irr}(A)}\!/\!_{\sim}$) unendlich, so hat man in A folgende aufsteigende Primidealketten maximaler Länge:
>
> $$(0) \subsetneqq (f) \subsetneqq (q, g)$$
>
> mit $f \in \operatorname{Irr}(A[X])$, $f = p \in \operatorname{Irr}(A)$ für $\deg f = 0$ oder $\deg f \geq 1$ ($f \notin A$), f primitives Polynom.

> FAZIT. Ist A ein Hauptidealring, so ist
>
> $$\dim_{\text{Krull}} A[X] = 2 = 1 + \dim_{\text{Krull}} A.$$

Beispiel 2.2.3. Wie sieht $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[X])$ aus?
Es ist

$$\begin{aligned}\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[X]) = \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}) &\cup \{(f) \mid f \in \mathbb{Z}[X], \deg f \geq 1, c(f) = 1, f \in \operatorname{Irr}(\mathbb{Q}[X])\} \cup \\ &\cup \left\{ (p, f) \,\middle|\, p \in \operatorname{Prim}(\mathbb{Z}), p > 0, \overline{f} \in \operatorname{Irr}\left({}^{Z}\!/\!_{p\mathbb{Z}}[X] \right) \right\}\end{aligned}$$

Beispiel 2.2.4. Sei K Körper, $K[X, Y] = K[X][Y] = K[Y][X]$ der Polynomring in zwei Variablen. Dann ist

$$\begin{aligned}\operatorname{Spec}(K[X, Y]) = \{(0)\} &\cup \\ &\cup \{(f(X)) \mid f(X) \in \operatorname{Irr}(K[X])\} \cup \\ &\cup \{(f(X, Y)) \mid \deg_Y(f(X, Y)) \geq 1, f(X, Y) \in \operatorname{Irr}(K[X, Y])\} \cup \\ &\underbrace{\cup \left\{ (f(X), g(X, Y)) \,\middle|\, \begin{array}{c} f(X) \in \operatorname{Irr}(K[X]), \\ \overline{g(X, Y)} \in \operatorname{Irr}\left({}^{K[X]}\!/\!_{(f(X))}[Y] \right) \end{array} \right\}}_{=\operatorname{Specm}(K[X,Y])}\end{aligned}$$

Beispiel 2.2.5. Sei nun $K = \overline{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper (z.B. $K = \mathbb{C}$). Wir betrachten wieder $K[X, Y]$. Dann folgt aus Beispiel 2.2.4:

$$\operatorname{Specm}(K[X, Y]) = \left\{ (X - a, g(X, Y)) \,\middle|\, a \in K, g(X, Y) \in \operatorname{Irr}\left({}^{K[X]}\!/\!_{(X-a)}[Y] \right) \right\},$$

wobei $\overline{g(X, Y)} = \overline{\tilde{g}(Y)}$ in ${}^{K[X]}\!/\!_{(X-a)}[Y]$, mit $\tilde{g}(Y) \in \operatorname{Irr}({}^{K[X]}\!/\!_{(X-a)}[Y]) = \operatorname{Irr}(K[Y])$. Daher ist $\overline{\tilde{g}(Y)} = \overline{Y - b}$ mit $b \in K$.

$\boxed{\text{FAZIT.}}$

$$\operatorname{Specm}(K[X,Y]) = \left\{(X-a, X-b) \mid (a,b) \in K^2\right\}$$

$\boxed{\text{SATZ 2.2.3.}}$ *(Hilberts Nullstellensatz in Dimension 2)*
Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, $K[X,Y]$ der Polynomring. Dann ist das folgende Dreiecksdiagramm kommutativ und enthält lauter Bijektionen:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}^2_K = K^2 \arrow[rr, "\Theta_{\mathrm{Spec}}"] \arrow[dr, "\Theta_{\mathrm{Hom}}"'] & & \operatorname{Specm}(K[X,Y]) \\
& \operatorname{Hom}_{k\text{-Alg}}(K[X,Y],K), \arrow[ur, "\ker"'] &
\end{tikzcd}$$

wobei $\Theta_{\mathrm{Spec}}(a,b) := (X-a, Y-b)$ und $\Theta_{\mathrm{Hom}}(a,b) := \varepsilon_{(a,b)}$, mit

$$\begin{aligned} \varepsilon_{(a,b)} : K[X,Y] &\to K \\ P(X,Y) &\mapsto P(a,b) \end{aligned}$$

Beweis.

(1) Θ_{Spec} ist bekanntlich wohldefiniert und surjektiv. Es ist auch injektiv: Ist $(X-a, Y-b) = (X-a', Y-b')$, so ist $a = a'$ und $b = b'$.

(2) Θ_{Hom} ist sowieso bijektiv, da es genügt, die Funktionswerte von Erzeugenden zu kennen.

(3) Für die Kommutativität müssen wir $\ker(\Theta_{\mathrm{Hom}}(a,b)) = (X-a, X-b)$ zeigen.

Sei $P(X,Y) \in K[X,Y]$ mit $\Theta_{\mathrm{Hom}}(a,b)(P) = 0$, d.h. $P(a,b) = 0$. Dann können wir den alten Trick anwenden: $P(X,Y) = Q(X,Y) \cdot (X-a) + S(Y)$ (mit geeigneten Q und S), also $S(b) = 0$, $S(Y) = (Y-b) \cdot \tilde{S}$. Damit ist $P \in (X-a, Y-b)$, und also $\ker(\theta_{\mathrm{Hom}}(a,b)) \subseteq (X-a, X-b)$. Die umgekehrte Inklusion gilt sowieso.

(4) Damit muss auch ker bijektiv sein, denn $\ker = \Theta_{\mathrm{Spec}} \circ \Theta_{\mathrm{Hom}}^{-1}$. □

SATZ 2.2.4. *(Irreduzibilitätskriterium von Gotthold Eisenstein)*
Sei A ein faktorieller Ring, $A[X]$ der Polynomring, $F = a_n \cdot X^n + \ldots + a_0 \in A[X]$ mit $n \geq 1$, $a_n \neq 0$, $Q(A)$ der Quotientenkörper mit seinem Polynomring $Q(A)[X]$. Ist dann $p \in \mathrm{Irr}(A)$ mit

(1) $p \not| a_n$,

(2) $p | a_i \forall i < n$

(3) $p^2 \not| a_0$,

so ist F irreduzibel in $Q(A)[X]$. Ist überdies auch noch $c(F) = 1$, so ist F irreduzibel in $A[X]$.

Beweis. Sei $p \in \mathrm{Irr}(A)$ mit (1), (2) und (3). Angenommen, F ist nicht irreduzibel in $Q(A)[F]$. Dann lässt sich F in $Q(A)[X]$ zerlegen in $F = P \cdot Q$, mit $1 \leq \deg Q < n$ und $1 \leq \deg P < n$. P und Q lassen sich wie üblich mit primitiven Polynomen schreiben:

$$F = \left(\frac{a}{b} \cdot \tilde{P}\right) \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \tilde{Q}\right), \quad \tilde{Q}, \tilde{P} \in A[X] \text{ primitiv}, \deg < n.$$

$$\Rightarrow \quad b \cdot d \cdot F = a \cdot c \cdot \tilde{P} \cdot Q$$

$$\Rightarrow \quad b \cdot d \cdot c(F) \sim a \cdot c \qquad \text{in } A$$

$$\Rightarrow \quad F \sim c(F) \cdot \tilde{P} \cdot \tilde{Q} \qquad \text{in } A[X]$$

$$\Rightarrow \quad F = G \cdot H \qquad \text{in } A[X], 1 \leq \deg G < n, 1 \leq \deg H < n$$

Betrachte nun die kanonische Projektion

$$A \xrightarrow{\pi} \!\!\!\!\rightarrow A/_{(p)}$$

und den induzierten Epimorphismus der Polynomringe

$$A[X] \xrightarrow{\hat{\pi}} \!\!\!\!\rightarrow A/_{(p)}[X].$$

Dann haben wir

$$\overline{F} = \hat{\pi}(F) = \hat{\pi}(G) \cdot \hat{\pi}(H)$$

Dabei war ja $F = a_n \cdot X^n + \ldots + a_0$, mit $p | a_0, \cdots, p | a_{n-1}$, $p \not| a_n$, also (modulo p) $\overline{F} = \overline{a}_n \cdot X^n$ (mit $\overline{a}_n \neq 0$). Es ist also $\overline{a}_n \cdot X^n = \overline{G} \cdot \overline{H}$ in $A/_{(p)}[X]$ (das ist eventuell nicht faktoriell), also auch in $Q(A/_{(p)})[X]$ (das ist sicher faktoriell, sogar HIR), und X ist irreduzibel – also haben wir $X | \overline{G}$ und $X | \overline{H}$ in $Q(A/_{(p)})[X]$ (aus Gradgründen kommt $X^n | \overline{G}$ oder $X^n | \overline{H}$ nicht in Frage). Das heißt, für $G = b_0 + \ldots + b_r \cdot X^r$ (mit $r \geq 1$) und $H = c_0 + \ldots + c_{n-r} \cdot X^{n-r}$ $(n - r \geq 1)$ gilt: $p | b_0$ und $p | c_0$ also $p^2 | b_0 \cdot c_0 = a_0$, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Die Annahme ist also falsch, F ist wirklich irreduzibel in $Q(A)[X]$. $\square$

Beispiel 2.2.6. Wir betrachten $A = \mathbb{Z}$, $p \in \mathrm{Prim}(\mathbb{Z})$, $p > 0$,

$$F := X^{p-1} + X^{p-2} + \ldots + X + 1 \in \mathbb{Z}[X].$$

Es ist $c(F) = 1$.

Wir haben den Ringisomorphismus

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{Z}[X] &\xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[X] \\ P(X) &\longmapsto P(X+1) \\ Q(X-1) &\longleftarrow\!\shortmid Q(X) \end{aligned}$$

und betrachten seine Anwendung auf F:

$$\begin{aligned} (X-1) \cdot F(X) &= X^p - 1 \\ \Rightarrow \quad X \cdot F(X+1) &= \sigma((X-1) \cdot F(X)) \\ &= \sigma(X^p - 1) \\ &= (X+1)^p - 1 \\ &= \underbrace{\binom{p}{p}}_{=1} X^p + \binom{p}{p-1} X^{p-1} + \ldots + \binom{p}{1} X + \underbrace{\binom{p}{0} \cdot X^0 - 1}_{=0}, \\ X \cdot F(X+1) &= X \cdot \left(X^{p-1} + \binom{p}{p-1} \cdot X^{p-2} + \ldots + \binom{p}{2} \cdot X + \binom{p}{1} \right) \\ \Rightarrow \quad F(X+1) &= X^{p-1} + \binom{p}{p-1} \cdot X^{p-2} + \ldots + \binom{p}{2} \cdot X + \underbrace{\binom{p}{1}}_{=p} \end{aligned}$$

und $p | \binom{p}{i}$ für $1 \leq i \leq p-1$ (bei primem p), also ist modulo p:

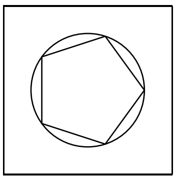
$$\overline{F(X+1)} = X^{p-1}.$$

Daher liefert 2.2.4, dass $F(X+1) = \sigma(F)$ irreduzibel (in $\mathbb{Q}[X]$ und $\mathbb{Z}[X]$) ist, und da σ ein Isomorphismus ist, ist auch F irreduzibel in $\mathbb{Z}[X]$.

Definition 2.22. *Das eben betrachtete Polynom*

$$\Phi_p(X) := X^{p-1} + \ldots + X + 1 \in \mathbb{Z}[X]$$

*heißt auch p-**tes Kreisteilungspolynom**.*



Zur Illustration (und Erklärung des Namens): Es ist

$$X^p - 1 = (X-1) \cdot \Phi_p(X)$$

und die Nullstellen von $X^p - 1$ (in $\mathbb{C}$) sind gerade die **p-ten Einheitswurzeln**

$$1, \xi_p = e^{\frac{2\pi i}{p}}, \xi_p^2, \cdots, \xi_p^{p-1}, \xi_p^p = 1.$$

Den von ξ_p erzeugten Körper $\mathbb{Q}(\xi_p) \subseteq \mathbb{C}$, mit $\mathbb{Q}(\xi_p) \cong \mathbb{Q}[X] / (\Phi_p(X))$ nennen wir den **p-ten Kreisteilungskörper** in $\mathbb{C}$.

Beispiel 2.2.7. Sei A faktoriell, $\mathcal{P} \subseteq \operatorname{Prim}(\mathcal{A})$ ein Repräsentantensystem der Primzahlen (modulo $\sim$), $a \in A$, $n \in \mathbb{N}$, $F := X^n - a \in A[X]$, $a = \varepsilon \cdot p_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{\nu_s}$ die Primfaktorzerlegung von a (mit $p_i \in \mathcal{P}$, $\varepsilon \in A^*$.)

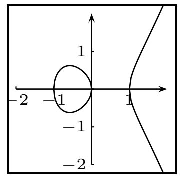
Frage. Wann ist $F \in A[X]$ irreduzibel?

BEHAUPTUNG. Ist $\nu_p(a) = 1$ für mindestens ein $p \in \mathcal{P}$, so ist $X^n - a \in \operatorname{Irr}(A[X])$.

Beweis. Wieder mit Eisenstein: Es ist $p|0$, $p|a$, $p^2 \not| a$ und $p \not| 1$, und daher ist $X^n - a$ irreduzibel in $A[X]$. □

Beispiel 2.2.8. Sei K Körper, $\lambda \in K \setminus \{0, 1\}$, und

$$F := Y^2 - X \cdot (X - 1) \cdot (X - \lambda) \in K[X, Y].$$



$\lambda = -1$

$V(F) \subsetneqq K^2$ ist eine ebene algebraische Kurve vom Grad 3 und heißt eine **Weierstraß-Kubik**.

(Bei Beispiel 6.1.3 auf Seite 224 sind noch mehr Bilder, auch für $\lambda \in \{0, 1\}$.)

Frage. Ist $F = Y^2 - X \cdot (X - 1) \cdot (X - \lambda)$ irreduzibel in $K[X]$?

Wir setzen dazu $A := K[X]$ (ist faktoriell) und haben $A[Y] = K[X][Y] = K[X, Y]$,

$$F = 1 \cdot Y^2 + 0 \cdot Y - X \cdot (X - 1) \cdot (X - \lambda) \cdot Y^0.$$

X ist in A irreduzibel, teilt (außer dem Leitkoeffizienten 1) alle Koeffizienten von F (in $A[Y]$ betrachtet), und $X^2 \not| X \cdot (X - 1) \cdot (X - \lambda)$ (für $\lambda \neq 0$[1]), und nach Eisenstein ist also F irreduzibel in $K[X, Y]$.

SATZ 2.2.5. *(Kriterium „Reduktion modulo Primideal“)*
Sei A ein faktorieller Ring, $F = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot X^i \in A[X]$, und $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ ein Primideal mit folgenden Eigenschaften:

(1) $a_n \notin \mathfrak{p}$

(2) $\overline{F} \in \operatorname{Irr}\left(A/\mathfrak{p}[X]\right)$ oder $\overline{F} \in \operatorname{Irr}\left(Q(A/\mathfrak{p})[X]\right)$.

Dann ist F irreduzibel in $Q(A)[X]$. Ist $c(F) = 1$, so ist F auch irreduzibel in $A[X]$.

Achtung. Dies ist wieder nur ein hinreichendes (nicht notwendiges) Kriterium, Gegenbeispiele gibt eine Übungsaufgabe.

[1] Für $\lambda = 0$ kann man die gleiche Argumentation mit $X - 1$ führen, was ja ebenfalls irreduzibel ist.

Beweis. Sei $F \in A[X]$ wie oben, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ mit (1) und (2).

Nehmen wir an, F wäre nicht irreduzibel in $Q(A)[X]$. Wir haben dann $F = P \cdot Q$ in $Q(A)[X]$, und daher (analog zum vorherigen Satz) auch $F = G \cdot H$, $G, H \in A[X]$, mit $1 \leq \deg G < n$ und $1 \leq \deg H < n$, etwa $G = b_r \cdot X^r + \ldots + b_0$, $H = c_{n-r} \cdot X^{n-r} + \ldots + c_0$. Nun reduzieren wir modulo $\mathfrak{p}$. Die Abbildungsfolge

$$A[X] \xrightarrow{\hat{\pi}} A/\mathfrak{p}[X] \overset{i}{\hookrightarrow} Q(A/\mathfrak{p})[X]$$

liefert $\overline{F} = \overline{G} \cdot \overline{H}$ in $A/\mathfrak{p}[X]$ und auch in $Q(A/\mathfrak{p})[X]$. Da $\overline{F}$ (nach (2)) irreduzibel ist, haben wir also $\overline{G} \in \left(Q(A/\mathfrak{p})[X]\right)^*$ oder $\overline{H} \in \left(Q(A/\mathfrak{p})[X]\right)^*$, insbesondere muss also $b_r \in \mathfrak{p}$ oder $c_{n-r} \in \mathfrak{p}$ sein, also $b_r \cdot c_{n-r} = a_n \in \mathfrak{p}$, im Widerspruch zu (1). $\square$

Beispiel 2.2.9. Wir betrachten

$$F = X^2 + Y^2 + 1 \in \mathbb{R}[X, Y] = \mathbb{R}[X][Y]$$

und wählen $\mathfrak{p} := (X) \in \operatorname{Spec}(\mathbb{R}[X])$. Es ist $1 \notin (X)$, und

$$\overline{F} = Y^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]/(X)[Y] = \mathbb{R}[Y],$$

das ist irreduzibel in $\mathbb{R}[Y]$, also ist auch F irreduuzibel in $\mathbb{R}[X, Y]$.

Beispiel 2.2.10. Betrachte $A = \mathbb{Z}$, $F = X^3 + 426X^2 + 2433X - 67691 \in \mathbb{Z}[X]$. Reduktion modulo 2 ergibt $\overline{F} = X^3 + X + 1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$, und das ist irreduzibel in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$, da es keine Nullstellen hat (und mindestens einer der Faktoren Grad 1, also eine Nullstelle, hätte). Nach Satz 2.2.5 ist also auch F irreduzibel in $\mathbb{Z}[X]$ (denn $c(F)$ ist offensichtlich 1).

3 Lokale und globale Algebra

3.1 Lokalisierung

Sei A ein (wie immer kommutativer und unitärer) Ring, $S \subsetneq A$ ein multiplikativ abgeschlossenes System.

Erinnerung. Eine Teilmenge S eines Rings A heißt **multiplikativ abgeschlossenes System** (**m. a. S.**), falls

(i) $0 \notin S$

(ii) $1 \in S$

(iii) $\forall a, b \in S^2 : a \cdot b \in S$

Erinnerung. Ist S ein m. a. S., so ist $\boxed{\overline{S}}$

$$\overline{S} := \{a \in A \mid \exists b \in A : a \cdot b \in S\}$$

ebenfalls ein m. a. S., es ist $S \subseteq \overline{S}$ und $a \cdot b \in \overline{S} \Leftrightarrow a \in \overline{S} \wedge b \in \overline{S}$.

Erinnerung. Ein m. a. S. heißt **saturiert**, falls

$$\forall a, b \in A^2 : a \cdot b \in S \Leftrightarrow a \in S \wedge b \in S$$

Erinnerung. Es gilt sogar:

(a) $\overline{S}$ ist stets saturiert.

(b) Ist S saturiert, so ist $\overline{S} = S$.

(c)
$$\overline{S} = \bigcap_{\substack{S \subseteq T \\ T \text{ saturiert}}} T = A \setminus \bigcup_{\substack{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \\ \mathfrak{p} \cap S = \varnothing}} \mathfrak{p}$$

$\overline{S}$ heißt die **Saturierung** von S in A.

Definition 3.1. *Sei (A, S) Ring mit m. a. S.. Dann definieren wir die Relation $\sim$ auf $A \times S$ durch* $\boxed{\sim}$

$$\forall (a, s), (b, t) \in A \times S : \quad (a, s) \sim (b, t) \Longleftrightarrow \exists v \in S : v \cdot (a \cdot t - b \cdot s) = 0$$

Bemerkung. $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf $A \times S$.

$\boxed{A_S}$ $\boxed{S^{-1}A}$ $\boxed{\frac{a}{s}}$

Definition 3.2. *Die Faktormenge bezeichnen wir mit*

$$A_S := S^{-1} \cdot A := {A \times S}/_{\sim},$$

und bezeichnen die Elemente davon mit

$$\forall (a,s) \in A \times S : \quad \frac{a}{s} := [(a,s)]_{\sim}.$$

Bemerkung. Damit haben wir

$$\frac{a}{s} = \frac{b}{t} \Longleftrightarrow \exists v \in S : v \cdot (a \cdot t - b \cdot s) = 0.$$

$\boxed{\cdot}$ $\boxed{+}$

Bemerkung. Auf A_S existiert eine natürliche (kanonische) Ringstruktur durch

$$\begin{aligned} + : A_S \times A_S &\longrightarrow A_S \\ \left(\frac{a}{s}, \frac{b}{t}\right) &\longmapsto \frac{t \cdot a + b \cdot s}{s \cdot t} \\ \cdot : A_S \times A_S &\longrightarrow A_S \\ \left(\frac{a}{s}, \frac{b}{t}\right) &\longmapsto \frac{a \cdot b}{s \cdot t} \end{aligned}$$

Die Wohldefiniertheit von $+$ und $\cdot$ folgt unmittelbar aus der Definition von $\sim$, und es ergibt sich auch wirklich eine Ringstruktur.

$\boxed{(A_S, +, \cdot)}$

Definition 3.3. $(A_S, +, \cdot)$ *heißt der* ***Lokalisierungsring*** *von A bezüglich des m. a. S. S (bzw. die* ***Lokalisierung*** *von A nach S).*

Bemerkung. A_S ist wieder kommutativ und unitär, weil A dies war. Ist A ein Integritätsbereich, so auch A_S.

$\boxed{A_f}$

Beispiel 3.1.1. Sei $f \notin \mathrm{Nil}(A)$, und $S_f := \{f^n \mid n \in \mathbb{N}_0\} = \left\{1, f, f^2, f^3, \cdots\right\}$ (i.a. nicht saturiert). Dann haben wir

$$A_f = A_{S_f} = \left\{ \frac{a}{f^n} \,\middle|\, a \in A, n \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

(Für $A = \mathbb{Z}$ und $n = 10$ ist das z.B. die Menge der (endlichen) Dezimalbrüche.)

Beispiel 3.1.2. Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, $S_\mathfrak{p} := A \setminus \mathfrak{p}$ ist dann saturiert. Dann haben wir

$$A_\mathfrak{p} := A_{S_\mathfrak{p}} = A_{A \setminus \mathfrak{p}} = \left\{ \frac{a}{s} \,\middle|\, a \in A, s \in A \setminus \mathfrak{p} \right\}.$$

Beispiel 3.1.3. Wählen wir $S = \mathrm{NNT}(A)$ (dies ist ein saturiertes m. a. S.), so erhalten wir den **vollen Quotientenring** $A_{\mathrm{NNT}(A)}$.

(Für Integritätsbereiche ist $\mathrm{NNT}(A) = A \setminus \{0\}$, also $A_{\mathrm{NNT}(A)} = Q(A)$ der Quotientenkörper von A.)

Beispiel 3.1.4. Ist $\{\mathfrak{p}_i \mid i \in I\}$ Familie von Primidealen in A, so haben wir $S = A \setminus \bigcup_{i\in I} \mathfrak{p}_i$ (m. a. S., i.a. nicht saturiert), und damit auch A_S.

Beispiel 3.1.5. Sei $\mathfrak{a} \subsetneqq A$ ein echtes Ideal, dann haben wir

$$S := 1 + \mathfrak{a} = \{1 + a \mid a \in \mathfrak{a}\}\,.$$

Dies ist ein m. a. S., i.a. nicht saturiert. Dies ergibt den Lokalisierungsring

$$A_{1+\mathfrak{a}} = \left\{ \frac{a}{1+c} \,\middle|\, a \in A, c \in \mathfrak{a} \right\}.$$

Achtung. Ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}$ ein Primideal, so hat man $A_\mathfrak{p} = A_{A\setminus\mathfrak{p}}$ und $A_{1+\mathfrak{p}}$, aber es ist $A_\mathfrak{p} \neq A_{1+\mathfrak{p}}$.

Bemerkung. Man kann auch auf die Vorraussetzung $0 \notin S$ bei der Definition m. a. S. verzichten (manche Autoren tun dies). Aber dann bekommt man für $0 \in S$:

$$\frac{a}{s} = \frac{b}{t} \forall (a,s),(b,t) \in A \times S,$$

weil ja $0 \cdot (a \cdot t - b \cdot s) = 0$ ist, wir haben also $A_S = \left\{\frac{0}{1}\right\} = \left\{\frac{1}{1}\right\}$ als einelementigen Ring (0), und den wollen wir nicht betrachten.

Der kanonische Homomorphismus $i_S : A \to A_S$ für ein m. a. S. $S \subsetneqq A$

Sei A ein Ring, $S \subseteq A$ ein m. a. S., $A_S = \left\{\frac{a}{s} \mid a \in A, s \in S\right\}$ die Lokalisierung von A nach S.

Definition 3.4. *Die Abbildung* $\boxed{i_S}$

$$\begin{aligned} i_S : A &\longrightarrow A_S \\ a &\longmapsto i_S(a) := \frac{a}{1} \end{aligned}$$

*heißt **kanonischer Homomorphismus** von A nach A_S.*

Bemerkung. i_S ist wirklich ein (unitärer) Ringhomomorphismus:

$$\begin{aligned} i_S(a+b) &= \frac{a+b}{1} \\ &= \frac{a}{1} + \frac{b}{1} \\ &= i_S(a) + i_S(b) \\ i_S(a \cdot b) &= \frac{a \cdot b}{1} \\ &= \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} \\ &= i_S(a) \cdot i_S(b) \\ i_S(1) &= \frac{1}{1} \\ &= 1_{A_S} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Bemerkung 1.}}$

(1) i_S ist im allgemeinen weder injektiv noch surjektiv.

(2) i_S ist injektiv $\Leftrightarrow S \subseteq \mathrm{NNT}(A)$.

(3) i_S ist bijektiv $\Leftrightarrow S \subseteq A^*$.

(4) Ist A ein Integritätsbereich, so ist i_S für alle m. a. S. S eine Injektion (Ringeinbettung).

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}\ker(i_S) &= \left\{a \in A \,\middle|\, i_S(a) = \frac{0}{1}\right\} \\ &= \left\{a \in A \,\middle|\, \frac{a}{1} = \frac{0}{1}\right\} \\ &= \{a \in A \,|\, \exists v \in S : v \cdot a = 0\}\end{aligned}$$

und daher haben wir

$$\begin{aligned}\ker(i_s) \neq (0) &\Leftrightarrow \exists a \in A, a \neq 0, \exists v \in S : v \cdot a = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists v \in \mathrm{NT}(A) \cap S \\ &\Leftrightarrow S \not\subseteq \mathrm{NNT}(A),\end{aligned}$$

und damit haben wir (2).

Ist i_S bijektiv, so ist i_S insbesondere surjektiv, und daher auch $\forall \frac{1}{s} \in A_S$ auch $\frac{1}{s} = \frac{b}{1}$ für ein $b \in A$, d.h. $\exists v \in S, b \in A$ mit $v \cdot (1 \cdot 1 - b \cdot s) = 0$, also $v = v \cdot b \cdot s$. Wegen $S \subseteq \mathrm{NNT}(A)$ ist $1 = b \cdot s$, also $s \in A^*$.

Die Umkehrung ist klar: Ist $S \subseteq A^*$, so ist insbesondere auch $S \subseteq \mathrm{NNT}(A)$, also i_S injektiv. Außerdem ist für alle $\frac{a}{s} \in A_S$, $s \in A^*$, schon

$$\begin{aligned}\frac{a}{s} &= \frac{a \cdot s^{-1}}{s \cdot s^{-1}} \\ &= \frac{a \cdot s^{-1}}{1} \\ &= i_S(a \cdot s^{-1}),\end{aligned}$$

also i_S auch surjektiv. Damit haben wir (3).

(4) ist offenbar eine Folgerung aus (2),

(1) ist klar, denn es lassen sich Ringe A (mit passendem S) finden, in denen nicht $S \subseteq \mathrm{NNT}(A)$ ist. $\square$

$\boxed{\text{Satz 3.1.1.}}$ *(Universaleigenschaft von Lokalisierungsringen)*
Seien A und S gegeben (A Ring, S ein m. a. S. in A), $f : A \to B$ ein unitärer Ringhomomorphismus mit $f(S) \subseteq B^*$.

(1) Dann gibt es eine eindeutige Faktorisierung $\hat{f} : A_S \to B$, $\hat{f} \in \mathrm{Hom}_{\text{U-Ringe}}(A_S, B)$ mit $\hat{f} \circ i_S = f$:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_S"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B \\
A_S \arrow[ur, "\exists! \hat{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

(2) Hat $g \in \mathrm{Hom}_{\text{U-Ringe}}(A, C)$ diese Universaleigenschaft (d.h. für alle $f \in \mathrm{Hom}_{\text{U-Ringe}}(A, B)$ mit $f(S) \subseteq B^*$ existiert genau ein $\tilde{f} \in \mathrm{Hom}_{\text{U-Ringe}}(C, B)$), so ist $C \cong A_S$.

$\boxed{\text{Korollar.}}$ Ist $S \subseteq \mathrm{NNT}(A)$ (d.h. i_S eine Ringeinbettung), so ist A_S der kleinste „Oberring“ von A, in dem alle Elemente von S Einheiten sind.

Beweis des Satzes.

(1) **Eindeutigkeit:** Wenn ein solches $\hat{f}$ existiert mit $\hat{f} \circ i_S = f$, so muss für $a \in A$ gelten:

$$f(a) = (\hat{f} \circ i_S)(a) = \hat{f}\left(\frac{a}{1}\right),$$

also für alle $(a, s) \in A \times S$:

$$\begin{aligned}
f(a) &= \hat{f}\left(\frac{a}{1}\right) \\
&= \hat{f}\left(\frac{a}{s} \cdot \frac{s}{1}\right) \\
&= \hat{f}\left(\frac{a}{s}\right) \cdot \hat{f}\left(\frac{s}{1}\right) \\
&= \hat{f}\left(\frac{a}{s}\right) \cdot f(s)
\end{aligned}$$

Nun ist ja nach Voraussetzung $f(s) \in B^*$, also haben wir

$$f(a) \cdot f(s) = \hat{f}\left(\frac{a}{s}\right)$$

Das heißt, $\hat{f}(\frac{a}{s})$ ist durch a und s eindeutig bestimmt.

Existenz: Wir definieren nun

$$\begin{aligned}\hat{f} : A_S &\longrightarrow B\\ \frac{a}{s} &\longmapsto f(a)\cdot f(b)^{-1}.\end{aligned}$$

(a) $\hat{f}$ ist so wohldefiniert: Ist $\frac{a}{s} = \frac{a'}{b'} \in A_S$, so

$$\begin{aligned} \exists v \in S: \quad & v\cdot(a\cdot s' - a'\cdot s) = 0\\ \Rightarrow \quad & f(v)\cdot\big(f(a)\cdot f(s') - f(a')\cdot f(s)\big) = 0\\ \xRightarrow{f(v)\in B^*} \quad & f(a)\cdot f(s') - f(a')\cdot f(s) = 0\\ \Rightarrow \quad & f(a)\cdot f(s') = f(a')\cdot f(s)\\ \Rightarrow \quad & f(a)\cdot f(s)^{-1} = f(a')\cdot f(s')^{-1}\\ \Rightarrow \quad & \hat{f}\left(\frac{a}{b}\right) = \hat{f}\left(\frac{a'}{b'}\right)\end{aligned}$$

(b) Ebenso zeigt man mittels der Definitionen von $+$ und $\cdot$ in A_S, der Homomorphismus-Eigenschaft von f und $f(S) \subseteq B$, dass $\hat{f}$ ein Ringhomomorphismus ist.

(c) Es ist $\hat{f}\circ i_S(a) = \hat{f}\left(\frac{a}{1}\right) = f(a)\cdot f(1)^{-1} = f(a)$, also $\hat{f}\circ i_S = f$.

(2) folgt aus (1) wegen der Universaleigenschaft und $\widehat{\mathrm{id}} = \mathrm{id}$.

□

SATZ 3.1.2. Sei (A, S) gegeben (wie üblich) mit $i_S : A \to A_S$. Dann gilt

(1) i_S ist injektiv $\Leftrightarrow S \subseteq \mathrm{NNT}(A)$.

(2) $A_S^* = \left\{\frac{a}{s}\,\middle|\, a \in \overline{S}, s \in S\right\}$, wobei $\overline{S}$ die Saturierung von S ist. Ist $S = \overline{S}$, so ist $A_S^* = \left\{\frac{a}{s}\,\middle|\, a \in S, s \in S\right\}$.

(3) A_S und $A_{\overline{S}}$ sind kanonisch isomorph.

Beweis.

(1) Siehe oben.

(2) Ist $\frac{a}{s} \in A_S^*$, so

$$\begin{aligned} & \exists \frac{b}{t} \in A_S: \quad \frac{1}{1} = \frac{a}{s}\cdot\frac{b}{t}\\ \Rightarrow \quad & \exists (b,t,v) \in A\times S\times S: \quad 0 = v\cdot(a\cdot b\cdot 1 - s\cdot t\cdot 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \exists (b,t,v) \in A \times S \times S: \quad \underbrace{v \cdot b}_{\in A} \cdot a = v \cdot s \cdot t \in S \\
\Rightarrow \quad \exists c \in A: \quad c \cdot a \in S \\
\Rightarrow \quad a \in \overline{S} \\
\Rightarrow \quad \frac{a}{s} \in \left\{ \frac{d}{w} \,\middle|\, d \in \overline{S}, w \in S \right\}
\end{aligned}$$

Umgekehrt: Ist $\frac{a}{s} \in A_S$ mit $a \in \overline{S}$, so existiert ein $d \in A$ mit $d \cdot a \in S$, und damit ist

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{s \cdot d}{d \cdot a} = \frac{1}{1} = 1,$$

also $\frac{a}{s} \in A_S^*$.

(3) Betrachte $S \subseteq \overline{S} \subsetneqq A$, und die Einbettungsabbildung $A \xrightarrow{i_{\overline{S}}} A_{\overline{S}}$. Dann ist $i_{\overline{S}}(s) = \frac{s}{1} \in A_{\overline{S}}^*$ für alle $s \in S \subseteq \overline{S}$, also faktorisiert nach Satz 3.1.1 $i_{\overline{S}}$ wie folgt:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_{\overline{S}}"] \arrow[d, "i_S"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A_{\overline{S}} \\
A_S \arrow[ur, "\widehat{i_{\overline{S}}}"'] &
\end{tikzcd},$$

mit

$$\begin{aligned}
\widehat{i_{\overline{S}}}\left(\frac{a}{s}\right) &= i_{\overline{S}}(a) \cdot i_{\overline{S}}(s)^{-1} \\
&= \frac{a}{1} \cdot \left(\frac{s}{1}\right)^{-1} \\
&= \frac{a}{s} \in A_{\overline{S}}
\end{aligned}$$

Behauptung. $\widehat{i_{\overline{S}}}$ ist ein Isomorphismus.

Beweis.

(i) Ein Homomorphismus ist $\widehat{i_{\overline{S}}}$ ja sowieso.

(ii) Sei $\frac{a}{s} \in A_{\overline{S}}$ mit $s \in \overline{S}$. Dann $\exists c \in A$ mit $c \cdot s \in S$, also haben wir

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{s \cdot c} = \widehat{\frac{a \cdot c}{s \cdot c}},$$

also ist $\widehat{i_{\overline{S}}}$ surjektiv.

(iii) Sei $\frac{a}{s} \in A_S$ mit

$$\begin{aligned} & & \widehat{i_{\overline{S}}}\left(\frac{a}{s}\right) &= \frac{0}{1} & &\text{in } A_{\overline{S}} \\ \Rightarrow & \quad \exists w \in \overline{S}: & w \cdot a &= 0 & &\text{in } A \end{aligned}$$

Dabei $\exists y \in A$ mit $y \cdot w \in S$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \exists w \in \overline{S}, \exists y \in A: \quad \underbrace{y \cdot w}_{\in S} \cdot a &= 0 & &\text{in } A \\ \Rightarrow \quad \frac{a}{s} &= \frac{0}{1} & &\text{in } A_S \end{aligned}$$

□

□

Vergleichende Idealtheorie in A und A_S (Erste Stufe des Lokal-Global-Prinzips)

Erinnerung. Sei $f : A \to B$ unitärer Ringhomomorphismus, $\mathfrak{a} \subseteq A$ Ideal, $\mathfrak{b} \subseteq B$ Ideal.

$\boxed{\mathfrak{a}_{\text{ext}}}$ Dann nennen wir

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_{\text{ext}} &:= \text{Ideal}(f(\mathfrak{a})) \subseteq B \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^{r} b_i \cdot f(a_i) \,\middle|\, r \in \mathbb{N}, b_i \in B, a_i \in \mathfrak{a} \right\} \end{aligned}$$

die **Extension** (oder das **Extensionsideal**) von $\mathfrak{a}$, und

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}_{\text{cont}} &:= f^{-1}(\mathfrak{b}) \\ &= \{a \in A \mid f(a) \in \mathfrak{b}\} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathfrak{b}_{\text{cont}}}$ die **Kontraktion** (oder das **Kontraktionsideal**) von $\mathfrak{b}$.

BEMERKUNG 1. Es gilt hier immer

$$(\mathfrak{a}_{\text{ext}})_{\text{cont}} \supseteq \mathfrak{a},$$

die Gleichheit gilt i.a. nicht.

Beweis.

$$\begin{aligned} & a \in \mathfrak{a} \\ \Rightarrow\ & f(a) = 1 \cdot f(a), & &\text{mit } a \in \mathfrak{a} \\ \Rightarrow\ & f(a) = \sum_{i=1}^{r} b_i \cdot f(a_i) & &\text{mit } b_i \in B, a_i \in \mathfrak{a} \\ \Rightarrow\ & f(a) \in \mathfrak{a}_{\text{ext}} \\ & \Rightarrow a \in (\mathfrak{a}_{\text{ext}})_{\text{cont}} \end{aligned}$$

Zur Nicht-Gleichheit betrachte das folgende Beispiel. □

Beispiel 3.1.6. Sei A ein Integritätsbereich (nicht Körper), $B = Q(A) = A_{\mathrm{NNT}(A)}$ sein Quotientenkörper und $f : A \hookrightarrow Q(A)$ die kanonische Einbettung. Ist $(0) \neq \mathfrak{a} \subsetneqq A$ Ideal, so gilt für alle $a \in \mathfrak{a} \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned}
& f(a) \in Q(A) \setminus \{0\} \\
\Rightarrow\quad & f(a) \in Q(A)^* \\
\Rightarrow\quad & f(\mathfrak{a}) \text{ enthält Einheiten} \\
\Rightarrow\quad & \mathfrak{a}_{\mathrm{ext}} = Q(A) \\
\Rightarrow\quad & (\mathfrak{a}_{\mathrm{ext}})_{\mathrm{cont}} = f^{-1}(Q(A)) \\
& = A \neq \mathfrak{a}
\end{aligned}$$

BEMERKUNG 2. Für alle Ideale $\mathfrak{b} \subseteq B$ gilt $$(\mathfrak{b}_{\mathrm{cont}})_{\mathrm{ext}} \subseteq \mathfrak{b},$$ auch hier besteht im Allgemeinen keine Gleichheit.

Beweis.

$$\begin{aligned}
& b \in (\mathfrak{b}_{\mathrm{cont}})_{\mathrm{ext}} \\
\Rightarrow\quad & b = \sum_{i=1}^{r} b_i \cdot f(a_i) && \text{mit } a_i \in \mathfrak{b}_{\mathrm{cont}} \\
\Rightarrow\quad & b = \sum_{i=1}^{r} b_i \cdot b_i && \text{mit } b_i = f(a_i) \in \mathfrak{b} \\
\Rightarrow\quad & b \in \mathfrak{b}
\end{aligned}$$

□

Beispiel 3.1.7. Betrachte die Einbettung $A \xhookrightarrow{f} A[X]$ von A in seinen Polynomring, und das Ideal

$$\mathfrak{b} := (X) = X \cdot A[X]$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathfrak{b}_{\mathrm{cont}} &= \{a \in A \mid f(A) \in (X)\} \\
&= (0), \\
\Rightarrow (\mathfrak{b}_{\mathrm{cont}})_{\mathrm{ext}} &= (0)
\end{aligned}$$

Diese Begriffe wenden wir nun auf den speziellen Homomorphismus $i_S : A \to A_S$ an.

(1) Sei $\mathfrak{A} \subseteq A_S$ ein Ideal und $f := i_S : A \to A_S$ betrachtet. Dann ist

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_{\text{cont}} &= i_S^{-1}(\mathfrak{A}) \\ &= \{a \in A \mid i_S(a) \in \mathfrak{A}\} \\ &= \left\{a \in A \,\middle|\, \frac{a}{1} \in \mathfrak{A}\right\}\end{aligned}$$

Ist nun $\frac{a}{s} \in \mathfrak{A}$, so

$$\begin{aligned} & \frac{a}{1} = \frac{a}{s} \cdot \frac{s}{1} \in \mathfrak{A} \\ \Rightarrow \quad & i_s(a) = \frac{a}{1} \in \mathfrak{A} \\ & \quad \Rightarrow \quad a \in \mathfrak{A}_{\text{cont}} \\ \Rightarrow \quad & \frac{a}{s} = \frac{a}{1} \cdot \frac{1}{s} \in (\mathfrak{A}_{\text{cont}})_{\text{ext}}\end{aligned}$$

Das heißt, es ist $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}_{\text{cont}})_{\text{ext}}$.

FAZIT. Wir haben also das kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \{\text{Ideale von } A_S\} \arrow[r, tail, "\text{cont}"] \arrow[d, equal, "\text{id}"', "\wr"] & \{\text{Ideale von } A\} \arrow[dl, "\text{ext}"] \\ \{\text{Ideale von } A_S\} & \end{tikzcd}$$

Das heißt, jedes Ideal $\mathfrak{A} \subseteq A_S$ ist ein Extensionsideal, $\mathfrak{A} = \mathfrak{a}_{\text{ext}}$ mit geeignetem Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$, etwa $\mathfrak{a} = \mathfrak{A}_{\text{cont}}$.

(2) Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Dann gilt ja zunächst (generell) $(\mathfrak{a}_{\text{ext}})_{\text{cont}} \supseteq \mathfrak{a}$. Genauer:

$$\begin{aligned} & a \in (\mathfrak{a}_{\text{ext}})_{\text{cont}} \\ \Leftrightarrow \quad & i_S(a) \in \mathfrak{a}_{\text{ext}} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{a}{1} = \sum_{i=1}^{r} \frac{b_i}{s_i} \cdot \frac{a_i}{1} && \text{mit } a_i \in \mathfrak{a}, b_i \in A, s_i \in S \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{a}{1} = \frac{\alpha}{s} && \text{mit } \alpha \in \mathfrak{a}, s \in S \\ \Leftrightarrow \quad & \exists \alpha \in \mathfrak{a}, s \in S, v \in S: \quad 0 = v \cdot (1 \cdot \alpha - a \cdot s) \\ \Rightarrow \quad & \exists w \in S: \quad w \cdot a = \underbrace{v \cdot \alpha}_{\in \mathfrak{a}} \\ \Rightarrow \quad & \exists w \in S: \quad a \in (\mathfrak{a} : w) \\ \Rightarrow \quad & a \in \bigcup_{w \in S} (\mathfrak{a} : w)\end{aligned}$$

Umgekehrt: Ist $b \in (\mathfrak{a} : w)$ mit $w \in S$, so ist $b \cdot w \in \mathfrak{a}$, folglich $\frac{b}{1} = \frac{b \cdot w}{w}$, und dies ist (wie eben gezeigt) äquivalent zu $b \in (\mathfrak{a}_{\text{ext}})_{\text{cont}}$.

$\boxed{\text{Fazit.}}$

$$\forall \mathfrak{a} \subseteq A: \qquad \bigcup_{w \in S} (\mathfrak{a} : w) = (\mathfrak{a}_{\text{ext}})_{\text{cont}}$$

(3) Sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal mit $\cap S \neq \varnothing$. Dann existiert ein $s \in \mathfrak{a} \cap S$, also $\frac{s}{1} \in \mathfrak{a}_{\text{ext}} \cap A_S^*$, und damit ist $\mathfrak{a}_{\text{ext}} = A_S$.

Das heißt, die *echten* Ideale $\mathfrak{A} \subsetneqq A_S$ haben die Form $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}_{\text{cont}})_{\text{ext}}$ mit $\mathfrak{A}_{\text{cont}} \cap S = \varnothing$.

$\boxed{\text{Fazit.}}$ Wir haben also folgende Korrespondenz:

$$\left\{ \begin{matrix} \mathfrak{a} \subsetneqq A \text{ Ideal} \\ \mathfrak{a} \cap S = \varnothing \end{matrix} \right\} \underset{\text{cont}}{\overset{\text{ext}}{\rightleftarrows}} \left\{ \begin{matrix} \mathfrak{a} \subsetneqq A \\ \text{(echtes) Ideal} \end{matrix} \right\}$$

(4) Sei $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec} A_S$ und entsprechend $\mathfrak{p} := \mathfrak{P}_{\text{cont}} \in \operatorname{Spec} A$, also $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing$, $\mathfrak{p}_{\text{ext}} = (\mathfrak{P}_{\text{cont}})_{\text{ext}} = \mathfrak{P}$. Das heißt, es ist $\mathfrak{P} = \mathfrak{p} \cdot A_S$.

Umgekehrt: Ist $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ mit $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing$, so ist

$$\mathfrak{p} \subseteq (\mathfrak{p}_{\text{ext}})_{\text{cont}} = \bigcup_{w \in S} (\mathfrak{p} : w).$$

Ist $t \in (\mathfrak{p} : w)$ für ein $w \in S$ (d.h. $w \notin \mathfrak{p}$), so ist (weil $\mathfrak{p}$ Primideal) $t \in \mathfrak{p}$. Wir haben also auch

$$\bigcup_{w \in S} (\mathfrak{p} : w) \subseteq \mathfrak{p}.$$

Insgesamt kommen wir also zu folgendem Satz.

$\boxed{\text{Satz 3.1.3.}}$ Sei A ein Ring, $S \subseteq A$ ein m. a. S., $i_S : A \to A_S$ der kanonische Homomorphismus, cont und ext die zu i_S assoziierten Abbildungen zwischen den Idealmengen in A und A_S. Dann gilt:

(1) ext : $\{$ Ideale in $A\} \twoheadrightarrow \{$Ideale in $A_S\}$ ist surjektiv.

(2) cont : $\{$Ideale in $A_S\} \hookrightarrow \{$ Ideale in $A\}$ ist injektiv.

(3) i_S stiftet eine Bijektion

$$\begin{aligned} \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{p} \cap S = \varnothing\} &\Longleftrightarrow \operatorname{Spec}(A_S) \\ \mathfrak{p} &\longmapsto \mathfrak{p}_{\text{ext}} \\ \mathfrak{P}_{\text{cont}} &\longleftarrow\!\shortmid \mathfrak{P} \end{aligned}$$

Bemerkung. Ist A Integritätsbereich, so ist bekanntlich $i_S : A \hookrightarrow A_S$ eine Einbettung. Identifiziert man hier A und $i_S(A) \subseteq A_S$, so hat die Bijektion die Gestalt:

$$\begin{aligned} \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{p} \cap S = \varnothing\} &\Longleftrightarrow \operatorname{Spec}(A_S) \\ \mathfrak{p} &\longmapsto \mathfrak{p} \cdot A_S \mathfrak{p}_{\text{ext}} \\ \mathfrak{P}_{\text{cont}} = \mathfrak{P} \cap A &\longleftarrow\!\shortmid \mathfrak{P} \end{aligned}$$

Beispiel 3.1.8. Sei A beliebiger Ring, $f \notin \operatorname{Nil}(A)$, $S := S_f = \left\{f^k \mid k \in \mathbb{N}_0\right\}$ m. a. S., $A_f := A_{S_f} = \left\{\frac{a}{f^k} \,\middle|\, a \in A, k \in \mathbb{N}_0\right\}$ der Lokalisierungsring zu f. Die aus Satz 3.1.3 folgende Bijektion ist dann

$$\begin{aligned} \operatorname{Spec}(A_f) &\Longleftrightarrow \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{p} \cap S_f = \varnothing\} \\ &= \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid f \notin \mathfrak{p}\} \\ &= D(f), \end{aligned}$$

das ist eine Zariski-offene Basismenge von $\operatorname{Spec} A$.

$$\begin{aligned} \mathfrak{P} &\longmapsto \mathfrak{P}_{\text{cont}} = \mathfrak{P} \cap A \\ \mathfrak{p} \cdot A_f &\longleftarrow\!\shortmid \mathfrak{p}, \quad f \notin \mathfrak{p} \end{aligned}$$

i_{S_f} induziert ja eine Zariski-stetige Abbildung

$$i^*_{S_f} = \text{cont} : \operatorname{Spec} A_f \hookrightarrow \operatorname{Spec} A,$$

zerlegbar in:

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} A_f \arrow[rr, tail, "i^*_{S_f}"] \arrow[dr, "\sim", "\widehat{i_{S_f}}^*"'] & & \operatorname{Spec} A \\ & D(f) \arrow[ur, "\text{incl}"'] & \end{tikzcd}$$

$\widehat{i_{S_f}}^*$ ist bijektiv nach Satz 3.1.3, und stetig, weil $D(f)$ offen und $i^*_{S_f}$ stetig ist.

Frage. Sind $\operatorname{Spec}(A_f)$ und $D(f)$ bzüglich $\widehat{i_{S_f}}^*$ sogar Zariski-homöomorph, d.h., ist $\widehat{i_{S_f}}^*$ sogar offen?

$\boxed{\text{Antwort.}}$ Ja! Es ist $\operatorname{Spec}(A_f) \cong D(f) \subseteq \operatorname{Spec}(A)$.

Beweis. Wir prüfen die Offenheit der (bijektiven!) Abbildung $\widehat{i_{S_f}}^*$. Sei $D\left(\frac{g}{f^k}\right)$ offene Basismenge in A_f, $g \in A$, $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist

$$\widehat{i_{S_f}}^*\left(D\left(\frac{g}{f^k}\right)\right) = \left\{i_{S_f}^{-1}(\mathfrak{P}) \,\middle|\, \mathfrak{P} \in \operatorname{Spec} A_f, \frac{g}{f^k} \notin \mathfrak{P}\right\}$$

Nun ist ja für $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec}(A_f)$ immer $\mathfrak{P} = \mathfrak{p} \cdot A_f$, $\mathfrak{p} = i_{S_f}^{-1}(\mathfrak{P})$, also

$$\begin{aligned}\widehat{i_{S_f}}^{*}\left(D\left(\frac{g}{f^k}\right)\right) &= \{\mathfrak{p} \in D(f) \mid g \notin \mathfrak{p}\} \\ &= \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{p} \in D(f) \cap D(g)\} \\ &= D(f) \cap D(g) \\ &= D(f \cdot g),\end{aligned}$$

und das ist offen in $\operatorname{Spec}(A)$. □

Andererseits ist für ein Ideal $\mathfrak{a} \subsetneqq A$ bekanntlich

$$\begin{aligned}\operatorname{Spec}\left(A/\mathfrak{a}\right) &= \{\mathfrak{p}/\mathfrak{a} \mid \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}, \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A\} \\ &\cong \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}\} \\ &= V(\mathfrak{a}) \subseteq \operatorname{Spec}(A).\end{aligned}$$

Beispiel 3.1.9. Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$, $S := S_{\mathfrak{p}} = A \setminus \mathfrak{p}$ und

$$A_{\mathfrak{p}} = A_{S_p} = \left\{\frac{a}{s} \,\middle|\, a \in A, s \notin \mathfrak{p}\right\}$$

die Lokalisierung von A nach dem Primideal $\mathfrak{p}$ (in der klassischen Literatur auch **Stellenring** an der Primstelle $\mathfrak{p}$ genannt).

Auch hier induziert $i_{\mathfrak{p}} = I_{S_{\mathfrak{p}}} : A \to A_{\mathfrak{p}}$ wieder eine Bijektion

$$\begin{aligned}\operatorname{Spec}(A_{\mathfrak{p}}) &\Longleftrightarrow \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(A) \mid \mathfrak{q} \cap (A \setminus \mathfrak{p}) = \varnothing\} \\ &= \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(A) \mid \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\}\end{aligned}$$

SATZ 3.1.4. Sei A ein Ring, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$, $A_{\mathfrak{p}}$ die Lokalisierung von A nach $\mathfrak{p}$. Dann gilt:

(1) $$\begin{aligned}\operatorname{Spec}(A_{\mathfrak{p}}) &= \{\mathfrak{q} \cdot A_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A, \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\} \\ &= \{\mathfrak{q} \cdot A_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{p} \in V(\mathfrak{q})\}\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}\operatorname{Specm}(A_{\mathfrak{p}}) &= \{\mathfrak{p} \cdot A_{\mathfrak{p}}\} \\ &= \left\{\left\{\frac{p}{s} \,\middle|\, p \in \mathfrak{p}, s \notin \mathfrak{p}\right\}\right\},\end{aligned}$$

d.h. $(A_{\mathfrak{p}}, \mathfrak{p} \cdot A_{\mathfrak{p}})$ ist ein lokaler Ring.

(3) $$A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p} \cdot A_{\mathfrak{p}} \cong Q\left(A/\mathfrak{p}\right)$$

(4) $$\begin{aligned}A_f &\cong A[X]/(f \cdot X - 1) \\ &= A[\overline{X}] = A\left[\frac{1}{\overline{f}}\right]\end{aligned}$$

Beweis.

(1) folgt aus der allgemeinen bijektiven Korrespondenz

$$\operatorname{Spec}(A_S) \Longleftrightarrow \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{q} \cap S = \varnothing\}$$

und $S = A \setminus \mathfrak{p}$.

(2)

$$\begin{aligned}\operatorname{Specm}(A) &= \{\mathfrak{q} \cdot A_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A, \text{ und maximal mit dieser Eigenschaft}\} \\ &= \{\mathfrak{q} \cdot A_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{q} = \mathfrak{p}\} \\ &= \{\mathfrak{p} \cdot A_{\mathfrak{p}}\}\end{aligned}$$

(3) Betrachte

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[rr, bend right, "\theta"'] & A/\mathfrak{p} \arrow[r, hook, "\mathrm{incl}"] & Q\left(A/\mathfrak{p}\right). \end{tikzcd}$$

Dann gilt für $s \in S_{\mathfrak{p}} = A \setminus \mathfrak{p}$ offenbar $\pi(s) \neq 0$, und daher $\theta(s) = i(\pi(s)) \neq 0$. Es ist also $\theta(s) \subseteq Q\left(A/\mathfrak{p}\right)^*$. Damit können wir die Universaleigenschaft von $A_{\mathfrak{p}}$ (d.h. Satz 3.1.1) anwenden und erhalten die Existenz einer Faktorisierung $\hat{\theta}$.

$$\begin{tikzcd} & A/\mathfrak{p} \arrow[dr, "\mathrm{incl}"] & \\ A \arrow[ur, "\pi"] \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, "i_{\mathfrak{p}}"'] & & Q\left(A/\mathfrak{p}\right) \\ & A_{\mathfrak{p}} \arrow[ur, "\hat{\theta}"'] & \end{tikzcd}$$

$\hat{\theta}$ ist also eindeutig existierender Ringhomomorphismus. (Wir müssen nun noch zeigen, dass $\hat{\theta}$ surjektiv ist mit Kern $\mathfrak{p} \cdot A_{\mathfrak{p}}$.)

Für alle $\frac{[a]}{[s]} \in Q\left(A/\mathfrak{p}\right)$ (dabei $[a], [s] \in A/\mathfrak{p}$, $[s] \neq 0$, also $a \in A, s \in A \setminus \mathfrak{p}$) ist offenbar

$$\frac{[a]_{\mathfrak{p}}}{[s]_{\mathfrak{p}}} = \theta\left(\frac{a}{s}\right),$$

also ist $\hat{\theta}$ (kanonisch) surjektiv.

Sei nun $\frac{a}{s} \in \ker(\hat{\theta})$, d.h.

$$\begin{aligned} & \frac{[a]}{[s]} = [0] && \text{in } Q\left(A/\mathfrak{p}\right) \\ \Leftrightarrow \quad & [a] = [0] && \text{in } A/\mathfrak{p} \\ \Leftrightarrow \quad & a \in \mathfrak{p} && \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{a}{s} \in \mathfrak{p} \cdot A_{\mathfrak{p}} && \end{aligned}$$

Wir haben also wirklich $\ker\hat{\theta} = \mathfrak{p} \cdot A_{\mathfrak{p}}$. Der Homomorphiesatz liefert, dass die Faktorisierung $\tilde{\theta} : A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p} \cdot A_{\mathfrak{p}} \to Q\left(A/\mathfrak{p}\right)$ ein Isomorphismus ist, und wir erhalten insgesamt das folgende (kommutative) Diagramm von Ringhomomorphismen:

$$\begin{tikzcd}
 & & & {[a]} \arrow[ddrr, mapsto] & & & \\
 & & & A/\mathfrak{p} \arrow[ddrr, "\mathrm{incl}"] & & & \\
 & & & & & \frac{[a]}{[1]} & \\
a \arrow[uuurrr, mapsto] \arrow[drr, mapsto] & A \arrow[uurr, "\pi"] \arrow[rrrr, "\theta"] \arrow[drr, "i_{\mathfrak{p}}"'] & & & & Q\left(A/\mathfrak{p}\right) & \frac{[a]}{[s]} \arrow[dd, mapsto, shift left] \\
 & & \frac{a}{1} & A_{\mathfrak{p}} \arrow[urr, "\hat{\theta}"] \arrow[rr, two heads] & & A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p} \cdot A_{\mathfrak{p}} \arrow[u, "\tilde{\theta}"', "\wr"] & \\
 & & & \frac{a}{s} \arrow[rrr, mapsto] & & & \left[\frac{a}{s}\right] \arrow[uu, mapsto, shift left]
\end{tikzcd}$$

(4) Wir haben hier die Abbildungskette

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[rr, bend right, "\psi = \pi \circ i"'] & A[X] \arrow[r, two heads, "\pi"] & A[X]/(f \cdot X - 1).
\end{tikzcd}$$

Hierbei ist $\psi(S_f) = \left\{\overline{f}^k \mid k \in \mathbb{N}_0\right\}$, $\psi(f) = \overline{f}$, wobei

$$\begin{aligned}
\overline{f} \cdot \overline{X} - \overline{1} &= 0 \\
\Rightarrow \quad \overline{f} \cdot \overline{X} &= \overline{1} \\
\Rightarrow \quad \overline{f} &= \overline{X}^{-1},
\end{aligned}$$

d.h. $\overline{f}$ und $\overline{X}$ sind Einheiten in $A[X]/f \cdot X - 1$. Es ist also

$$\psi(S_f) \subseteq \left(A[X]/f \cdot X - 1\right)^*,$$

gemäß Satz 3.1.1 existiert daher genau eine Faktorisierung $\hat{\psi}$:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "i_f"'] & A[X]/f \cdot X - 1 \\
A_f \arrow[ur, "\hat{\psi}"'] &
\end{tikzcd}$$

Undersuchen wir $\hat{\psi}$ genauer: Ist $P \in {}^{A[X]}\!/_{f \cdot X - 1}$, etwa

$$P = \overline{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot X^i},$$

so

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=0}^{r} \overline{\lambda_i} \cdot \overline{X^i} \\ &= \sum_{i=1}^{r} \psi\left(\frac{\lambda_i}{f^i}\right) \\ &= \psi\left(\sum_{i=0} \frac{\lambda_i}{f^i}\right), \end{aligned}$$

d.h. $\hat{\psi}$ ist surjektiv. Außerdem ist

$$\begin{aligned} \ker(\hat{\psi}) &= \left\{ \frac{a}{f^k} \,\middle|\, \hat{\psi}\left(\frac{a}{f^k}\right) = [0] \right\} \\ &\subseteq \left\{ \frac{a}{f^k} \,\middle|\, \overline{a} \cdot X^k = \overline{0} \right\} \\ &\subseteq \left\{ \frac{a}{f^k} \,\middle|\, \overline{a} = \overline{0} \right\} \\ &\subseteq \left\{ \frac{a}{f^k} \,\middle|\, a \in (f \cdot X - 1) \subseteq A[X], a \in A \right\} \\ &= \{0\}, \end{aligned}$$

das heißt $\hat{\psi}$ ist auch injektiv, also Isomorphismus.

$\square$

KOROLLAR. Für alle $f \in A \setminus \mathrm{Nil}(A)$ gilt:

$$\begin{aligned} D(f) \cong \mathrm{Spec}(A_f) \cong \mathrm{Spec}\left({}^{A[X]}\!/_{(f \cdot X - 1)}\right) &\cong \\ &\cong \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A[X]) \mid f \cdot X - 1 \in \mathfrak{p}\} \end{aligned}$$

und

$$\mathrm{Specm}(A_f) = \left\{ \mathfrak{q} \cdot A_f \,\middle|\, \begin{array}{c} f \notin \mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}\, A, \\ \mathfrak{q} \text{ maximal mit dieser Eigenschaft} \end{array} \right\}$$

Frage. Muss A_f ebenfalls – wie alle $A_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A$ – ein lokaler Ring sein?
Antwort. Nein, siehe folgende Beispiele.

Beispiel 3.1.10. Betrachte $A := \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ (ist reduzierter Ring, d.h. ohne nilpotente Elemente) und $f := \overline{2}$. Wir haben dann

$$\begin{aligned} A_f &= \left(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\right)_{\overline{2}} \\ &= \left\{ \overline{a}/\overline{2}^k \,\middle|\, a \in \{0, \cdots, 5\}, k \in \mathbb{N} \right\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \operatorname{Spec}\left(\left(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\right)_{\overline{2}}\right) &\cong \left\{ \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \,\middle|\, \overline{2} \notin \mathfrak{p} \right\} \\ &= \left\{ \overline{3} \cdot \left(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\right)_{\overline{2}} = (\overline{3}) \right\}, \end{aligned}$$

dieser Ring ist also wirklich ein lokaler Ring.

Beispiel 3.1.11. Nehmen wir nun $A := \mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ und $f = \overline{2}$. Dann haben wir

$$\begin{aligned} \operatorname{Spec}\left(\left(\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}\right)_{\overline{2}}\right) &\cong \left\{ \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}\left(\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}\right) \,\middle|\, \overline{2} \notin \mathfrak{p} \right\} \\ &= \left\{ 3\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}, 5\mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \right\}, \end{aligned}$$

dieser Ring ist also nicht lokal!

BEMERKUNG 3. Sei A ein Ring, $S \subseteq A$ m. a. S.. Dann gilt:

$$\operatorname{Nil}(A_S) = \operatorname{Nil}(A) \cdot A_S \quad \left(= \left\{ \frac{a}{s} \,\middle|\, a \in \operatorname{Nil}(A), s \in S \right\} \right)$$

Beweis.

$\supseteq$: Ist $\frac{a}{s} \in \operatorname{Nil}(A) \cdot A_S$, so

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad a \in \operatorname{Nil}(A) \\ &\Rightarrow \quad \exists k: \quad a^k = 0 \\ &\Rightarrow \quad \left(\frac{a}{s}\right)^k = \frac{a^k}{s^k} \\ &\qquad = \frac{0}{s^k} = \frac{0}{1}, \\ &\Rightarrow \quad \frac{a}{s} \in \operatorname{Nil}(A_S) \end{aligned}$$

$\subseteq$:

$$\begin{aligned}
&& \frac{a}{s} &\in \mathrm{Nil}(A_S) \\
\Rightarrow && \exists k \in \mathbb{N}: \quad \frac{a^k}{s^k} &= \frac{0}{1} \\
\Rightarrow && \exists k \in \mathbb{N}, \exists v \in S: \quad v \cdot a^k &= 0 \\
\Rightarrow && \exists k \in \mathbb{N}, \exists v \in S: \quad (v \cdot a^k) &= 0 \\
\Rightarrow && : \exists v \in S: \quad v \cdot a &\in \mathrm{Nil}(A) \\
\Rightarrow && \frac{a}{s} &= \frac{a \cdot v}{s \cdot v} \qquad \in \mathrm{Nil}(A) \cdot A_S
\end{aligned}$$

□

$\boxed{\text{KOROLLAR.}}$ Sei $\mathfrak{p} \in J_{(0)}$ ein minimales Primideal. Dann ist

$$\mathfrak{p} \subseteq \mathrm{NT}(A).$$

Beweis. Wir betrachten den lokalen Ring $(A_\mathfrak{p}, \mathfrak{p} \cdot A_\mathfrak{p})$ mit $i_\mathfrak{p} : A \to A_\mathfrak{p}$. Dann ist

$$\mathrm{Spec}(A_\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{q} \cdot A_\mathfrak{p} \mid \mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}\, A, \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\} = \{\mathfrak{p} \cdot A_\mathfrak{p}\},$$

denn es war ja $\mathfrak{p} \in J_{(0)}$ ein minimales Primideal. $A_\mathfrak{p}$ hat also auch nur ein einziges Primideal, und daher ist

$$\mathrm{Nil}(A_p) = \bigcap_{\mathfrak{r} \in \mathrm{Spec}(A_\mathfrak{p})} \mathfrak{r} = \mathfrak{p} \cdot A_\mathfrak{p},$$

und für alle $p \in \mathfrak{p}$ ist dann $i_\mathfrak{p}(p) = \frac{p}{1} \in \mathfrak{p} \cdot A_\mathfrak{p} = \mathrm{Nil}(A_\mathfrak{p})$, d.h.

$$\begin{aligned}
&& \exists k \in \mathbb{N}: \quad \frac{p^k}{1} &= \frac{0}{1} \\
\Rightarrow && \exists k \in \mathbb{N}, \exists s \in A \setminus \mathfrak{p}: \quad s \cdot p^k &= 0
\end{aligned}$$

Wählen wir k minimal mit dieser Eigenschaft (und ein passendes s dazu), so haben wir

$$\underbrace{s \cdot p^{k-1}}_{\neq 0} \cdot p = 0,$$

also ist $\mathfrak{p} \in \mathrm{NT}(A)$, d.h. $\mathfrak{p} \subseteq \mathrm{NT}(A)$. □

KOROLLAR. Sei A ein reduzierter Ring (d.h. $\mathrm{Nil}(A) = (0)$). Dann ist

$$\mathrm{NT}(A) = \bigcup_{\mathfrak{p} \in J_{(0)}} \mathfrak{p}$$

Beweis. Dies ist (für den noetherschen Fall) bereits bekannt (Lemma auf Seite 61), lässt sich aber jetzt leicht beweisen: Der letzte Korollar zeigt schon die $\subseteq$-Inklusion. Für die andere Richtung nehmen wir an, es wäre nicht so, d.h.

$$\begin{aligned} &\exists a \in \mathrm{NT}(A) \setminus \bigcup_{\mathfrak{p} \in J_{(0)}} \mathfrak{p}, \\ &0 = a \cdot b \quad \text{mit } b \neq 0. \end{aligned}$$

Dabei gilt für alle $\mathfrak{p} \in J_{\mathrm{o}}$

$$\begin{aligned} & a \notin \mathfrak{p}, \quad a \cdot b = 0 \in \mathfrak{p}, \Rightarrow \quad \forall \mathfrak{p} \in J_{(0)} : b \qquad \in \mathfrak{p} \\ \Rightarrow \quad & b \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in J_{(0)}} \mathfrak{p} \\ & = \mathrm{Nil}(A) = (0) \\ \Rightarrow \quad & 0 \neq b \in (0), \end{aligned}$$

was ein Widerspruch ist. Damit steht auch die umgekehrte Inklusion. $\square$

Betrachten wir nun wieder den allgemeinen Fall.

BEMERKUNG 4. Sei A Ring, $S \subseteq A$ m. a. S.. Der kanonische Homomorphismus $i_S : A \to A_S$ vermittelt eine Bijektion

$$\{\text{Ideale} \subsetneqq A_S\} \underset{\text{ext}}{\overset{\text{cont}}{\rightleftarrows}} \left\{ \mathfrak{a} \;\middle|\; \begin{array}{c} \mathfrak{a} \subsetneqq A \text{ Ideal}, \mathfrak{a} \cap S = \varnothing, \\ \forall (a,s) \in A \times S : a \cdot s \in \mathfrak{a} \Rightarrow a \in \mathfrak{a} \end{array} \right\}$$

Die Ideale in der rechten Menge heißen auch **S-invariante Ideale**.

Beweis. Sei $\mathfrak{A} \subsetneqq A_S$ ein Ideal, dann erfüllt

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{A}_{\mathrm{cont}} = \left\{ a \in A \mid \frac{1}{a} \in \mathfrak{A} \right\}$$

die Bedingung auf der rechten Seite: Ist $(s,a) \in S \times A$, $s \cdot a \in \mathfrak{A}$, so ist $\frac{s}{1} \cdot \frac{a}{1} \in \mathfrak{A}$, also (da $\frac{s}{1} \in A_S^*$) auch $\frac{a}{1} \in \mathfrak{A}$, also $a \in \mathfrak{a}$. Umgekehrt: Ist $\mathfrak{a} \subsetneqq A$ ein Ideal, welches die Bedingung auf der rechten Seite erfüllt, dann ist

$$(\mathfrak{a}_{\mathrm{ext}})_{\mathrm{cont}} = \bigcup_{s \in S} (\mathfrak{a} : s) = \bigcup_{s \in S} \mathfrak{a} = \mathfrak{a},$$

also ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{a}_{\mathrm{ext}}$ ein echtes Ideal in A_S (und genau das Urbild von $\mathfrak{a}$ unter cont). $\square$

Bemerkung. Es folgt auch eine längst bekannte Tatsache jetzt ganz einfach: Ist $S \subsetneqq A$ ein m. a. S., so existiert ein $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ mit $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing$.

Dies ist etwa $\mathfrak{p} := \mathfrak{M}_{\mathrm{cont}}$, $\mathfrak{M}$ ein (ja immer existierendes) Maximalideal von A_S.

$\boxed{\text{Satz 3.1.5.}}$ Sei A ein Ring, $S \subset A$ ein m. a. S., $i_S : A \to A_S$ der kanonische Homomorphismus. Dann vermittelt i_S auch eine Bijektion

$$\{\mathfrak{q} \subsetneqq A \mid \mathfrak{q} \text{ Primärideal}, \mathfrak{q} \cap S = \varnothing\} \underset{\text{cont}}{\overset{\text{ext}}{\rightleftarrows}} \{\text{Primärideale von } A_S\}$$

Beweis.

(1) Sei $\mathfrak{Q}$ ein $\mathfrak{P}$-primäres Ideal in A_S, $\mathfrak{P} = \sqrt{\mathfrak{Q}} \in \operatorname{Spec} A_S$. Dann haben wir $\mathfrak{q} := \mathfrak{Q}_{\text{cont}}$ und $\mathfrak{p} := \mathfrak{P}_{\text{cont}} \in \operatorname{Spec}(A)$, $\mathfrak{Q} = \mathfrak{q} \cdot A_S$, $\mathfrak{P} = \mathfrak{p} \cdot A_S$. (Wir wollen zeigen, dass $\mathfrak{q}$ ein Primärideal ist.) Dabei gilt für $a \in A$:

$$\begin{aligned} a \in \sqrt{\mathfrak{q}} &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : a^n \in \mathfrak{q} \\ &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \frac{a^n}{1} \in \mathfrak{Q} \\ &\Leftrightarrow \frac{a}{1} \in \mathfrak{P} \\ &\Leftrightarrow a \in \mathfrak{p}, \end{aligned}$$

das heißt, wir haben $\sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ ist schon einmal ein Kandidat für ein $\mathfrak{p}$-primäres Ideal.

(2) Sei $a \cdot b \in \mathfrak{q}$, $b \notin \sqrt{q} = \mathfrak{p}$. Dann ist auch $\frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} \in \mathfrak{Q}$ und $\frac{b}{1} \notin \sqrt{\mathfrak{Q}} = \mathfrak{P}$, also (weil $\mathfrak{Q}$ primär) $\frac{a}{1} \in \mathfrak{Q}$, also $a \in \mathfrak{q}$.

Es ist $\mathfrak{q}$ also wirklich $\mathfrak{p}$-primär.

(3) Sei nun umgekehrt $\mathfrak{q} \subseteq A \setminus S$ ein Primärideal, mit den induzierten Idealen $\mathfrak{p} := \sqrt{\mathfrak{q}}$, $\mathfrak{Q} := \mathfrak{q}_{\text{ext}} = \mathfrak{q} \cdot A_S$, $\mathfrak{P} := \mathfrak{p} \cdot A_S = \mathfrak{p}_{\text{ext}}$.

Zunächst gilt auch $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing$ (sonst hätten wir ein $s \in S \cap \mathfrak{p}$, also $s^n \in \mathfrak{q} \cap S = \varnothing$).

Weiterhin ist

$$\sqrt{\mathfrak{Q}} = \sqrt{\mathfrak{q} \cdot A_S} = \sqrt{q} \cdot A_S = \mathfrak{p} \cdot A_S = \mathfrak{P}.$$

Es bleibt zu zeigen, dass $\mathfrak{q}$ auch $\mathfrak{P}$-primär ist. Sei $\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} \in \mathfrak{Q}$ und $\frac{b}{t} \notin \mathfrak{P}$. Dann

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{a \cdot b}{s \cdot t} \in \mathfrak{Q}, \quad b \notin \mathfrak{p} \\ &\Rightarrow a \cdot b \in \mathfrak{q}, b \notin \mathfrak{p} \\ &\Rightarrow a \in \mathfrak{q} \\ &\Rightarrow \frac{a}{1} \in \mathfrak{Q} \\ &\Rightarrow \frac{a}{s} \in \mathfrak{Q} \end{aligned}$$

ext bildet also wirklich Primärideale auf Primärideale ab.

(4) Sei $\mathfrak{q}$ ein $\mathfrak{p}$-primäres Ideal in $A \setminus S$ (also $\mathfrak{q} \cap S = \varnothing$, $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing$). (Wir wollen zeigen $(\mathfrak{q}_{\text{ext}})_{\text{cont}} = \mathfrak{q}$.) Es ist

$$(\mathfrak{q}_{\text{ext}})_{\text{cont}} = bigcup_{s \in S}(\mathfrak{q} : s)$$

und wegen $b \in (\mathfrak{q} : s) \Rightarrow b \cdot s \in \mathfrak{q} \overset{s \notin \mathfrak{p}}{\Longrightarrow} b \in \mathfrak{q}$:

$$\begin{aligned} &= \bigcup_{sinS} \mathfrak{q} \\ &= \mathfrak{q}. \end{aligned}$$

Wir haben also wirklich die Bijektion zwischen den Primäridealen, gegeben durch cont und ext. $\square$

Achtung. Bei LNZ gehen eventuell einige Primärideale verloren (wenn sie Elemente aus S enthalten).

Definition 3.5. *Sei A ein Ring, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$. Dann heißt* $\boxed{\operatorname{ht}_A(\mathfrak{p})}$

$$\operatorname{ht}_A(\mathfrak{p}) := \begin{cases} \max\left\{ \nu \in \mathbb{N}_0 \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists \mathfrak{p}_0 \subsetneqq \ldots \subsetneqq \mathfrak{p}_\nu = \mathfrak{p}, \\ \mathfrak{p}_i \in \operatorname{Spec}(A) \end{array} \right\} & \textit{falls } \exists \\ \infty & \textit{sonst} \end{cases}$$

*die **Höhe** des Primideals $\mathfrak{p}$.*

$$\dim_A(\mathfrak{p}) := \begin{cases} \max\left\{ \nu \in \mathbb{N}_0 \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \subsetneqq \mathfrak{p}_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq \mathfrak{p}_\nu, \\ \mathfrak{p}_i \in \operatorname{Spec} A \end{array} \right\} & \textit{falls } \exists \\ \infty & \textit{sonst} \end{cases}$$

*die **Dimension** von $\mathfrak{p}$.*

Bemerkung 5. Ein paar (mit den bisherigen Erkenntnissen) offensichliche Identitäten:

$$\operatorname{ht}_A(\mathfrak{p}) + \dim_A(\mathfrak{p}) \leq \dim_{\text{Krull}}(A)$$

(Die Gleichheit gilt nicht immer, aber für jeden Ring gibt es Primideale, bei denen die Gleichheit gilt)

$$\begin{aligned} \dim_{\text{Krull}}(A_{\mathfrak{p}}) &= \operatorname{ht}_A(\mathfrak{p}) \\ \dim_{\text{Krull}}\left({}^{A}\!/_{\mathfrak{p}}\right) &= \dim_A(\mathfrak{p}) \\ \mathfrak{p} \in \operatorname{Specm}(A) &\Leftrightarrow \dim_A(\mathfrak{p}) = 0 \\ \mathfrak{p} \in J_{\mathfrak{o}} &\Leftrightarrow \operatorname{ht}_A(\mathfrak{p}) = 0 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{SATZ 3.1.6.}}$ *(Vererbung wichtiger Ringeigenschaften auf Lokalisierungsringe)*
Sei A ein Ring, $S \subseteq A$ m. a. S.. Dann gilt:

(1) A noethersch $\Rightarrow A_S$ noethersch

(2) A HIR $\Rightarrow A_S$ HIR

(3) A faktoriell $\Rightarrow A_S$ faktoriell

Beweis.

(1) Klar, wegen $\text{ext} \circ \text{cont} = \text{id}$ und Betrachtung von Idealketten.

(2) Sei $\mathfrak{A} \subsetneqq A_S$ ein Ideal, dann ist

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{\text{cont}} \cdot A_S$$

und A_{cont} ist ein Hauptideal, etwa $A_{\text{cont}} = (a)$,

$$\begin{aligned} &= (a) \cdot A_S \\ &= \left(\frac{a}{1}\right), \end{aligned}$$

ein Hauptideal in A_S.

(3) Sei A faktoriell, $\mathcal{P}$ ein vollständiges Repräsentantensystem für $\mathrm{Irr}(A)/_\sim$, und ohne Beschränkung der Allgemeinheit $S = \overline{S}$ saturiert (es ist ja $A_S \cong A_{\overline{S}}$, Satz 3.1.2). Betrachten wir

$$\mathcal{Q} := \left\{ \frac{q}{1} \in A_S \,\middle|\, q \in \mathcal{P} \setminus S \right\}.$$

1. Fall: Es sei $\mathcal{Q} = \varnothing$. Dann ist $\mathcal{P} \subseteq S$, d.h. $\forall \frac{a}{s} \in A_S^0$ ist $\frac{a}{s} = \frac{\varepsilon \cdot q_1 \cdot \ldots \cdot q_m}{s}$ mit $\varepsilon \in A^*$, $q_i \in \mathcal{P} \subseteq S$, und $\frac{\varepsilon}{s} \in A_S^*$, $\frac{q}{1}, \ldots \frac{q_m}{1}$ sind Einheiten, also $\frac{a}{s} \in A_S^*$. Es ist also $A_S^0 = A_S^*$, A_S ist Körper und somit faktoriell.

2. Fall: Es sei $\mathcal{Q} \neq \varnothing$, also $P \setminus S \neq \varnothing$. Es gelten dann die folgenden Eigenschaften:

$\boxed{\text{BEHAUPTUNG.}}$

$$\forall \frac{q}{1} \in \mathcal{Q} : \quad \frac{q}{1} \in \mathrm{Irr}(A_S)$$

Beweis. Sei

$$\frac{q}{1} = \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t}$$

eine Zerlegung in A_S. (Wir müssen zeigen, dass $\frac{a}{s} \in A_S^*$ oder $\frac{b}{t} \in A_S^*$ ist, und dazu genügt es zu zeigen, dass $a \in S$ oder $b \in S$ ist.)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \exists v \in S: \quad & v \cdot (ab - s \cdot t \cdot q) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & v \cdot a \cdot b = v \cdot s \cdot t \cdot q \end{aligned}$$

mit $(v, s, t) \in S^3$. Dabei ist $q \not| v$, da sonst $q \in \overline{S} = S$ wäre, und da q irreduzibel und A faktoriell (also q prim) ist:

$$\Rightarrow \quad q \mid a \cdot b$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gilt nun (ansonsten analog mit a und b vertauscht weiter)

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad q \mid a \\ &\Rightarrow \quad a = q \cdot a' \\ &\Rightarrow \quad v \cdot a' cdotb = v \cdot s \cdot t \in S \\ &\Rightarrow \quad b \in \overline{S} = S. \end{aligned}$$

Wir haben also wirklich $b \in S$, $\frac{b}{t} \in A_S^*$, also ist $\frac{q}{1}$ irreduzibel. □

BEHAUPTUNG. A_S ist semifaktoriell.

Beweis. Sei $\frac{a}{s} \in A_S$, $\frac{a}{s} \neq \frac{0}{1}$, d.h. $a \neq 0$.

$$\begin{aligned} \frac{a}{s} &= \frac{\varepsilon \cdot p_1 \cdot \ldots \cdot p_m}{s}, && \varepsilon \in A^*, p_i \in \mathcal{P} \\ &= \frac{\varepsilon \cdot p_1 \cdot \ldots \cdot p_r \cdot p_{r+1} \cdot \ldots \cdot p_m}{s} && p_i \in S \forall i \in \{1, \cdots, r\}, \\ & && \frac{p_j}{1} \in \mathcal{Q} \forall j \in \{r+1, \cdots, m\} \\ &= \underbrace{\frac{\varepsilon}{s} \cdot \frac{p_1}{1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_r}{1}}_{\in A_S^*} \cdot \underbrace{\frac{p_{r+1}}{1}}_{\in \mathcal{Q}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\frac{p_m}{1}}_{\in \mathcal{Q}}, \end{aligned}$$

und dies ist eine Zerlegung in irreduzible Elemente, denn $\mathcal{Q} \subseteq \operatorname{Irr}(A_S)$. □

BEHAUPTUNG. $\mathcal{Q} = \left\{ \frac{q}{1} \mid q \in \mathcal{P} \setminus S \right\}$ ist ein vollständiges Repräsentantensystem für ${\operatorname{Irr}(A)}/{\sim}$.

Beweis. Die Vollständigkeit ergibt sich aus der vorhergehenden Behauptung, es bleibt die paarweise nicht-Assoziiertheit zu zeigen.
Angenommen, es ist $\frac{q_1}{1} = \frac{s}{t} \cdot \frac{q_2}{1}$ mit $\frac{q_i}{1} \in \mathcal{Q}$ und $(s, t) \in S^2$. Dann existiert ein $w \in S$ mit $w \cdot q_1 \cdot t = w \cdot s \cdot q_2$, also $q_1 | w \cdot s \cdot q_2$, also $(S = \overline{S})$ $q_1 | q_2$, d.h. $q_1 = q_2$. □

$\boxed{\boxed{\text{Behauptung.}}\ \mathrm{Irr}(A_S) = \mathrm{Prim}(A_S)}$

Beweis. Es ist nur $\subseteq$ zu zeigen ($\supseteq$ gilt immer). Es genügt zu zeigen, dass $\frac{q}{1} \in \mathrm{Prim}(A_S)$ ist für $\frac{q}{1} \in \mathcal{Q}$.
Sei

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} \in \left(\frac{q}{1}\right),$$

also

$$\begin{aligned} \frac{a \cdot b}{s \cdot t} &= \frac{c}{v} \cdot \frac{q}{1} \qquad\qquad (c \in A, v \in S) \\ \Rightarrow \quad \exists w \in S: \quad \underbrace{w \cdot v}_{\in S} \cdot a \cdot b &= \underbrace{w \cdot s \cdot t}_{\in S} \cdot c \cdot q, \end{aligned}$$

und da $q \in \mathrm{Prim}(A)$ und $S = \overline{S}$ ist, haben wir

$$q \mid a \cdot b,$$

und daher ist a oder b in (q), d.h. $\frac{a}{1} \in \left(\frac{q}{1}\right)$ oder $\frac{b}{1} \in \left(\frac{q}{1}\right)$, also $\left(\frac{q}{1}\right)$ ein Primideal, $\frac{q}{1} \in \mathrm{Prim}(A_S)$. □

Wir haben also insgesamt, dass A_S semifaktoriell und $\mathrm{Irr}(A_S) = \mathrm{Prim}(A_S)$ ist, d.h. A_S ist faktoriell (Satz 2.1.6). □

Beispiel 3.1.12. $\mathbb{Z}$ ist faktoriell, also ist

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, p \nmid b, a = 0 \vee \mathrm{ggT}(a,b) = 1 \right\},$$

der lokale Ring der p-adischen ganzen Zahlen, faktoriell.

Ein volles Repräsentantensystem von $\mathrm{Irr}(\mathbb{Z}_{(p)}) = \mathrm{Prim}(\mathbb{Z}_{(p)})$ (wie immer modulo $\sim$) ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= \left\{ \frac{q}{1} \in \mathbb{Z}_{(p)} \,\middle|\, q \in \mathcal{P} \setminus (\mathbb{Z} \setminus (p)) \right\} \\ &= \left\{ \frac{q}{1} \in \mathbb{Z}_{(p)} \,\middle|\, q = p \right\} \\ &= \left\{ \frac{p}{1} \right\}, \end{aligned}$$

d.h. $\mathbb{Z}_{(p)}$ hat (bis auf Assoziiertheit) genau ein irreduzibles Element $\frac{p}{1} \hat{=} p$.

Frage. Seien $S \subsetneq T$ m. a. S. in A, und betrachte die Lokalisierungsringe A_S und A_T. Wie sieht die Beziehung zwischen A_S und A_T aus?

$\boxed{\text{SATZ 3.1.7.}}$ *(Lokalisierungen von Lokalisierungen)*
Sei A ein Ring, $S \subseteq T \subsetneqq A$ zwei m. a. S. in A. In A_S sei

$$T_S := T \cdot S^{-1} = \left\{ \frac{t}{s} \;\middle|\; t \in T, s \in S \right\}.$$

Dann ist T_S ein m. a. S. in A_S, und es gibt einen kanonischen Ringisomorphismus

$$A_T \xrightarrow{\sim} (A_S)_{T_S}$$

Beweis.

(1) Zunächst ist $\frac{0}{1} \notin T_S$ (sonst wäre $\frac{0}{1} = \frac{t}{s}$ mit $t \in T, s \in S$, also $\exists v \in S : v \cdot t = 0$, wobei $v \cdot t \in T$, also $0 \in T$).

Es ist $\frac{1}{1} \in T_S$, da $1 \in T$ und $1 \in S$.

Schließlich ist $\frac{t_1}{s_1} \cdot \frac{t_2}{s_2} = \frac{t_1 \cdot t_2}{s_1 \cdot s_2}$ mit $t_1 \cdot t_2 \in T$, $s_1 \cdot s_2 \in S$.

T_S ist also wirklich ein m. a. S. in A_S.

(2) Betrachte

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_S"] \arrow[rr, bend right] & A_S \arrow[r, "i_{T_S}"] & (A_S)_{T_S} \end{tikzcd}$$

$$\varphi = i_{S_T} \circ i_S$$

Es gilt hier offenbar für $t \in T$:

$$\varphi(t) = \frac{\frac{t}{1}}{\frac{1}{1}} \in (A_S)^*_{T_S} ,$$

denn es ist $\frac{t}{1} \in T_S$, also ist $\varphi(T) \subseteq (A_S)^*_{T_S}$. Es greift also die Universaleigenschaft von A_T, und wir haben das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i_T"'] & (A_S)_{T_S} \\ A_T \arrow[ur, "\hat{\varphi}"'] & \end{tikzcd} ,$$

wobei der Ringhomomorphismus $\hat{\varphi}$ gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}\left(\frac{a}{t}\right) &= \varphi(a) \cdot \varphi(t)^{-1} \\ &= \frac{\frac{a}{1}}{\frac{1}{1}} \cdot \frac{\frac{1}{1}}{\frac{t}{1}} \\ &= \frac{\frac{a}{1}}{\frac{t}{1}} \in (A_S)_{T_S}. \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass $\hat{\varphi}$ ein Ringisomorphismus ist.
Sei dazu zunächst $\frac{a}{t} \in A_T$ mit

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}\left(\frac{a}{t}\right) &= 0 \\ \Rightarrow \quad \frac{\frac{a}{1}}{\frac{1}{1}} &= \frac{\frac{0}{1}}{\frac{1}{1}} \\ \Rightarrow \quad \exists \frac{t'}{s} \in T_S : \quad \frac{t'}{s} \cdot \left(\frac{1}{1} \cdot \frac{a}{1} - \frac{0}{1} \cdot \frac{1}{1}\right) &= 0 \\ \Rightarrow \quad \exists \frac{t'}{s} \in T_S : \quad \frac{t'a}{s} &= \frac{0}{s} = \frac{0}{1} \in A_S \\ \Rightarrow \quad \exists (v, s, t) \in S \times S \times T : \quad \underbrace{v \cdot t'}_{\in T} \cdot a &= 0 \\ \Rightarrow \quad \frac{a}{1} &= \frac{0}{1}, \end{aligned}$$

also ist $\hat{\varphi}$ injektiv.
Umgekehrt: Sei

$$\frac{\frac{a}{s}}{\frac{t}{s'}} \in (A_S)_{T_S}$$

beliebig. Dann haben wir

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}\left(\frac{a \cdot s'}{t \cdot s}\right) &= \frac{\frac{a \cdot s'}{1}}{\frac{t \cdot s}{1}} \\ &= \frac{\frac{a}{s}}{\frac{t}{s'}}, \end{aligned}$$

das heißt es ist $\hat{\varphi}$ auch surjektiv, also ein Ringisomorphismus. $\square$

Beispiel 3.1.13. Sei A ein Ring, $\mathfrak{q} \subsetneqq \mathfrak{p}$ Ringideale. Dann haben wir

$$S = S_{\mathfrak{p}} = A \setminus \mathfrak{p} \supsetneqq A \setminus \mathfrak{q} = S_{\mathfrak{q}} =: T,$$

und Satz 3.1.7 liefert uns einen kanonischen Isomorphismus

$$\begin{aligned} \hat{\varphi} : A_{\mathfrak{q}} &\xrightarrow{\sim} (A_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{q} \cdot A_{\mathfrak{p}}} \\ \frac{a}{s} &\longmapsto \frac{\frac{a}{1}}{\frac{s}{1}} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Satz 3.1.8.}}$ *(Lokalisierung und Faktorbildung)*
Sei A ein Ring, $\mathfrak{a} \subsetneqq A$ echtes Ideal, $S \subsetneqq A$ ein m. a. S. mit $\mathfrak{a} \cap S = \varnothing$, so haben wir den Faktorring $A/\mathfrak{a}$ mit der kanonischen Projektion $\pi : A \to A/\mathfrak{a}$ und den Lokalisierungsring A_S mit dem kanonischen Homomorphismus (für $S \subseteq \mathrm{NNT}(A)$ sogar Einbettung) $i_S : A \to A_S$. Dann gilt:

(1) $\pi(S)$ ist ein m. a. S. in $A/\mathfrak{a}$.

(2) Es gibt einen kanonischen Isomorphismus

$$A_S/\mathfrak{a}_S \xrightarrow{\sim} \left(A/\mathfrak{a}\right)_{\pi(S)}.$$

Beweis.

(1) Es ist $\overline{0} \notin \pi(S)$ (sonst $\overline{0} = \overline{s}$ für ein $s \in S$, also $s \in \mathfrak{a}$ ist, im Widerspruch zu $S \cap \mathfrak{a} = \varnothing$). Es ist $\overline{1} \in \pi(S)$, weil $1 \in S$. Schließlich ist auch

$$\pi(S) \cdot \pi(S') = \pi(s \cdot s') \in \pi(S)$$

für alle $\pi(s)$, $\pi(s') \in \pi(S)$.

(2) Betrachte die Verkettung

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[rr, bend right, "\psi = i_{\pi(S)} \circ \pi"'] & A/\mathfrak{a} \arrow[r, "i_{\pi(S)}"] & \left(A/\mathfrak{a}\right)_{\pi(S)}, \end{tikzcd}$$

wobei hier ψ für $s \in S$ die folgende Form hat:

$$\forall s \in S : \psi(S) = i_{\pi(S)}(\overline{s}) = \frac{\overline{s}}{\overline{1}} \in \left(A/\mathfrak{a}\right)^*_{\pi(S)},$$

denn es ist ja $\overline{s} \in \Pi(S)$. Damit (wieder Universaleigenschaft) existiert ein eindeutiges kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "i_S"'] & \left(A/\mathfrak{a}\right)_{\pi(S)} \\ A_S \arrow[ur, "\hat{\psi}"'] & \end{tikzcd}$$

mit

$$\hat{\psi}\left(\frac{a}{s}\right) = \psi(a) \cdot \psi(s)^{-1} = \frac{\overline{a}}{\overline{1}} \cdot \left(\frac{\overline{s}}{\overline{1}}\right)^{-1} = \frac{\overline{a}}{\overline{s}}$$

Wir stellen nun ganz leicht fest (analog zum vorherigen Beweis), dass $\hat{\psi}$ surjektiv ist. Weiterhin ist

$$\begin{aligned}
\ker(\psi) &= \left\{ \frac{a}{s} \in A_S \,\middle|\, \hat{\psi}\left(\frac{a}{s}\right) = \frac{\overline{0}}{\overline{1}} \right\} \\
&= \left\{ \frac{a}{s} \in A_S \,\middle|\, \frac{\overline{a}}{\overline{s}} = \frac{\overline{0}}{\overline{1}} \right\} \\
&= \left\{ \frac{a}{s} \in A_S \,\middle|\, \exists \overline{t} \in \pi(S) :\ \overline{t} \cdot (\overline{a} \cdot \overline{1} - \overline{s} \cdot \overline{0}) = \overline{0} \right\} \\
&= \left\{ \frac{a}{s} \in A_S \,\middle|\, \exists \overline{t} \in \pi(S) :\ \overline{t \cdot a} = \overline{0} \right\} \\
&= \left\{ \frac{a}{s} \in A_S \,\middle|\, \exists t \in S : t \cdot a \in \mathfrak{a} \right\} \\
&= \left\{ \frac{a}{s} \in A_S \,\middle|\, \exists t \in S : \underbrace{\frac{a \cdot t}{t \cdot s}}_{=\frac{a}{s}} \in \mathfrak{a}_S \right\} \\
\ker(\psi) &= \mathfrak{a}_S
\end{aligned}$$

Nach dem Homomorphiesatz ergibt sich also ein (kanonischer) Isomorphismus

$$A_S/\mathfrak{a}_S \cong \left(A/\mathfrak{a}\right)_{\pi(S)}$$

□

Lokalisierungen in Integritätsbereichen und Quotientenkörper

Sei A ein Integritätsbereich, $K := Q(A) = A_{A\setminus\{0\}} = A_{A^0} = A_{(0)}$ der Quotientenkörper, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ ein Primideal, und betrachten wir die kanonische Einbettung $i := i_{A_0} : A \hookrightarrow K$. Dabei ist $i(A \setminus \mathfrak{p}) \subseteq K^*$, d.h. die Universaleigenschaft für $A_\mathfrak{p}$ liefert uns eine Faktorisierung

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_{A^0}"] \arrow[d, "i_\mathfrak{p}"'] & K \\
arrows A_\mathfrak{p} \arrow[ur, "j_\mathfrak{p} := \widehat{i_{A^0}}"']
\end{tikzcd}$$

Hierbei ist $j_\mathfrak{p}\left(\frac{a}{s}\right) = \frac{a}{1} \cdot \left(\frac{s}{1}\right)^{-1} = \frac{a}{s} \in K$, also $j_\mathfrak{p}$ ebenfalls injektiv, und kanonische Einbettung von $A_\mathfrak{p}$ in $K = Q(A)$.

Vereinbarung 3.6. *Wir identifizieren jetzt $j_\mathfrak{p}(A_\mathfrak{p})$ mit $A_\mathfrak{p}$, so dass $A_\mathfrak{p}$ als Zwischenring*

$$A \subseteq A_\mathfrak{p} \subseteq K$$

aufgefasst wird.

$\boxed{\text{Satz 3.1.9.}}$ *(Lokal-Global-Prinzip, Teil I)*
Sei A ein Integritätsbereich mit Quotientenkörper $K = Q(A)$. Dann gilt:

$$A = \bigcap_{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec} A} A_{\mathfrak{p}} = \bigcap_{\mathfrak{m}\in\operatorname{Specm}(A)} A_{\mathfrak{m}}$$

Die Idee dahinter ist. dass sich die $(A_{\mathfrak{p}}, \mathfrak{p}\cdot A_{\mathfrak{p}})$ als lokale Ringe vielleicht einfacher untersuchen lassen als A selbst.

Beweis. Es ist natürlich

$$A \subseteq \bigcap_{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec} A} A_{\mathfrak{p}} \subseteq A \bigcap_{\mathfrak{m}\in\operatorname{Specm} A} A_{\mathfrak{m}},$$

d.h. es genügt zu zeigen $\bigcap_{\mathfrak{m}\in\operatorname{Specm} A} A_{\mathfrak{m}} \subseteq A$.
Sei dazu $\frac{a}{b} \in Q(A)$ mit $\frac{a}{b} \in A_{\mathfrak{m}}$ für alle $\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} A$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\forall \mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} A: \quad & \frac{a}{b} = \frac{\alpha}{s}_{\mathfrak{m}}, \quad \alpha \in A, s \notin \mathfrak{m} \\
\Rightarrow \quad & a\cdot s = b\cdot\alpha \in (b) \\
\Rightarrow \quad \forall m \in \operatorname{Specm}(A): \quad & \exists s \in ((b):(a)) \setminus \mathfrak{m} \\
\Rightarrow \quad & ((b):(a)) \text{ liegt in keinem Maximalideal} \\
\Rightarrow \quad & ((b):(a)) = A \\
\Rightarrow \quad & 1 \in ((b):(a)) \\
\Rightarrow \quad & a \in (b) \\
\Rightarrow \quad & \frac{a}{b} = \frac{c\cdot b}{b} = c \in A
\end{aligned}$$

Wir haben also wirklich diese Inklusion, also ist die Behauptung gezeigt. □

Bemerkung. Ist $(A, \mathfrak{m})$ lokaler Ring, so ist $A \cong A_{\mathfrak{m}}$.

Definition 3.7. *Ein Ring A heißt **semi-lokal**, falls* $\operatorname{Specm}(A)$ *endlich ist.*

Beispiel 3.1.14.

(1) Lokale Ringe sind natürlich auch semilokal.

(2) Ist $A \cong L_1 \times \ldots \times L_r$ und die L_i lokale Ringe, so ist A semilokal.

(3) Jeder endliche Ring ist semilokal.

Lokalisierungen von Moduln

Definition 3.8. *Sei A ein Ring, $S \subseteq A$ m. a. S., M ein A-Modul.*

(1) Wir definieren eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $M \times S$ durch $\boxed{\sim}$

$$\forall (x,y,s,t) \in M^2 \times S^2: \quad (x,s) \sim (y,t) :\Leftrightarrow \exists v \in S : v\cdot(t\cdot x - s\cdot y) = 0$$

$\boxed{M_S}$ *(2) Die Faktormenge bezeichnen wir mit* $M_S := {}^{M\times S}\!/\!_{\sim}$.

(3) Die Elemente von M_S *bezeichnen wir mit* $\frac{x}{s} := \overline{(x,s)}$.

Bemerkung.

(1) $\sim$ ist wirklich eine Äquivalenzrelation.

$\boxed{+}$ $\boxed{\cdot}$ (2) M_S ist auf ganz natürliche Weise ein A_S-Modul:

$$\begin{aligned} + : M_S \times M_S &\longrightarrow M_S \\ \left(\frac{x}{s}, \frac{y}{t}\right) &\longmapsto \frac{x}{s} + \frac{y}{t} := \frac{t\cdot x + s\cdot y}{s\cdot t}, \\ \cdot : A_S \times M_S &\longrightarrow M_S \\ \left(\frac{a}{s}, \frac{x}{t}\right) &\longmapsto \frac{a}{s}\cdot\frac{x}{t} := \frac{a\cdot x}{s\cdot t} \end{aligned}$$

und via $i_S^A : A \to A_S$ auch ein A-Modul.

(3) Es gibt dann den ganz kanonischen A-Modul-Homomorphismus

$$\begin{aligned} i_S^M : M &\longrightarrow M_S \\ x &\longmapsto \frac{x}{1}. \end{aligned}$$

(4) Wichtig sind folgende Lokalisierungsmoduln:

(a) $M_{\mathfrak{p}} := M_{A\setminus\mathfrak{P}}$ für $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, speziell auch für $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} A$.
(b) $M_f := M_{\{f^n \mid n\in\mathbb{N}_0\}}$ für ein $f \in A \setminus \operatorname{Nil}(A)$.
(c) Für Integritätsbereiche A haben wir

$$Q(M) := M_{(0)} = \left\{ \frac{x}{a} \,\middle|\, a \in A^0, x \in M \right\},$$

den Quotientenmodul von M (das ist ein $Q(A)$-Vektorraum).

Bemerkung. Wir haben für A, M und S (Ring, A-Modul, m. a. S. in A) folgendes kommutative Diagramm aus Skalar-Multiplikationen und kanonischen Homomorphismen:

$$\begin{tikzcd}
A\times M \arrow[r, "\cdot"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A \times i_S^M"] \arrow[dd, bend right, "i_S^A\times i_S^M"'] & M \arrow[d, "i_S^M"] \\
A\times M_S \arrow[r, "\cdot"] \arrow[d, "i_S^A\times \mathrm{id}_{S_M}"] & M_S \\
A_S\times M_S \arrow[ur, "\cdot"'] &
\end{tikzcd}$$

Satz 3.1.10. *(Universaleigenschaft von Lokalisierungsmoduln)*
Sei (A, S) gegeben, M ein A-Modul, N ein A_S-Modul (also auch A-Modul), $f \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$.
Dann existiert genau ein $g \in \mathrm{Hom}_{A_S}(M_S, N)$ mit $f = g \circ i_S^M$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_S^M"'] & N \\ M_S \arrow[ur, "\exists ! g"'] & \end{tikzcd}$$

Beweis.

Eindeutigkeit: Falls ein solches $g \in \mathrm{Hom}(M_S, N)$ existiert, dann gilt

$$\begin{aligned} & \forall x \in M: \quad (g \circ i_S^M)(x) = f(x) \\ \Rightarrow \quad & \forall x \in M: \quad g\left(\frac{x}{1}\right) = f(x) \\ \Rightarrow \quad & \forall \frac{x}{s} \in M_S: \quad g\left(\frac{x}{s}\right) = g\left(\frac{1}{s} \cdot \frac{x}{1}\right) \\ & = \frac{1}{s} \cdot g\left(\frac{x}{1}\right) \\ & = \frac{1}{s} \cdot f(x), \end{aligned}$$

damit ist g eindeutig bestimmt.

Existenz: Die eben festgestellte eindeutige Darstellung ist auch repräsentantenunebahängig: Ist $\frac{x}{s} = \frac{x'}{s'}$, so ist $v \cdot (s' \cdot x - s \cdot x') = 0$, also auch (weil f linear) $v \cdot (s' \cdot f(x) - s \cdot f(x')) = 0$, d.h. $\frac{f(x)}{s} = \frac{f(x')}{s'}$.
Damit können wir $g : M_S \to N$ definieren als

$$g\left(\frac{x}{s}\right) := \frac{1}{s} \cdot f(x).$$

Nachrechnen zeigt, dass g wirklich A_S-linear ist. □

Bemerkung. Sei $f : M \to N$ ein A-Modulhomomorphismus, $S \subsetneq A$ ein m. a. S.. Dann existiert nach Satz 3.1.10 eindeutig ein $f_S \in \mathrm{Hom}_{A_S}(M_S, N_S)$ mit $i_S^M \circ f_S = f \circ i_S^N$: $\boxed{f_S}$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_S^M"'] & N \arrow[d, "i_S^N"] \\ M_S \arrow[r, dotted, "f_S"'] & N_S \end{tikzcd}$$

Dabei ist

$$f_S\left(\frac{x}{s}\right) = \frac{f(x)}{s}.$$

$\boxed{\text{Bemerkung 1.}}$

(1) Sei $S \subseteq T \subsetneq A$ zwei m. a. S., M ein A-Modul. Dann ist

$$M_T \cong (M_S)_{T_S},$$

und zwar als A-, A_S-, A_T- und $(A_S)_{T_S}$-Isomorphismus.

(2) Sind $N \subsetneq M$ zwei A-Moduln und $S \subsetneq A$ ein m. a. S.. Dann ist

$$\left(M/N \right)_S \cong M_S/N_S$$

(als A_S- und als A-Moduln).

Beweis. Analog zum Beweis bei Ringen, Übungsaufgabe, oder (2) als Korollar aus Satz 3.1.12. □

Bemerkung. Die Lokalisierung $\Box_S$ für ein m. a. S. $S \subsetneq A$ stiftet einen kovarianten Funktor

$$\begin{aligned}\Box_S : \underline{\mathrm{Mod}}_A &\longrightarrow \underline{\mathrm{Mod}}_{A_S}\\ M &\longmapsto M_S\\ (f : M \to N) &\longmapsto \left(\begin{aligned} f_S : M_S &\to N_S \\ \frac{a}{t} &\mapsto \frac{f(a)}{t} \end{aligned} \right)\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Satz 3.1.11.}}$ *(Lokal-Global-Prinzip, Teil II)*
Sei A ein Ring, $S \subsetneq A$ ein m. a. S., M ein A-Modul. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) $M = (0)$ (als A-Modul).

(2) $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ ist $M_{\mathfrak{p}} = (0)$ (als $A_{\mathfrak{p}}$-Modul).

(3) $\forall \mathfrak{m} \in \mathrm{Specm}(A)$ ist $M_{\mathfrak{m}} = (0)$ (als $A_{\mathfrak{m}}$-Modul).

Beweis.

(1) ⇒ (2) ⇒ (3): ist klar.

(3) ⇒ (1): Sei also $M_{\mathfrak{m}} = (0)$ für alle $\mathfrak{m} \in \mathrm{Specm}(A)$.

Sei $x \in M$ beliebig, dann ist

$$
\begin{aligned}
& & \forall \mathfrak{m} \in \operatorname{Specm}(A) : \quad \frac{x}{1} = \frac{0}{1} & \quad \text{in } M_{\mathfrak{m}} \\
&\Rightarrow & \forall \mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} A : \exists \nu_{\mathfrak{m}} \in A \setminus \mathfrak{m} : \quad \nu_{\mathfrak{m}} \cdot (1 \cdot x - 1 \cdot 0) = 0 & \quad \text{in } M \\
&\Rightarrow & \forall \mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} A : \exists \nu_{\mathfrak{m}} \in A \setminus \mathfrak{m} : \quad \nu_{\mathfrak{m}} \cdot x = 0 & \quad \text{in } M \\
&\Rightarrow & \forall \mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} A : \quad \operatorname{Ann}_A(x) \not\subseteq \mathfrak{m} & \\
&\Rightarrow & \operatorname{Ann}_A(x) = A & \\
&\Rightarrow & x = 1 \cdot x = 0 &
\end{aligned}
$$

Daher ist also $M = (0)$.

□

KOROLLAR. Seien $N \subseteq M$ zwei A-Moduln. Dann haben wir

$$
\begin{aligned}
N = M &\iff M/N = (0) \\
&\overset{\text{Satz}}{\underset{3.1.11}{\iff}} \left(M/N\right)_{\mathfrak{m}} = (0) \ \forall \mathfrak{m} \in \operatorname{Specm}(A)
\end{aligned}
$$

SATZ 3.1.12. *(Exaktheit der Lokalisierung)*
Sei A ein Ring, $S \subsetneqq A$ ein m. a. S.,

$$0 \to M' \overset{f}{\hookrightarrow} M \overset{g}{\twoheadrightarrow} M'' \to 0$$

eine exakte Folge.
Dann ist auch die durch Lokalisierung nach S induzierte Folge von A_S-Moduln (bzw. A-Moduln via i_S^A)

$$0 \to M'_S \overset{f_S}{\hookrightarrow} M_S \overset{g_S}{\twoheadrightarrow} M''_S \to 0$$

ebenfalls exakt.

Beweis.

g_S **ist surjektiv:** Sei $\frac{x''}{s} \in M''_S$. Da g surjektiv ist

$$
\begin{aligned}
& & \exists x \in M : \quad x'' &= g(x) \\
&\Rightarrow & \exists x \in M : \quad \frac{x''}{s} &= \frac{g(x)}{s} \\
& & &= g_S\left(\frac{x}{s}\right),
\end{aligned}
$$

und damit ist auch f_S surjektiv.

f_S **ist injektiv:** Sei $\frac{x'}{t} \in \ker(f_S)$, also

$$\begin{aligned} f_S\left(\frac{x'}{t}\right) &= \frac{0}{1} \in M_S \\ \Rightarrow \quad \frac{f(x')}{t} &= \frac{0}{1} \\ \Rightarrow & \end{aligned}$$

$\ker(g_S) = \operatorname{im}(f_S)$**:** Wir haben ja

$$\begin{aligned} \ker(g) &= \operatorname{im}(f) \\ \Rightarrow \quad g \circ f &= 0 \\ g_S \circ f_S &= (g \circ f)_S = 0 \\ \Rightarrow \quad \operatorname{im}(f_S) &\subseteq \ker(g_S). \end{aligned}$$

Umgekehrt: Sei

$$\begin{aligned} \frac{x}{t} &\in \ker(g_S) \subseteq M_S \\ \Rightarrow \quad g_S\left(\frac{x}{t}\right) &= \frac{0}{1} && \text{(in } M_S\text{)} \\ \Rightarrow \quad \frac{g(x)}{t} &= \frac{0}{1} && \text{(in } M_S\text{)} \\ \Rightarrow \quad \exists w \in S: \quad w \cdot g(x) &= 0 && \text{(in } M\text{)} \\ \Rightarrow \quad \exists w \in S: \quad g(w \cdot x) &= 0 && \text{(in } M\text{)} \\ \Rightarrow \quad \exists w \in S: \quad w \cdot x &\in \ker(g) = \operatorname{im}(f) \\ \Rightarrow \quad \exists w \in S, x' \in M': \quad w \cdot x &= f(x') \\ \Rightarrow \quad \exists w \in S, x' \in M': \quad \frac{x}{t} &= \frac{w \cdot x}{\frac{w}{\cdot} t} && \text{(in } M_S\text{)} \\ &= \frac{f(x')}{w \cdot t} \\ &= f_S\left(\frac{x'}{w \cdot t}\right) \in \operatorname{im}(f_S), \end{aligned}$$

also ist auch $\ker(g) \subseteq \operatorname{im}(f_S)$.

Die Lokalisierung ist also in der Tat ein exakter Funktor. $\square$

> $\boxed{\text{Korollar.}}$ Sei $N \subseteq M$ Inklusionspaar von A-Moduln. Dann ist
>
> $$\left({}^{M}\!/_{N}\right)_S \cong {}^{M_S}\!/_{N_S}.$$

Beweis. Es ist

$$0 \to N \hookrightarrow M \twoheadrightarrow {}^{M}\!/\!_{N} \to 0$$

exakte Folge, also ist auch

$$0 \to N_S \hookrightarrow M_S \twoheadrightarrow \left({}^{M}\!/\!_{N}\right)_S \to 0$$

exakt. □

> $\boxed{\text{Korollar.}}$ Seien $N \subseteq M$ zwei A-Moduln. Dann haben wir
>
> $$\begin{aligned} N = M &\Longleftrightarrow {}^{M}\!/\!_{N} = (0) \\ &\overset{\text{Satz}}{\underset{3.1.11}{\Longleftrightarrow}} \left({}^{M}\!/\!_{N}\right)_{\mathfrak{m}} = (0)\ \forall \mathfrak{m} \in \operatorname{Specm}(A) \\ &\overset{\text{vorh.}}{\underset{\text{Korr.}}{\Longleftrightarrow}} {}^{M_{\mathfrak{m}}}\!/\!_{N_{\mathfrak{m}}} = (0)\ \forall \mathfrak{m} \in \operatorname{Specm}(A) \\ &\Longleftrightarrow M_{\mathfrak{m}} = N_{\mathfrak{m}}\ \forall \mathfrak{m} \in \operatorname{Specm}(A) \end{aligned}$$

> $\boxed{\text{Korollar.}}$ Sei $f \in \operatorname{Hom}_A(M, N)$ Homomorphismus von A-Moduln. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:
>
> (1) f ist injektiv (bzw. surjektiv bzw. bijektiv)
>
> (2) $\forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ ist $f_{\mathfrak{p}} : M_{\mathfrak{p}} \to N_{\mathfrak{p}}$ injektiv (bzw. surjektiv bzw. bijektiv)
>
> (3) $\forall \mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} A$ ist $f_{\mathfrak{m}} : M_{\mathfrak{m}} \to N_{\mathfrak{m}}$ injektiv (bzw. surjektiv bzw. bijektiv)

Beweis.

Injektivität Betrachte die Standardfolge

$$0 \to \ker f \overset{i}{\hookrightarrow} M \overset{f}{\longrightarrow} N.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} f \text{ injektiv} &\Longleftrightarrow \ker(f) = (0) \\ &\Longleftrightarrow \underbrace{(\ker f)_{\mathfrak{p}}}_{=\ker f_{\mathfrak{p}}} = \underbrace{(\ker f)_{\mathfrak{m}}}_{=\ker f_{\mathfrak{m}}} = (0) \quad \forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A, \forall \mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} A \\ &\Longleftrightarrow f_g \text{ injektiv, } f_{\mathfrak{m}} \text{ injektiv} \quad \forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A, \forall \mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} A \end{aligned}$$

Surjektivität: Genauso, aber mit $\operatorname{coker}(f)$ und der Sequenz

$$M \overset{f}{\longrightarrow} N \overset{\pi}{\longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow} \operatorname{coker}(f) = {}^{N}\!/\!_{\operatorname{im}(f)} \to 0.$$

Bijektivität: Folgt aus den beiden ersten Punkten.

□

$\boxed{\text{KOROLLAR.}}$ Sei A Ring, $S \subseteq A$ m. a. S., M ein A-Modul. Ist M ein noetherscher A-Modul, so ist auch M_S ein noetherscher A_S-Modul.

Beweis. Ist $X \subseteq M_S$ ein A_S-Untermodul, so ist ja

$$X = A_S \cdot i_S^M\Big(\underbrace{(i_S^M)^{-1}(X)}_{\text{endlich erzeugt}}\Big),$$

also auch endlich erzeugt. □

$\boxed{\text{KOROLLAR.}}$ Sei A Ring, $S \subseteq A$ m. a. S., M ein A-Modul, $P \subseteq M$, $Q \subseteq M$ Untermoduln. Dann ist

$$(P \cap Q)_S = P_S \cap Q_S \subseteq M_S$$
$$(P + Q)_S = P_S + Q_S \subseteq M_S$$

Beispiel 3.1.15. Sei $A = \mathbb{Z}$, und $H \subseteq G$ Inklusionspaar abelscher Gruppen (d.h. $\mathbb{Z}$-Moduln). Dann ist

$$H = G \Longleftrightarrow H_{(p)} = G_{(p)} \forall p \in \operatorname{Prim}(\mathbb{Z})$$

3.2 Exkurs aus der multilinearen Algebra: Weitere universale Objekte – Freier Modul und Tensorprodukt

Wir betrachten jetzt – wo wir gerade bei Objekten mit Universaleigenschaften (Lokalisierungsring und Lokalisierungsmodul) sind – noch einige derartige Objekte.

Der freie A-Modul über einer Menge S

$\boxed{F_A(S)}$ $\boxed{A^{(S)}}$

Definition 3.9. *Sei A ein Ring, $S \neq \varnothing$ eine Menge (die nichts mit A zu tun haben muss), dann definieren wir*

$$\begin{aligned} F_A(S) &:= A^{(S)} \\ &:= \{f \in \operatorname{Abb}(S, A) \mid f(s) = 0 \ p.\,p.\} \end{aligned}$$

Bemerkung.

(1) Es ist $F_A(S) \subseteq \operatorname{Abb}(S, A) = A^S$, und zwar als Menge (klar), A-Untermodul, Unterring und also auch A-Unteralgebra.

$\boxed{\chi_s}$ $\boxed{\delta_{st}}$

(2) In $F_A(S)$ hat man spezielle Abbildungen, die **Indikatorfunktionen**

$$\forall s \in S: \quad \chi_s : S \to A$$
$$\chi_s(t) := \delta_{st} = \begin{cases} 0 & s \neq t \\ 1 & s = t \end{cases}$$

(3) Für alle $f \in F_A(S)$ ist
$$f = \sum_{s \in S} f(s) \cdot \chi_s,$$
und das ist eine endliche Summe, da $f(s) = 0$ p. p.

(4) $\{\chi_s \mid s \in S\}$ ist auch frei, d.h. A-linear unabhängig: Ist $(a_s)_{s\in S}$ mit
$$\begin{aligned} & & 0 &= \sum_{s\in S} a_s \cdot \chi_s \\ \Rightarrow \quad & \forall t \in S: & 0 &= \sum_{s\in S} a_s \cdot \chi_s(t) \\ \Rightarrow \quad & \forall t \in S: & 0 &= \sum_{s\in S} a_s \cdot \delta_{st} \\ \Rightarrow \quad & \forall t \in S: & a_t &= 0, \end{aligned}$$
d.h. $(a_s)_{s\in S} = (0)_{s\in S}$.

(5) Das heißt, $\{\chi_s \mid s \in S\}$ ist eine (kanonische) A-Basis des A-Moduls $F_A(S)$.

(6) Es gibt eine kanonische Mengenabbildung
$$\begin{aligned} \tau_S : S &\hookrightarrow F_A(S) \\ s &\longmapsto \chi_s, \end{aligned}$$
die offenbar auch injektiv ist, also als Einbettung aufgefasst werden kann. Daher identifizieren wir S mit $\tau_S(S) = \{\chi_s \mid s \in S\} \subseteq F_A(S)$, und schreiben (missbräuchlich)
$$f = \sum_{s\in S} f(s) \cdot s \qquad \text{statt} \qquad f = \sum_{s\in S} f(s) \cdot \chi_s$$
als formale Linearkombination, und
$$F_A(S) = \left\{ \sum_{s\in S} a_s \cdot s \,\middle|\, a_s \in A \forall s \in S, a_s = 0 \text{ p. p.} \right\}$$

Definition 3.10. *$F_A(S)$ heißt **freier A-Modul mit Basis** F.*

$\boxed{\text{Satz 3.2.1.}}$ *(Universaleigenschaft von $F_A(S)$)*
Sei S Menge, A Ring und $F_A(S)$ der freie A-Modul mit Basis S. Dann existiert für jeden A-Modul Q und jedes $\varphi \in \mathrm{Abb}(S, Q)$ genau ein $\hat\varphi \in \mathrm{Hom}_A(F_A(S), Q)$ mit $\varphi = \hat\varphi \circ \tau_S$:
$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\tau_S"'] & Q \\ F_A(S) \arrow[ur, dotted, "\exists! \hat\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Beweis.

Eindeutigkeit: Es muss ja gelten:

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= \hat{\varphi}(\tau_S(s)) \\ &= \hat{\varphi}(\chi_S) \\ \Rightarrow \hat{\varphi}(f) &= \sum_{s\in S} \varphi(s)\cdot f(s), \end{aligned}$$

damit ist die Eindeutigkeit sichergestellt.

Existenz: Wir wählen die eben erhaltene Darstellung:

$$\hat{\varphi}(f) := \sum_{s\in S} f(s)\cdot\varphi(s),$$

was offenbar unserer Bedingung gnügt. □

Tensorprodukte von A-Moduln

Definition 3.11. *Seien A ein Ring, M und N zwei A-Moduln. Ein* ***Tensorprodukt*** *von M und N ist ein Paar (T,ν) mit*

(1) T ist ein A-Modul

$\boxed{L^2_A(M,N;T)}$ *(2) $\nu : M\times N \to T$ ist A-**bilinear** ($\nu \in L^2_A(M,N;T)$), d.h.*

$$\begin{aligned} \nu(a\cdot x, b\cdot y) &= a\cdot b\cdot \nu(x,y) \\ \nu(x_1+x_2, y_1+x_2) &= \nu(x_1,y_1)+\nu(x_1,y_2)+\nu(x_2,y_1)+\nu(x_2,y_2) \end{aligned}$$

bzw. kürzer: $\nu(\square, y)$ und $\nu(x,\square)$ sind für alle $(x,y)\in M\times N$ A-linear.

(3) Für alle (E,φ), E ein A-Modul, $\varphi \in L^2_A(M,N;E)$ existiert genau ein $\hat{\varphi} \in \mathrm{Hom}_A(T,E)$ mit $\varphi = \hat{\varphi}\circ\nu$:

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[r, "\varphi", "\textit{bilinear}"'] \arrow[d, "\nu", "\substack{\textit{bi-}\\ \textit{linear}}"'] & E \\ T \arrow[ur, dotted, "\exists!\hat{\varphi}\,(\textit{linear})"'] & \end{tikzcd}$$

> $\boxed{\text{Eigenschaften.}}$
>
> (1) Wenn so ein Tensorprodukt (T, ν) für A-Moduln M und N existiert, dann ist es bis auf A-Modulisomorphie eindeutig bestimmt.
>
> (2) Wenn ein Tensorprodukt (T, ν) für A-Moduln M und N existiert, dann ist für alle A-Moduln E die Abbildung
>
> $$L_A^2(M, N; E) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(T, E)$$
>
> $$\begin{aligned} \varphi &\longmapsto \hat{\varphi} \\ \theta \circ \nu &\longleftarrow\!\shortmid \theta \end{aligned}$$
>
> bijektiv und sogar A-Modul-Isomorphismus.

Beweis für (1). Seien (T, ν) und (T', ν') Tensorprodukte von M und N. Dann haben wir

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[rr, "\nu"] \arrow[drr, "\nu"] \arrow[dd, "\nu'"'] \arrow[ddr, "\nu'"] & & T \arrow[d, equals, "\mathrm{id}_T"] \\
& & T \arrow[dl, dotted, bend left, "\exists! \widehat{\nu'}"] \\
T' \arrow[r, equals, "\mathrm{id}_{T'}"] & T' \arrow[ur, dotted, "\exists! \widehat{\nu}"] &
\end{tikzcd}$$

mit $\nu = \widehat{\nu} \circ \nu'$ und $\nu' = \widehat{\nu'} \circ \nu$. Es ergeben sich die Identitäten

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_T \circ \nu &= \nu = \widehat{\nu} \circ \nu' = \widehat{\nu} \circ \widehat{\nu'} \circ \nu \\ \mathrm{id}_{T'} \circ \nu' &= \nu' = \widehat{\nu'} \circ \nu = \widehat{\nu'} \circ \widehat{\nu} \circ \nu', \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_T &= \widehat{\nu} \circ \widehat{\nu'} \\ \mathrm{id}_{T'} &= \widehat{\nu'} \circ \widehat{\nu} \end{aligned}$$

Damit sind also $\widehat{\nu}$ und $\widehat{\nu'}$ zueinander inverse Isomorphismen, also T und T' isomorph. $\square$

> $\boxed{\text{Satz 3.2.2.}}$ Seien A ein Ring, M und N zwei A-Moduln. Dann existiert ein A-Tensorprodukt von M und N.

Beweis.

Konstruktion: Wir betrachten die Einbettung von $M \times N$ in seinen freien A-Modul

$$M \times N \hookrightarrow F_A(M \times N) = \left\{ \sum_{x,y \in M \times N} a_{(x,y)} \cdot \chi_{(x,y)} \;\middle|\; \begin{array}{c} \forall (x, y) \in M \times N : a_{(x,y)} \in A, \\ a_{(x,y)} = 0 \text{ p. p.} \end{array} \right\}$$

und die Teilmenge $U \subseteq F_A(M \times N)$ mit

$$\begin{aligned} U := \operatorname{span}_A\Big(& \Big\{\chi_{(x+x',y)} - \chi_{(x,y)} - \chi_{(x',y)} \mid x, x' \in M, y \in N\Big\} \cup \\ & \cup \Big\{\chi_{(x,y+y')} - \chi_{(x,y)} - \chi_{(x',y')} \mid x \in M, y, y' \in N\Big\} \cup \\ & \cup \Big\{\chi_{(a\cdot x,y)} - a \cdot \chi_{(x,y)} \mid a \in A, x \in M, y \in N\Big\} \cup \\ & \cup \Big\{\chi_{(x,a\cdot y)} - a \cdot \chi_{(x,y)} \mid a \in A, x \in M, y \in N\Big\}\Big). \end{aligned}$$

$\boxed{\otimes_A}$ Offenbar ist U ein A-Untermodul von $F_A(M \times N)$. Wir definieren nun

$$M \otimes_A N := F_A(M \times N) / U$$

und

$$\begin{aligned} \otimes_A : M \times N &\longrightarrow M \otimes_A N \\ (x, y) &\longmapsto x \otimes_A y := [(x, y)]_U = (x, y) + U \end{aligned}$$

Die Abbildung $\otimes_A$ ist offenbar A-bilinear (durch die Faktorisierungs nach U), und $\{x \otimes y \mid x, y \in M \times N\}$ bildet ein Erzeugendensystem (keine Basis, dazu wurde zu viel herausfaktorisiert), sogar schon nur additiv (A-Vielfache lassen sich in eine der beiden Komponenten hineinziehen).

Tensorprodukteigenschaft: Sei also E ein A-Modul und $\varphi \in L^2_A(M, N; E)$. Dann definieren wir

$$\begin{aligned} \hat{\varphi} : M \otimes_A N &\longrightarrow E \\ x \otimes_A y &\longmapsto \varphi(x, y) \\ \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes_A y_i &\longmapsto \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i, y_i) \end{aligned}$$

$\hat{\varphi}$ ist (aufgrund der Bilinearität von φ und den Faktorisierungseigenschaften von U) wohldefiniert, kann auch nicht anders aussehen, und offenbar ist $\varphi = \hat{\varphi} \circ \otimes_A$. □

Das Faserprodukt zweier Modulhomomorphismen

Seien P, Q, M drei A-Moduln und $\varepsilon : P \to M$, $\delta : Q \to M$ zwei A-Modulhomomorphismen. Betrachte den Diagramm-“Stumpf“

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "\varepsilon"] \\ Q \arrow[r, "\delta"'] & M \end{tikzcd}$$

$\boxed{P \underset{(\varepsilon,\delta)}{\times} Q}$ und definiere

$$P \underset{(\varepsilon,\delta)}{\times} Q := \{(p, q) \in P \times Q \,|\, \varepsilon(p) = \delta(q)\} \subseteq P \times Q = P \oplus Q.$$

Damit komplettiert sich das Diagramm zu:

$$\begin{tikzcd}
P \underset{(\varepsilon,\delta)}{\times} Q \arrow[rr, "\delta'=\pi_P|_{P \underset{(\varepsilon,\delta)}{\times} Q}"] \arrow[dd, "\varepsilon'=\pi_Q|_{P \underset{(\varepsilon,\delta)}{\times} Q}"'] \arrow[dr] & & P \arrow[dd, "\varepsilon"] \\
& P \times Q \arrow[ur, "\pi_P"] \arrow[dl, "\pi_Q"] & \\
Q \arrow[rr, "\delta"] & & M
\end{tikzcd}$$

Dieses Diagramm ist auf dem äußeren Rechteck kommutativ:

$$(\varepsilon \circ \delta')(p, q) = \varepsilon(p) = \delta(q) = (\delta \circ \varepsilon')(p, q).$$

$\boxed{\text{Satz 3.2.3.}}$ $(P \underset{(\varepsilon,\delta)}{\times} Q, \varepsilon', \delta')$ hat eine kategoriale Universaleigenschaft: Ist auch

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & P \arrow[d, "\varepsilon"] \\
Q \arrow[r, "\delta"'] & M
\end{tikzcd}$$

kommutativ (d.h. $\varepsilon \circ \varphi = \delta \circ \psi$), so existiert genau ein A-Homomorphismus $h : X \to P \underset{(\varepsilon,\delta)}{\times} Q$ mit $\varphi = \delta' \circ h$, $\psi = \varepsilon' \circ h$:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dotted, "h"] \arrow[drr, "\varphi"] \arrow[ddr, "\psi"'] & & \\
& P \underset{(\varepsilon,\delta)}{\times} Q \arrow[r, "\delta'"'] \arrow[d, "\varepsilon'"] & P \arrow[d, "\varepsilon"] \\
& Q \arrow[r, "\delta"'] & M
\end{tikzcd}$$

Beweis. h mit $h(x) = (\varphi(x), \psi(x)) \in P \times Q$ leistet das gewünschte, und ist offenbar auch die einzige Abbildung, die dies tut. □

Definition 3.12. *$P \underset{(\varepsilon,\delta)}{\times} Q$ heißt **Faserprodukt** von P und Q über M bezüglich ε und δ, auch **pullback**.*

Die Fasersumme zweier Modulhomomorphismen

Es gibt eine *duale* Konstruktion zum Faserprodukt.

Sei A ein Ring, M, P, Q drei A-Moduln mit Homomorphismen $f : M \to P$ und $g : M \to Q$. Gesucht ist eine *universelle* Vervollständigung des Diagramms:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & P \\ Q & \end{tikzcd}$$

Konstruktion:

- Betrachte $P \times Q = P \oplus Q$ als A-Modul und darin den Untermodul
$$U_{f,g} = \{(f(x), -g(x)) \mid x \in M\} \subseteq P \times Q.$$

$\boxed{P \underset{(f,g)}{\amalg} Q}$

- Definiere
$$P \underset{(f,g)}{\amalg} Q := {P \times Q}/{U_{f,g}},$$
mit der kanonischen Projektion $\mathrm{pr} : P \oplus Q \twoheadrightarrow P \underset{(f,g)}{\amalg} Q$.

- Wir haben dann die Abbildungen
$$\begin{aligned} \hat{f} : Q &\longrightarrow P \underset{(f,g)}{\amalg} Q \\ q &\longmapsto \mathrm{pr}((0,q)) = \overline{(0,q)} \\ \hat{g} : P &\longrightarrow P \underset{(f,g)}{\amalg} Q \\ p &\longmapsto \mathrm{pr}((p,0)) = \overline{(p,0)} \end{aligned}$$

Dabei gilt für $p, p' \in P$ und $q, q' \in Q$:
$$\begin{aligned} &\overline{(p,q)} = \overline{(p',q')} \\ &\Leftrightarrow (p - p', q - q') \in U_{f,g} \\ &\Leftrightarrow \exists x \in M : \begin{matrix} p = p' + f(x) \\ q = q' - g(x) \end{matrix} \end{aligned}$$

Damit haben wir für $x \in M$:
$$\begin{aligned} (\hat{g} \circ f)(x) &= \hat{g}(f(x)) \\ &= \overline{(f(x), 0)} \\ &= \underbrace{\overline{(f(x), -g(x))}}_{=\overline{(0,0)}} + \overline{(0, g(x))} \\ &= \overline{(0, g(x))} \\ &= (\hat{f} \circ g)(x), \end{aligned}$$

also $\hat{g} \circ f = \hat{f} \circ g$, das heißt, das Diagramm

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & P \arrow[d, "\hat{f}"] \\ Q \arrow[r, "\hat{g}"] & P \underset{(f,g)}{\amalg} Q \end{tikzcd}$$

ist kommutativ.

Definition 3.13. *Das eben konstruierte* $\left(P \underset{(f,g)}{\amalg} Q, \hat{f}, \hat{g}\right)$ *heißt die* ***Fasersumme*** *oder* ***pushout*** *von* P *und* Q *über* M *bezüglich* (f, g).

In $\underline{\mathrm{Mod}}_A$ existiert eine solche Fasersumme (wie gesehen) immer.

$\boxed{\text{Satz 3.2.4.}}$ *(Universaleigenschaft der Fasersumme)*
Sei

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & P \arrow[d, "\alpha"] \\ Q \arrow[r, "\beta"] & D \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm von A-Modul-Homomorphismen. Dann existiert genau ein A-Modulhomomorphismus $h : P \underset{(f,g)}{\amalg} Q \to D$ mit $\alpha = h \circ \hat{f}$ und $\beta = h \circ \hat{g}$:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & P \arrow[d, "\hat{f}"'] \arrow[ddr, "\alpha"] & \\ Q \arrow[r, "\hat{g}"] \arrow[drr, "\beta"'] & P \underset{(f,g)}{\amalg} Q \arrow[dr, dotted, "\exists! h"] & \\ & & D \end{tikzcd}$$

Beweis. Wenn so ein h existiert, muss gelten

$$\begin{aligned} h(\overline{(p,q)}) &= h(\overline{(p,0)}) + h(\overline{(0,q)}) \\ &= \alpha(q) + \beta(p), \end{aligned}$$

und so ist h also eindeutig. Diese Definition ist auch wohldefiniert und A-linear, also ist auch die Existenz gegeben. □

4 Homologische Methoden in der Algebra

4.1 Projektive Moduln

Beim Untersuchen freier Moduln fällt folgende (fast triviale) Tatsache auf:

$\boxed{\text{Bemerkung 1.}}$ Sei A ein Ring, $M \xrightarrow{\varepsilon} M'' \to 0$ exakt (d.h. ε surjektiv), F ein freier Modul, $f \in \mathrm{Hom}_A(F, M'')$. Dann existiert ein $\hat{f} : F \to M$ mit $f = \varepsilon \circ \hat{f}$ (f faktorisiert über ϵ):

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl, dotted, "\hat{f}"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, two heads, "\varepsilon"'] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Beweis. Sei $F = \bigoplus_{i \in I} A \cdot e_i$, mit einer A-Basis $(e_i)_{i \in I}$. Dann sei für alle $i \in I$ $x_i := f(e_i)$, und es existieren jeweils $y_i \in M$ mit $x_i = \varepsilon(y_i)$ (da ε surjektiv ist). Wir können damit $\hat{f}$ definieren via

$$\hat{f}\left(\sum_{i \in I} a_i \cdot e_i\right) := \sum_{i \in I} a_i \cdot y_i,$$

und haben dann für die Basis $\varepsilon \circ \hat{f}(e_i) = \varepsilon(y_i) = x_i = f(e_i)$, also (da linear) $\varepsilon \circ \hat{f} = f$. $\square$

Inspiriert durch diese Beobachtung definieren wir nun:

Definition 4.1. *Sei A ein Ring, P ein A-Modul. P heißt **projektiver A-Modul**, falls*

$$\forall \varepsilon \in \mathrm{Epi}_A(M, M''), \forall f \in \mathrm{Hom}_A(P, M'') : \quad \exists \hat{f} \in \mathrm{Hom}_A(P, M) : f = \varepsilon \circ \hat{f}$$

Das heißt, jedes Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, two heads, "\varepsilon"] & M'' \\ & P \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

kann kommutativ komplettiert werden zu:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, two heads, "\varepsilon"] & M'' \\ & P \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, "\hat{f}"] \end{tikzcd}$$

Achtung. $\hat{f}$ ist i.a. nicht eindeutig bestimmt.

Bemerkung. Jeder freie Modul ist projektiv, aber die Umkehrung gilt nicht.

$\boxed{\text{SATZ 4.1.1.}}$ *(Charakterisierung der projektiven Moduln)*

Sei A ein Ring, f ein A-Modul. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) P ist ein projektiver A-Modul

(2) Der Funktor

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_A(P, \square) : \underline{\mathrm{Mod}}_A &\longrightarrow \underline{\mathrm{Mod}}_A \\ X &\longmapsto \mathrm{Hom}_A(P, X) \\ \left(X \xrightarrow{f} Y\right) &\longmapsto f^* : \mathrm{Hom}_A(P, X) \to \mathrm{Hom}_A(P, Y) \\ & \qquad\qquad f^*(\varphi) := f \circ \varphi \end{aligned}$$

ist ein *exakter* kovarianter Funktor, d.h. überführt exakte Folgen in exakte Folgen.

(3) P ist isomorph zu einem direkten Summanden eines freien Moduls, d.h. es gibt einen A-Modul Q und ein $I \neq \varnothing$, so dass

$$P \oplus Q = P \times Q \cong A^{(I)}$$

Ist P endlich erzeugt, so ist weiterhin äquivalent:

(4) Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ und eine Matrix $B \in M_A(n, n)$, so dass $B^2 = B$ und $P \cong \mathrm{Spalt}_A(B)$, d.h. P ist isomorph dem Bild eines idempotenten Endomorphismus eines freien Moduls.

Beweis.

(1) $\Rightarrow$ (2): Sei $0 \to X' \xhookrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X'' \to 0$ eine exakte Folge in Mod_A. Wir wissen bereits, dass $\mathrm{Hom}_A(Y, \square)$ (für alle A-Moduln Y) ein linksexakter Funktor ist, d.h.

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(Y, X') \xhookrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_A(Y, X) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_A(Y, X'')$$

ist exakt, aber g^* (im nichtprojektiven Fall) nicht unbedingt surjektiv (siehe folgendes Beispiel 4.1.1).

Wir müssen also noch zeigen, dass für projektive P die Abbildung $g^* : \operatorname{Hom}_A(P, X) \to \operatorname{Hom}_A(P, X'')$ doch surjektiv ist.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, two heads, "g"] & X'' \arrow[r] & 0 \\ & P \arrow[u, "h"'] \arrow[ul, dashed, "\exists\hat{h}"] & \end{tikzcd}$$

Sei also $h \in \operatorname{Hom}_A(P, X'')$. Da P projektiv ist, existiert ein $\hat{h} : P \to X$ mit $h = g \circ \hat{h}$, also $h = g^*(\hat{h})$. Das heißt, g^* ist wirklich surjektiv, also $\operatorname{Hom}_A(P, \Box)$ auch rechtsexakt, also exakt.

(2) $\Rightarrow$ **(1):** Ist g^* immer surjektiv, so ist P projektiv, denn es ist ja $h = g^*(\hat{h}) = g \circ \hat{h}$ für alle h.

(1) $\Rightarrow$ **(3):** Sei P projektiv, $P = \sum_{i \in I} A \cdot x_i$, $\{x_i \mid i \in I\}$ ein A-Erzeugendensystem von P. Betrachte den freien A-Modul über $A^{(I)}$ mit der zum Erzeugenensystem gehörenden Abbildung ε:

$$e_i \longmapsto x_i$$

$$\begin{tikzcd} A^{(I)} \arrow[r, "\varepsilon"'] & P & 0 \\ & P \arrow[u, equal, "\mathrm{id}_P"'] \arrow[ul, dotted, "\exists\delta"] & \end{tikzcd}$$

ε faktorisiert über id_P, $\varepsilon \circ \delta = \mathrm{id}_P$, damit ist δ injektiv, und $P \cong \delta(P) \subseteq A^{(I)}$. Überdies haben wir

$$\forall z \in A^{(I)} : \quad z = \underbrace{\delta(\varepsilon(z))}_{\in \delta(P)} + \underbrace{z - \delta(\varepsilon(z))}_{\in \ker(\varepsilon)}$$

(denn $\varepsilon(z - \delta(\varepsilon(z))) = \varepsilon(z) - \varepsilon(\delta(\varepsilon(z))) = \varepsilon(z) - \varepsilon(z) = 0$)

$$\Rightarrow \quad A^{(I)} = \delta(P) + \ker(\varepsilon)$$

Außerdem: Ist $w \in \delta(P) \cap \ker(\varepsilon)$, etwa $w = \delta(y)$, so ist $y = \varepsilon(\delta(y)) = \varepsilon(w) = 0$, also $w = 0$. Daher ist die Summe sogar direkt, also

$$P \oplus \ker(\varepsilon) \cong \delta(P) \oplus \ker(\varepsilon) = A^{(I)}.$$

(3) $\Rightarrow$ **(1):** Sei $P \oplus Q = F$ frei, und sei das Diagramm

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, two heads, "\varepsilon"] & M'' \arrow[r] & 0 \\ & P \arrow[u, "f"'] & \end{tikzcd}$$

gegeben. Wir haben weiterhin $P \overset{i}{\hookrightarrow} F \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} P$ (mit $\pi \circ i = \mathrm{id}_P$), und da F als freier Modul ja projektiv ist, auch eine Faktorisierung von $f \circ \pi$ über ε:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, two heads, "\varepsilon"] & M'' \arrow[r] & 0 \\
 & P \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, dotted, "\hat{f}"'] & \\
 & F \arrow[u, two heads, shift left, "\pi"] \arrow[uul, bend left, "\widehat{f\circ\pi}"] &
\end{tikzcd}$$

Es ist $\varepsilon \circ \widehat{f \circ \pi} = f \circ \pi$, mit $\hat{f} := \widehat{f \circ \pi} \circ i$ haben wir dann

$$\varepsilon \circ \hat{f} = \varepsilon \circ \widehat{f \circ \pi} \circ i = f \circ \pi \circ i = f,$$

also faktorisiert auch f über ε, also ist P projektiv.

Sei nun P endlich erzeugt.

(1) $\Rightarrow$ (4): Sei nun P projektiv mit A-Erzeugendensystem $\{x_1, \cdots, x_n\}$, also $P = \sum_{i=1}^{n} A \cdot x_i$. Wir haben also (mit der durch $(x_i)_i$ induzierten Abbildung ε und $K := \ker(\varepsilon)$) das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & & & P \arrow[d, equal] \arrow[dl, dotted, "s"'] & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, hook, shift left, "i"] & A^n \arrow[l, dotted, two heads, shift left, "p"] \arrow[r, two heads, "\varepsilon"] & P \arrow[r] & 0 \\
 & & e_i \arrow[r, mapsto] & x_i &
\end{tikzcd}$$

Da P projektiv ist, existiert $s \in \mathrm{Hom}_A(P, A^n$ mit $\varepsilon \circ s = \mathrm{id}$, und damit haben wir $A_n = s(P) \oplus i(K)$, und eine Projektion $p : A^n \twoheadrightarrow K$ (etwa $p(x) := x - s(\varepsilon(x))$) mit $p \circ i = \mathrm{id}_K$, also ist auch $K = i(K)$ endlich erzeugt von n Elementen (nämlich $p(e_i)$).

Betrachte nun $f = i \circ p : A^n \to A^n$. Es ist offenbar $f \in \mathrm{End}_A(A^n)$, und

$$f^2 = i \circ \underbrace{p \circ i}_{=\mathrm{id}_K} \circ p = i \circ p = f.$$

Es ist also f ein Projektionsoperator von A^n, und nach Konstruktion ist $A^n = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$, mit $\ker(f) = s(P) = \mathrm{im}(s) = \ker(p)$ und $\mathrm{im}(f) = i(K) = K = \ker(\varepsilon)$. Damit erhalten wir die exakte Folge

$$0 \to \ker(f) \hookrightarrow A^n \xrightarrow{f} A^n \xrightarrow{\varepsilon} P \to 0$$

$f \in \mathrm{End}_A(A^n)$ hat eine Darstellungsmatrix $C = M_{E_n}^{E_n}(f)$, wobei $E_n = \{e_1, \cdots, e_n\}$ die Standardbasis sei, d.h. $f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} c_{ji} \cdot e_j$.

Wegen $f^2 = f$ ist auch $C^2 = C$, also $C \in M_A(n,n)$ idempotent, und

$$\begin{aligned} A^n &= i(K) \oplus s(P) \\ &= \operatorname{im}(f) \oplus s(P) \\ &= \operatorname{im}(f) \oplus \ker(f) \\ &= \operatorname{im}(f) \oplus \operatorname{im}(\operatorname{id}_{A^n} - f), \end{aligned}$$

das heißt, es ist $s(P) = \ker(f) = \operatorname{im}(\operatorname{id}_{A^n} - f)$. $B := I_n - C \in M_A(n,n)$ ist die Darstellungsmatrix von $\operatorname{id}_{A^n} - f$ bezüglich E_n. Wegen $f = f^2$ ist

$$\begin{aligned} (\operatorname{id}_{A^n} - f)^2 &= \operatorname{id}_{A^n} \circ \operatorname{id}_{A^n} - f \circ \operatorname{id}_{A^n} - \operatorname{id}_{A^n} \circ f + f \circ f \\ &= \operatorname{id}_{A^n} - f - f + f \\ &= \operatorname{id}_{A^n} - f, \end{aligned}$$

d.h. auch $\operatorname{id}_A^n - f$ ist idempotent, also auch B, und wir haben

$$P \cong s(P) = \operatorname{im}(\operatorname{id}_{A^n} - f) = \operatorname{Spalt}_A(B) \quad \text{mit } B^2 = B.$$

(4) $\Rightarrow$ (3): Sei $B = B^2 \in M_A(n,n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann haben wir $f \in \operatorname{End}_A(A^n)$ mit $M_{E_n}^{E_n}(f) = B$, also $f^2 = f$ und

$$A^n = \operatorname{im}(f) \oplus \ker(f) = \operatorname{Spalt}_A(B) \oplus \operatorname{Spalt}_A(I_n - B),$$

d.h. $\operatorname{Spalt}_A(B)$ ist direkter Summand des freien Moduls A^n. □

Beispiel 4.1.1. Betrachte $A = \mathbb{Z}$, $Y = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ mit $n \geq 2$, und die von der **Homothetie** $h_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $h_n(k) := n \cdot k$, induzierte exakte Folge $\boxed{h_n}$

$$0 \to \mathbb{Z} \xhookrightarrow{h_n} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0.$$

Die zugehörige $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \square)$-Folge ist

$$0 \to \underbrace{\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}\right)}_{=(0)} \xrightarrow{h_n^*} \underbrace{\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}\right)}_{=(0)} \xrightarrow{\pi^*} \underbrace{\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)}_{\neq(0)} \to 0,$$

und hier ist π^* nicht surjektiv, d.h. $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \square\right)$ ist nicht rechtsexakt.

Erinnerung. Sei M ein A-Modul.

- M heißt **torsionslos**, falls die Abbildung $\boxed{\varkappa_M}$

$$\begin{aligned} \varkappa_M : M &\longrightarrow M^{**} = (M^*)^* = \operatorname{Hom}_A(M^*, A) = \operatorname{Hom}_A(\operatorname{Hom}_A(M,A), A) \\ x &\longmapsto \varkappa_M(x) := \square(x) : M^* \to A \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad f \mapsto f(x) \end{aligned}$$

  injektiv ist

- M heißt **reflexiv**, falls $\varkappa_M : M \to M^{**}$ bijektiv ist.

- M heißt **torsionsfrei**, falls für alle $a \in \operatorname{NNT}(A)$ und $x \in M$ gilt: $a \cdot x = 0 \Rightarrow x = 0$.

Bemerkung 2.

(1) Ist $A = K$ Körper, M ein K-Vektorraum, dann ist M immer torsionslos. Ist $\dim_K(M) < \infty$, so ist M auch reflexiv.

(2) Allgemeiner: Ist M ein freier Modul über einem beliebigen Ring, so ist M torsionslos. Ist $\mathrm{Rg}_A(M) < \infty$, so ist M auch reflexiv.

(3) Ist M torsionslos, so ist M auch torsionsfrei.

Beweis für (3): Sei $x \in M$, $a \in \mathrm{NNT}(A)$, $a \cdot x = 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} & 0 = f(a \cdot x) \quad \forall f \in M^* \\ \Rightarrow \quad & 0 = a \cdot f(x) \quad \forall f \in M^* \\ \xRightarrow{a \in \mathrm{NNT}(A)} \quad & 0 = f(x) \quad \forall f \in M^* \\ \Rightarrow \quad & \varkappa_M(x)(f) = 0 \quad \forall f \in M^* \\ \Rightarrow \quad & \varkappa_M(x) = 0 \\ \xRightarrow[\text{inj.}]{\varkappa_M} \quad & x = 0 \end{aligned}$$

□

Achtung. Die Umkehrung für (3) gilt nicht: $\mathbb{Q}$ ist $\mathbb{Z}$-torsionsfrei, aber nicht $\mathbb{Z}$-torsionslos, denn $\mathbb{Q}^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = (0)$, also auch $\mathbb{Q}^{**} = (0) \neq \mathbb{Q}$.

Korollar. Sei A ein Ring, P projektiver A-Modul.

(1) P ist torsionslos (und damit auch torsionsfrei)

(2) Ist P endlich erzeugt, dann ist P sogar reflexiv.

Beweis.

(1) Sei also P projektiv. Dann ist P direkter Summand eines freien Moduls, etwa $P \oplus Q = F$ frei. Damit haben wir das kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, "\varkappa_P"'] & F \arrow[d, tail, "\varkappa_F"] \\ P^{**} \arrow[r, "i^{**}"'] & F^{**} \end{tikzcd}$$

Es ist $i^{**} \circ \varkappa_P = \varkappa_F \circ i$ injektiv, also auch $\varkappa_P$ injektiv.

Bemerkung. Wir brauchen hier nur, dass P Untermodul eines torsionslosen Moduls ist.

(2) Sei nun P endlich erzeugt und projektiv. Dann haben wir die exakte Folge

$$0 \to K \xhookrightarrow{i} A^n \xrightarrow{\varepsilon} P \to 0,$$

und mit der bekannten Halb-inversen $s : P \to A^n$, $\varepsilon \circ s = \mathrm{id}_P$, und den $\varkappa_\square$ erhalten wir das (in jeder Weise kommutative) Diagramm

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, shift left, tail, "s"] \arrow[d, tail, "\varkappa_P"'] & A^n \arrow[l, shift left, two heads, "\varepsilon"] \arrow[d, "\wr", "\varkappa_{A^n}"'] \\ P^{**} \arrow[r, shift left, "s^{**}"] & (A^n)^{**} \arrow[l, shift left, "\varepsilon^{**}"] \end{tikzcd}$$

Dabei ist $\varepsilon^{**} \circ s^{**} = \mathrm{id}_{P^{**}}$, also ε^{**} surjektiv, also ist auch $\varepsilon^{**} \circ \varkappa_{A^n} = \varkappa_P \circ \varepsilon$ surjektiv, also $\varkappa_P$ surjektiv, injektiv schon nach (1), also bijektiv. Damit ist P reflexiv. $\square$

Bemerkung 3. Man kann die Projektivität eines A-Moduls auch charakterisieren mit der folgenden Bedingung:

(5) Jede kurze exakte Folge

$$0 \to N \xhookrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \to 0$$

zerfällt, d.h. es ist $M \cong N \oplus P$, das Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_N"'] & M \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, dotted, "\wr\ \exists! h"] & P \arrow[r] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_P"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r, tail, "(\mathrm{id}_N, 0)"'] & N \times P \arrow[r, two heads, "\pi_P"'] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

ist kommutativ (mit exakten Zeilen).

Satz 4.1.2. Sei A ein Ring, P ein projektiver A-Modul, endlich erzeugt.

(1) Ist A ein Hauptidealring, so ist P frei.

(2) Ist $(A, \mathfrak{m})$ lokaler Ring, so ist P frei.

Beweis.

(1) Sei also A HIR, P projektiv, endlich erzeugt. D.h., $\exists n \in \mathbb{N}$, so dass $P \cong Q$, Q direkter Summand von A^n. Aus der Theorie der endlich erzeugten Moduln über HIR (Elementarteiler) wissen wir, dass dann auch Q endlich erzeugter freier A-Modul ist, also ist auch P frei.

(2) Sei $(A, \mathfrak{m})$ lokal, $\mathfrak{m} = A \setminus A^*$, $P = \sum_{i=1}^n A \cdot x_i$ endlich erzeugter projektiver Modul, $\{x_i, \cdots, x_n\}$ ein Erzeugendensystem mit minimaler Anzahl von Erzeugenden. Wir haben dann wieder unsere Sequenz

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, shift left, "i"] & A^n \arrow[l, shift left, "\pi"] \arrow[r, shift right, two heads, "\varepsilon"'] & P \arrow[l, shift right, "s"'] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$$\pi(e_i) \longleftarrow\!\shortmid\; e_i \longmapsto x_i$$

Für $(a_1, \cdots, a_n) \in \ker(\varepsilon) \subseteq A^n$ gilt dabei

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i \\ \Rightarrow \quad \forall i \in \{1, \cdots, n\}: \quad & a_i \in \mathfrak{m} = A \setminus A^*, \end{aligned}$$

denn sonst wäre $a_k \in A^*$ und $x_k = -\sum_{i \neq k} \frac{a_i}{a_k} \cdot x_i$, und das Erzeugendensystem nicht minimal.

$$\Rightarrow \quad K = \ker(\varepsilon) \subseteq \mathfrak{m} \cdot A^n \subseteq A^n$$

wobei auch $A^n = K \oplus s(P)$, d.h. $s(P) \cap K = (0)$ ist, d.h.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & K \subseteq \mathfrak{m} \cdot A^n = \mathfrak{m} \cdot K \oplus \mathfrak{m} \cdot s(P) \\ \Rightarrow \quad & K \subseteq \mathfrak{m} \cdot K \\ \Rightarrow \quad & K = \mathfrak{m} \cdot K \end{aligned}$$

und das Lemma von Nakayama (Satz 1.1.5) sagt uns (da $\mathfrak{m} = \mathrm{Jac}(A)$ ist):

$$\Rightarrow \quad K = (0)$$

Es ist also $A^n \underset{\varepsilon}{\xrightarrow{\sim}} P$, und P ein freier Modul. □

$\boxed{\text{Fazit.}}$ Über Hauptidealringen oder lokalen Ringen sind die endlich erzeugten *projektiven* Moduln genau die endlich erzeugten *freien* Moduln.

Im Allgemeinen gilt dies nicht. Wir wollen zeigen:

Ziel. Sei A beliebiger Ring, P endlich erzeugter Modul. Dann gilt:

(a) P projektiv $\Leftrightarrow$ $P_{\mathfrak{p}}$ ist $A_{\mathfrak{p}}$-frei für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$

(b) P projektiv $\Leftrightarrow$ $P_{\mathfrak{m}}$ ist $A_{\mathfrak{m}}$-frei für alle $\mathfrak{m} \in \mathrm{Specm}(A)$

(c) Die lokale Rangabbildung

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rg}_{\square}(P) : \mathrm{Spec}(A) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\
\mathfrak{p} &\longmapsto \mathrm{Rg}_{\mathfrak{p}}(P) := \mathrm{Rg}_{A_{\mathfrak{p}}}(P_{\mathfrak{p}}) \\
&\qquad = \dim_{A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}\cdot A_{\mathfrak{p}}} \left(P_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}\cdot P_{\mathfrak{p}} \right) \\
&\qquad = \dim_{Q(A/\mathfrak{p})} \left(Q\left(P/\mathfrak{p}\cdot P \right)\right)
\end{aligned}$$

ist stetig (wobei links die Zariski- und rechts die diskrete Topologie verwendet wird).

> $\boxed{\text{KOROLLAR.}}$ Sei A Ring, P endlich erzeugter projektiver A-Modul. Dann gilt für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$:
>
> (1) $P_{\mathfrak{p}}$ ist $A_{\mathfrak{p}}$-frei.
>
> (2) Ist $P = \sum_{i=1}^{n} A \cdot \nu_i$, so ist $\mathrm{Rg}_{A_{\mathfrak{p}}}(P_{\mathfrak{p}}) \leq n$.

Beweis.

(1) Sei P projektiv, endlich erzeugt. Dann existiert bekannterweise $n \in \mathbb{N}$ und $s : P \hookrightarrow A^n$, $\varepsilon : A^n \twoheadrightarrow P$, ε Epimorphismus, $\varepsilon \circ s = \mathrm{id}_P$, und $A^n = s(P) \oplus \ker(\varepsilon)$. Dann haben wir für $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$:

$$\begin{tikzcd}
& A^n \arrow[r, two heads, shift left, "\varepsilon"] \arrow[dl, "i_{\mathfrak{p}}^A \times \ldots \times i_{\mathfrak{p}}^A"'] \arrow[d, "i_{\mathfrak{p}}^{A^n}"] & P \arrow[l, shift left, "s"] \arrow[d, "i_{\mathfrak{p}}^P"] \\
(A_{\mathfrak{p}})^n \arrow[r, equal] & (A^n)_{\mathfrak{p}} \arrow[r, two heads, shift left, "\varepsilon_{\mathfrak{p}}"] & P_{\mathfrak{p}} \arrow[l, shift left, "s_{\mathfrak{p}}"]
\end{tikzcd}$$

Das heißt, $\mathfrak{P}_{\mathfrak{p}}$ ist $A_{\mathfrak{p}}$-projektiv, und da $(A_{\mathfrak{p}}, \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}})$ lokal ist, sogar $A_{\mathfrak{p}}$-frei.

(2) Ist $P = \sum_{i=1}^{n} A \cdot \nu_i$, so gilt ja für $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A$:

$$P_{\mathfrak{p}} = i_{\mathfrak{p}}^P \left(\sum_{i=1}^{n} A \cdot \nu_i \right) = \sum_{i=1}^{n} A_{\mathfrak{p}} \cdot \frac{\nu_i}{1},$$

also ist $\mathrm{Rg}_{A_{\mathfrak{p}}}(P_{\mathfrak{p}}) \leq n$.

$\square$

4.2 Der Rang projektiver Moduln und die Picard-Gruppe eines Ringes

Definition 4.2. *Sei A Ring, M ein A-Modul. M heißt A-Modul* ***von endlicher Darstellung (v. e. D.)****, falls es $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ und $f \in \mathrm{Hom}_A(A^m, A^n)$ und einen Epomorphismus $\varepsilon \in \mathrm{Epi}_A(A^n, M)$ gibt, so dass die Sequenz*

$$A^m \xrightarrow{f} A^n \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$$

exakt ist.

Die Bedeutung davon ist:

- M ist endlich erzeugt von $\{\varepsilon(e_1), \cdots, \varepsilon(e_n)\}$ (wobei $(e_1, \cdots, e_n) = E_n$ die Standardbasis in A^n ist), und
- $\ker(\varepsilon) = \operatorname{im}(f)$ ist ebenfalls endlich erzeugt.

Definition 4.3. *Ist M endlich erzeugter A-Modul, etwa $M = \sum_{i=1}^r A \cdot z_i$, $\{z_1, \cdots, z_r\}$ ein A-Erzeugendensystem von M, so gibt es den Epimorphismus*

$$\begin{aligned} \varepsilon : A^r &\longrightarrow M \\ e_i &\longmapsto z_i. \end{aligned}$$

$\boxed{\Omega^1_A(z_1, \cdots, z_r)}$ $\boxed{\mathrm{Rel}_A(z_1, \cdots, z_r)}$

Der Modul

$$\begin{aligned} \Omega^1_A(z_1, \cdots, z_r) &:= \mathrm{Rel}_A(z_1, \cdots, z_r) \\ &:= \ker(\varepsilon) \\ &= \left\{ (a_1, \cdots, a_r) \in A^r \,\middle|\, \sum_{i=1}^r a_i \cdot z_i = 0 \right\} \end{aligned}$$

heißt ***Relationenmodul*** *von M bezüglich $z_1, \cdots, z_r$, historisch (Hilbert) auch* ***erster Syzygienmodul*** *von M bzgl. $\{z_1, \cdots, z_r\}$.*

Fazit. M ist v. e. D. $\Longleftrightarrow M$ ist endlich erzeugt, und ein (endliches) Erzeugendensystem hat einen endlich erzeugten Relationenmodul.

Achtung. Die Folgerung M endlich erzeugt $\Rightarrow$ M v. e. D. gilt i.a. nicht.

Beispiel 4.2.1. Betrachte wieder einmal $A := \mathcal{H}ol(\mathbb{C})$, ein bekanntermaßen nicht-noetherscher Ring, und ein beliebiges nicht endlich erzeugtes Ideal $\mathfrak{a} \subsetneqq A$. Der Faktorring $A/\mathfrak{a}$ ist dann insbesondere ein endlich erzeugter (sogar zyklischer) A-Modul, aber in

$$0 \to \mathfrak{a} \hookrightarrow A \xrightarrow{\pi} A/\mathfrak{a} \to 0$$

ist $\mathfrak{a} = \ker(\pi)$ nicht endlich erzeugt. Der folgende Satz wird uns zeigen, dass $A/\mathfrak{a}$ auch nicht auf andere Weise endlich darstellbar ist.

<table><tr><td>

$\boxed{\text{Satz 4.2.1.}}$ *(Schanuel-Lemma)*

Sei A Ring, M ein A-Modul und

$$0 \to K \xhookrightarrow{i} P \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$$

$$0 \to L \xhookrightarrow{j} Q \xrightarrow{\delta} M \to 0$$

kurze exakte Folgen, P und Q projektiv (sogenannte projektive **Auflösung**en von M). Dann gilt

$$P \oplus L \cong K \oplus Q$$

</td></tr></table>

Beweis. Wir haben also

$$0 \to K \overset{i}{\hookrightarrow} P \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} M \to 0$$

$$0 \to L \overset{j}{\hookrightarrow} Q \overset{\delta}{\twoheadrightarrow} M \to 0$$

und das Faserprodukt-Diagramm

$$\begin{tikzcd} P \underset{(\varepsilon,\delta)}{\times} Q \arrow[r, "\delta'"] \arrow[d, "\varepsilon'"'] & P \arrow[d, "\varepsilon"] \\ Q \arrow[r, two heads, "\delta"'] & M \end{tikzcd}$$

Da ε und δ surjektiv sind, sind auch ε' und δ' surjektiv ($p \in P \xRightarrow{\delta \text{ surj.}} \exists q \in \delta^{-1}(\varepsilon(p)) \Rightarrow \delta'(p,q) = p$, ε' analog.) Wir haben also exakte Sequenzen

$$0 \to \ker(\delta') \hookrightarrow P \underset{(\varepsilon,\delta)}{\times} Q \overset{\delta'}{\twoheadrightarrow} P \to 0$$

und

$$0 \to \ker(\varepsilon') \hookrightarrow P \underset{(\varepsilon,\delta)}{\times} Q \overset{\varepsilon'}{\twoheadrightarrow} Q \to 0.$$

Dabei ist

$$\ker(\delta') = \left\{(p,q) \in P \underset{(\varepsilon,\delta)}{\times} Q \mid p = \delta'(p,q) = 0\right\}$$

(und für diese Elemente gilt auch $\varepsilon(p) = \delta(q)$.)

$$\begin{aligned} &= \{(0,q) \in (0) \times Q \mid 0 = \varepsilon(0) = \delta(q)\} \\ &= (0) \times \ker(\delta) \\ &= (0) \times j(L) \\ &\cong L \end{aligned}$$

und analog

$$\ker(\varepsilon') = i(K) \times (0) \cong K$$

Da P und Q projektiv sind, haben wir (nach der Bedingung (5) der Charakterisierung der Projektivität)

$$K \oplus Q \cong P \underset{(\varepsilon,\delta)}{\times} Q \cong P \oplus L.$$

Insgesamt haben wir folgendes Diagramm mit exakten Zeilen und Spalten:

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \ker(\varepsilon') \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\subseteq"] & K \arrow[r] \arrow[d, tail, "i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker(\delta') \arrow[r, tail, "\subseteq"] \arrow[d, "\wr"] & P \underset{(\varepsilon,\delta)}{\times} Q \arrow[r, two heads, "\delta'"] \arrow[d, "\varepsilon'"] & P \arrow[r] \arrow[d, two heads, "\varepsilon"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, tail, "j"] \arrow[d] & Q \arrow[r, two heads, "\delta"] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

□

> $\boxed{\text{Korollar.}}$ Sei M ein A-Modul v. e. D. und
>
> $$0 \to K \overset{j}{\hookrightarrow} P \overset{\delta}{\twoheadrightarrow} M \to 0$$
>
> exakte Folge, P endlich erzeugt und projektiv. Dann ist stets auch K endlich erzeugt.

Beweis. Betrachte die (exakte) Dastellungsfolge

$$A^m \xrightarrow{f} A^n \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} M \to 0$$

und

$$0 \to K \overset{j}{\hookrightarrow} P \overset{\delta}{\twoheadrightarrow} M \to 0.$$

Das Shanuel-Lemma sagt uns dann, dass $A^n \oplus K \cong \mathrm{im}(f) \oplus P$ ist, letzteres ist endlich erzeugt, also ist $A^n \oplus K$ endlich erzeugt, und via π_K auch K endlich erzeugt. □

Beispiel 4.2.2. Wenden wir dies auf das (exotische) Beispiel $A = \mathcal{H}ol(\mathbb{C})$, $\mathfrak{a} \subsetneqq A$ ein nicht endlich erzeugtes Ideal. Dann haben wir die Standard-Folge:

$$0 \to \mathfrak{a} \hookrightarrow \mathcal{H}ol(\mathbb{C}) \twoheadrightarrow {}^{\mathcal{H}ol(\mathbb{C})}\!/_{\mathfrak{a}} \to 0$$

womit $M := {}^{\mathcal{H}ol(\mathbb{C})}\!/_{\mathfrak{a}}$ endlich erzeugt ist.

Angenommen, M ist sogar von endlicher Darstellung. Dann haben wir nach dem Korollar (da $\mathcal{H}ol(C)$ ja als freier Modul vom Rang 1 über sich selbst insbesondere projektiv und endlich erzeugt ist), dass auch $\mathfrak{a}$ endlich erzeugt ist, im Widerspruch zur Voraussetzung, ${}^{\mathcal{H}ol(\mathbb{C})}\!/_{\mathfrak{a}}$ ist also nicht von endlicher Darstellung.

$\boxed{\text{Satz 4.2.2.}}$ Sei A Ring, M ein endlich erzeugter A-Modul.

(1) Ist M projektiv, so ist M v. e. D.

(2) Ist A noethersch, so ist M v. e. D.

Das heißt, für nothersche Ringe oder projektive Moduln gilt:

$$M \text{ endlich erzeugt} \iff M \text{ v. e. D.}$$

Beweis.

(1) Sei P projektiv, endlich erzeugt. Dann haben wir unsere exakten Folgen:

$$0 \rightleftarrows \ker(\varepsilon) = K \underset{p}{\overset{i}{\rightleftarrows}} A^n \underset{s}{\overset{\varepsilon}{\rightleftarrows}} P \rightleftarrows 0$$

Das heißt, auch $K = p(A^n)$ ist endlich erzeugt, $K = \sum_{i=1}^n A \cdot p(e_i)$. Wir erhalten die exakte Folge

$$A^n \xrightarrow{i \circ p} A^n \overset{M}{\longrightarrow\!\!\!\!\twoheadrightarrow}\!\to 0,$$

und damit ist M v. e. D..

(2) Sei A noethersch und M endlich erzeugter A-Modul, etwa $M = \sum_{i=1}^n A \cdot x_i$. Dann haben wir die Standardfolge

$$0 \to \ker(\varepsilon) \overset{i}{\hookrightarrow} A^n \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} M \to 0$$

$$e_i \longmapsto x_i$$

Da A^n (als freier Modul über dem noetherschen Ring A) wieder noethersch ist, ist $\ker(\varepsilon) \subseteq A^n$ endlich erzeugt, etwa mit $A^m \overset{\delta}{\twoheadrightarrow} \ker(\varepsilon)$. Wir erhalten die (exakte) Darstellungsfolge

$$A^m \xrightarrow{i \circ \delta} A^n \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} M \to 0,$$

es ist also M v. e. D. $\square$

Hom und Lokalisierung

Sei A ein Ring, M und N zwei A-Moduln, $S \subseteq A$ ein m. a. S.

Dann hat man folgendes kommutative Diagramm von A-linearen Abbildungen und A-Moduln:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_A(M,N) \arrow[r, "\square_S"] \arrow[d, "i_S^{\operatorname{Hom}_A(M,N)}"'] & \operatorname{Hom}_{A_S}(M_S, N_S) = \operatorname{Hom}_A(M_S, N_S) \\
(\operatorname{Hom}_A(M,N))_S \arrow[ur, dotted, "\exists!\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

mit den kanonischen Abbildungen $\square_S$ und i_S,

$$\begin{aligned}
(f : M \to N) &\xmapsto{\square_S} \left(f_S : M_S \to N_S \quad \right) \\
&\qquad\qquad\qquad \frac{a}{t} \mapsto \frac{f(a)}{t} \\
(f : M \to N) &\xmapsto{i_S} \frac{f}{1},
\end{aligned}$$

sowie der aus der Universaleigenschaft von Lokalisierungsmoduln gewonnenen Abbildung $\varphi = \widehat{\square_S}$, wobei hier gilt

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\frac{f}{t}\right) &= \frac{1}{t} \cdot f_S \\
\varphi\left(\frac{f}{t}\right)\left(\frac{x}{s}\right) &= \frac{1}{t} \cdot f_S\left(\frac{x}{s}\right) \\
&= \frac{1}{t} \cdot \frac{f(x)}{s} \\
&= \frac{f(x)}{s \cdot t}
\end{aligned}$$

φ ist A-linear und sogar A_S-linear.

Achtung. φ ist i. A. weder injektiv noch surjektiv.

Beispiel 4.2.3. Betrachte $A := \mathbb{Z}$, $S := \mathrm{NNT}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^0 = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $M = \mathbb{Q}$ und $N := \mathbb{Z}$. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}))_{\mathrm{NNT}(\mathbb{Z})} &\xrightarrow{\varphi} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q} \\
= (0)_{\mathbb{Z}^0} & \\
= (0) \qquad & ,
\end{aligned}$$

und hier kann φ offenbar nicht surjektiv sein.

Beispiel 4.2.4. Betrachte wieder $A := \mathbb{Z}$, $S := \mathbb{Z}^0$, aber diesmal $N = M = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Dabei ist $\left(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\right)_{\mathbb{Z}} = (0)$. Daher haben wir

$$\begin{aligned}
\left(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\right)_{\mathbb{Z}^0} &\xrightarrow{\varphi} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}\left(\left(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\right)_{\mathbb{Z}^0}, \left(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\right)_{\mathbb{Z}^0}\right) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}\left((0), (0)\right) \\
&= (0),
\end{aligned}$$

wogegen auf der linken Seite mindestens zwei verschiedene Homomorphismen existieren (id und 0), welche auch nicht durch i_S vereinigt werden. Damit ist hier φ nicht injektiv.

Beispiel 4.2.5. Sei (A, S) beliebig, $F := \bigoplus_{i=1}^n A \cdot e_i \cong A^n$, N beliebiger A-Modul. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_A(F, N) &\cong \mathrm{Hom}_A(A^n, N) \\
&\cong N^n \\
f &\mapsto (f(e_i))_{i=1}^n
\end{aligned}$$

und

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_A(F,N)_S \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[r, phantom, "\cong"] & (N^n)_S \arrow[d, equal, "\wr"'] \\
\mathrm{Hom}_{A_S}(F_S,N_S) \arrow[r, phantom, "\cong"] & (N_S)^n,
\end{tikzcd}$$

Die Isomorphie auf der rechten Seite ergibt sich dabei durch die Splitfolge

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, tail, "i_{M'}"] & M' \oplus M'' \arrow[l, bend left, "\pi_{M'}"] \arrow[r, two heads, "\pi_{M''}"'] & M'' \arrow[l, bend right, "i_{M''}"'] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

und somit

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (M')_S \arrow[r, tail] & (M' \oplus M'')_S \arrow[l, bend left] \arrow[r, two heads] \arrow[d, equal, "\wr"] & (M'')_S \arrow[l, bend right] \arrow[r] & 0 \\
& & (M')_S \oplus (M'')_S & &
\end{tikzcd}$$

sowie Induktion über n (mit $(A^1)_S = A_S = (A_S)^1$ als Induktionsanfang).

Hier ist also φ Isomorphismus.

> $\boxed{\text{Satz 4.2.3.}}$ Sei A Ring, $S \subsetneq A$ m. a. S., M ein A-Modul v. e. D., N beliebiger A-Modul.
> Dann ist der kanonische Homomorphismus
>
> $$\varphi : (\mathrm{Hom}_A(M,N))_S \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A_S}(M_S,N_S)$$
> $$\frac{f}{t} \longmapsto \frac{1}{t} \cdot f_S$$
>
> ein A_S- und auch A-Modulhomomorphismus.

Als Faustregel: *Bei Modulen M v. e. D. ist* $\mathrm{Hom}_A(M,\square)$ *mit Lokalisierungen vertauschbar.*

Beweis. Sei M also A-Modul v. e. D., etwa via

$$A^m \xrightarrow{f} A^n \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0,$$

$\varphi_M : \mathrm{Hom}_A(M,N)_S \to \mathrm{Hom}_{A_S}(M_S,N_S)$ der bekannte kanonische Homomorphismus. Da $\mathrm{Hom}_A(\square,N)$ bekanntermaßen linksexakt (und $\square_S$ sogar exakt) ist, erhalten wir die beiden exakten Folgen:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M,N) \xrightarrow{\varepsilon^*} \mathrm{Hom}_A(A^n,N) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_A(A^m,N)$$

$$0 \longrightarrow (\mathrm{Hom}_A(M,N))_S \xrightarrow{(\varepsilon^*)_S} (\mathrm{Hom}_A(A^n,N))_S \xrightarrow{(f^*)_S} (\mathrm{Hom}_A(A^m,N))_S$$

(Uns interessiert die zweite davon.)

Ebenso ist
$$(A_S)^m = (A^m)_S \xrightarrow{f_S} (A^n)_S = (A_S)^n \overset{\varepsilon_S}{\twoheadrightarrow} M \to 0,$$
exakt, folglich haben wir das Diagramm:
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{A_S}(M_S, N_S) \arrow[r, "(\varepsilon_S)^*"] \arrow[d, "\varphi_M"] & \mathrm{Hom}_{A_S}(A_S^n, N_S) \arrow[r, "(f_S)^*"] \arrow[d, "\varphi_{A^n}"] & \mathrm{Hom}_A(A_S^m, N_S) \arrow[d, "\varphi_{A^m}"] \\
0 \arrow[r] & (\mathrm{Hom}_A(M,N))_S \arrow[r, "(\varepsilon^*)_S"] & (\mathrm{Hom}_A(A^n,N))_S \arrow[r, "(f^*)_S"] & (\mathrm{Hom}_A(A^m,N))_S
\end{tikzcd}$$
Hierbei sind φ_{A^n} und φ_{A^m} nach Beispiel 4.2.5 als Isomorphismen bekannt, und Diagrammjagd ergibt, dass auch φ_M ein Isomorphismus sein muss. □

> Satz 4.2.4. *(Charakterisierung der endlich erzeugten projektiven Moduln nach dem Lokal-Global-Prinzip)*
> Sei A ein Ring, P ein A-Modul. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:
>
> (1) P ist endlich erzeugt und projektiv
>
> (2) P ist v. e. D. und **lokal frei**, d.h. $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ ist $P_\mathfrak{p}$ ein $A_\mathfrak{p}$-freier Modul.
>
> (3) P ist v. e. D. und $\forall \mathfrak{m} \in \mathrm{Specm}(A) : P_\mathfrak{m}$ ist $A_\mathfrak{m}$-frei.

Beweis.

(1) ⇒ (2): Sei also P endlich erzeugt und projektiv, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A$. Dann ist nach Satz 4.2.2 auch P v. e. D., und damit auch $P_\mathfrak{p}$ v. e. D. Weiterhin haben wir (weil P projektiv) die bekannten exakten Folgen
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, shift left] & Q \arrow[l, shift left] \arrow[r, shift left, "i"] & A^n \arrow[l, two heads, shift left, "p"] \arrow[r, two heads, shift left, "\varepsilon"] & P \arrow[l, shift left, "s"] \arrow[r, shift left] & 0, \arrow[l, shift left]
\end{tikzcd}$$
welche sich auf die Lokalisierungsmoduln vererben:
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, shift left] & Q_\mathfrak{p} \arrow[l, shift left] \arrow[r, shift left] & A_\mathfrak{p}^n \arrow[l, two heads, shift left] \arrow[r, two heads, shift left] & P_\mathfrak{p} \arrow[l, shift left] \arrow[r, shift left] & 0, \arrow[l, shift left]
\end{tikzcd}$$
Damit ist auch $P_\mathfrak{p}$ ein $A_\mathfrak{p}$-projektiver Modul.

(2) ⇒ (3): ist klar.

(3) ⇒ (1): Sei P v. e. D. und $P_\mathfrak{m}$ für alle $\mathfrak{m} \in \mathrm{Specm}(A)$ ein $A_\mathfrak{m}$-freier Modul. (Wir wollen zeigen, dass für $M \overset{f}{\twoheadrightarrow} M''$ auch $\mathrm{Hom}_A(P,M) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_A(P,M'')$ surjektiv ist.)

Seien M, M'' zwei Moduln, und betrachten wir die exakte Standardfolge zu f^*
$$\mathrm{Hom}_A(P,M) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_A(P,M'') \to L := \mathrm{coker}(f^*).$$

(Es genügt zu zeigen, dass $L = 0$ ist.) Lokalisieren ergibt:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (\mathrm{Hom}_A(P,M))_{\mathfrak{m}} \arrow[r, "(f^*)_{\mathfrak{m}}"] \arrow[d, "\varphi"] & \left(\mathrm{Hom}_A(P,M'')\right)_{\mathfrak{m}} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi''"] & L_{\mathfrak{m}} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(P_{\mathfrak{m}},M_{\mathfrak{m}}) \arrow[r, "(f_{\mathfrak{m}})^*"] & \mathrm{Hom}_{A_{\mathfrak{m}}}(P_{\mathfrak{m}},M'') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Hierbei sind φ und φ'' bijektiv, da P v. e. D., und $(f_{\mathfrak{m}})^*$ ist surjektiv, da $P_{\mathfrak{m}}$ ja $A_{\mathfrak{m}}$-frei und daher $\mathrm{Hom}_{A_{\mathfrak{m}}}(P_{\mathfrak{m}},\Box)$ rechtsexakt ist. Damit ist $(f^*)_{\mathfrak{m}}$ ebenfalls surjektiv, also $L_{\mathfrak{m}} = (0)$ für alle $\mathfrak{m} \in \mathrm{Specm}(A)$ und nach dem Lokal-Global-Prinzip (Satz 3.1.11) ist damit auch $L = (0)$, also $\mathrm{Hom}_A(P,\Box)$ ebenfalls exakt, also P projektiv.

$\Box$

Die Rangfunktion und die Picard-Gruppe eines Ringes

Sei P endlich erzeugter *projektiver* Modul (d.h. insbesondere für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$: $P_{\mathfrak{p}}$ ist $A_{\mathfrak{p}}$-frei). Ist dann

$$P = \sum_{i=1}^{n} A \cdot x_i$$

eine Darstellung in Erzeugenden, so sind die $P_{\mathfrak{p}}$ darstellbar durch

$$P_{\mathfrak{p}} = \sum_{i=1}^{n} A_{\mathfrak{p}} \cdot \frac{x_i}{1},$$

und wir haben daher $\mathrm{Rg}_{A_{\mathfrak{p}}}(P_{\mathfrak{p}}) \leq n$.

Definition 4.4. *Für einen endlich erzeugten projektiven A-Modul P heißt die Funktion $\mathrm{Rg}_{\Box}(P)$,* $\boxed{\mathrm{Rg}_{\Box}(P)}$

$$\begin{aligned} \mathrm{Rg}_{\Box}(P) : \mathrm{Spec}(A) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ \mathfrak{p} &\longmapsto \mathrm{Rg}_{\mathfrak{p}}(P) := \mathrm{Rg}_{A_{\mathfrak{p}}}(P_{\mathfrak{p}}), \end{aligned}$$

heißt ***Rangfunktion*** *von P und $\mathrm{Rg}_{\mathfrak{p}}(P)$ heißt der $\mathfrak{p}$-Rang von P.*

Wir wollen nun $\mathrm{Rg}_{\Box}(P)$ genauer studieren.

Bemerkung. Ist $P = \sum_{i=1}^{n} A \cdot x_i$ von n Elementen erzeugt, so ist

$$\mathrm{im}\,(\mathrm{Rg}_{\Box}(P)) \subseteq \{0, \cdots, n\},$$

insbesondere also endlich.

Berechnung von $\mathrm{Rg}_{\Box}(P)$

Es ist ja

$$\begin{aligned} \mathrm{Rg}_{\mathfrak{p}}(P) &= \mathrm{Rg}_{A_{\mathfrak{p}}}(P_{\mathfrak{p}}) \\ &= \dim_{A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}} \left(P_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}P_{\mathfrak{p}}\right) \\ &= \dim_{Q(A/\mathfrak{p})} \left(Q(P/\mathfrak{p}P)\right) \end{aligned}$$

Benutzen wir die (nach Satz 4.1.1 existierende) Darstellung $P \cong_A \operatorname{Spalt}_A(B)$ mit $B \in M_A(n,n)$, $B^2 = B$, dann haben wir (reduziert modulo $\mathfrak{p}$) $\overline{B} = \pi(B) = B + \mathfrak{p} \cdot M_A(n,n)$, und

$$\operatorname{Rg}_{\mathfrak{p}}(P) = \dim_{Q(A/\mathfrak{p})}\left(\operatorname{Spalt}_{Q(A/\mathfrak{p})}(\overline{B})\right)$$

Damit folgt für $k \in \{1, \cdots, n\}$ die Äquivalenz

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Rg}_{\mathfrak{p}}(P) \le k \\
&\Leftrightarrow \operatorname{Rg}_{Q(A/\mathfrak{p})}(\overline{B}) \le k \\
&\Leftrightarrow \text{alle } (k+1)\text{-Minoren von } \overline{B} \text{ verschwinden in } A/\mathfrak{p}.
\end{aligned}$$

Und bezeichnen wir mit $\mathfrak{a}_\nu := \operatorname{span}_A\{\nu\text{-Minoren von } B\}$ das durch die Minoren erzeugte Ideal in A, dann

$$\Leftrightarrow \mathfrak{a}_{k+1} \subseteq \mathfrak{p}$$

$\boxed{W_P^{\le k}}$ Nennen wir nun noch

$$W_P^{\le k} := \left\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid \operatorname{Rg}_{\mathfrak{p}}(P) \le k\right\}$$

$\boxed{W_P^{< k}}$ und analog $W_P^{<k}$, $W_P^{>k}$ und $W_P^{\ge k}$, so erhalten wir

$\boxed{W_P^{> k}}$

$\boxed{W_P^{\ge k}}$

$$\begin{aligned}
W_P^{\le k} &= \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}_{k+1}\} \\
&= V(\mathfrak{a}_{k+1}) \subseteq \operatorname{Spec}(A),
\end{aligned}$$

also eine Zariski-abgeschlossene Menge. Ebenso ist $W_P^{<k} = W_P^{\le k-1}$ Zariski-abgeschlossen, und $W_P^{>k-1} = W_P^{\ge k} = D(\mathfrak{a}_k)$ sind als Komplemente Zariski-offen.

Daher haben wir

$$\begin{aligned}
W_p^k &:= \left\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid \operatorname{Rg}_{\mathfrak{p}}(P) = k\right\} \\
&= W_p^{\ge k} \cap W_p^{\le k} \\
&= V(\mathfrak{a}_{k+1}) \cap D(\mathfrak{a}_k).
\end{aligned}$$

Definition 4.5. *Sei X topologischer Raum, $Z \subseteq X$ Teilmenge. Z heißt* ***lokal abgeschlossen*** *in X, falls $Z = A \cap U$ mit $A \in \operatorname{Abg}(X)$ und $U \in \operatorname{Off}(X)$.*

Bemerkung. Offenbar gilt:

$$\begin{aligned}
&Z \subseteq X \text{ ist lokal abgeschlossen in } X \\
&\Leftrightarrow Z \text{ ist offen in } \overline{Z}^X \\
&\Leftrightarrow Z = \operatorname{Int}_X\left(\overline{Z}^X\right)
\end{aligned}$$

FAZIT.

(a) Die Mengen W_P^k sind lokal abgeschlossen in $\operatorname{Spec} A$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Das Spektrum lässt sich zerlegen in lokal abgeschlossene Mengen:

$$\operatorname{Spec}(A) = \dot{\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}} W_P^k = \dot{\bigcup_{0\le k\le n}} W_P^k,$$

mit $W_p^k = \varnothing$ für $k > n$

SATZ 4.2.5. Sei A ein Ring, P endlich erzeugter projektiver A-Modul. Dann ist die Rangfunktion $\mathrm{Rg}_\square(P) : \operatorname{Spec} A \to \mathbb{Z}$

(1) Zariski-stetig und

(2) konstant auf Zusammenhangskomponenten.

Beweis.

(1) Wir wissen, dass für $k \in \mathbb{Z}$ die Menge $W_P^{\ge k} = \left\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Specm}(A) \mid \mathrm{Rg}_\mathfrak{p}(P) \le k\right\}$ (Zariski-)abgeschlossen ist. Dabei ist

$$\begin{aligned}\mathrm{Rg}_\mathfrak{p} P \le k &\Leftrightarrow \mathrm{Rg}_{Q(A/\mathfrak{p})}(\overline{B}) \le k\\ &\Leftrightarrow \mathfrak{p} \in V(\text{Ideal der } (k+1)\text{-Minoren von } B),\end{aligned}$$

wobei wir wieder $P \cong \mathrm{Spalt}_A(B)$ mit $B \in M_A(n,n)$ und $B^2 = B$ annehmen (entsprechend Satz 4.1.1). Dabei haben wir aber auch

$$A^n = \mathrm{Spalt}_A(B) \oplus \mathrm{Spalt}_A(I_n - B).$$

(Es ist ebenfalls $(I_n - B)^2 = I_n - B$.) Das heißt, wir haben die Äquivalenz

$$\mathrm{Rg}_\mathfrak{p}(P) \le k \iff \underbrace{\mathrm{Rg}_{Q(A/\mathfrak{p})}(\overline{B}) \le k}_{\text{abgeschlossene Bedingung}} \iff \underbrace{\mathrm{Rg}_{Q(A/\mathfrak{p})}(I_n - \overline{B}) \ge n-k}_{\text{offene Bedingung}},$$

das heißt $W_P^{\le k}$ ist offen und abgeschlossen. Als Komplemente sowie Schnitte und Vereinigungen davon (für entsprechende k) gilt dies entsprechend auch für $W_P^{<k}$, $W_P^{\ge k}$, $W_P^{>k}$ und W_P^k. Wegen $W_P^k = (\mathrm{Rg}_\square(P))^{-1}(k)$ (und weil $\bigcup$ mit $\square^{-1}$ vertauschbar ist) sind alle Urbilder offener Mengen in $\mathbb{Z}$ auch offen in $\operatorname{Spec}(A)$, also ist $\mathrm{Rg}_\square(P)$ stetig.

(2) Das Bild einer zusammenhängenden Menge unter einer stetigen Funktion ist (ganz allgemein für topologische Räume) wieder zusammenhängend. Da die Zusammenhangskomponenten in $\mathbb{Z}$ gerade die einzelnen Punkte sind, bleibt stetigen Funktionen nach $\mathbb{Z}$ nichts anderes übrig, als auf Zusammenhangskomponenten konstant zu sein.

Mit (1) erhalten wir, dass auch $\mathrm{Rg}_\square(P) : \mathrm{Spec}(A) \to \mathbb{Z}$ konstant auf Zusammenhangskomponenten ist. □

Definition 4.6. *Sei P ein endlich erzeugter projektiver A-Modul,* $\mathrm{Rg}_\square(P) : \mathrm{Spec}(A) \to \mathbb{Z}$ *die Rangfunktion von P.*

P heißt Modul ***von konstantem Rang*** *k (oder auch* ***von globalem Rang****), falls* $\mathrm{Rg}_\square(P) = \mathrm{const}_k$ *ist, bzw.* $P_\mathfrak{p} \cong A_\mathfrak{p}^k$ *für alle* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$.

KOROLLAR. Sei P endlich erzeugter projektiver A-Modul, $k \in \mathbb{N}_0$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) P ist von konstantem Rang k

(2) $P_\mathfrak{m} \cong A_\mathfrak{m}^k \forall \mathfrak{m} \in \mathrm{Specm}(A)$

(3) $\forall \mathfrak{m} \in \mathrm{Specm}(A) : \exists f \in A \setminus \mathfrak{m} : P_\mathfrak{f} \cong A_f^k$

Beweis.

(1) ⇒ (2): Klar.

(2) ⇒ (1): Ist $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A$, so gibt es ein $\mathfrak{m} \in \mathrm{Specm}(A)$ mit $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}$. Damit haben wir

$$P_\mathfrak{p} \cong (P_\mathfrak{m})_{\mathfrak{p}\cdot A_\mathfrak{m}} \cong (A_\mathfrak{m}^k)_{\mathfrak{p}\cdot A_\mathfrak{m}},$$

also $\mathrm{Rg}_\mathfrak{p}(P) = k$.

(2) ⇒ (3): *fehlt noch, ist aus dem (nicht abgeschriebenen) Beweis für den letzten Satz zu entnehmen.*

(3) ⇒ (2): Wieder durch Transitivität der Lokalisierung.

□

$\boxed{\widetilde{\mathrm{Pic}}(A)}$

Definition 4.7. *Die Menge*

$$\widetilde{\mathrm{Pic}}(A) := \left\{P \mid P \text{ endl. erzeugter projektiver } A\text{-Modul}, \mathrm{Rg}_\mathfrak{p}(P) \equiv 1\right\}$$

heißt die Picard-Menge[1] *des Ringes A.*

Bemerkung. Es ist $\widetilde{\mathrm{Pic}}(A) \neq \varnothing$, weil $A \in \widetilde{\mathrm{Pic}}(A)$.

[1] nach Charles Émile Picard, 1856-1941, französischer Mathematiker

$\boxed{\text{BEMERKUNG 1.}}$ Seien $P, Q \in \widetilde{\mathrm{Pic}}(A)$ (das heißt, endlich erzeugte projektive Moduln vom konstanten Rang 1). Dann ist $P \otimes_A Q$ wieder projektiv, endlich erzeugt und von konstantem Rang 1.

Beweis. Wir haben ja die üblichen Splits $A^n \underset{s}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} P$ und $A^m \underset{j}{\overset{p}{\rightleftarrows}} Q$. Es ergibt sich

$$A^{n\cdot m} \cong A^n \otimes_A A^m \underset{s\otimes j}{\overset{\pi\otimes p}{\rightleftarrows}} P \otimes_A Q,$$

was auch ein Split ist. Daher ist $P \otimes_A Q$ wieder projektiv, und zwar direkter Summand von $A^{n\cdot m}$. Weiterhin ist für alle $\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} A$

$$\begin{aligned}(P \otimes_A Q)_{\mathfrak{m}} &\cong P_{\mathfrak{m}} \otimes_{A_{\mathfrak{m}}} Q_{\mathfrak{m}} \\ &\cong A_{\mathfrak{m}} \otimes_{A_{\mathfrak{m}}} A_{\mathfrak{m}} \\ &\cong A_{\mathfrak{m}}\end{aligned}$$

□

Definition 4.8. $\boxed{\mathrm{Pic}(A)}$

$$\begin{aligned}\mathrm{Pic}(A) &:= \widetilde{\mathrm{Pic}}(A)/_{\cong_A} \\ &= mengemid[P]P \textit{ proj. Modul, endl. erz.}, \mathrm{Rg}_{\Box}(P) \equiv 1 \\ &\textit{mit } [P] = \{Q \mid P \cong_A Q\}\end{aligned}$$

Ziel. Zeige, dass $(\mathrm{Pic}(A), \hat{\otimes})$ mit $[P] \mathbin{\hat{\otimes}} [Q] := [P \otimes_A Q]$ eine abelsche Gruppe ist, mit neutralem Element $[A]$ und Inversen $[P]^{-1} = [P^*] = [\mathrm{Hom}_A(P, A)]$, und wir sogar einen kovarianten Funktor haben:

$$\begin{aligned}\mathrm{Pic} : \underline{\mathrm{Rings}} &\longrightarrow \underline{\mathrm{Ab}} \\ A &\longmapsto (\mathrm{Pic}(A), \hat{\otimes}) \\ (A \xrightarrow{f} B) &\longmapsto \big(\mathrm{Pic}(A) \xrightarrow{\mathrm{Pic}(f)} \mathrm{Pic}(B) \quad \big) \\ &\qquad\quad [P] \longmapsto [P \otimes_{A,f} B]\end{aligned}$$

Definition 4.9. $(\mathrm{Pic}(A), \hat{\otimes})$ *heißt die **Picard-Gruppe** des Rings A.*

Zur Konstruktion der Picard-Gruppe (und auch sonst) sind die folgenden Tensoridentitäten nützlich.

$\boxed{\text{Satz 4.2.6.}}$ *(Nützliche Tensoridentitäten)*
Sei A ein Ring, M und N etc. A-Moduln.

(1) $M \otimes_A N \cong_A N \otimes_A M$.

(2) Aber: Ist $(x, y) \in M^2$, so ist i.a. $x \otimes y \neq y \otimes x$.

(3) *Assoziativität:* Seien M_1, M_2, M_3 alles A-Moduln. Dann haben wir die kanonischen Isomorphien

$$M_1 \otimes_A (M_2 \otimes_A M_3) \cong (M_1 \otimes_A M_2) \otimes_A M_3 \cong M_1 \otimes_A M_2 \otimes_A M_3.$$

(4) $A \otimes_A M \cong_A M$

(5) *Lokalisierung als Tensorprodukt:* Sei $S \subseteq A$ m. a. S. Dann ist

$$M \otimes A_S \cong_A M_S.$$

(6) *Faktormoduln als Tensorprodukte:* Sei $\mathfrak{a} \subsetneq A$ Ideal, ${}^{A}\!/_{\mathfrak{a}}$ der Faktorring. Dann ist

$$M \otimes_A {}^{A}\!/_{\mathfrak{a}} \cong {}^{M}\!/_{\mathfrak{a}}$$

(7) Sei $\varphi : A \to B$ Ringhomomorphismus (und dadurch B eine A-Algebra via φ), M ein A-Modul, N ein B-Modul (und via φ auch A-Modul). Dann ist

$$(M \otimes_{A,f} B) \otimes_B N \;\cong_{A,B}\; (M \otimes_A N) \otimes_{A,f} B \;\cong_{A,B}\; M \otimes_A N$$

(8) *Lokalisieren von Tensormoduln:* Ist $S \subseteq A$ m. a. S., so ist

$$M_S \otimes_{A_S} N_S \cong_{A,A_S} (M \otimes_A N)_S$$

(9) Sei P ein endlich erzeugter projektiver A-Modul. Dann

$$P^* \otimes_A M^* \cong_A (P \otimes_A M)^*.$$

(10) *Dualisieren von* Hom*:* Sei P endlich erzeugter projektiver A-Modul. Dann gibt es die kanonische Isomorphie

$$\mathrm{Hom}_A(P^*, M^*) \cong_A \mathrm{Hom}_A(P, M)^*$$

(11) Sei $\varphi : A \to B$ Ringhomomorphismus, B dadurch A-Algebra, $\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}(B)$, $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}_{\mathrm{cont}}$. Dann gilt:

$$(M \otimes_{A,\varphi} B)_{\mathfrak{P}} \;\cong\; M_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} B_{\mathfrak{P}}$$

Beweise und -ideen.

(1) Wir haben durch die Universaleigenschaft ja die beiden Diagramme mit den universellen Abbildungen, hier in einem kommutativen Diagramm dargestellt:

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "\overset{\leftrightarrow}{\otimes}"] \arrow[d, "\otimes"'] \arrow[ddr, bend right=60, "\overset{\leftrightarrow}{\square}"'] & N \otimes_A M \arrow[d, equal] \\
M \otimes_A N \arrow[ur, dotted, "\exists!\varphi"] \arrow[d, equal] & N \otimes_A M \arrow[dl, dotted, "\exists!\phi"] \\
M \otimes_A N & N \times M \arrow[l, "\overset{\leftrightarrow}{\otimes}"] \arrow[u, "\otimes"']
\end{tikzcd}$$

Es ergibt sich (wegen $\overset{\leftrightarrow}{\otimes} = \otimes \circ \varphi$ und $\overset{\leftrightarrow}{\square} \circ \otimes = \overset{\leftrightarrow}{\otimes} = \otimes \circ \phi$ und der kanonischen Isomorphie von $\overset{\leftrightarrow}{\square}$), dass φ und ϕ zueinander inverse Isomorphismen sind.

(2) Betrachten wir als (einfaches) Beispiel $A = K$ einen Körper, $M = V$ einen K-Vektorraum mit $\dim_K(V) = n \geq 2$, $\{a_1, \cdots, a_n\}$ eine K-Basis von V. Dann ist

$$\begin{aligned} x \otimes y &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot a_i\right) \otimes \left(\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot a_i\right) \\ &= \sum_{i,j} x_i \cdot y_j \cdot (a_i \otimes a_j) \end{aligned}$$

und ebenso

$$y \otimes x = \sum_{i,j} y_i \cdot x_j \cdot (a_i \otimes a_j)$$

Das heißt, wenn $x \otimes y = y \otimes x$ ist, ist $x = 0$ oder $y = 0$ oder $x_i \cdot y_i = x_j \cdot y_i$ für alle i, j. Im letzteren Fall erhält man (durch Division durch eine Koordinate $\neq 0$) $x_i = \frac{x_k}{y_k} \cdot y_i$ für alle i, d.h. $x = \lambda \cdot y$ mit $\lambda \in K^*$.

Bei $\dim_K(V) \geq 2$ lassen sich aber x, y finden, für die das nicht der Fall ist, es ist also $\varphi \neq \mathrm{id}$ (mit φ der Abbildung aus (1)).

(3) Für $x_1 \in M_1$ ist

$$\begin{aligned} \theta_{x_1} : M_2 \times M_3 &\longrightarrow M_1 \otimes M_2 \otimes M_3 \\ (x_2, x_3) &\mapsto x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 \end{aligned}$$

A-bilinear, und daher haben wir (nach der Universaleigenschaft des Tensorproduktes) ein A-lineares

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{x_1} : M_2 \otimes_A M_3 &\longrightarrow M_1 \otimes M_2 \otimes M_3 \\ x_2 \otimes x_3 &\longmapsto x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 \end{aligned}$$

Wir erhalten daraus eine A-bilineare Abbildung

$$\begin{aligned}\hat{\theta} : M_1 \times (M_2 \times M_3) &\longrightarrow M_1 \otimes M_2 \otimes M_3\\ (x_1, t) &\mapsto \theta_{x_1}(t)\end{aligned}$$

und die Universaleigenschaft des Tensorproduktes liefert uns

$$M_1 \otimes (M_2 \otimes M_3) \longrightarrow M_1 \otimes M_2 \otimes M_3,$$

welches A-linear ist, und sich als bijektiv herausstellt. (Andere Richtungen analog.)

(4) Die kanonische Isomorphie ist die die Skalarmultiplikation über $\otimes$ faktorisierende Abbildung:

$$\begin{tikzcd}
(a,x) \arrow[rrrr, mapsto] \arrow[dddrr, mapsto] & & & & a\cdot x \\
& A\times M \arrow[rr, "\cdot"] \arrow[dr, "\otimes"'] & & M & \\
& & A\otimes_A M \arrow[ur, dotted, "\theta"'] & & \\
& & a\otimes x \arrow[uuurr, mapsto] & &
\end{tikzcd}$$

(5)

$$\begin{aligned}M \otimes A_S &\cong_A M_S\\ x \otimes \frac{a}{s} &\mapsto \frac{a\cdot x}{s}\\ x \otimes \frac{1}{s} &\leftarrow\!\shortmid \frac{x}{s}\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}M \otimes_A {}^{A}\!/\!_{\mathfrak{a}} &\cong {}^{M}\!/\!_{\mathfrak{a}}\\ x \otimes [a]_{\mathfrak{a}} &\mapsto [a\cdot x]_{\mathfrak{a}M}\\ y \otimes [1]_{\mathfrak{a}} &\leftarrow\!\shortmid [y]_{\mathfrak{a}M}\end{aligned}$$

(7) Für $y \in N$ ist ja

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_y : M \times B &\longrightarrow (M \otimes_A N) \otimes_A B\\ (x, b) &\longmapsto (x \otimes y) \otimes b\end{aligned}$$

Die Universaleigenschaft liefert uns für jedes $y \in N$ ein entsprechendes

$$\theta_y : M \otimes_A B \longrightarrow (M \otimes_A N) \otimes_A B$$

und damit:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta} : (M \times_A B) \times N &\longrightarrow (M \otimes_A N) \otimes_A B \\ (t, y) &\longmapsto \theta_y(t) \end{aligned}$$

Nochmal die Universaleigenschaft ...

$$\begin{aligned} \theta : (M \otimes_A B) \otimes_B N &\longrightarrow (M \otimes_A N) \otimes_A B \\ (x \otimes b) \otimes y &\longmapsto (x \otimes y) \otimes b \end{aligned}$$

Die anderen Richtungen gehen analog.

(8)

$$\begin{aligned} M_S \otimes_{A_S} N_S &\underset{(5)}{\cong} M_S \otimes_{A_S} (M \otimes_A A_S) \\ &\underset{(1)}{\cong} M_S \otimes_{A_S} (A_S \otimes N) \\ &\underset{(7)}{\cong} M_S \otimes_A N \\ &\underset{(5)}{\cong} (A_S \otimes_A M) \otimes_A N \\ &\underset{(3)}{\cong} A_S \otimes_A (M \otimes_A N) \\ &\underset{(5)}{\cong} (M \otimes_A N)_S \end{aligned}$$

(9) Wir haben für endlich erzeugte projektive Moduln P den Isomorphismus[2]:

$$\begin{aligned} (P^* \otimes_A M^*) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(P, M^*) \\ f \otimes g &\mapsto \big(h_{f \otimes g} : \ P \to M^* = \mathrm{Hom}_A(M, A)\big). \\ &\qquad\qquad x \mapsto (y \mapsto f(x) \cdot g(y)) \end{aligned}$$

Die rechte Seite ist (generell) kanonisch isomorph zu

$$\begin{aligned} &\cong \mathrm{Hom}_A(P \otimes_A M, A) \\ &= (P \otimes_A M)^*. \end{aligned}$$

[2]siehe Übung vom 31.1.

(10)

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_A(P^*, M^*) &\cong \operatorname{Hom}_A(P^* \otimes M, A)\\ &= (P^* \otimes_A M)^*\\ &\cong \operatorname{Hom}_A(P, M)^*\end{aligned}$$

(11)

$$\begin{aligned}(M \otimes_A B)_{\mathfrak{P}} &\cong (M \otimes_A B) \otimes_B B_{\mathfrak{P}}\\ &\cong M \otimes_A B_{\mathfrak{P}}\\ &\cong (M \otimes_A A_{\mathfrak{p}}) \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} B_{\mathfrak{P}}\end{aligned}$$

□

Punkt (11) führt im Spezialfall $P \in \widetilde{\operatorname{Pic}}(A)$ (d.h. P endlich erzeugt, projektiv, $\operatorname{Rg}_{\mathfrak{p}} P \equiv 1$) zu:

$$\begin{aligned}(P \otimes_{A,f} B)_{\mathfrak{P}} &\cong P_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}},f} B_{\mathfrak{P}}\\ &\cong A_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}},f} B_{\mathfrak{P}}\\ &\cong B_{\mathfrak{P}},\end{aligned}$$

es ist also $P \otimes_A B \in \widetilde{\operatorname{Pic}}(B)$.

Fazit. Ist $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus, damit B eine A-Algebra, so induziert φ eine Abbildung

$$\begin{aligned}\widetilde{\operatorname{Pic}}(\varphi) : \widetilde{\operatorname{Pic}}(A) &\longrightarrow \widetilde{\operatorname{Pic}}(B)\\ P &\longmapsto P \otimes_{A,\varphi} B,\end{aligned}$$

welche Isomorphis-invariant ist, also auch eine Abbildung

$$\begin{aligned}\operatorname{Pic}(\varphi) : \operatorname{Pic}(A) &\longrightarrow \operatorname{Pic}(B)\\ [P] &\longmapsto [P \otimes_{A,\varphi} B]\end{aligned}$$

induziert.

Für unser Ziel bleibt zu zeigen, dass $\operatorname{Pic}(A)$ eine natürliche Gruppenstruktur hat, und $\operatorname{Pic}(\varphi)$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

$\boxed{\text{Satz 4.2.7.}}$ *(Charakterisierung der endlich erzeugten projektiven Moduln von konstantem Rang* 1*, also von* $\widetilde{\mathrm{Pic}}(A)$ *bzw.* $\mathrm{Pic}(A)$*.)*

Sei M ein A-Modul von endlicher Darstellung. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) Der kanonische A-Modul-Homomorphismus

$$\begin{aligned} M \otimes_A M^* &\xrightarrow{\delta} A \\ x \otimes f &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus.

(2) Es existiert ein A-Modul N mit $M \otimes_A N \cong A$.

(3) $M \in \widetilde{\mathrm{Pic}}(A)$, d.h. M ist projektiv und $\forall \mathfrak{m} \in \mathrm{Specm}(A)$ ist $M_\mathfrak{a} \cong A_\mathfrak{m}$.

Beweis.

(1) ⇒ (2): Ist klar mit $N := M^*$.

(2) ⇒ (3): Sei also $M \otimes_A N \cong A$, $\mathfrak{m} \in \mathrm{Specm}\, A$. Dann ist natürlich auch $M_\mathfrak{m} \otimes_{A_\mathfrak{m}} N_\mathfrak{m} \cong A_\mathfrak{m}$, wobei $(A_\mathfrak{m}, \mathfrak{m}A_\mathfrak{m})$ lokaler Ring ist.

Bezeichne $A' := A_\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}' := \mathfrak{m} \cdot A' = \mathfrak{m}_{\mathrm{ext}}$, $M' := M_\mathfrak{m} = M \otimes A'$, $N' := N_\mathfrak{m} = N \otimes A'$.

Dann ist ${A'}/{\mathfrak{m}'}$ ein Körper, und

$$\begin{aligned} {M'}/{\mathfrak{m}'} \otimes_{{A'}/{\mathfrak{m}'}} {N'}/{\mathfrak{m}'N'} &\cong \left(M' \otimes_{A'} {A'}/{\mathfrak{m}'}\right) \otimes_{{A'}/{\mathfrak{m}'}} {N'}/{\mathfrak{m}'} \\ &\cong M' \otimes_{A'} {N'}/{\mathfrak{m}'N'} \\ &\cong M' \otimes_{A'} \left(N' \otimes_{A'} {A'}/{\mathfrak{m}'}\right) \\ &\cong \left(M' \otimes_{A'} N'\right) \otimes_{A'} {A'}/{\mathfrak{m}'} \\ &\cong A' \otimes_{A'} {A'}/{\mathfrak{m}'} \\ &\cong {A'}/{\mathfrak{m}'}, \end{aligned}$$

das heißt, es ist $\dim_{\left({A'}/{\mathfrak{m}'}\right)} \left({M'}/{\mathfrak{m}'M'}\right) = 1$, also ist ${M'}/{\mathfrak{m}'M'}$ von einem Element erzeugt:

$$\begin{aligned} & {M'}/{\mathfrak{m}M'} = {A'}/{\mathfrak{m}'} \cdot \overline{x}, \qquad \text{mit } x \in M', \overline{x} \in {M'}/{\mathfrak{m}'M'} \\ \Rightarrow \quad & \forall y \in M' : \quad \overline{y} = \overline{a \cdot x} \\ & \qquad \Rightarrow \quad M' = A' \cdot x + \mathfrak{m}' \cdot M' \end{aligned}$$

Nach einem Korollar aus Satz 1.1.5 (Seite 34) (genauer: *Nakayama-Lemma für lokale Ringe*, (2)) ist dann schon

$$M' = A' \cdot x.$$

Betrachten wir nun die durch x induzierte Folge

$$0 \to \mathrm{Ann}_{A'}(x) \hookrightarrow \begin{array}{c} A' \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow M' \\ 1 \longmapsto x \end{array} \to 0,$$

so ist $M' \cong {A'}/{\mathrm{Ann}_{A'}(x)}$ und $\mathrm{Ann}_{A'}(x) \cdot M' = (0)$. Damit ist auch $\mathrm{Ann}_{A'}(x) \cdot (M' \otimes N') = (0)$, also $\mathrm{Ann}_{A'}(x) = (0)$, d.h. $M' \cong A'$. Wir haben damit gezeigt, dass $M_{\mathfrak{m}} \cong A_{\mathfrak{m}}$ ist, für alle $\mathfrak{m} \in \mathrm{Specm}(A)$, womit $M \in \widetilde{\mathrm{Pic}}(A)$ ist.

(3) $\Rightarrow$ (1): Sei $P \in \widetilde{\mathrm{Pic}}(A)$, d.h. projektiv, endlich erzeugt mit $P_{\mathfrak{m}} \cong A_{\mathfrak{m}}$ für alle $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}(A)$, und $\delta_P : P \otimes P^* \to A$ der kanonische Isomorphismus. Dann haben wir für $\mathfrak{m} \in \mathrm{Specm}\, A$ die induzierte Lokalisierung:

$$\begin{tikzcd}
(P \otimes P^*)_{\mathfrak{m}} \arrow[r, "(\delta_P)_{\mathfrak{m}}"] \arrow[d, equal, "\wr"] & A_{\mathfrak{m}} \arrow[d, equal] \\
P_{\mathfrak{m}} \otimes_{A_{\mathfrak{m}}} P^*_{\mathfrak{m}} \arrow[r, "\delta_{P_{\mathfrak{m}}}"] \arrow[d, equal, "\wr"] & A_{\mathfrak{m}} \\
A_{\mathfrak{m}} \otimes_{A_{\mathfrak{m}}} A_{\mathfrak{m}} \arrow[ur, equal, "\sim"] &
\end{tikzcd}$$

Aufgrund der Kommuatativität des Diagrammes aus kanonischen Homomorphismen sind $\delta_{P_{\mathfrak{m}}}$ und damit auch $(\delta_P)_{\mathfrak{m}}$ Isomorphismen, und nach dem Lokal-Global-Prinzip daher auch δ. □

$\boxed{\text{Satz 4.2.8.}}$ *(Über den Picard-Funktor)*

(1) Sei A ein Ring, $\mathrm{Pic}(A) = {\widetilde{\mathrm{Pic}}(A)}/{\cong}$. Dann induziert $\otimes_A$ auf $\mathrm{Pic}(A)$ eine (abelsche) Gruppenstruktur.

(2) $\mathrm{Pic}(A) : \underline{\text{Rings}} \to \underline{\text{Ab}}$ ist ein kovarianter Funktor.

Beweis.

(1) Sind $(P, Q, P', Q') \in \left(\widetilde{\mathrm{Pic}}(A)\right)^4$, so gilt:

- Ist $P \xrightarrow[f]{\sim} P'$ und $Q \xrightarrow[g]{\sim} Q'$, so auch

$$P \otimes_A Q \underset{f^{-1} \otimes g^{-1}}{\overset{f \otimes g}{\rightleftarrows}} P' \otimes_A Q',$$

das heißt, es ist $[P \otimes_A Q] = [P' \otimes_A Q']$.

- $P \otimes_A Q$ ist wieder projektiv, und es ist

$$\begin{aligned}(P \otimes_A Q)_{\mathfrak{p}} &\cong P_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} Q_{\mathfrak{p}} \\ &\cong A_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} A_{\mathfrak{p}} \\ &\cong A_{\mathfrak{p}},\end{aligned}$$

  es ist also wirklich $P \otimes_A Q \in \widetilde{\mathrm{Pic}}(A)$ und $[P \otimes_A Q] \in \mathrm{Pic}(A)$.
- Damit ist die Abbildung

$$\begin{aligned}\hat{\otimes} : \mathrm{Pic}(A) \times \mathrm{Pic}(A) &\longrightarrow \mathrm{Pic}(A) \\ ([P],[Q]) &\longmapsto [P \otimes_A Q] =: [P] \,\hat{\otimes}\, [Q]\end{aligned}$$

  wohldefiniert, assoziativ, und hat wegen $[P] \,\hat{\otimes}\, [A] = [P \otimes_A A] = [P]$ (und umgekehrt) auch das neutrale Element $[A]$. Damit ist $(\mathrm{Pic}(A), \hat{\otimes})$ ein Monoid.
- Mit $P \in \widetilde{\mathrm{Pic}}(A)$ haben wir das Diagramm:

$$\begin{tikzcd} P \otimes P^* \arrow[r, "\delta_P", "\sim"'] \arrow[d, "\varkappa_P \otimes \mathrm{id}_{P^*}"', "\wr"] & A \\ P^{**} \otimes P^* \arrow[r, equal, "\sim"] & P^* \otimes P^* * \arrow[u, "\delta_{P^*}"] \end{tikzcd}$$

  Hierbei ist δ_P nach Satz 4.2.7 ein Isomorphismus, $\varkappa_P$ einer (nach dem Lokal-Global-Prinzip, weil P und P^{**} beide konstanten Rang 1 haben), und damit ist auch δ_{P^*} ein Isomorphismus, also $P^* \in \widetilde{\mathrm{Pic}}(A)$.
  Weiterhin ist $[P] \hat{\otimes} [P^*] = [P \otimes_A P^*] = [A]$, es ist also $[P]$ in $\mathrm{Pic}(A)$ invertierbar, $[P]^{-1} = [P^*]$.
- $[P] \,\hat{\otimes}\, [Q] = [P \otimes Q] = [Q \otimes P] = [Q] \,\hat{\otimes}\, [P]$, es ist also $\mathrm{Pic}(A)$ eine abelsche Gruppe.

(2) • Sei $f : A \to B$ ein Ringhomomorphismus. Dann haben ist

$$\mathrm{Pic}(f) : \mathrm{Pic}(A) \longrightarrow \mathrm{Pic}(B)$$

durch

$$\mathrm{Pic}(f)([P]) := [P \otimes_{A,f} B]$$

wohldefiniert (nach Eigenschaft 11 aus Satz 4.2.6) und

$$\begin{aligned}\mathrm{Pic}(f)([P] \,\hat{\otimes}_A\, [Q]) &= \mathrm{Pic}(f)([P \otimes_A Q]) \\ &= [(P \otimes_A Q) \otimes_{A,f} B] \\ &= [(P \otimes_A (Q \otimes_{A,f} B)] \\ &= [(P \otimes_{A,f} B) \otimes_B (Q \otimes_{A,f} B)] \\ &= [P \otimes_{A,f} B] \,\hat{\otimes}_B\, [Q \otimes_{A,f} B] \\ &= \mathrm{Pic}(f)([P]) \,\hat{\otimes}_B\, \mathrm{Pic}(f)([Q]).\end{aligned}$$

- Für $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g}$ und $P \in \mathrm{Pic}(A)$ ist
$$\begin{aligned}\mathrm{Pic}(g)\,(\mathrm{Pic}(f)([P])) &= \mathrm{Pic}(g)\,([P \otimes_{A,f} B]) \\ &= [(P \otimes_{A,f} B) \otimes_{B,g} C] \\ &= [P \otimes_{A,g\circ f} C] \\ &= \mathrm{Pic}(g \circ f)([P]),\end{aligned}$$
wir haben also $\mathrm{Pic}(g \circ f) = \mathrm{Pic}(g) \circ \mathrm{Pic}(f)$.
- $\mathrm{Pic}(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{\mathrm{Pic}(A)}$. □

Beispiel 4.2.6.

(1) $\mathrm{Pic}(\mathbb{Z}) = \{[\mathbb{Z}]\} \cong (0)$.

(2) $\mathrm{Pic}(A) = \{[A]\} \cong (0)$ für alle Hauptidealringe.

(3) Ist $(A, \mathfrak{m})$ lokaler Ring, dann ist $\mathrm{Pic}(A) = \{[A]\}$.

$\boxed{H(A)}$

(4) Ein Integritätsbereich heißt **Dedekindring**, falls für alle Ideale $\mathfrak{a} \subseteq A$ gilt: $\mathfrak{a}$ ist A-projektiv. In so einem Fall heißt $\mathrm{Pic}(A) =: H(A)$ auch die **Divisorenklassengruppe** von A (bzw. von $Q(A)$).

4.3 Injektive Moduln

Als Analogon zu den charakterisierenden Eigenschaften der projektiven Moduln erhält man folgende Äquivalenz:

$\boxed{\text{Bemerkung 1.}}$ Sei A ein Ring, E ein A-Modul. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) $\mathrm{Hom}_A(\Box, E) : \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_A$ ist *exakter* (kontravarianter) Funktor.

(2) $\mathrm{Hom}_A(\Box, E) : \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_A$ ist rechtsexakt, d.h. für jedes $\theta : M' \hookrightarrow M$ und $f : M' \to E$ gibt es genau ein $\hat{f} : M \to E$ mit $f = \hat{f} \circ \theta$:

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, tail, "\theta"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[dl, dotted, "\exists!\hat{f}"] \\ E & \end{tikzcd}$$

(3) Jede exakte Folge der Form

$$0 \to E \xhookrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$$

splittet, d.h. es existieren Abbildungen

$$0 \leftarrow E \xleftarrow{p} M \xhookleftarrow{s} M'' \leftarrow 0$$

mit $g \circ s = \mathrm{id}\, M''$ und $p \circ f = \mathrm{id}_E$.

Definition 4.10. *E heißt **injektiver Modul**, wenn E diese äquivalenten Eigenschaften besitzt.*

$\boxed{\text{Satz 4.3.1.}}$ *(Das Injektivitätskriterium von Reinhold Baer)*
Sei A ein Ring, E ein A-Modul. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) E ist injektiver A-Modul.

(2) Für alle Ideale $\mathfrak{a} \subseteq A$ und $f \in \mathrm{Hom}_A(\mathfrak{a}, E)$ existiert ein $\hat{f} \in \mathrm{Hom}_A(A, E)$ mit $\hat{f}|_{\mathfrak{a}} = f$.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{a} \arrow[r, tail, "\subseteq"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[dl, dotted, "\exists!\hat{f}"] \\ E & \end{tikzcd}$$

(3) Für alle Ideale $\mathfrak{a} \subseteq A$ und $f \in \mathrm{Hom}_A(\mathfrak{a}, E)$ existiert ein $x \in E$, so dass $\forall a \in \mathfrak{a} : f(a) = a \cdot x$.

Beweis.

(1) $\Rightarrow$ (2): Klar, $\mathfrak{a} \xrightarrow{\subseteq} A$ ist A-Modulmonomorphismus.

(2) $\Leftrightarrow$ (3): Klar, mit der Isomorphie

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_A(A, M) &\xrightarrow{\sim} M \\ \varphi &\longmapsto \varphi(1) \\ (r \mapsto r \cdot x) &\longleftarrow\!\shortmid\; x \end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$ (1): Sei also (2) gegeben, $M' \subseteq M$ Inklusionspaar von A-Moduln, $f \in \mathrm{Hom}_A(M', E)$.

Betrachte die Menge $\mathfrak{M}$ aller Fortsetzungen von f auf Zwischenmoduln:

$$\mathfrak{M} := \left\{ (N, \varphi) \mid M' \subseteq N \subseteq M, \varphi|_{M'} = f. \right\}.$$

Es ist $\mathfrak{M} \neq \varnothing$, weil $(M', f) \in \mathfrak{M}$. Eine Teilordnung auf $\mathfrak{M}$ wird gegeben durch

$$(N, \varphi) \preccurlyeq (N', \varphi') :\Leftrightarrow N \subseteq N' \wedge \varphi'|_N = \varphi.$$

Ist nun $(\mathfrak{N}, \preccurlyeq) \subseteq (\mathfrak{M}, \preccurlyeq)$ totalgeordnete Teilmenge, so haben wir $\tilde{N} := \bigcup_{(N,\varphi) \in \mathfrak{N}} N$ wieder ein Zwischenmodul, und

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : \tilde{N} &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto \varphi(x) \text{ mit } (N, \varphi) \in \mathfrak{N}, x \in N. \end{aligned}$$

Es ist $\tilde{\varphi}|_N = \varphi$ für alle $(N, \varphi) \in \mathfrak{N}$, und damit ist $\tilde{\varphi}$ auch eine Fortsetzung von f, also $(\tilde{N}, \tilde{\varphi}) \in \mathfrak{M}$.

Das heißt, $(\mathfrak{M}, \preccurlyeq)$ ist sogar induktiv geordnet, und nach dem Zornschen Lemma existiert also eine maximales Element in $\mathfrak{M}$, d.h. eine maximale Fortsetzung von f: (N_*, φ_*):

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, tail, "\subseteq"] \arrow[d, "f"'] & N \arrow[r, tail, "\subseteq"] \arrow[dl, "\varphi"] & M \\ E & & \end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{Behauptung.}}$ $N_* = M$.

Beweis. Angenommen, dem wäre nicht so, also $N_* \subsetneq M$, d.h. $\exists x \in M \setminus N_*$. Dann betrachten wir das Ideal $\mathfrak{a} := \{a \in A \mid a \cdot x \in N_*\}$ und den Homomorphismus $g : \mathfrak{a} \to E$ mit $g(a) := \varphi_*(a \cdot x)$. Nach (2) besitzt g eine Fortsetzung $\hat{g} : A \to E$, was uns insgesamt dieses Diagramm liefert:

$$\begin{tikzcd} N_* \arrow[dr, "\varphi_*"] & \mathfrak{a} \arrow[l, "\square \cdot x"'] \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d, "g"] & A \arrow[dl, "\hat{g}"] \\ N \arrow[u, "\cup\!\shortmid"] \arrow[r, "f"'] & E & \end{tikzcd}$$

Nun betrachten wir den Modul $N_{**} := N_* + A \cdot x$, offenbar ein Zwischenmodul: $N_* \subsetneqq N_* + A \cdot x \subseteq M$. Wir definieren

$$\varphi_{**} : N_{**} = N_* + Ax \longrightarrow E$$

durch

$$z + r \cdot x \longmapsto \varphi_*(z) + \hat{g}(r)$$

Dies ist wohldefiniert, denn für $z + rx = z' + r'x \in N_{**}$ ist

$$\begin{aligned}
z - z' &= (r' - r) \cdot x \in N_*, \Rightarrow \quad r' - r \qquad\qquad \in \mathfrak{a} \\
\Rightarrow \quad \varphi_*(z) - \varphi_*(z') &= \varphi_*(z - z') \\
&= \varphi_*((r' - r) \cdot x) \\
&= g(r' - r) \\
&= \hat{g}(r' - r) \\
&= \hat{g}(r') - \hat{g}(r) \\
\Rightarrow \quad \varphi_*(z') + \hat{g}(r') &= \varphi_*(z) + \hat{g}(r).
\end{aligned}$$

Weiterhin ist für $z \in N_*$

$$\begin{aligned}
\varphi_{**}(z) &= \varphi_{**}(z + 0 \cdot x) \\
&= \varphi_*(z) + \hat{g}(0) \\
&= \varphi_*(z),
\end{aligned}$$

d.h. $\varphi_{**}|_{N_*} = \varphi_*$. Damit ist also $(N_{**}, \varphi_{**}) \in \mathfrak{M}$ mit $(N_{**}, \varphi_{**}) \succ (N_*, \varphi_*)$, im Widerspruch zur Maximalitätseigenschaft von (N_*, φ_*). Damit ist unsere Annahme falsch, also wirklich $N_* = M$. □

Wir haben also $\varphi_* : M \to E$ als Fortsetzung von f auf ganz M, d.h. E ist injektiv.

□

Beispiel 4.3.1.

(1) $\mathbb{Q}$ ist $\mathbb{Z}$-injektiv.

(2) $\mathbb{Z}$ ist nicht $\mathbb{Z}$-injektiv.

Beweis.

(1) Die Ideale in $\mathbb{Z}$ sind ja gerade (neben dem (0)-Ideal und $\mathbb{Z}$ selbst, wo die Fortsetzungen trivial sind) die Mengen $n \cdot \mathbb{Z}$ mit $n \geq 2$. Sei ein solches Ideal gegeben, mit $f : n \cdot \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$.

$$\begin{tikzcd}
n \cdot \mathbb{Z} \arrow[r, tail, "\subseteq"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{Z} \arrow[dl, dashed, "\tilde{f}"] \\
\mathbb{Q} &
\end{tikzcd}$$

Dann setze $\frac{p}{q} := f(n)$, und es ist $f(n \cdot r) = \frac{r \cdot p}{q}$. Wir definieren dann $\hat{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ durch

$$\hat{f}(1) = \frac{p}{n \cdot q},$$

d.h.
$$\hat{f}(r) = \frac{p \cdot r}{n \cdot q}.$$

Offenbar ist $\hat{f}|_{n \cdot \mathbb{Z}} = f$.

(2) Wäre $\mathbb{Z}$ injektiv, so würde für alle $n \in \mathbb{Z}$ die exakte Folge

$$0 \to n \cdot \mathbb{Z} \overset{\varphi}{\hookrightarrow} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$$

zerfallen, d.h. $\mathbb{Z} \cong n\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Dies ist aber nicht möglich, da $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für $n \notin \{0, 1\}$ ein Torsionsmodul ist (und $\mathbb{Z}$ nicht).

□

Bemerkung. Ist A ein Ring. Dann ist A injektiv als A-Modul (d.h. A ein **injektiver Ring**) $\Longleftrightarrow$ jedes Ideal in A ist direkter Summand von A.

Injektivität und Dividierbarkeit von Moduln

Definition 4.11. *Sei A ein Ring, M ein A-Modul. M heißt* ***dividierbar****, falls für alle $a \in \mathrm{NNT}(A)$ und alle $x \in M$ ein $y \in M$ existiert mit $x = a \cdot y$.*

Bemerkung. Anders formuliert: M ist dividierbar, falls für alle $a \in \mathrm{NNT}(A)$ die (sowieso injektive) Homothetie $h_a : \begin{array}{l} M \to M \\ z \mapsto a \cdot z \end{array}$ auch surjektiv ist.

$\boxed{\text{SATZ 4.3.2.}}$ Jeder injektive A-Modul ist dividierbar.

$$\begin{tikzcd} (a) \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[dl, dotted, "\exists \hat{f}"] \\ E & \end{tikzcd}$$

Beweis. Sei E injektiver A-Modul, $x \in E$, $a \in \mathrm{NNT}(A)$. Betrachte das Hauptideal (a) und definiere $f \in \mathrm{Hom}_A((a), E)$ durch $f(r \cdot a) := r \cdot x$. (Dies ist wohldefiniert, weil $a \in \mathrm{NNT}(A)$ ist, also $h_a : A \to (a)$ sogar bijektiv ist.) Aufgrund der Injektivität von E existiert eine Fortsetzung $\hat{f}$, und mit $y := \hat{f}(1) \in E$ ist $x = f(a) = \hat{f}(a) = a \cdot \hat{f}(1) = a \cdot y$.
Da dies für alle $a \in \mathrm{NNT}(A)$ und $x \in M$ geht, ist M dividierbar. □

Frage. In welchen Fällen gilt sogar die Äquivalenz?

$\boxed{\text{BEMERKUNG 1.}}$ Sei A Integritätsbereich und M torsionsfreier A-Modul. Dann gilt: M ist injektiv $\Leftrightarrow$ M ist dividierbar.

Beweis. (Wir müssen nur $\Leftarrow$ zeigen, die andere Richtung gilt ja immer.) Wir verwenden wieder das Baer-Kriterium (Satz 4.3.1).

Sei also $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal, ohne Beschränkung der Allgemeinheit $A \neq \mathfrak{a} \neq (0)$ (triviale Fälle), $f \in \mathrm{Hom}_A(\mathfrak{a}, M)$, M dividierbar und $\mathrm{NNT}(A) = A^0$. Aufgrund der Dividierbarkeit ist für alle $a \in \mathfrak{a} \setminus (0)$ schon $f(a) = a \cdot x_a$, mit einem geeignetem $x_a \in M$. Für $(a, b) \in (\mathfrak{a} \setminus (0))^2$ ist damit

$$b \cdot a \cdot x_a = b \cdot f(a) = f(a \cdot b) = a \cdot f(b) = a \cdot b \cdot x_b,$$

also (da $a \cdot b \neq 0$ und M torsionsfrei ist) $x_a = x_b =: x \in E$, und wir haben

$$\exists x \in M : f(a) = a \cdot x \forall a \in \mathfrak{a}.$$

Nun können wir natürlich ganz einfach eine Fortsetzung $\hat{f}$ definieren mittels $\hat{f}(r) := r \cdot x$ für alle $r \in A$. Offenbar ist wirklich $\hat{f}|_{\mathfrak{a}} = f$.

Nach Baers Kriterium ist damit M injektiv. □

Satz 4.3.3. *(Injektiv $\Leftrightarrow$ dividierbar bei HIR)*
Sei A ein Hauptidealring, M ein A-Modul. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) M ist injektiv

(2) M ist dividierbar.

Beweis. Die Richtung (1) $\Rightarrow$ (2) ist klar, die andere Richtung geht wie in Beispiel 4.3.1:

Sei $\mathfrak{a} = (a)$ ein Ideal in A (es ist für $\mathfrak{a} \neq (0)$ auch $a \in \mathrm{NNT}(A)$), $f \in \mathrm{Hom}_A(\mathfrak{a}, M)$. Dann ist $f(a) = x \in M$, und $x = a \cdot y$ (aufgrund der Dividierbarkeit von M). Die gewünschte Fortsetzung von f ergibt sich durch $\hat{f}(1) = y$ bzw. $\hat{f}(r) = r \cdot y$. □

Beispiel 4.3.2. Q ist injektive abelsche Gruppe (d.h. $\mathbb{Z}$-Modul), $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist ebenfalls injektiv.

Beispiel 4.3.3. Etwas allgemeiner:

Ist A HIR, $Q(A)$ sein Quotientenkörper, so ist $Q(A)$ ein A-injektiver Modul (weil dividierbar).

Lemma.

(1) Sei A Ring, $N' \subseteq N$ zwei A-Moduln. Ist N dividierbar, so ist auch N/N' dividierbar.

(2) Im Fall $A = \mathbb{Z}$ (also abelsche Gruppen) gilt: Jede abelsche Gruppe G kann in eine dividierbare (= injektive) Gruppe eingebettet werden.

Beweis.

(1) Klar: Für $a \in \mathrm{NNT}(A)$ und $[x] \in {}^{N}\!/\!_{N'}$ existiert $y \in N$ mit $a \cdot y = x$, also

$$\exists [y] \in {}^{N}\!/\!_{N'} : \quad [x] = [a \cdot y] = a \cdot [y].$$

(2) Sei G abelsche Gruppe, $\mathbb{Z}^{(I)} \xrightarrow{\varepsilon} G \to 0$ eine freie Auflösung, gegeben durch ein Erzeugendensystem $\{\gamma_i \mid i \in I\}$ von G. Dann ist

$$G \cong {}^{\mathbb{Z}^{(I)}}\!/\!_{\ker(\varepsilon)} \subseteq {}^{\mathbb{Q}^{(I)}}\!/\!_{\ker(\varepsilon)},$$

und dabei ist $\mathbb{Q}^{(I)}$ dividierbar, nach (1) auch ${}^{\mathbb{Q}^{(I)}}\!/\!_{\ker(\varepsilon)}$ dividierbar, und da $\mathbb{Z}$ Hauptidealring ist, auch injektiv. □

> SATZ 4.3.4. *(Konstruktionsmethode injektiver Moduln)*
> Sei A ein Ring (und damit via $1_{\mathbb{Z}} \mapsto 1_A$ ein $\mathbb{Z}$-Algebra), G eine dividierbare abelsche Gruppe ($\mathbb{Z}$-Modul). Dann:
>
> (1) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, G)$ ist ein A-Modul
>
> (2) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, G)$ ist sogar injektiver A-Modul.

Beweis.

(1) Eine $\mathbb{Z}$-Modul-Struktur hat $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, G)$ ja bereits (also die additive Verküpfung). Wir definieren außerdem

$$\begin{aligned} \cdot_A : A \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, G) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, G) \\ (a, f) &\longmapsto \Big(\begin{aligned} (a \cdot_A f) : A &\to G \\ b &\mapsto f(a \cdot b) \end{aligned} \Big) \end{aligned}$$

Dies ist wohldefiniert, $a \cdot_A f$ ist wirklich in $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, G)$, und $\cdot_A$ ist eine A-Modulstruktur auf $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, G)$, welche auch (via $1_{\mathbb{Z}} \mapsto 1_A$) die Ausgangs-$\mathbb{Z}$-Modul-Struktur $\cdot_{\mathbb{Z}}$ zurückinduziert:

$$\begin{aligned} (n \cdot_A f)(a) &= f(n \cdot a) \\ &= f(a + \ldots + a) \\ &= f(a) + \ldots + f(a) \\ &= n \cdot (f(a)) \\ &= (n \cdot_{\mathbb{Z}} f)(a) \end{aligned}$$

(2) Betrachte $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, G)$ als A-Modul wie in (1), sei $M' \overset{\varphi}{\hookrightarrow} M$ ein A-Modulmonomorphismus. Wir wollen zeigen, dass dann der induzierte Morphismus

$\varphi^*_{\mathrm{Hom}} : \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, G)) \to \mathrm{Hom}_A(M', \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, G))$ surjektiv ist. Wir haben das Diagramm

$$\begin{tikzcd} h \arrow[d, mapsto] & \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, G)) \arrow[r, "\varphi^*_{\mathrm{Hom}}"] \arrow[d, "\sigma_M"', "\wr"] & \mathrm{Hom}_A(M', \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, G)) \arrow[d, "\wr"', "\sigma_M"] \\ \sigma_M(h) = \hat{h} & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, G) \arrow[r, two heads, "\varphi^*_G"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M', G) \end{tikzcd}$$

mit $\hat{h}(x) = h(x)(1)$. σ_M ist bijektiv, die Umkehrabbildung ist

$$\begin{aligned} \sigma_M^{-1} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, G) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, G)) \\ \hat{h} &\longmapsto (x \mapsto (r \mapsto \hat{h}(r \cdot x))), \end{aligned}$$

gleiches gilt für $\sigma_{M'}$.

Das Diagramm ist wirklich kommutativ, für $h \in \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, G))$ und $x' \in M'$ gilt:

$$\begin{aligned} (\varphi^*_G \circ \sigma_M)(h)(x') &= (\sigma_M(h) \circ \varphi)(x') \\ &= \sigma_M(h)(\varphi(x')) \\ &= h(\varphi(x'))(1) \\ &= (h \circ \varphi)(x')(1) \\ &= \varphi^*_{\mathrm{Hom}}(h)(x')(1) \\ &= \sigma_{M'}(\varphi^*_{\mathrm{Hom}}(h))(x') \\ &= (\sigma_{M'} \circ \varphi^*_{\mathrm{Hom}})(h)(x'), \end{aligned}$$

also $\varphi^*_G \circ \sigma_M = \sigma_{M'} \circ \varphi^*_{\mathrm{Hom}}$.

Weil G injektiver Modul ist, ist φ^*_G surjektiv, und damit ist auch φ^*_{Hom} surjektiv. Da dies für alle M gilt, ist $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, G)$ injektiver A-Modul. □

BEMERKUNG 2. Der Beweis liefert eigentlich mehr, nämlich: Ist B eine A-Algebra und Ω ein injektiver A-Modul, so ist $\mathrm{Hom}_A(B, \Omega)$ mit seiner kanonischen B-Modulstruktur ein injektiver B-Modul.

SATZ 4.3.5. *(Einbettung in injektive Moduln)*
Sei A ein Ring, M ein A-Modul. Dann kann M in einen injektiven A-Modul A-linear eingebettet werden.

Beweis. Sei M also ein A-Modul. Dann haben wir ja

$$\begin{aligned} M &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(A, M) \xhookrightarrow{\mathrm{incl}} \underbrace{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, M)}_{A\text{-Modul wie oben}} \\ x &\longmapsto \varphi_x : A \to M \\ & \qquad\quad r \mapsto r \cdot x \\ \varphi(1) &\longleftarrow\!\shortmid \varphi \end{aligned}$$

Weiterhin können wir M als $\mathbb{Z}$-Modul auffassen und als solchen nach dem Lemma in eine dividierbare Gruppe einbetten: $M \overset{\psi}{\hookrightarrow} G$. Wir erhalten damit (weil der Hom-Funktor ja linksexakt ist) die Folge injektiver A-Morphismen:

$$M \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(A, M) \overset{\mathrm{incl}}{\hookrightarrow} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, M) \overset{\psi^*}{\hookrightarrow} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, G),$$

wobei $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, G)$ nach Satz 4 ein injektiver A-Modul ist. M ist also in den injektiven A-Modul $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, G)$ eingebettet. □

$\boxed{\text{Korollar.}}$ Jeder A-Modul M besitzt eine sogenannte **injektive Auflösung**, d.h. eine exakte Folge der Form

$$0 \to M \overset{f_0}{\hookrightarrow} E_0 \xrightarrow{f_1} E_1 \xrightarrow{f_2} \cdots,$$

wobei die E_i injektive Moduln sind.

Beweis. Wir haben ja $M \overset{\hat{f}_0}{\hookrightarrow} E_0$, mit E_0 injektiv, durch Satz 4.3.5 gegeben. Dies liefert uns eine Reihe kurzer exakter Folgen:

$$0 \to M \overset{\hat{f}_0}{\hookrightarrow} E_0 \overset{\hat{p}_0}{\twoheadrightarrow} \mathrm{coker}(\hat{f}_0) \to 0$$

$$0 \to M \overset{\hat{f}_1}{\hookrightarrow} E_1 \overset{\hat{p}_1}{\twoheadrightarrow} \mathrm{coker}(\hat{f}_1) \to 0$$

$$0 \to M \overset{\hat{f}_2}{\hookrightarrow} E_2 \overset{\hat{p}_2}{\twoheadrightarrow} \mathrm{coker}(\hat{f}_2) \to 0$$

$$\vdots$$

$$0 \to M \overset{\hat{f}_i}{\hookrightarrow} E_1 \overset{\hat{p}_i}{\twoheadrightarrow} \mathrm{coker}(\hat{f}_i) \to 0$$

$$\vdots$$

Zusammensetzen dieser Folgen (mittels $f_0 := \hat{f}_i$ und $f_i := \hat{f}_i \circ \hat{p}_{i-1}$ für $i > 0$) liefert das Gewünschte:

$$0 \to M \xrightarrow{f_0} E_0 \xrightarrow{f_1} E_1 \xrightarrow{f_2} E_2 \xrightarrow{f_3} \ldots \xrightarrow{f_i} E_i \xrightarrow{f_{i+1}} \ldots$$

□

Bemerkung. Als Kontrast dazu: Jeder A-Modul besitzt ja auch eine projektive Auflösung

$$\ldots \to P_1 \xrightarrow{\delta_1} P_0 \xrightarrow{\delta_0} M \to 0$$

(exakte Folge, P_i projektiv), wobei hier allerdings die P_i beliebig (projektiv) gewählt werden können, und sich die δ_i dann entsprechend ergeben.

$\boxed{\text{Bemerkung 3.}}$ Aus Satz 4.3.5 kann man jetzt auch leicht folgern (ohne Verwendung von Push-Outs):
E ist injektiv $\Leftrightarrow$ jede exakte Folge $0 \to E \to M \to M''$ splittet.

Flache Moduln

Sei

$$0 \to M' \overset{f}{\hookrightarrow} M \overset{g}{\twoheadrightarrow} M'' \to 0$$

kurze exakte Folge von A-Moduln, N weiterer A-Modul. Wir erhalten die induzierte A-Modul-Homomorphismusfolge

$$(*) \qquad 0 \to M' \otimes_A N \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}_N} M \otimes_A N \xrightarrow{g \otimes \mathrm{id}_N} M'' \otimes_A N \to 0.$$

Frage. Ist auch die N-tensorierte Folge (*) exakt? Mit anderen Worten: Ist der (kovariante) Funktor

$$\begin{aligned} \square \otimes_A N : \underline{\mathrm{Mod}}_A &\longrightarrow \underline{\mathrm{Mod}}_A \\ M &\longmapsto M \otimes_A N \\ f &\longmapsto f \otimes \mathrm{id}_N \end{aligned}$$

ein linksexakter, rechtsexakter oder gar überhaupt exakter Funktor?

Wir werden sehen: $\square \otimes_A N$ ist stets rechtsexakt, aber i.a. nicht linksexakt (umgekehrt zum $\mathrm{Hom}_A(N, \square)$-Funktor).

$\boxed{\text{Lemma.}}$ *(Kriterium für die Rechtsexaktheit kurzer Folgen)*
Sei A ein Ring, $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M \to 0$ eine kurze Folge von A-Moduln (und -Homomorphismen). Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) Die Folge ist (rechts-)exakt, d.h. g ist surjektiv und $\ker g = \operatorname{im} f$.

(2) Für alle A-Moduln X gilt: Die kontravariant induzierte Folge

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M'', X) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_A(M, X) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_A(M', X)$$

ist exakt.

Beweis.

(1) $\Rightarrow$ (2): Dies ist bekannt, denn $\mathrm{Hom}_A(\square, X)$ ist ja linksexakt für alle $X \in \mathrm{Mod}_A$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Sei also (2) erfüllt.

i. Schritt Wähle in (2) $X := M''$, d.h. die Folge

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M'', M'') \xrightarrow{g} \mathrm{Hom}_A(M, M'') \to \mathrm{Hom}_A(M', M'')$$

ist exakt. Das heißt, es ist

$$\begin{aligned} & 0 = f^*(g^*(\mathrm{id}_{M''})) \\ \Rightarrow \quad & 0 = \mathrm{id}_M \circ g \circ f \\ \Rightarrow \quad & 0 = g \circ f, \end{aligned}$$

also $im(f) \subseteq \ker(g)$.

ii. Schriitt Wähle in (2) nun $X := \mathrm{coker}(f) = {}^{M}\!/_{\mathrm{im}(f)}$, dann ist auch

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M'', \mathrm{coker}\, f) \xrightarrow{g} \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{coker}\, f) \to \mathrm{Hom}_A(M', \mathrm{coker}\, f)$$

exakt. Bezeichnen wir mit $\pi : M \to {}^{M}\!/_{\mathrm{im}\, f} = \mathrm{coker}\, f$ die kanonische Projektion, so ist offenbar $f^*(\pi) = \pi \circ f = 0$, und damit

$$\begin{aligned} & \pi \in \ker(f^*) \\ \Rightarrow \quad & \pi \in \ker(f^*) \\ \Rightarrow \quad & \pi \in \mathrm{im}(g^*) \\ \Rightarrow \quad & \pi = g^*(\varphi) \quad \text{mit } \varphi \in \mathrm{Hom}_A(M'', \mathrm{coker}\, f) \\ \Rightarrow \quad & \pi = \varphi \circ g \\ \Rightarrow \quad & \ker(g) \subseteq \ker(\pi) = \mathrm{im}(f) \end{aligned}$$

Mit Schritt 1 ergibt sich $\ker(g) = \mathrm{im}(f)$.

iii. Schriiitt Wähle schließlich $X := \mathrm{coker}(g)$. Dann ist

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M'', \mathrm{coker}\, f) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{coker}\, f) \to \dots$$

exakt, insbesondere g^* injektiv. Bezeichne weiter $\mathrm{pr} : M'' \to \mathrm{coker}\, g$ die kanonische Projektion. Dann ist

$$\begin{aligned} & g^*(\mathrm{pr}) = \mathrm{pr} \circ g = 0 \\ \xRightarrow[\text{injektiv}]{g^*} \quad & \mathrm{pr} = 0 \\ \Rightarrow \quad & \mathrm{coker}\, g = 0 \\ \Rightarrow \quad & \mathrm{im}\, g \text{surjektiv} \end{aligned}$$

Damit ist also die Folge $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ wirklich exakt. □

SATZ 4.3.6. *(Rechtsexaktheit von $\Box \otimes_A N$)*
Sei

$$0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$$

kurze exakte Folge von A-Moduln, N beliebiger A-Modul. Dann:

(1) Die folgende Folge ist exakt

$$M' \otimes_A N \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}_N} M \otimes_A N \xrightarrow{g \otimes \mathrm{id}_N} M'' \to 0$$

(2) $f \otimes \mathrm{id}_N$ ist i.a. nicht mehr injektiv, d.h. die Folge

$$0 \to M' \otimes_A N \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}_N} M \otimes_A N \ldots$$

nicht mehr exakt.

(3) Ist

$$Q_n \xrightarrow{\delta_n} \ldots \xrightarrow{\delta_2} Q_1 \xrightarrow{\delta_1} Q_0 \xrightarrow{\delta_0} M \to 0$$

lange exakte Folge von A-Moduln, N beliebiger A-Modul, so ist die tensorierte Folge

$$Q_n \otimes_A N \xrightarrow{\delta_n \otimes \mathrm{id}_N} \ldots Q_1 \otimes_A N \xrightarrow{\delta_1 \otimes \mathrm{id}_N} Q_0 \otimes_A N \xrightarrow{\delta_0 \otimes \mathrm{id}_N} M \otimes_A N \to 0$$

ein Komplex, d.h. es ist $(\delta_k \otimes \mathrm{id}_N) \circ (\delta_{k+1} \otimes \mathrm{id}_N) = 0$ bzw. $\mathrm{im}(\delta_k \otimes \mathrm{id}_N) \subseteq \ker(\delta_{k+1} \otimes \mathrm{id}_N)$.

Beweis.

(1) Sei also $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ exakt, N beliebiger A-Modul, seien N und X beliebige weitere A-Moduln. Wir betrachten die induzierte Sequenz

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M'' \otimes N, X) \to \mathrm{Hom}_A(M \otimes N, X) \to \mathrm{Hom}_A(M' \otimes N, X).$$

(Ist für alle X diese Folge exakt, so ist nach dem vorherigen Lemma auch die Folge der Behauptung exakt.)

Dazu betrachten wir die Moduln $\operatorname{Hom}_A(N,X)$, und erhalten das Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] \\
\operatorname{Hom}_A(M'', \operatorname{Hom}_A(N,X)) \arrow[r, equal, "\sim"] \arrow[d, "g^*"'] & L_A^2(M'', N; X) \arrow[r, equal, "\sim"] & \operatorname{Hom}_A(M'' \otimes_A N, X) \arrow[d] \\
\operatorname{Hom}_A(M, \operatorname{Hom}_A(N,X)) \arrow[r, equal, "\sim"] \arrow[d, "f^*"'] & L_A^2(M, N; X) \arrow[r, equal, "\sim"] & \operatorname{Hom}_A(M \otimes_A N, X) \arrow[d] \\
\operatorname{Hom}_A(M', \operatorname{Hom}_A(N,X)) \arrow[r, equal, "\sim"] & L_A^2(M', N; X) \arrow[r, equal, "\sim"] & \operatorname{Hom}_A(M' \otimes_A N, X)
\end{tikzcd}$$

Die linke Spalte ist exakt (da Hom ja bekanntermaßen linksexakter Funktor ist), horizontal haben wir offenbar (kanonische) Isomorphismen, und damit ist auch die rechte Spalte exakt.

Dies gilt offenbar für alle A-Moduln X, und daher ist (nach dem vorherigen Lemma) auch die Folge

$$M' \otimes_A N \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}_N} M \otimes_A N \xrightarrow{g \otimes \mathrm{id}_N} M'' \to 0$$

exakt.

(2) Als Gegenbeispiel betrachten wir $A = \mathbb{Z}$ und die exakte Folge

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0.$$

Anwenden von $\Box \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ liefert:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[r, "(\Box \cdot 2) \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}"] \arrow[d, equal, "\wr"] & \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[r, "\pi \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}"] \arrow[d, equal, "\wr"] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, equal, "\wr"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[r, "\Box \cdot 2 = 0"] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dieser Homomorphismus ist nicht injektiv, und damit ist $\Box \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ nicht linksexakt.

(3) Die lange Folge

$$Q_n \xrightarrow{\delta_n} \dots \xrightarrow{\delta_2} Q_1 \xrightarrow{\delta_1} Q_0 \xrightarrow{\delta_0} M \to 0$$

lässt sich „zerhacken“ in kurze exakte Folgen:

$$0 \to K_0 = \ker(\delta_0) \xhookrightarrow{\text{incl}} Q_0 \xrightarrow{\delta_0} M \to 0$$
$$0 \to K_1 = \ker(\delta_1) \xhookrightarrow{\text{incl}} Q_1 \xrightarrow{\delta_1} K_0 \to 0$$
$$\vdots$$
$$0 \to K_{n-1} = \ker(\delta_{n-1}) \xhookrightarrow{\text{incl}} Q_{n-1} \xrightarrow{\delta_{n-1}} K_{n-2} \to 0$$
$$0 \to K_n = \ker(\delta_n) \xhookrightarrow{\text{incl}} Q_n \xrightarrow{\delta_n} K_{n-1} \to 0$$

Hier können wir jeweils (1) anwenden, und dann die Folgen wieder zusammensetzen, wodurch sich die Behauptung ergibt. □

Definition 4.12. *Sei A Ring, M ein A-Modul. M heißt* ***flacher Modul*** *(bzw. A-flach), falls der (sowieso rechtsexakte) kovariante Funktor $\square \otimes_A M : \underline{\mathrm{Mod}}_A \to \underline{\mathrm{Mod}}_A$ ein exakter Funktor ist.*

$\boxed{\text{Bemerkung 1.}}$ Äquivalent dazu ist:

(1) $\square \otimes_A M$ ist linksexakt

(2) Für alle $N_1, N_2 \in \mathrm{Mod}_A$ und $f \in \mathrm{Mono}_A(N_1, N_2)$ ist

$$f \otimes \mathrm{id}_M : N_1 \otimes_A M \longrightarrow N_2 \otimes_A M$$

injektiv.

Beispiel 4.3.4. $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ ist für $n \geq 2$ nicht $\mathbb{Z}$-flach.

Beispiel 4.3.5. Ist $F \cong A^{(I)}$ freier Modul, so ist F auch flach:

$$\begin{tikzcd} M' \otimes_A F \arrow[r, tail, "f\otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, equal, "\wr"'] & M \otimes_A F \arrow[d, equal, "\wr"] \\ (M')^{(I)} \arrow[r, tail, "f^{(I)}"'] & M^{(I)} \end{tikzcd}$$

Beispiel 4.3.6. Sei P projektiver Modul, d.h. $F = P \oplus Q$ frei. Dann haben wir $F \underset{i_P}{\overset{\pi_P}{\rightleftarrows}} P$ mit $\pi_P \circ i_P = \mathrm{id}_P$. Dies ergibt

$$F \otimes_A M \underset{i_P \otimes \mathrm{id}_M}{\overset{\pi_P \otimes \mathrm{id}_M}{\rightleftarrows}} P \otimes_A M,$$

wobei wir weiterhin haben:

$$\begin{aligned}(\pi_P \otimes \mathrm{id}_M) \circ (i_P \otimes \mathrm{id}_M) &= (\pi_P \circ i_P) \otimes (\mathrm{id}_M \circ \mathrm{id}_M) \\ &= \mathrm{id}_P \otimes \mathrm{id}_M \\ &= \mathrm{id}_{P \otimes_A M}\,.\end{aligned}$$

Das heißt, projektive Moduln sind auch flach.

Beispiel 4.3.7. Sei A Ring, S m. a. S., A_S der Lokalisierungsring. Dann ist ja $\square \otimes_A A_S \cong \square_S$ (Tensorieren mit A_S entspricht lokalisieren nach S). Der Lokalisierungstensor ist bekannterweise exakt, also ist auch $\square \otimes_A A_S$ exakter Funktor, also A_S ein flacher A-Modul.

> $\boxed{\text{Satz 4.3.7.}}$ Sei $(A, \mathfrak{m})$ lokaler Ring, M ein A-Modul v. e. D. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:
>
> (1) M ist frei.
>
> (2) M ist projektiv.
>
> (3) M ist flach.

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) ist bekannt, (3) $\Rightarrow$ (1) geht mit Standard-Methoden (z.B. mittels Tensorieren $\square \otimes A/\mathfrak{m}$). $\square$

> $\boxed{\text{Korollar.}}$ Sei A Ring, M ein A-Modul. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:
>
> (1) M ist endlich erzeugt und projektiv.
>
> (2) M ist v. e. D. und flach.
>
> (3) M ist v. e. D. und lokal frei.

Abgeleitete Funktoren von Hom und $\otimes$

Die Torsionsmoduln $\mathrm{Tor}_i^A(M, N)$

Seien M und N zwei A-Moduln. Dann haben wir eine projektive (exakte) Auflösung von M:

$$\ldots \to P_n \xrightarrow{\delta_n} P_{n-1} \ldots \xrightarrow{\delta_2} P_1 \xrightarrow{\delta_1} P_0 \xrightarrow{\delta_0} M \to 0.$$

Tensorieren mit N ergibt den Komplex

$$\ldots \to P_n \otimes_A N \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \otimes_A N \ldots \xrightarrow{\partial_2} P_1 \otimes_A N \xrightarrow{\partial_1} P_0 \otimes_A N \xrightarrow{\partial_0} M \otimes_A N \to 0.$$

Wir betrachten nun aber den (am Ende abgeschnittenen) Komplex

$$\mathbb{P}_M \otimes_A N := \Big(\ldots \to P_n \otimes_A N \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \otimes_A N \ldots \xrightarrow{\partial_2} P_1 \otimes_A N \xrightarrow{\partial_1} P_0 \otimes_A N \to 0 \Big).$$

$\boxed{H_i(\mathbb{P})}$ Dabei gilt also $\ker \partial_n \supseteq \mathrm{im}(\partial_{n+1})$ für alle $n \geq 0$. $\mathbb{P}_M \otimes_A N$ hat als Komplex die **Homologie-Moduln**

$$H_i\left(\mathbb{P}_M \otimes_A N\right) := {}^{\ker(\partial_i)}\!/_{\mathrm{im}(\partial_{i+1})}, \quad i \geq 0.$$

$\boxed{\text{Satz 4.3.8.}}$ $H_i(\mathbb{P}_M \otimes_A N)$ hängt bis auf Isomorphie nicht von der gewählten Auflösung $\mathbb{P}_M \to M \to 0$ ab, sondern nur von M (und N).

Definition 4.13. $\operatorname{Tor}_i^A(M,N) :\cong H_i(\mathbb{P}_M \otimes N)$ *heißt der i-te **Torsionsmodul** des Paares* (M,N). $\boxed{\operatorname{Tor}_i^A(M,N)}$

Bemerkung. Es ist

$$\operatorname{Tor}_0^A(M,N) = {}^{P_0 \otimes_A N}\!\big/_{\partial_1(P_1 \otimes_A N)} = M \otimes_A N,$$

und

$$\begin{aligned} &M \text{ ist flach}\\ &\Leftrightarrow \square \otimes M \text{ ist exakt}\\ &\Leftrightarrow \operatorname{Tor}_1^A(M,N) = 0 \quad \forall N \in \operatorname{Mod}_A\\ &\Leftrightarrow \operatorname{Tor}_i^A(M,N) = 0 \quad \forall N \in \operatorname{Mod}_A, \forall i \geq 1 \end{aligned}$$

Extensionsmoduln $\operatorname{Ext}_A^i(M,N)$

Anderseits kann man für A-Moduln M, N auch folgendes betrachten. Sei

$$\ldots \to Q_n \xrightarrow{\delta_n} Q_{n-1} \ldots \xrightarrow{\delta_2} Q_1 \xrightarrow{\delta_1} Q_0 \xrightarrow{\delta_0} N \to 0$$

projektive Auflösung von N. Dann haben wir den Komplex

$$0 \to \operatorname{Hom}_A(N,M) \xrightarrow{\delta_0^*} \operatorname{Hom}_A(Q_0,M) \xrightarrow{\delta_1^*} \operatorname{Hom}_A(Q_1,M) \xrightarrow{\delta_2^*} \cdots,$$

welcher am linken Anfang sogar exakt ist, weil ja $\operatorname{Hom}_A(\square, M)$ linksexakt ist. Der (abgeschnittene) Komplex

$$\operatorname{Hom}_A(\mathbb{Q}_N, M) := \Big(0 \to \operatorname{Hom}_A(Q_0,M) \xrightarrow{\delta_1^*} \operatorname{Hom}_A(Q_1,M) \to \ldots\Big)$$

hat dann eine Kohomologie

$$H^i(\mathbb{Q}_N, M) := {}^{\ker(\delta_{i+1}^*)}\!\big/_{\operatorname{im}(\delta_i^*)}, \quad i \geq 0$$

$\boxed{\text{Satz 4.3.9.}}$ Auch die $\operatorname{Ext}_A^i(N,M) :\cong H^i(\mathbb{Q}_N, M)$ hängen bis auf Isomorphie nicht von der gewählten Auflösung ab und heißten die **Extensionsmoduln** von (N,M). $\boxed{\operatorname{Ext}_A^i(N,M)}$

Bemerkung. Analog zu den Torsionsmoduln haben wir hier

$$\mathrm{Ext}^0_A(N,M) \cong \mathrm{Hom}_A(N,M)$$

und

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^1_A(N,M) = 0 \forall M \in \mathrm{Mod}_A &\Leftrightarrow \mathrm{Ext}^i_A(N,M) = 0 \forall i \geq 1, \forall M \in \mathrm{Mod}_A \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Hom}_A(N,\Box) \text{ ist rechtsexakt} \\ &\Leftrightarrow N \text{ ist projektiv.}\end{aligned}$$

Teil II

Kategorielle Algebra

5 Grundbegriffe der Kategoriellen Algebra

Vorbemerkung

Dieses – etwas kürzere – Kapitel stammt von einer Mitschrift einer einzigen Vorlesung, welche am 20. Februar 2003 (d.h. schon in der eigentlich vorlesungsfreien Zeit) von Herrn Kleinert auf unser Bitten hin gehalten wurde, da in der Vorlesung „Algebra II" sowie der Übung dazu es aus Zeitgründen nicht mehr möglich war, das Thema zu behandeln.

Danke.

5.1 Kategorien

Definition

Als Grundlage für alle Definitionen nehmen wir die Axiomatik der Mengenlehre von Gödel, Bernays und von Neumann. [1]

Definition 5.1. *Eine **Kategorie** ist ein 6-Tupel*

$$\mathfrak{C} = (\mathfrak{K}, \mathfrak{F}, s, b, e, k)$$

mit

(1) $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{F}$ sind nichtleere Klassen;

(2) $s : \mathfrak{F} \to \mathfrak{K}$, $b : \mathfrak{F} \to \mathfrak{K}$ sind Abbildungen zwischen Klassen;

(3) $e : \mathfrak{K} \to \mathfrak{F}$ ist eine Klassen-Abbildung;

(4) Mit $\Phi := \{(g,f) \in \mathfrak{F} \times \mathfrak{F} \mid s(g) = b(f)\}$ ist $k : \Phi \to \mathfrak{F}$ eine Klassen-Abbildung; $\boxed{\Phi}$

*wobei folgende **Kategorienaxiome** gelten sollen:*

(Cat 1)	$\forall (g,f) \in \Phi :$	$s(k(g,f)) = s(f),\ b(k(g,f)) = b(g)$
(Cat 2)	$\forall (g,f) \in \Phi, (h,g) \in \Phi :$	$k(k(h,g),f) = k(h,k(g,f))$
(Cat 3)	$\forall C \in \mathfrak{K} :$	$s(e(C)) = C = b(e(C))$
(Cat 4)	$\forall f \in \mathfrak{F} :$	$k(f, e(b(f))) = f = k(e(s(f)), f)$

[1] Dort kann man ähnlich arbeiten wie bei Mengen, nur kann man Konstrukte wie die Klasse aller Klassen oder Faktormengenbildungen nicht verwenden.

Deutung

Diese sehr abstrakte Definition wollen wir zunächst deuten und handlichere Schreibweisen einführen.

$\boxed{\mathrm{obj}(\mathfrak{C})}$ **Definition 5.2.** *Die Elemente von $\mathfrak{K}$ heißen die **Objekte von** $\mathfrak{C}$.*

$$\mathrm{obj}(\mathfrak{C}) := \mathfrak{K}$$

$\boxed{\mathrm{Mor}(\mathfrak{C})}$ **Definition 5.3.** *Die Elemente von $\mathfrak{F}$ heißen die **Morphismen** oder **Pfeile** von $\mathfrak{C}$.*

$$\mathrm{Mor}(\mathfrak{C}) := \mathfrak{F}$$

Definition 5.4. *$s : \mathfrak{F} \to \mathfrak{K}$ heißt die **Quellabbildung**, für $f \in \mathfrak{F}$ heißt $s(f) \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C})$ die **Quelle** des Morphismus (Pfeils) f.*

Definition 5.5. *$b : \mathfrak{F} \to \mathfrak{K}$ heißt die **Zielabbildung**, für $f \in \mathfrak{F}$ heißt $b(f) \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C})$ das **Ziel** des Morphismus (Pfeils) f.*

$\boxed{A \xrightarrow{f} B}$ $\boxed{f : A \to B}$ **Definition 5.6.** *Man schreibt für $f \in \mathfrak{F}$ mit $s(f) = A$ und $b(f) = B$ auch*

$$A \xrightarrow{f} B \quad \textit{oder} \quad f : A \to B$$

$\boxed{\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, B)}$ $\boxed{\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(A, B)}$ **Definition 5.7.** *Für alle $A, B \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C}) \times \mathrm{obj}(\mathfrak{C})$ sei*

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, B) := \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(A, B) := \{f \in \mathfrak{F} \mid s(f) = A, b(f) = B\}$$

*die Klasse der **Morphismen von** A **nach** B.*

Damit gilt offenbar

$$\mathfrak{F} = \dot{\bigcup_{(A,B) \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C})^2}} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, B).$$

$\boxed{\mathrm{id}_A}$ **Definition 5.8.** *Für $A \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C})$ heißt*

$$\mathrm{id}_A := e(A)$$

*der **identische Morphismus von** A.*

Es ist offenbar immer $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, A)$, womit diese Klasse nie leer sein kann.

Definition 5.9. *Für $(g, f) \in \Phi$, also*

$$s(f) \xrightarrow{f} b(f) = s(g) \xrightarrow{g} b(g),$$

$\boxed{g \circ f}$ *heißt*

$$g \circ f := k(g, f)$$

*die **Komposition** von g und f.*

Es gilt offenbar

$$g \circ f : s(f) \to b(g)$$

und

$$f \circ \mathrm{id}_{s(f)} = f = \mathrm{id}_{b(f)} \circ f$$

Beispiele

Beispiel 5.1.1. Ens ist die **Kategorie der Mengen**:[2] Ens

$$\begin{aligned}
\mathrm{obj}(\underline{\mathrm{Ens}}) &:= \text{ Klasse der Mengen} \\
\mathrm{Mor}(\underline{\mathrm{Ens}}) &:= \text{ Klasse aller Mengenabbildungen} \\
&= \dot{\bigcup_{X,Y\in \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{Ens}})}} \mathrm{Abb}(X,Y) \\
\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Ens}}}(X,Y) &:= \mathrm{Abb}(X,Y) \\
\mathrm{id}_X &:= \text{ identische Mengenabbildung} \\
\forall\, X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z: \quad k(f,g) &= \underbrace{g\circ f}_{\text{(kategoriell)}} \\
&:= \underbrace{g\circ f}_{\substack{\text{(Komposition von}\\ \text{Mengenabbildungen)}}}
\end{aligned}$$

Definition 5.10. *Eine Kategorie $\mathfrak{C}$ heißt **kleine Kategorie**, falls* $\mathrm{obj}(\mathfrak{C})$ *und* $\mathrm{Mor}(\mathfrak{C})$ *Mengen sind.*

Definition 5.11. *Eine Kategorie $\mathfrak{C}$ heißt **lokal-kleine Kategorie**, falls für alle Objekte $A, B \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C})$ jeweils $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A,B)$ eine Menge ist.*

Damit ist Ens lokal-klein, aber nicht klein.

Beispiel 5.1.2. Groups ist die **Kategorie der Gruppen**: Groups

$$\begin{aligned}
\mathrm{obj}(\underline{\mathrm{Groups}}) &= \text{Klasse aller Gruppen} \\
\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Groups}}}(G,H) &= \text{ Menge der Gruppenhomomorphismen von } G \text{ nach } H
\end{aligned}$$

Definition 5.12. *Seien $\mathfrak{C} = (\mathfrak{K}, \mathfrak{F}, s, b, e, k)$ und $\mathfrak{C}' = (\mathfrak{K}', \mathfrak{F}', s', b', e', k')$ zwei Kategorien. $\mathfrak{C}$ heißt **Unterkategorie** von $\mathfrak{C}'$ ($\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{C}'$), falls*

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{K}' & \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}' & s'|_{\mathfrak{F}} = s \\
b'|_{\mathfrak{F}} = b & e'|_{\mathfrak{K}} = e & k'|_{\Phi} = k
\end{array}$$

Es ist also Groups eine Unterkategorie von Ens (denn jede Gruppe ist eine Menge, und jeder Gruppenhomomorphismus ist eine Mengenabbildung).

Definition 5.13. *Sei $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{C}'$. $\mathfrak{C}$ heißt **volle Unterkategorie** von $\mathfrak{C}'$, falls*

$$\forall (A,B) \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C})^2 : \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A,B) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A,B)$$

Offensichtlich ist Groups keine volle Unterkategorie von Ens.

$\boxed{\underline{\mathrm{Ab}}}$ *Beispiel* 5.1.3. $\underline{\mathrm{Ab}}$ ist die **Kategorie der abelschen Gruppen**:

$$\begin{aligned} \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{Ab}}) &= \text{ Klasse der abelschen Gruppen} \\ \mathrm{Mor}(\underline{\mathrm{Ab}}) &= \bigcup_{G,H \text{ abelsche Gruppen}} \mathrm{Hom}_{Gr}(G,H) \end{aligned}$$

$\underline{\mathrm{Ab}} \subseteq \underline{\mathrm{Groups}}$ ist offenbar eine volle Unterkategorie.
Weitere wichtige Kategorien sind

$\boxed{\underline{\mathrm{Rings}}}$ *Beispiel* 5.1.4. $\underline{\mathrm{Rings}}$ – die **Kategorie der Ringe und Ringhomomorphismen**

$\boxed{\underline{\mathrm{Mod}}_A}$ *Beispiel* 5.1.5. Für einen Ring A: $\underline{\mathrm{Mod}}_A$ – die **Kategorie der A-Moduln und A-Modulhomomorphismen**

$\boxed{\underline{\mathrm{Top}}}$ *Beispiel* 5.1.6. $\underline{\mathrm{Top}}$ – die **Kategorie der topologischen Räume und stetigen Abbildungen**

$\boxed{\underline{\mathrm{Vect}}_K}$ *Beispiel* 5.1.7. Für einen Körper K: $\underline{\mathrm{Vect}}_K := \underline{\mathrm{Mod}}_K$ – die **Kategorie der K-Vektorräume und K-linearen Abbildungen**

$\boxed{\underline{\underline{\mathbb{N}}}}$ *Beispiel* 5.1.8. Ein etwas *ungewöhnlicheres* Beispiel ist die folgende Kategorie $\underline{\underline{\mathbb{N}}}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{obj}(\underline{\underline{\mathbb{N}}}) &:= \mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\} \\ \mathrm{Hom}_{\underline{\underline{\mathbb{N}}}}(n,m) &:= M_{\mathbb{R}}(n,m) && \text{(reelle Matrizen vom Typ } (n,m)) \\ \forall n \in \mathbb{N}: \quad \mathrm{id}_{\mathbb{N}} &:= I_n && \text{(Einheitsmatrix)} \end{aligned}$$

Für Matrizen $(A,B) \in M_{\mathbb{R}}(n,m) \times M_{\mathbb{R}}(m,l)$ setzen wir dann

$$A \circ B := A \cdot B \qquad \text{(die übliche Matrizenmultiplikation)}$$

Dies ist offenbar eine kleine Kategorie.

$\boxed{\mathfrak{C}_{(E,\leq)}}$ *Beispiel* 5.1.9. Sei $(E,\leq)$ eine Menge mit reflexiver, transitiver Relation (z.B. eine teilordnung oder eine Äquivalenzrelation). Dann erhalten wir eine Kategorie durch

$$\begin{aligned} \mathrm{obj}(\mathfrak{C}_{(E,\leq)}) &:= E \\ \forall x,y \in E^2 : & \\ \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}_{(E,\leq)}}(x,y) &:= \begin{cases} \varnothing & x \nleq y \\ \{(x,y)\} & x \leq y \end{cases} \\ \mathrm{id}_x &:= (x,x) \\ (x,y) \circ (y,z) &:= (x,z) \end{aligned}$$

[2] $\underline{\mathrm{Ens}}$ von frz. Ensemble

SATZ OHNE NUMMER.

(1) $\mathfrak{C}_{(E,\leq)}$ ist eine kleine Kategorie mit der Eigenschaft
$$\#\operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}_{(E,\leq)}} \leq 1.$$

(2) Jede kleine Kategorie $\mathfrak{C}$ mit dieser Eigenschaft definiert eine Menge mit reflexiver und transitiver Relation:
$$(\operatorname{obj}(\mathfrak{C}), \leq), \quad a \leq b :\Leftrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(a,b) \neq \varnothing$$

Beispiel 5.1.10. Sei $(M,*)$ ein Monoid, d.h. $* : M \times M \to M$ Verknüpfung mit Assoziativität $x*(y*z) = (x*y)*z$, und es existiert $e_M \in M : e_M * x = x * e_M = x$.

$\boxed{\mathfrak{C}_{(M,*)}}$

Dies stiftet eine Kategorie :
$$\operatorname{obj}(\mathfrak{C}_{(M,*)}) := \{\varnothing\}$$
(oder jede andere einelementige Menge)
$$\begin{aligned} \operatorname{Mor}(\mathfrak{C}_{(M,*)}) &:= \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}_{(M,*)}}(\varnothing,\varnothing) \\ &:= M \\ \forall x \in M : \quad s(x) &= \varnothing \\ b(x) &= \varnothing \\ \operatorname{id}_\varnothing &:= e_M \\ x \circ y &:= x * y \end{aligned}$$

Dies ist offenbar eine **sehr kleine Kategorie**, sie hat nur ein Objekt. Umgekehrt induziert jede kleine Kategorie mit nur einem Objekt einen Monoid durch die Komposition $\circ$.

Beispiel 5.1.11. Sei X ein topologischer Raum. Dann haben wir $\underline{\operatorname{Off}}(X)$, die **Kategorie der offenen Mengen** von X, definiert durch
$$\begin{aligned} \operatorname{obj}(\underline{\operatorname{Off}}(X)) &:= \operatorname{Off}(X) \\ &= \{U \in \mathfrak{P}(X) \mid U \text{ offen}\} \\ \forall (U,V) \in \operatorname{Off}(X)^2 : & \\ \operatorname{Hom}_{\underline{\operatorname{Off}}(X)}(U,V) &:= \begin{cases} \varnothing & U \nsubseteq V \\ \operatorname{incl}_{U,V} & U \subseteq V \end{cases}, \end{aligned}$$
Identität und Komposition wie in $\underline{\text{Ens}}$.

5.2 Spezielle Objekte und Morphismen in Kategorien

Definition 5.14. *Sei* $\mathfrak{C}$ *eine Kategorie. Ein Morphismus* $f \in \operatorname{Mor}(\mathfrak{C})$*, etwa* $f \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(A,B)$ *heißt*

- *kategorieller* ***Isomorphismus*** *in $\mathfrak{C}$, falls*

$$\exists g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(B, A): \quad g \circ f = \mathrm{id}_A, f \circ g = \mathrm{id}_B$$

- *kategorieller* ***Monomorphismus****, falls für alle g, g' mit $(f, g) \in \Phi$, $(f, g') \in \Phi$*[3] *gilt:*

$$f \circ g = f \circ g' \Rightarrow g = g'$$

- *kategorieller* ***Epimorphismus****, falls für alle g, g' mit $(g, f) \in \Phi$, $(g', f) \in \Phi$ gilt:*

$$g \circ f = g' \circ f \Rightarrow g = g'.$$

$\boxed{\mathrm{Isom}_{\mathfrak{C}}(A, B)}$ $\boxed{\mathrm{Mono}_{\mathfrak{C}}(A, B)}$ $\boxed{\mathrm{Epi}_{\mathfrak{C}}(A, B)}$

Entsprechend haben wir die Klassen (bzw. für kleine Kategorien Mengen) $\mathrm{Isom}_{\mathfrak{C}}(A, B)$, $\mathrm{Mono}_{\mathfrak{C}}(A, B)$, $\mathrm{Epi}_{\mathfrak{C}}(A, B)$.

> SATZ OHNE NUMMER. Es gilt: f ist Isomorphismus $\Rightarrow$ f ist Epimorphismus und Monomorphismus. Die Umkehrung (die z.B. in $\underline{\mathrm{Ens}}$ gilt) gilt im allgemeinen nicht.

Definition 5.15. *Sei $\mathfrak{C}$ eine Kategorie. $A \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C})$ heißt*

- ***Anfangsobjekt****, falls*

$$\forall B \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C}): \quad \#\,\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, B) = 1$$

- ***Endobjekt****, falls*

$$\forall B \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C}): \quad \#\,\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(B, A) = 1$$

Die Existenz und Eindeutigkeit von Anfangs- und Endobjekten ist nicht immer gegeben und auch voneinander unabhängig.

Beispiel 5.2.1. In $\underline{\mathrm{Ens}}$ ist jede 1-elementige Menge ein Endobjekt, $\varnothing$ ist ein Anfangsobjekt (via $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Ens}}}(\varnothing, X) = \{\mathrm{incl}_{\varnothing,X}\}$).

Beispiel 5.2.2. In $\underline{\mathrm{Mod}}_A$ ist der triviale Modul $\{0\}$ sowohl Anfangs- als auch Endobjekt.

> SATZ OHNE NUMMER. In einer Kategorie sind Anfangs- und Endobjekte (falls existent) jeweils isomorph, d.h.:
>
> (a) A, B Anfangsobjekte $\Rightarrow \exists f \in \mathrm{Isom}_{\mathfrak{C}}(A, B)$.
>
> (b) A, B Endobjekte $\Rightarrow \exists f \in \mathrm{Isom}_{\mathfrak{C}}(A, B)$.

[3] das heißt $b(g) = s(f) = b(g')$

5.3 Funktoren

Definition 5.16. *Seien $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$ Kategorien. Ein* ***kovarianter Funktor*** *von $\mathfrak{C}$ nach $\mathfrak{C}'$, geschrieben „$F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ (Funktor)“ bzw. „$F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ (kovariant)“, ist eine Abbildung von Klassen, und zwar*

$$F : \mathrm{Mor}(\mathfrak{C}) \,\dot{\cup}\, \mathrm{obj}(\mathfrak{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathfrak{C}') \,\dot{\cup}\, \mathrm{obj}(\mathfrak{C}'),$$

mit den Eigenschaften

(i) $F(\mathrm{obj}(\mathfrak{C})) \subseteq \mathrm{obj}(\mathfrak{C}')$, $F(\mathrm{Mor}(\mathfrak{C})) \subseteq \mathrm{Mor}(\mathfrak{C}')$

(ii) $\forall A \in (\mathrm{obj}(\mathfrak{C})) : \quad F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$

(iii) $\forall A, B \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C}) : \quad F(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, B) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}'}(F(A), F(B))$.

(iv) $\forall A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ *(d.h. $g, f \in \Phi_{\mathfrak{C}}$)* $: \quad F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Bemerkung. Das heißt, wir haben die folgenden kommutativen Diagramme (mit s, f, k wie in der Definition)

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mor}(\mathfrak{C}) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "b"'] & \mathrm{Mor}(\mathfrak{C}') \arrow[d, "b"] \\ \mathrm{obj}(\mathfrak{C}) \arrow[r, "F"'] & \mathrm{obj}(\mathfrak{C}') \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Phi_{\mathfrak{C}} \arrow[r, "F \times F"] \arrow[d, "\square\circ\square = k"'] & \Phi_{\mathfrak{C}'} \arrow[d, "k = \square\circ\square"] \\ \mathrm{Mor}(\mathfrak{C}) \arrow[r, "F"'] & \mathrm{Mor}(\mathfrak{C}') \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mor}(\mathfrak{C}) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "s"'] & \mathrm{Mor}(\mathfrak{C}') \arrow[d, "s"] \\ \mathrm{obj}(\mathfrak{C}) \arrow[r, "F"'] & \mathrm{obj}(\mathfrak{C}') \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{obj}(\mathfrak{C}) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\mathrm{id}_\square = e"'] & \mathrm{obj}(\mathfrak{C}') \arrow[d, "e = \mathrm{id}_\square"] \\ \mathrm{Mor}(\mathfrak{C}) \arrow[r, "F"'] & \mathrm{Mor}(\mathfrak{C}') \end{tikzcd}$$

Definition 5.17. *Sei $\mathfrak{C}$ eine Kategorie. Die Kategorie* $\boxed{\mathfrak{C}^o}$

$$\mathfrak{C}^o := \big(\mathrm{obj}(\mathfrak{C}), \mathrm{Mor}(\mathfrak{C}), b, s, e, k'\big)$$

mit $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}'}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(B, A)$ *und* $k'(g, f) := k(f, g)$ *heißt* ***oppositionelle Kategorie*** *von $\mathfrak{C}$.*

Bemerkung. Hier sind also die Objekte die selben, und die Morphismen gehen einfach in die andere Richtung.

Definition 5.18. *Seien $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ Kategorien. Dann heißt* $\boxed{\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}}$

$$\mathfrak{C} \times \mathfrak{D} := (\mathrm{obj}(\mathfrak{C}) \times \mathrm{obj}(\mathfrak{D}), \mathrm{Mor}(\mathfrak{C}) \times \mathrm{Mor}(\mathfrak{D}), \ldots)$$

mit

$$\begin{aligned}(f_1, g_1) \circ (f_2, g_2) &:= (f_1 \circ f_2, g_1 \circ g_2) \\ \mathrm{id}_{(A,B)} &:= (\mathrm{id}_A \times \mathrm{id}_B) \\ \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}\times\mathfrak{D}}((C_1, D_1), (C_2, D_2)) &:= \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(C_1, C_2) \times \mathrm{Hom}_{\mathfrak{D}}(D_1, D_2)\end{aligned}$$

*die **Produktkategorie** von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$.*

Definition 5.19. *Ein **kontravarianter Funktor** von $\mathfrak{C}$ nach $\mathfrak{C}'$ (Schreibweise: „$F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ (kontravariant)“) ist ein kovarianter Funktor $F : \mathfrak{C}^o \to \mathfrak{C}'$ bzw. $F : \mathfrak{C} \to (\mathfrak{C}')^o$.*

Bemerkung. Ein kontravarianter Funktor „dreht also die Pfeile um“.

Beispiele

Beispiel 5.3.1. Der **identische Funktor**

$$\begin{aligned}\mathrm{id}_{\mathfrak{C}} : \mathfrak{C} &\longrightarrow \mathfrak{C} \\ X &\longmapsto X \\ (X \xrightarrow{f} Y) &\longmapsto (X \xrightarrow{f} Y)\end{aligned}$$

ist kovariant.

Beispiel 5.3.2. Der **oppositionelle Funktor**

$$\begin{aligned}\Box^o_{\mathfrak{C}} : \mathfrak{C} &\longrightarrow \mathfrak{C}^o \\ X &\longmapsto X \\ (X \xrightarrow{f} Y) &\longmapsto (X \xleftarrow{f} Y)\end{aligned}$$

ist kontravariant.

$\boxed{\Box^*}$ *Beispiel* 5.3.3. Der **Dualisierungsfunktor**

$$\begin{aligned}\Box^* : \underline{\mathrm{Vect}}_K &\longrightarrow \underline{\mathrm{Vect}}_K \\ V &\longmapsto V^* := \mathrm{Hom}_K(V, K) \\ (f : V \to W) &\longmapsto \begin{pmatrix} f^* : W^* \to V^* \\ \hfill \varphi \mapsto \varphi \circ f \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ist kontravariant. (Analog $\Box^* : \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_A$.)

Beispiel 5.3.4. Der Hom-**Funktor**

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_A(M, \Box) : \mathrm{Mod}_A &\longrightarrow \mathrm{Mod}_A \\ X &\longmapsto \mathrm{Hom}_A(M, X) \\ (X \xrightarrow{f} Y) &\longmapsto \begin{pmatrix} \mathrm{Hom}(M, X) \to \mathrm{Hom}(M, Y) \\ \hfill \varphi \mapsto f \circ \varphi \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ist kovariant. ($\mathrm{Hom}(\Box, M)$ ist kontravariant, $\Box^*$ ist ja nur ein Spezialfall davon.)

Beispiel 5.3.5. Sei M A-Modul. Der **Tensorierungsfunktor**

$$\begin{aligned}\square \otimes_A M : \mathrm{Mod}_A &\longrightarrow \mathrm{Mod}_A \\ X &\longmapsto X \otimes_A M \\ (X \xrightarrow{f} Y) &\longmapsto (X \otimes_A M \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}_M} Y \otimes_A M)\end{aligned}$$

ist kovariant.

Beispiel 5.3.6. Der **Vergiss-Funktor**

$$\begin{aligned}V : \underline{\mathrm{Ab}} &\longrightarrow \underline{\mathrm{Ens}} \\ (G, +) &\longmapsto G \\ \underbrace{(G \xrightarrow{f} G)}_{\text{als } \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Ab}}}} &\longmapsto \underbrace{(G \xrightarrow{f} G)}_{\text{als Mengenabbildung}}\end{aligned}$$

ist kovarianter Funktor. (So einen Funktor gibt es nicht nur von $\underline{\mathrm{Ab}} \to \underline{\mathrm{Ens}}$, sondern etwa auch $\underline{\mathrm{Vect}} \to \underline{\mathrm{Ens}}$, $\underline{\mathrm{Top}} \to \underline{\mathrm{Ens}}$, $\underline{\mathrm{Vect}} \to \underline{\mathrm{Ab}}$, ... – allgemein von einer Unterkategorie in ihre Oberkategorie.)

Beispiel 5.3.7. Der **Potenzmengenfunktor**

$$\begin{aligned}\mathfrak{P} : \underline{\mathrm{Ens}} &\longrightarrow \underline{\mathrm{Ens}} \\ X &\longmapsto \mathfrak{P}(X) \\ (X \xrightarrow{f} Y) &\longmapsto \begin{pmatrix} \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(Y) \\ A \mapsto f(A) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ist kovariant. Allerdings ist

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}^o : \underline{\mathrm{Ens}}^o &\longrightarrow \underline{\mathrm{Ens}} \\ X &\longmapsto \mathfrak{P}(X) \\ (X \xleftarrow{f} Y) &\longmapsto \begin{pmatrix} \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(Y) \\ A \mapsto f^{-1}(A) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

kontravariant.

SATZ 5.3.1. Sei $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ ein kovarianter Funktor, X, $Y \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C})$ und $(X \xrightarrow{f} Y)$ ein Isomorphismus in $\mathfrak{C}$. Dann ist auch $F(f)$ ein Isomorphismus in $\mathfrak{C}'$.

Beweis. Wir haben ja $f^{-1} \in \mathrm{Mor}(\mathfrak{C})$, mit $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$. F darauf angewandt ergibt

$$\begin{aligned}F(f^{-1}) \circ F(f) &= F(f^{-1} \circ f) \\ &= F(\mathrm{id}_X) \\ &= \mathrm{id}_{F(X)}\end{aligned}$$

und analog $F(f) \circ F(f^{-1}) = \mathrm{id}_{F(Y)}$. Damit sind $F(f)$ und $F(f^{-1})$ zueinander inverse Morphismen, also Isomorphismen in $\mathfrak{C}'$. □

KOROLLAR. Auch kontravariante Funktoren erhalten Isomorphismen.

Beweis. Ein Isomorphismus in $\mathfrak{C}$ ist natürlich gleichzeitig ein Isomorphismus (in die andere Richtung) in $\mathfrak{C}^o$. □

FAZIT. Funktoren erhalten Isomorphismen.

Verknüpfung von Funktoren

Definition 5.20.

(1) Seien $\mathfrak{C}' \xrightarrow{F} \mathfrak{C} \xrightarrow{G} \mathfrak{C}''$ *zwei kovariante Funktoren. Dann ist*

$$G \circ F : \mathfrak{C}' \to \mathfrak{C}''$$

als kovarianter Funktor definiert durch

(i) $\forall A \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C}') : \quad (G \circ F)(A) := G(F(A))$

(ii) $\forall f \in \mathrm{Mor}(\mathfrak{C}') : \quad (G \circ F)(f) := G(F(f))$

(2) Analog definieren wir dies für „ko $\circ$ *kontra* $\mapsto$ *kontra“, „kontra* $\circ$ *ko* $\mapsto$ *kontra“, „kontra* $\circ$ *kontra* $\mapsto$ *ko“.*

Funktormorphismen

Definition 5.21. *Seien* $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$, $G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ *zwei Funktoren gleichen Typs (also beide kovariant oder beide kontravariant).*

Ein ***Funktormorphismus*** *(bzw. eine* ***natürliche Transformation****) von F nach G ist eine Abbildung*

$$h : \mathrm{obj}(\mathfrak{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathfrak{D})$$

mit

(i) $\forall C \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C}) : h(C) \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{D}}(F(C), G(C))$

(ii) $\forall C_1 \xrightarrow{f} C_2 \in \mathfrak{C}$ *kommutiert das Diagramm:*

$$\begin{tikzcd}
F(C_1) \arrow[r, "h(C_1)"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(C_1) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(C_2) \arrow[r, "h(C_2)"'] & G(C_2)
\end{tikzcd}$$

Die Klasse der Funktormorphismen zwischen zwei Funktoren bezeichnen wir mit $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Func}}(F, G)$. $\boxed{\mathrm{Hom}_{\mathrm{Func}}(F, G)}$

Definition 5.22. *Ein Funktormorphismus h von F nach G, $\mathfrak{C} \xrightarrow[G]{F} \mathfrak{D}$, heißt* ***Funktorisomorphismus****, falls für alle $C \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C})$ gilt: $h(C) : F(C) \cong G(C)$ ist (kategorieller) Isomorphismus in $\mathfrak{D}$.*

Definition 5.23. *Für zwei Kategorien $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ ist $\underline{\mathrm{Funct}}(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})$ die* ***Kategorie der kovarianten Funktoren*** *von $\mathfrak{C}$ nach $\mathfrak{D}$:* $\boxed{\underline{\mathrm{Funct}}(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})}$

$$\begin{aligned}\mathrm{obj}(\underline{\mathrm{Funct}}(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})) &:= \{F \mid F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D} \text{ (kovarianter Funktor)}\}\\ \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Funct}}(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})}(F, G) &:= \mathrm{Hom}_{\mathrm{Func}}(F, G)\end{aligned}$$

Definition 5.24. *Seien $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ zwei Kategorien.*

- *$\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ heißen* ***isomorphe Kategorien****, falls es Funktoren*

  $$\begin{aligned}F &: \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}\\ G &: \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}\end{aligned}$$

  gibt, mit

  $$\begin{aligned}F \circ G &= \mathrm{id}_{\mathfrak{D}}\\ G \circ F &= \mathrm{id}_{\mathfrak{C}}.\end{aligned}$$

- *$\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ heißen* ***(kategoriell) äquivalent****, falls*

  $$\begin{aligned}&\exists F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D},\\ &\exists G : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C},\\ &\quad \exists h \in \mathrm{Isom}_{\underline{\mathrm{Funct}}(\mathfrak{D}, \mathfrak{D})}(F \circ G, \mathrm{id}_{\mathfrak{D}}),\\ &\quad \exists l \in \mathrm{Isom}_{\underline{\mathrm{Funct}}(\mathfrak{C}, \mathfrak{C})}(G \circ F, \mathrm{id}_{\mathfrak{C}}).\end{aligned}$$

Bemerkung. Äquivalenz von Kategorien ist also offenbar eine schwächere Bedingung als Isomorphie.

Adjungierte Funktoren

Definition 5.25. *Seien $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ und $G : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ kovariante Funktoren zwischen* lokal kleinen *Kategorien. Man erhält daraus zwei weitere Funktoren*

$$\begin{aligned}\Phi &: \mathfrak{C} \times \mathfrak{D} \longrightarrow \underline{\mathrm{Ens}}\\ \Psi &: \mathfrak{C}^o \times \mathfrak{D} \longrightarrow \underline{\mathrm{Ens}}\end{aligned}$$

via

$$\begin{aligned}(C, D) &\overset{\Phi}{\longmapsto} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{D}}(F(C), D)\\ (C, D) &\overset{\Psi}{\longmapsto} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(C, G(D))\end{aligned}$$

Man nennt nun F und G ***adjungiertes Funktorenpaar*** *(bzw. F* ***linksadjungiert*** *zu G bzw. G* ***rechtsadjungiert*** *zu F), falls*

$$\exists h \in \operatorname{Isom}(\Phi, \Psi).$$

Bemerkung. Die Bedingung bedeutet, dass, für alle $C_1, C_2 \in \operatorname{obj}(\mathfrak{C})$, $D_1, D_2 \in \operatorname{obj}(\mathfrak{D})$, $f : C_1 \to C_2$, $g : D_1 \to D_2$ das folgende Diagramm in $\underline{\text{Ens}}$ kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_{\mathfrak{D}}(F(C_1), D_1) \arrow[r, "h(C_1,D_1)"] \arrow[d, "\Phi(f,g)"'] & \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(C_1, G(D_1)) \arrow[d, "\Psi(f,g)"] \\
\operatorname{Hom}_{\mathfrak{D}}(F(C_2), D_2) \arrow[r, "h(C_2,D_2)"'] & \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(C_2, G(D_2))
\end{tikzcd}$$

Bemerkung. Adjungierte Funktoren sind bis auf Isomorphie eindeutig, d.h. sind (F, G), (F', G), (F, G') jeweils adjungierte Funktorenpaare, so sind F und F' sowie G und G' in $\underline{\text{Funct}}$ isomorph.

Beispiel 5.3.8. Seien $\mathfrak{C} := \mathfrak{D} := \operatorname{Mod}_A$, $M \in \operatorname{obj}(\operatorname{Mod}_A)$ fixiert,

$$F := \square \otimes_A M : \operatorname{Mod}_A \to \operatorname{Mod}_A,$$
$$G := \operatorname{Hom}_A(M, \square) : \operatorname{Mod}_A \to \operatorname{Mod}_A .$$

Diese beiden Funktoren sind adjungiert, mittels $h(X, Y)(\varphi)(x)(m) := \varphi(x \otimes m)$:

$$\begin{tikzcd}
\varphi \arrow[rr, mapsto] & & h(X,Y)(\varphi) \\
\operatorname{Hom}_A(M \otimes_A X, Y) \arrow[rr, equal, "\sim", "h(X,Y)"'] \arrow[dr, equal, "\sim"] & & \operatorname{Hom}_A(X, \operatorname{Hom}_A(M, Y)) \arrow[dl, equal, "\sim"'] \\
& L^2_A(M, X; Y) &
\end{tikzcd}$$

Frage. Unter welchen Bedingungen besitzt ein Funktor $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ einen linksadjungierten bzw. rechtsadjungierten Funktor $G : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$?

Beispiel 5.3.9. Der Vergissfunktor $V : \underline{\text{Ab}} \to \underline{\text{Ens}}$ hat als Linksadjungierten den Funktor $\boxed{F_{\mathbb{Z}}}$ $F_{\mathbb{Z}} : \underline{\text{Ens}} \to \underline{\text{Ab}}$ ($F_{\mathbb{Z}}(X) := \bigoplus_{x \in X} x \cdot \mathbb{Z}$ bezeichnet die freie abelsche Gruppe mit Basis X):

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j"'] & G \\
F_{\mathbb{Z}}(X) \arrow[ur, "\hat{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\operatorname{Hom}_{\underline{\text{Ens}}}(X, V(G)) \cong \operatorname{Hom}_{\underline{\text{Ab}}}(F_{\mathbb{Z}}(X), G)$$
$$f \mapsto \hat{f}$$
$$g \circ j \mapsfrom g$$

Darstellbare Funktoren

Betrachte einen Funktor

$$F : \mathfrak{C} \longrightarrow \underline{\text{Ens}}$$
$$X \longmapsto F(X)$$
$$\left(X \xrightarrow{f} Y\right) \longmapsto F(f) \in \operatorname{Abb}(F(X), F(Y))$$

Beispiel 5.3.10. Sei $A \in \mathfrak{C}$ fixiert, $\mathfrak{C}$ lokal kleine Kategorie. Dann haben wir den Hom-Funktor

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, \square) : \mathfrak{C} &\longrightarrow \underline{\mathrm{Ens}} \\ X &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, X) \\ (X \xrightarrow{f} Y) &\longmapsto \begin{pmatrix} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, Y) \\ \varphi \mapsto f \circ \varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Definition 5.26. *Ein Funktor* $F : \mathfrak{C} \to \underline{\mathrm{Ens}}$ *heißt* ***darstellbarer Funktor****, falls* $\exists A_0 \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C})$ *und* $\exists h \in \mathrm{Isom}_{\underline{\mathrm{Funct}}}(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A_0, \square), F)$*, d.h., für alle* $Y \in \mathrm{obj}(C)$*:*

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A_0, Y) \xrightarrow[h_Y]{\sim} F(Y)$$

und $\forall (Y \xrightarrow{f} Z) \in \mathrm{Mor}(\mathfrak{C})$ *kommutiert das Diagramm:*

$$\begin{tikzcd} \varphi \arrow[d, mapsto] & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A_0, Y) \arrow[r, "h(Y)", "\sim"'] \arrow[d, "\mathrm{hom}(f)"] & F(Y) \arrow[d, "F(f)"] \\ f \circ \varphi & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A_o, Z) \arrow[r, "\sim", "h(Z)"'] & F(Z) \end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{Satz 5.3.2.}}$ *(Darstellbarkeit durch universelle Punkte)*
Sei $F : \mathfrak{C} \to \underline{\mathrm{Ens}}$ kovarianter Funktor, $\mathfrak{C}$ lokal-klein. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) F ist darstellbar (etwa durch $A_0 \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C})$)

(2) $\exists A_0 \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C})$, $\exists \eta \in F(A_0)$ so dass $\forall C \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C}), \forall \omega \in F(C)$: $\exists! f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A_0, C) : f(\eta) = \omega$.

Beweis. Übung. $\square$

Definition 5.27. *Ein solches Paar* (A_0, η) *heißt auch* ***universeller Punkt*** *für* F*.*

Teil III

Algebraische Geometrie I

Übersicht der Vorlesung

§1 Anliegen der algebraischen Geometrie und affine algebraische Mengen

§2 Topologie algebraischer Mengen

§3 Verschwindungsideale und Hilberts Nullstellensatz (Version I)

§4 Noether-Normalisierung von k-Algebren und der allgemeine HNS

§5 Ganze Ringerweiterungen, „going-up“ (Cohen/Seidenberg) und weitere Folgerungen aus der Noether-Normalisierung.

§6 Koordinatenringe und die Kategorie der affinen algebraischen Mengen

§7 Rationale Funktionenkörper, Garben und geringte Räume

§8 Geometrische Invariantentheorie affiner Varietäten (Hilbert-Nagata-Mumford-Theorie)

6 Einführung in die Algebraische Geometrie

6.1 Anliegen der algebraischen Geometrie und affine algebraische Mengen

Sei k Körper, $n \in \mathbb{N}$, $k[X_1, \cdots, X_n]$ **Polynomring** über k in n Variablen. Jedes (formale) **Polynom** $f \in k[X_1, \cdots, X_n]$ hat die eindeutige Gestalt $\boxed{k[X_1, \cdots, X_n]}$

$$f = \sum_{i \in \mathbb{N}_0^n} a_{i_1 \dots i_n} \cdot X_1^{i_1} \cdot \dots \cdot X_n^{i_n},$$

wobei $a_{i_1 \dots i_n} \in k$ und $a_{i_1 \dots i_n} = 0$ p.p.

Bemerkung.

(1) $k[X_1, \cdots, X_n] \cong k[X_1, \cdots, \widehat{X_i}, \cdots, X_n][X_i]$, so dass $f = \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu(X_1, \cdots, , \widehat{X_i}, \cdots, X_n) \cdot X_i^\nu$.

(2) Man hat die natürliche Bewertungsabbildung

$$\beta : k[X_1, \dots X_n] \to \mathrm{Abb}(k^n, k)$$

gegeben durch

$$\beta(f)(c_1, \cdots, c_n) = \sum_{(i_1, \cdots, i_n) \in \mathbb{N}_0^n} a_{i_1 \dots i_i} \cdot c_1^{i_1} \cdot \dots \cdot c_n^{i_n},$$

für alle $(c_1, \dots c_n) \in k^n$.

Dabei sind $k[X_1, \dots X_n]$ und $\mathrm{Abb}(k^n, k)$ kommutierende Ringe, sogar k-Algebren und β ist offenbar ein k-Algebra-Homomorphismus, d.h. Ringhomomorphismus, der k fest lässt.

Definition 6.1.

$$\mathrm{Poly}_n(k) := \mathrm{im}(\beta) \subset \mathrm{Abb}(k^n, k)$$

heißt ***Ring der polynomialen Funktionen auf*** k^n. $\boxed{\mathrm{Poly}_n(k)}$

Es ist

$$\mathrm{Poly}_n(k) = \{\varphi \in \mathrm{Abb}(k^n, k) \mid \exists f \in k[X_1, \dots X_n] : \varphi = \beta(f)\}$$

Damit ist $\beta : k[X_1, \cdots, X_n] \twoheadrightarrow \mathrm{Poly}_n(k)$ ein surjektiver Ringhomomorphismus.

> $\boxed{\text{Satz 6.1.1.}}$ Sei k Körper, $n \in \mathbb{N}$, β der Bewertungshomomorphismus.
> Dann gilt:
> k unendlich $\Leftrightarrow \beta$ injektiv ($\Leftrightarrow \beta$ bijektiv).

Beweis. $\Rightarrow$ per Induktion über n:

$n = 1$: Wir betrachten $k[X] \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} \mathrm{Poly}_n(k)$. Es ist

$$\ker(\beta) = \left\{ \sum_{i=0}^{r} a_i \cdot X^i \in k[X] \,\middle|\, \sum_{i=0}^{r} a_i \cdot c^i = 0 \forall c \in k \right\}.$$

D.h. jedes Element von $\ker \beta$ muss unendlich viele Nullstellen haben, aber jedes $f \in k[X]$, $f \neq 0$ hat bekanntlich nur $\deg(f) < \infty$ viele Nullstellen. Damit ist $\ker(\beta) = 0$, also β Monomorphismus (und damit Isomorphismus).

$n \geq 2$: Wir betrachten also allgemein $k[X_1, \cdots, X_n] \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} \mathrm{Poly}_n(k)$. Jedes $f \in k[X_1, \ldots X_n]$ hat dabei die Form

$$f = \sum_{i=0}^{N} g_i(X_1, \ldots X_{n-1}) \cdot X_n^i,$$

mit $g_i(X_1, \cdots, X_{n-1}) \in k[X_1, \ldots X_{n-1}]$. Ist $\beta(f) = 0$, so gilt $\forall c \in k^n$

$$0 = \sum_{i=0}^{n} g_i(c_1, \ldots c_{n-1}) \cdot c_n^i,$$

d.h. $\forall c \in k^{n-1}$ hat

$$\hat{f}_c(X_n) := \sum_{i=1}^{n} g_i(c_1, \cdots, c_{n-1}) \cdot X_n^i \in k[X_n]$$

unendlich viele Nullstellen in k. Damit ist $\hat{f}_c = 0$, also

$$g_i(c_1, \cdots, c_{n-1}) = 0 \quad \forall i, \forall c \in k^{n-1}.$$

Es ist also

$$\beta(g_i) = 0 \in \mathrm{Poly}_{n-1}(k) \quad \forall i,$$

und nach Induktionsvoraussetzung $g_i = 0 \quad \forall i$, also

$$f = \sum_{i=0}^{N} g_i \cdot X_n^i = 0.$$

Damit ist also auch hier $\ker(\beta) = (0)$, also

$$\beta : k[X_1, \cdots, X_n] \xrightarrow{\sim} \mathrm{Poly}_n(k)$$

ist injektiv, also sogar Isomorphismus.

$\Leftarrow$: Ist k endlich, dann ist $k[X_1, \cdots, X_n]$ trotzdem unendlich, aber

$$\mathrm{Abb}(k^n, k) \supseteq \mathrm{Poly}_n(k)$$

hat Mächtigkeit $|k|^{|k|^n} < \infty$, also kann β nicht bijektiv sein. $\square$

Bemerkung. Z.B. ist, wenn k endlicher Körper,

$$\beta\left(X_n^{|k|} - X_n\right) = 0 \in \mathrm{Poly}_n(k)$$

aber $X_n^{|k|} - X_n \neq 0$.

Fazit. Ist k unendlich, so darf man $k[X_1, \ldots X_n]$ und $\mathrm{Poly}_n(k)$ via β identifizierten.

SATZ 6.1.2. Ist $k = \overline{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, so ist k unendlich (und also β Isomorphismus).

Vereinbarung 6.2. *Ab jetzt sei – falls es nicht ausdrücklich anders gesagt wird – k als* unendlicher Körper *beliebiger Charakteristik vorausgesetzt (und also β ein Isomorphismus).*

Die Algebraische Geometrie ist in der ursprünglichen und naivsten Form das Studium der Nullstellenmengen polynomialer Gleichungssysteme.

Definition 6.3. *Sei $\varnothing \neq S \subset k[X_1, \ldots X_n]$ Menge, $S = \{p_i \mid i \in I\}$ mit Indizierung.* $\boxed{V(S)}$

$$V(p_i \mid i \in I) := V(S) := \{(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in k^n \mid \forall f \in S : f(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = 0\}$$

ist die Menge der gemeinsamen Nullstellen von aller $f \in S$ oder auch kurz ***Nullstellenmenge*** *von S. Eine so darstellbare Menge heißt auch (konkrete)* ***affine algebraische Menge in*** *k^n.*

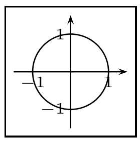
Bemerkung. Man schreibt auch $\mathbb{A}_k^n := k^n$ für den *n-dimensionalen affinen Raum über k.* $\boxed{\mathbb{A}_k^n}$

Dabei ignoriert man die Vektorraumstruktur von k^n und betrachtet nur die affine (bzw. topologische) Struktur, welche durch die Nullstellenmengen (wie im folgenden betrachtet) induziert wird.

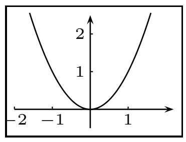
Elementare Beispiele für affine algebraische Mengen

Beispiel 6.1.1. $n := 2$, $k := \mathbb{R}$. Betrachte

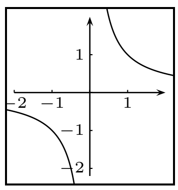
- $V(\{X^2 + Y^2 - 1\}) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid |a^2 + b^2 = 1\}$ ist der **Einheitskreis**.
- $V(Y - X^2) = V(\{Y - X^2\})$ ist die **Normalparabel**.
- $V(X \cdot Y - 1)$ ist die **Einheitshyperbel**.



Einheitskreis



Normalparabel



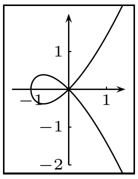
Hyperbel

Beispiel 6.1.2. $n = 2$, $k := \mathbb{R}$,

$$V(Y^2 - X^3 - X^2) = \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid b^2 = a^3 + a^2\right\}$$

Bemerkung. Diese affine, algebraische Menge $V(Y^2 - X^3 - X^2)$ ist eine sogenannte **ebene affine Kurve** vom Grad 3. Sie kann parametrisiert werden:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t-1, t^3 - t) \end{aligned}$$



$V(Y^2 - X^3 - X^2)$

Behauptung.

(1) $\varphi(\mathbb{R}) = V(Y^2 - X^3 - X^2)$

(2) $\varphi|_{\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}} : \mathbb{R} \setminus \{-1,1\} \xrightarrow{\sim} V(Y^2 - X^3 - X^2) \setminus \{(0,0)\}$ ist sogar bijektiv.

Beweis. Einsetzen $(Y^2 - X^3 - X^2)(\varphi(t))$ zeigt:

$$\begin{aligned} (t^3 - t)^2 &= t^6 - 2t^4 + t^2 \\ &= \left(t^6 - 3t^4 + 3t^2 - 1\right) + \left(t^4 - 2t^2 + 1\right) \\ &= (t^2-1)^3 + (t^2-1)^2, \end{aligned}$$

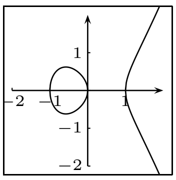
damit haben wir die Inklusion $\subseteq$ in (1).

Umgekehrt: Für alle $(a,b) \in V(Y^2 - X^3 - X^2) \setminus \{(0,0)\}$, d.h. mit $a^3 = b^2 - a^2$ und $a \neq 0$ ist

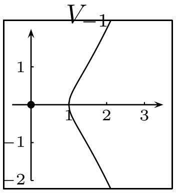
$$\varphi\Big(\frac{b}{a}\Big) = \left(\frac{b^2}{a^2} - 1, \frac{b^3}{a^3} - \frac{b}{a}\right) = \left(\frac{b^2 - a^2}{a^2}, \frac{b(b^2-a^2)}{a^3}\right) = \left(\frac{a^3}{a^2}, \frac{ba^3}{a^3}\right) = (a,b)\,.$$

Außerdem ist $\varphi(1) = \varphi(-1) = (0,0)$, also haben wir auch $\supseteq$. (2) ergibt sich damit auch (Umkehrfunktion $(a,b) \mapsto \frac{b}{a}$). $\square$

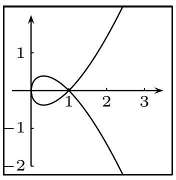
Dies ist ein Beispiel für eine singuläre elliptische Kurve.



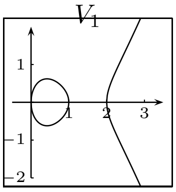
V_{-1}



V_0



V_1



V_2

Beispiel 6.1.3. $n := 2$, $k := \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir definieren das Polynom

$$s_\lambda := \Big(Y^2 - X \cdot (X-1) \cdot (X - \lambda)\Big) \in \mathbb{R}[X,Y]$$

und damit

$$V_\lambda := V(s_\lambda) = \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid b^2 = a3 - (\lambda+1)a^2 + \lambda a\right\}.$$

Es ist also:

$$\begin{aligned} \lambda = -1 : &\qquad V_{-1} = V\left(Y^3 - X^3 - X\right) \\ \lambda = 0 : &\qquad V_0 = V\left(Y^2 - X^2(X-1)\right) \\ \lambda = 1 : &\qquad V_1 = V\left(Y^2 - X(X-1)^2\right) \\ \lambda = 2 : &\qquad V_2 = V\left(Y^2 - X(X-1)(X-2)\right) \end{aligned}$$

(In Beispiel 2.2.8 auf Seite 109 wurde gezeigt, dass s_λ für $\lambda \notin \{0,1\}$ irreduzibel ist.)

Beispiel 6.1.4.

(a) Betrachte $\boxed{\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})}$

$$\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) := \left\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det A = 1\right\} \subset \mathbb{R}^{n^2},$$

wobei $\boxed{\det}$

$$\det := \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot X_{1\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot X_{n\sigma(n)} \in \mathbb{R}[X_{11},\cdots,X_{nn}]$$

das Determinantenpolynom ist. Damit ist $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) = V(\det -1)$ eine affine algebraische Menge. Aufgrund der mit der algebraischen struktur kompatiblen Gruppenstruktur redet man auch von einer **linearen algebraischen Gruppe**.

(b) $\mathrm{O}(n,\mathbb{R}) := \left\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A\cdot A^t = E_n\right\}$ ist eine affine algebraische Menge in $\mathbb{R}^{n^2}$, definiert durch n^2 Gleichungen: $\boxed{\mathrm{O}(n,\mathbb{R})}$

$$\begin{aligned}\mathrm{O}(n,\mathbb{R}) &= V\left(\sum_{\nu=1}^{n} X_{i\nu}\cdot X_{\nu j} - \delta_{ij} \,\middle|\, 1\le i,j\le n\right)\\ &= V(\underline{X}\cdot\underline{X} - I_n)\end{aligned}$$

(c) $\mathrm{U}(n,\mathbb{C}) := \left\{A\in\mathbb{C}^{n\times n} \mid A^t\cdot\overline{A} = I_n\right\}$ und $\boxed{\mathrm{U}(n,\mathbb{C})}$

(d) $\mathrm{SU}(n,\mathbb{C}) := \left\{A\in\mathbb{C}^{n\times n} \mid A^t\cdot\overline{A} = I_n \wedge \det A = 1\right\}$ sind nicht über $\mathbb{C}$, wohl aber über $\mathbb{R}$ affine algebraische Mengen. $\boxed{\mathrm{SU}(n,\mathbb{C})}$

Beispiel 6.1.5. Betrachte

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3\\ t &\mapsto (t,t^2,t^3)\end{aligned}$$

BEHAUPTUNG. $\varphi(\mathbb{R})$ ist affine algebraische Menge, nämlich $$\begin{aligned}&V(Z-XY, Z-X^3, Y-X^2, Y\cdot Z - X^5,\ldots)\\ &\qquad = V(Z-XY, Y-X^2).\end{aligned}$$

Beweis. Übungsaufgabe. ☐

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbb{R}) &= \left\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, \operatorname{Rg}\begin{pmatrix}1 & a & b\\ a & b & c\end{pmatrix} < 2\right\}\\ &= \left\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 \mid 1b-aa=0, 1c-ba=0, ac-bb=0\right\}\end{aligned}$$

Dies etabliert den Ort $\varphi(\mathbb{R})$ als sogenannte **Determinanten-Varietät** (nach dem Minorenkriterium der linearen Algebra).

6.2 Topologie algebraischer Mengen

Erinnerung. Sei k unendlicher Körper, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{A}_k^n = k^n$. Sei $\varnothing \neq S \subset k[X_1, \cdots, X_n]$ beliebige Menge von Polynomen. $V(S) = \{a = (a_1, \cdots, a_n) \in k^n \mid f(a) = 0 \forall f \in S\}$ heißt dann *affine algebraische Menge.*

Fragen.

(1) Wann ist $V(S) \neq \varnothing$? (z.B. ist $V(X^2+1) = \varnothing$ für $k = \mathbb{R}$.

(2) Falls $V(S) \neq \varnothing$, wie groß ist $V(S)$?

(3) Welche „geometrischen“ Eigenschaften hat eine solche Menge $V(S)$, welche topologischen?

(4) Wie sind die algebraischen Mengen $V(S)$ zueinander konfiguriert?

Jedenfalls hat man eine Abbildung

$$\begin{aligned} V : \mathfrak{P}(k[X_1, \cdots, X_n]) \setminus \{\varnothing\} &\twoheadrightarrow \{Z \in \mathfrak{P}(\mathbb{A}_k^n) \mid Z \text{ aff. alg. Menge}\} \\ S &\mapsto V(S) \end{aligned}$$

Bemerkung.

(1) $V(0) = \mathbb{A}_n^k$

(2) $V(\alpha) = \varnothing$ für $\alpha \in k[X_1, \cdots, X_n]^* = k^*$.

Damit sind $\varnothing$ und $\mathbb{A}_k^n$ affine algebraische Mengen.

$\boxed{\sqrt{\mathfrak{a}}}$ *Erinnerung.* Für ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ (in einem Ring A) ist

$$\sqrt{\mathfrak{a}} := \{a \in A \mid \exists n : a^n \in \mathfrak{a}\}$$

das **Radikal** von $\mathfrak{a}$.

Es gilt $\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$ und $\sqrt{\sqrt{\mathfrak{a}}} = \sqrt{\mathfrak{a}}$, wir haben es also mit einem Hüllenoperator zu tun.

Ein Ideal $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$ nennt man auch **radizielles Ideal**.

$\boxed{\mathfrak{a}_S}$ $\boxed{\langle S\rangle}$ $\boxed{\mathrm{Ideal}(S)}$

$\boxed{\text{SATZ 6.2.1.}}$ Affine algebraische Mengen in $\mathbb{A}_k^n$, $n \geq 1$ haben folgende Eigenschaften:

(a) Sei $\varnothing \neq S \subset k[X_1, \cdots, X_n]$,

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_S &:= \langle S\rangle := \operatorname{Ideal} S \\ &:= \left\{ \sum_{j=1}^{r} g_i \cdot f_i \,\middle|\, r \in \mathbb{N}, f_i \in S, g_i \in k[X_1, \cdots, X_n] \right\}, \end{aligned}$$

dann ist $V(S) = V(\mathfrak{a}_S) = V(\sqrt{\mathfrak{a}_S})$.

(b) $\forall S$ gilt: $V(S) = V(f_1, \cdots, f_r)$, mit $r \in \mathbb{N}$, $f_i \in \mathfrak{a}_S$.

(c) Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset k[X_1, \cdots, X_n]$, so

$$V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}).$$

(d) Sei $(\mathfrak{a}_i)_{i\in I}$ Familie von Idealen, so gilt

$$\bigcap_{i\in I} V(\mathfrak{a}_i) = V\left(\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i\right) = V\left(\bigcup_{i\in I} \mathfrak{a}_i\right).$$

(e)

$$T := \{Z \supset \mathbb{A}_k^n \mid Z \text{ aff. alg. Menge}\}$$

definiert abgeschlossene Mengen einer Topologie auf $\mathbb{A}_k^n$. Sie heißt **Zariski-Topologie**.

Beweis. Allgemein gilt offenbar:

$$\varnothing \neq S \subseteq S' \quad \Rightarrow \quad V(S) \supseteq V(S').$$

(a) $S \subseteq \mathfrak{a}_S \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}_S} \quad \Rightarrow \quad V(S) \supseteq V(\mathfrak{a}_S) \supseteq V(\sqrt{\mathfrak{a}_S})$.
Umgekehrt: Sei $a \in V(S)$, $f \in \sqrt{\mathfrak{a}_S}$. Dann ex. $n \in \mathbb{N}$ mit $f^n \in \mathfrak{a}_s$, also $f^n = \sum_{i=1}^r g_i \cdot f_i$, $f_i \in S$, $g_i \in k[X_1, \cdots, X_n]$. Dann ist

$$f^n(a) = \sum_{i=1}^{r} g_i(a) \cdot \underbrace{f_i(a)}_{=0} = 0,$$

und da k ein Körper (also reduziert) ist, auch $f(a) = 0$. Also ist $a \in V(\sqrt{\mathfrak{a}_S})$, also $V(S) \subseteq V(\sqrt{\mathfrak{a}_S})$. □(a)

Fazit. $Z \in \mathbb{A}_k^n$ ist affine algebraische Menge

$$\Leftrightarrow$$

$Z = V(\mathfrak{a})$ für ein $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$.

(b) $V(S) \subseteq \mathbb{A}_k^n$ algebraische Menge, so ist $V(S) = V(\sqrt{\mathfrak{a}_s})$, $\mathfrak{a}_S \subset k[X_1, \cdots, X_n]$, $k[X_1, \cdots, X_n]$ noethersch nach Hilberts Basissatz. Damit ist $\mathfrak{a}_S$ endlich erzeugt, etwa

$$\mathfrak{a}_S = \sum_{i=1}^{r} k[X_1, \cdots, X_n] \cdot f_i, \quad f_i \in \mathfrak{a}_S, r \in \mathbb{N}.$$

Also ist $V(S) = V(\mathfrak{a}_S) = V(f_1, \cdots, f_n)$. □(b)

(c) Seien $V(\mathfrak{a}), V(\mathfrak{b}) \subseteq \mathbb{A}_k^n$ affine, alg. Mengen. Es ist

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \begin{cases} \subseteq \mathfrak{a} \\ \subseteq \mathfrak{b} \end{cases},$$

also

$$V(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) \supseteq V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \begin{cases} \subseteq V(\mathfrak{a}) \\ \subseteq V(\mathfrak{b}) \end{cases},$$

d.h.

$$V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}).$$

Sei nun $a \in V(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})$. Angenommen, $a \notin V(\mathfrak{a}) \wedge a \notin V(\mathfrak{b})$, dann

$$\exists f \in \mathfrak{a} : f(a) \neq 0 \wedge \exists g \in \mathfrak{b} : g(a) \neq 0,$$

also ist

$$0 \neq f(a) \cdot g(a) = \underbrace{(f \cdot g)}_{\in \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}}(a) = 0.$$

Somit ist die Annahme falsch und $a \in V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$, also

$$V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}).$$

□(c)

(d) Sei $(\mathfrak{a}_i)_{i \in I}$ Familie von Idealen in $k[X_1, \cdots, X_n]$.

$$\begin{aligned} & \forall i \in I: \quad \mathfrak{a}_i \subseteq \sum_{j \in I} \mathfrak{a}_j \\ \Rightarrow \quad & \forall i \in I: \quad V\left(\sum_{j \in I} \mathfrak{a}_j\right) \subseteq V(\mathfrak{a}_i) \\ \Rightarrow \quad & V\left(\sum_{j \in I} \mathfrak{a}_j\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i) \end{aligned}$$

Umgekehrt: Sei $a \in \bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i)$, $f \in \sum_{j \in I} \mathfrak{a}_j$. Dann ist $f = \sum_{k=1}^{r} f_k$ mit $r \in \mathbb{N}$, $i_1, \dots i_r \in I$, $(f_1, \cdots, f_r) \in \bigtimes_{k=1}^{r} \mathfrak{a}_{i_k}$. Damit ist

$$f(a) = \sum_{k=1}^{r} \underbrace{f_k(a)}_{=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad a \in V\left(\sum_{j \in I} \mathfrak{a}_j\right).$$

□(d)

(e) folgt aus (a), (b) und (c). □(e)

□

Bemerkung. zu (b): Im Spezialfall $k = \mathbb{R}$ gilt sogar:

$$V(S) = V(f_1, \cdots, f_r) = V(f_1^2, \cdots, f_r^2) = V\left(\sum_{i=1}^{r} f_i^2\right),$$

d.h. jede affine algebraische Menge in $\mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$ ist Nullstellenmenge schon *eines einzigen Polynoms* in $\mathbb{R}[X_1, \dots X_n]$.

Bemerkung.

(1) $k = \mathbb{R}$, $\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$. Es ist

$$\mathrm{Abg}_{\mathrm{Zar}}(\mathbb{R}) = T = \{V(f) \mid f \in \mathbb{R}[X]\},$$

$\mathbb{R}[X]$ ist Hauptidealring, d.h. $T = \{\varnothing, \mathbb{R}\} \cup \{Z \subset \mathbb{R} \mid \mathbb{Z} \text{ endlich}\}$ (etwa $\{a_1, \dots a_n\} = V(X - a_1, \cdots, X - a_n)$), und

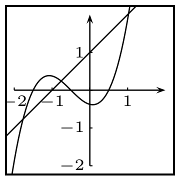
$$\mathrm{Off}_{\mathrm{Zar}}(\mathbb{R}) = \{\varnothing, \mathbb{R}\} \cup \{Z \subset \mathbb{R} \mid |\mathbb{R} \setminus Z| < \infty\}.$$

Allgemein gilt: Die Zariski-Topologie auf $\mathbb{A}^1_k$, k beliebiger unendlicher Körper, ist genau die Kofinite Topologie.

(2) Ist $k = \mathbb{R}$ oder $k = \mathbb{C}$, so ist die Zariski-Topologie auf $\mathbb{A}^n_k$ stets gröber als die euklidische Topologie, d.h.

$$\mathcal{T}_{\mathrm{Zar}} \subsetneq \mathcal{T}_{\mathrm{eukl}}.$$

Die Zariski-abgeschlossenen Mengen in $\mathbb{A}^n_k$ sind i.a. (mit Ausnahme von $\mathbb{A}^n_k$ selbst) „sehr klein“ (Maß 0), die Zariski-offenen (außer $\varnothing$) „sehr groß“



Kurve mit Gerade

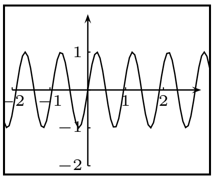
(3) *Notwendiges Kriterium für die „Algebraizität“ von Teilmengen $Z \subset \mathbb{A}^2_k$, k unendlich:* Sei $\varnothing \neq ZOV(F_1, \cdots, F_r) \subset \mathbb{A}^2_k$ eine ebene, affine algebraische Menge über k, $F_i \in k[X, Y]$ und L beliebige affine Gerade, d.h. $L = V(\tilde{l})$, $\tilde{l} = aX + bY + c$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $a \neq 0$, also $L = V(\tilde{l}) = V(\underbrace{X + \beta Y + \gamma}_{=:l})$, mit $\beta = \frac{b}{a}, \gamma = \frac{c}{a}$.

Frage. Wie sieht $Z \cap L$ aus?

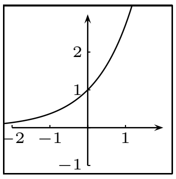
Umstellen von $l = 0$ ergibt $X = -\beta Y - \gamma$, einsetzen in $F_i(X, Y)$ liefert $\tilde{F}_i(Y) \in k[Y]$. $V(\tilde{F}_i \mid i \in \{1, \dots r\})$ ist also entweder $\varnothing$, ganz k oder endlich, also ist ebenso $Z \cap L$ entweder L, $\varnothing$ oder endlich.

> FAZIT. Die Schnittmenge einer algebraischen Menge in $\mathbb{A}_k^2$ mit einer Geraden ist entweder leer, die ganze Gerade oder endlich.

Beispiel 6.2.1.



$Y = \sin(\frac{X}{2\pi})$



Z

> BEHAUPTUNG. $Z := \{(t, \sin t) \mid t \in \mathbb{R}\} \subsetneq \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$, der **Graph des Sinus**, ist nicht algebraisch.

Beweis. Betrachte $L := V(Y)$ (X-Achse). $L \cap Z = \pi \cdot \mathbb{Z} \times \{0\}$ ist unendlich, erfüllt also das obige Fazit nicht. $\square$

Frage. Ist dieses Kriterium auch hinreichend?

Antwort. Nein. Ein Gegenbeispiel ist $Z := \left\{(t, e^t) \mid t \in \mathbb{R}\right\} \subsetneq \mathbb{R}^2$, Z erfüllt die Bedingung, ist aber nicht affin algebraisch.

Bemerkung. Sei k unendlicher Körper, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{A}_k^n := k^n$ mit Zariski-Topologie.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Off}_{\mathrm{Zar}}(\mathbb{A}_k^n) &= \{\mathbb{A}_k^n \setminus V(\mathfrak{a}) \mid \mathfrak{a} \subset k[X_1, \cdots, X_n] \text{ Ideal}\} \\
&= \{\mathbb{A}_k^n \setminus V(f_1, \cdots, f_r) \mid r \in \mathbb{N}, f_i \in k[X_1, \cdots, X_n]\} \\
&= \left\{ \mathbb{A}_k^n \setminus \bigcap_{i=1}^r V(f_i) \,\middle|\, r \in \mathbb{N}, f_i \in k[X_1, \cdots, X_n] \right\} \\
&= \left\{ \bigcup_{i=1}^r (\mathbb{A}_k^n \setminus V(f_i)) \,\middle|\, r \in \mathbb{N}, f_i \in k[X_1, \cdots, X_n] \right\}
\end{aligned}$$

Mit $D(f) := \mathbb{A}_k^n \setminus V(f) = \{a \in k^n \mid f(a) \neq 0\}$ ergibt sich

$$\mathrm{Off}_{\mathrm{Zar}}(\mathbb{A}_k^n) = \left\{ \bigcup_{i=1}^r D(f_i) \,\middle|\, r \in \mathbb{N}, f_i \in k[X_1, \cdots, X_n] \right\}$$

$\boxed{D(f)}$ Da außerdem $D(f) \cap D(g) = D(f \cdot g)$ ist, bildet die Menge der **Nichtnullstellenmengen**

$$\{D(f) \mid f \in k[X_1, \cdots, X_n]\}$$

eine Topologie-Basis der Zariski-Topologie.

Unmittelbare Folgerungen:

> SATZ 6.2.2. In $\mathbb{A}_k^n$ mit Zariski-Topologie ist jedes $\varnothing \neq S \subset \mathbb{A}_k^n$ quasikompakt.

Erinnerung. Eine Menge S in einem topologischen Raum X heißt **quasikompakt**, falls S die **Heine-Borel-Überdeckungseigenschaft** erfüllt, d.h. wenn es für jede Familie $(U_i)_{i \in I}$ offener Mengen in X mit $S \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ eine endliche Teilmenge $\{i_1, \cdots, i_t\} \subseteq I$ gibt mit $S \subseteq \bigcup_{j=1}^t U_{i_j}$. Kurz: *Für jede offene Überdeckung gibt es eine endliche Teilüberdeckung.*

Beweis. Sei $S \subseteq \bigcup_{i\in I} D(\mathfrak{a}_i)$, $D(\mathfrak{a}_i) = \bigcup_{r=1}^{s_i} D(f_{ir})$, also

$$\begin{aligned} S &\subseteq \bigcup_{\substack{i\in I\\ 1\le r\le s_i}} D(f_{ir}) \\ &= D\left(\sum_{\substack{i\in I\\ 1\le r\le s_i}} k[X_1,\cdots,X_n]\cdot f_{ir}\right) \end{aligned}$$

Da $k[X_1,\cdots,X_n]$ noethersch ist, ist das Ideal $\mathfrak{b} := \sum_{\substack{i\in I\\ 1\le r\le s_i}} k[X_1,\cdots,X_n]\cdot f_{ir}$ endlich erzeugt, etwa durch $g_1,\ldots g_p \in \mathfrak{b}$, $g_l = \sum_{q=1}^{m_l} f_{i_{lq}r_{lq}}$. Dadurch erhält man $\mathfrak{b} = \sum_{l=1}^{p}\sum_{q=1}^{m_l} k[X_1,\cdots,X_n]\cdot f_{i_{lq}r_{lq}}$, d.h. (weil $f_{i_{lq}r_{lq}} \in \mathfrak{a}_{i_{lq}}$) $\mathfrak{b} = \sum_{l=1}^{p}\sum_{q=1}^{m_l} \mathfrak{a}_{i_{lq}}$.

$$\begin{aligned} &= D\left(\sum_{l=1}^{p}\sum_{q=1}^{m_l} \mathfrak{a}_{i_{lq}}\right) \\ &= \bigcup_{l=1}^{p}\bigcup_{q=1}^{m_l} D\left(\mathfrak{a}_{i_{lq}}\right) \end{aligned}$$

□

Bemerkung. Es gilt für D weiterhin (und schon verwendet im obigen Beweis):

- $D(\mathfrak{a}) \cup D(\mathfrak{b}) = D(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$.
- $\bigcup_{i\in I} D(\mathfrak{a}_i) = D\left(\sum_{i\in I}\mathfrak{a}_i\right)$
- $D(\mathfrak{a}) \cap D(\mathfrak{b}) = D(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}) = D(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})$

Satz 6.2.3.

- $D(0) = \varnothing$, $D(1) = \mathbb{A}_k^n$.
- Für $D(\mathfrak{a}) \neq \varnothing \neq D(\mathfrak{b})$ ist auch $D(\mathfrak{a} \cap D(\mathfrak{b}) \neq \varnothing$.

Beweis. Aufgrund der Basisdarstellung genügt es zu zeigen, dass

$$D(f) \neq 0 \neq D(g) \quad\Rightarrow\quad D(f)\cap F(g) = D(f\cdot g) \neq \varnothing.$$

Angenommen, dem wäre nicht so, also $D(f\cdot g) = \varnothing$, dann gilt $\forall a \in \mathbb{A}_k^n$: $0 = f\cdot g(a)$, also (da k unendlich) $f\cdot g = 0$, also $f = 0$ oder $g = 0$. Damit ist $D(f) = \varnothing$ oder $D(g) = \varnothing$, im Widerspruch zur Vorausetzung. □

Definition 6.4. *Ein topologischer Raum X heißt **irreduzibel**, falls*

$$\forall A_1, A_2 \in \mathrm{Abg}(X): \quad X = A_1\cup A_2 \Rightarrow X = A_1 \vee X = A_2.$$

$\boxed{\text{Satz 6.2.4.}}$ Sei X ein topologischer Raum. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(i) X ist irreduzibel.

(ii) $\forall U_1, U_2 \in \mathrm{Off}(X) \setminus \{\varnothing\} : U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$.

(iii) $\forall U \in \mathrm{Off}(X) \setminus \{\varnothing\} : \overline{U} = X$ (d.h. nichtleere offene Mengen sind dicht in X).

(iv) $\forall U \in \mathrm{Off}(X)$: X ist zusammenhängend.

Beweis.

(i) ⇒ (ii) Angenommen, $U_1 \cap U_2 = \varnothing$, $U_1 \neq \varnothing \neq U_2$. Dann ist $X = X \setminus (U_1 \cap U_2) = (X \setminus U_1) \cup (X \setminus U_2)$. Wegen (i) ist das ohne Beschränkung der Allgemeinheit $X = X \setminus U_1$, also $U_1 = \varnothing$, im Widerspruch zur Annahme. □(i) ⇒ (ii)

(ii) ⇒ (iii) Sei $U \neq \varnothing$ offen. Es ist $X \setminus \overline{U}$ offen, und $(X \setminus \overline{U}) \cap U = \varnothing$. Wegen (ii) muss dann $X \setminus \overline{U} = \varnothing$ sein, also $X = \overline{U}$. □(ii) ⇒ (iii)

(iii) ⇒ (i), (iv) ⇒ (i), (i) ⇒ (iv) Übungsaufgabe. (Ein anderer Beweis dieses Satzes findet sich bei Satz 1.4.3 auf Seite 69.)

□

Bemerkung.

(1) X hausdorffsch und irreduzibel $\Leftrightarrow |X| = 1$

(2) $\mathbb{A}_k^n$ mit Zariski-Topologie ist irreduzibel (also nicht hausdorffsch für $n > 0$)

Definition 6.5. *Sei X topologischer Raum. $\varnothing \neq S \subseteq X$ heißt* ***irreduzibel****, falls S mit der induzierten Topologie ein irreduzibler Raum ist.*

Beispiel 6.2.2. $\{x\}$ ist irreduzibel $\forall x \in X$.

Beispiel 6.2.3. Ist X irreduzibel, so ist auch jede *offene* Menge irreduzibel (aber nicht jede Teilmenge!) und umgekehrt.

Beispiel 6.2.4. Sei X (nicht notwendig irreduzibler) topologischer Raum, $S \subseteq X$. Dann gilt: S irreduzibel $\Leftrightarrow \overline{S}$ irreduzibel.

Beweis. ⇒: Sei S irreduzibel, $\overline{S} = A_1 \cup A_2$, A_i abgeschlossen in $\overline{S}$ und damit auch in X. Es ist $SS \cap \overline{S} = (S \cap A_1) \cup (S \cap A_2)$, $S \cap A_i$ ist abgeschlossen in S, und da S irreduzibel ist, ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit $S = S \cap A_1$, also $S \subseteq A_1$, folglich $\overline{S} \subseteq A_1 \subseteq \overline{S}$, also $\overline{S} = A_1$. $\square\Rightarrow$

$\Leftarrow$: Sei $\overline{S}$ irreduzibel, $S = (S \cap A_1) \cup (S \cap A_2)$, $A_i \in \mathrm{Abg}(X)$.

$$\begin{aligned} & S = S \cap (A_1 \cup A_2) \\ \Rightarrow \quad & \overline{S} = \overline{S} \cap \overline{A_1 \cup A_2} \\ & \phantom{\overline{S}} = \overline{S} \cap (A_1 \cup A_2) \\ & \overline{S} = (\overline{S} \cap A_1) \cup (\overline{S} \cap A_2) \end{aligned}$$

Da $\overline{S}$ irreduzibel ist, ergibt sich ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \overline{S} = \overline{S} \cap A_1 \\ \Rightarrow \quad & \overline{S} \subseteq A_1 \\ \Rightarrow \quad & S = A_1 \cap S \end{aligned}$$

Damit ist also auch S irreduzibel. $\square\Leftarrow$

$\square$

Definition 6.6. *Sei X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $\varnothing \neq S \subseteq X$ heißt* ***irreduzible Komponente*** *von X, falls S irreduzibel und S maximal mit dieser Eigenschaft (d.h. $S \subseteq T$, T irreduzibel $\Rightarrow S = T$).*

Satz 6.2.5.

(1) Jeder topologische Raum hat irreduzible Komponenten.

(2) Jede irreduzible Komponente ist abgeschlossen.

(3) $\bigcup\limits_{Z \text{ irred. Komp.}} Z = X$

(4) Jede irreduzible Teilmenge $W \subseteq X$ liegt in (mindestens) einer irreduziblen Komponente.

Beweis.

(1) folgt aus (4) (da $\{x\}$ irreduzibel für jedes $x \in X$).

(2) Sei $Z \subseteq X$ irreduzible Komponente, dann ist Z irreduzibel, $\overline{Z}$ irreduzibel, und aufgrund der Maximalität von Z ist $Z = \overline{Z}$, also Z abgeschlossen.

(3) folgt aus (4) (da $\{x\}$ irreduzibel für jedes $x \in X$).

(4) Sei $\mathfrak{M} := \{Z \subseteq X \mid W \subseteq Z, Z \text{ irreduzibel}\}$. Es ist $\mathfrak{M} \neq \varnothing$, da $W \in \mathfrak{M}$. (Wir wollen zeigen, dass $\mathfrak{M}$ induktiv geordnet ist.)

Sei $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ totalgeordnet, so ist $W \subseteq V := \bigcup_{Y \in \mathfrak{N}} Y$. Zu zeigen ist, dass V irreduzibel ist. Seien dazu $U_1, U_2 \in \mathrm{Off}(X)$, so dass $V_1 := V \cap U_1 \neq \varnothing$ und $V_2 := V \cap U_2 \neq \varnothing$.

Dann existieren $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{N}$ mit $Y_1 \cap U_2 \neq \varnothing$ und $Y_2 \cap U_2 \neq \varnothing$. Da $\mathfrak{N}$ totalgeordnet, ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit $Y_1 \supseteq Y_2$, also auch $Y_1 \cap U_2 \neq \varnothing$. Y_1 ist irreduzibel und $Y_1 \cap U_2$ sowie $Y_1 \cap U_1$ sind nichtleer und offen in Y_1, d.h. $Y_1 \cap U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$. Damit ist insbesondere $U_1 \cap U_2 \cap V \neq \varnothing$, also V irreduzibel, d.h. $V \in \mathfrak{M}$ ist obere Schranke für $\mathfrak{N}$.

Damit ist $\mathfrak{M}$ induktiv geordnete Menge, also können wir das Zornsche Lemma anwenden, somit gibt es ein maximales Element in $\mathfrak{M}$. Ein solches ist gerade eine irreduzible Komponente von X.

□

Beispiel 6.2.5. Ist X hausdorffsch, so ist $X = \bigcup_{x \in X} \{x\}$ Zerlegung in irreduzible Komponenten.

Beispiel 6.2.6. $\mathbb{A}_k^n$ ist Zariski-irreduzibel, daher ist $\mathbb{A}_k^n$ selbst irreduzible Komponente.

Frage. Wieviele irreduzible Komponenten kann $V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_k^n$ haben? Wie sehen sie aus?

Dazu betrachten wir sogenannte noethersche topologische Räume.

Noethersche topologische Räume

Definition 6.7. *Sei $X \neq \varnothing$ topologischer Raum. X heißt* **noethersch**, *falls es in jeder nichtleeren Menge $\mathfrak{S} \subseteq \mathrm{Abg}(X)$ (inklusions-)minimale Elemente gibt.*

$\boxed{\text{Satz 6.2.6.}}$ Sei $X \neq \varnothing$ topologischer Raum. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(i) X ist noethersch.

(ii) In jeder nichtleeren Menge $\mathfrak{I} \subseteq \mathrm{Off}(X)$ existieren maximale Elemente.

(iii) Jede absteigende Inklusionskette $A_i \in \mathrm{Abg}(X)$,

$$X \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$$

wird stationär.

(iv) Jede aufsteigende Kette offener Mengen wird stationär.

Beweis.

(i) $\Leftrightarrow$ (ii), (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) per Übergang zum Komplement.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii) analog zur Noether-Eigenschaft für Ringe (siehe 1.2.2). □

Frage. Wenn X hausdorffsch und noethersch, ist dann $|X| < \infty$?

Bemerkung 1.

(1) $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ mit euklidischer Topologie sind *nicht* noethersch.

(2) Sei X noetherscher top. Raum, $\varnothing \neq S \subseteq X$. Dann ist auch S noethersch mit der induzierten Topologie.

(3) Jeder noethersche Raum ist quasikompakt.

Beweis.

(1) Klar.

(2) Sei
$$S \supseteq A_1 \cap S \supseteq A_2 \cap S \supseteq A_4 \cap S \dots$$
absteigende Kette abgeschlossener Mengen in S, d.h. $A_i \in \operatorname{Abg}(X)$. Damit ist
$$X \supseteq \overline{A_1 \cap S} \supseteq \overline{A_2 \cap S} \supseteq \overline{A_3 \cap S} \dots$$
absteigende Kette abgeschlossener Mengen in X. Da X noethersch ist, wird diese Kette stationär, d.h. $\overline{A_i \cap S} = \overline{A_{i+1} \cap S}$ ab einem i_0. Schneiden mit S ergibt
$$\begin{aligned}\overline{A_i \cap S} \cap S &= \overline{A_{i+1} \cap S} \cap S\\ \overline{A_i \cap S}^S &= \overline{A_{i+1} \cap S}^S\end{aligned}$$
und da $A_i \cap S$ bereits abgeschlossen waren in S
$$A_i \cap S = A_{i+1} \cap S$$
Das heißt, auch unsere absteigende Folge in S wird stationär, also ist auch S noetherscher topologischer Raum.

(3) Sei X noetherscher topologischer Raum, $X = \bigcup_{\lambda \in I} U_\lambda$ offene Überdeckung. Betrachte
$$\mathfrak{U} := \left\{ \bigcup_{j \in J} U_j \,\middle|\, J \subseteq I \text{ endlich} \right\}.$$
Weil X noethersch ist, existiert ein maximales Element
$$U^* =: U_{j_1} \cup \ldots \cup U_{j_r} \in \mathfrak{U}.$$
Damit gilt
$$\forall \lambda \in I: \quad \underbrace{U^* \cup U_\lambda}_{\in \mathfrak{U}} \supset U^*,$$

wobei U^* maximal ist, also

$$\begin{aligned} & \forall \lambda \in I: \quad U^* \cup U_\lambda = U^*, \\ \Rightarrow \quad & \forall \lambda \in I: \quad U_\lambda \subseteq U^* \end{aligned}$$

und durch Vereinigung über λ erhalten wir

$$X = \bigcup_{\lambda \in I} U_\lambda \subseteq U^* = \bigcup_{u=1}^{r} U_{j_u} \subseteq X,$$

also ist $X = U^*$ quasikompakt. □

Dies benutzen wir, um die noetherschen Räume noch weiter zu charakterisieren:

Satz 6.2.7. Sei X topologischer Raum. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(i) X ist noethersch.

(ii) X ist endliche Vereinigung noetherscher Teilmengen.

(iii) X ist endliche Vereinigung offener noetherscher Teilmengen.

(iv) X jede Teilmenge $S \subseteq X$ ist quasikompakt.

Beweis.

(i) ⇒ (iii) trivial, da X sich selbst noethersch, offen überdeckt.

(iii) ⇒ (ii) trivial, jede offene endliche noethersche Überdeckung ist auch eine endliche noethersche Überdeckung.

(ii) ⇒ (i) Sei $X = \bigcup_{i=1}^r S_i$, $S_i \subseteq X$ noethersch, $X \supseteq A_1 \subseteq A_2 \supseteq \dots$ absteigende Kette abgeschlossener Mengen. Zu zeigen ist, dass die Kette stationär wird.

$$\forall i: \quad S_i \supseteq (A_1 \cap S_i) \supseteq (A_2 \cap S_i) \supseteq \dots$$

Da S_i noethersch, werden alle diese Ketten stationär:

$$\forall i: \exists m_i \in \mathbb{N}: \quad \forall n > m_i: A_n \cap S_i = A_{n+1} \cap S_i.$$

Mit $m := \max\limits_{1 \le i \le r} m_i$ ergibt sich

$$\forall i, \forall n > m: \quad A_n \cap S_i = A_{n+1} \cap S_i.$$

Schneiden über alle i ergibt

$$\begin{aligned} & \forall n > m: \quad A_n \cap \underbrace{\bigcup_{i=1}^{r} S_i}_{=X} = A_{n+1} \cap \underbrace{\bigcup_{i=1}^{r} S_i}_{=X} \\ \Rightarrow \quad & \forall n > m: \quad A_n = A_{n+1}, \end{aligned}$$

d.h. die Kette wird stationär in X.

(i) $\Rightarrow$ (iv) Siehe letzte Bemerkung (und „Teilmengen noetherscher Räume sind noethersch").

(iv) $\Rightarrow$ (i) Sei jede Teilmenge $S \subseteq X$ quasikompakt und

$$U_1 \subseteq U_2 \subseteq \ldots \subseteq X$$

aufsteigende Kette offener Mengen in X. Betrachte

$$U^* := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$$

(offene Überdeckung von U^*). U^* ist quasikompakt nach Voraussetzung, d.h. endlich offen überdeckt, also

$$\exists s \in \mathbb{N}: \quad U^* = \bigcup_{i=1}^{s} U_i = U_s.$$

Damit $\forall t > s : U_t = U^*$, also wird diese Kette stationär. □

Definition 6.8. *Sei A ein kommutativer, unitärer Ring,*

$$X := \operatorname{Spec} A := \{\mathfrak{p} \subset A \mid \mathfrak{p} \text{ Primideal}\}$$

*das **Primspektrum** von A. Für alle Ideale $\mathfrak{a} \subseteq A$ sei* $\boxed{\operatorname{Spec} A}$

$$V(\mathfrak{a}) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\}\,.$$ $\boxed{V(\mathfrak{a})}$

Dann gilt offenbar

$$\begin{aligned} V(\mathfrak{a}) &= V\left(\sqrt{\mathfrak{a}}\right), \\ V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) &= V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}), \\ \bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i) &= V\left(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i\right), \\ V(0) &= \operatorname{Spec} A = X, \\ V(1) = V(A) &= \varnothing. \end{aligned}$$

$\boxed{D(\mathfrak{a})}$ $\boxed{D(f)}$

$X = \operatorname{Spec} A$ trägt also eine natürliche Topologie (**Zariski-Topologie**) mit abgeschlossenen Mengen $V(\mathfrak{a})$. Offene Mengen sind

$$D(\mathfrak{a}) := \operatorname{Spec} A \setminus V(\mathfrak{a}),$$

eine Topologiebasis wird gebildet durch

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{D(f) \mid f \in A\}, \quad \text{mit} \\ D(f) &= \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid f \notin \mathfrak{p}\} \\ &= D\big((f)\big). \end{aligned}$$

> $\boxed{\textsc{Satz } 6.2.8.}$ $X = \operatorname{Spec} A$ ist quasikompakt, egal, wie A aussieht.

Beweis. Sei $X = \bigcup_{i \in I} D(\mathfrak{a}_i)$ Zariski-offen überdeckt, also

$$\varnothing = \bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i) = V\left(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i\right).$$

Damit ist $\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i = A$, also

$$1 = \alpha_{i_1} + \ldots + \alpha_{i_r}, \text{ mit } \alpha_{i_\nu} \in \mathfrak{a}_{i_\nu}, i_\nu \in I \quad \forall \nu \in \{1, \cdots, r\}.$$

Damit ist auch

$$A = \sum_{\nu=1}^{r} \mathfrak{a}_{i_\nu} \quad \Rightarrow \quad \varnothing = \bigcap_{\nu=1}^{r} V(\mathfrak{a}_{i_\nu}),$$

also

$$X = X \setminus \bigcap_{\nu=1}^{r} V(\mathfrak{a}_{i_\nu}) = \bigcup_{\nu=1}^{r} D(\mathfrak{a}_{i_\nu})$$

eine endliche Teilüberdeckung. □

Es gilt folgender Charakterisierungssatz:

> $\boxed{\textsc{Satz } 6.2.9.}$ Sei A Ring, $X = \operatorname{Spec} A$ mit Zariski-Topologie, dann sind folgende Bedingungen äquivalent:
>
> (i) $\operatorname{Spec} A$ ist noetherscher topologischer Raum.
>
> (ii) A ist **radiziell noethersch**, d.h. jede aufsteigende Kette *radizieller Ideale* wird stationär.

Beweis.

(i) ⇒ (ii) Sei $\operatorname{Spec} A$ noetherscher topologischer Raum. Sei

$$\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \ldots \subseteq A$$

aufsteigende Idealkette radizieller Ideale (d.h. $\mathfrak{a}_i = \sqrt{\mathfrak{a}_i}$) in A. Es ist dann

$$V(\mathfrak{a}_1) \supseteq V(\mathfrak{a}_2) \supseteq \ldots$$

absteigende Kette abgeschlossener Mengen in $\operatorname{Spec} A$. Da $\operatorname{Spec} A$ noethersch ist, existiert ein n_0 mit

$$\forall n > n_0 : \quad V(\mathfrak{a}_n) = V(\mathfrak{a}_{n+1}),$$

also

$$\begin{aligned} \forall n > n_0 : \quad \mathfrak{a}_n &= \sqrt{\mathfrak{a}_n} \\ &= \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}_n)} \mathfrak{p} \\ &= \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}_{n+1})} \mathfrak{p} \\ &= \sqrt{\mathfrak{a}_{n+1}} \\ &= \mathfrak{a}_{n+1}, \end{aligned}$$

d.h. die Kette wird stationär.

(ii) ⇒ (i) geht analog: Sei

$$V(\mathfrak{a}_1) \supset V(\mathfrak{a}_2) \supset \ldots$$

absteigende Kette in $\operatorname{Spec} A$, dann ist

$$\sqrt{\mathfrak{a}_1} \supset \sqrt{\mathfrak{a}_2} \supset \ldots$$

aufsteigende Kette radizieller Ideale in A. Nach Voraussetzung ist $\sqrt{\mathfrak{a}_n} = \sqrt{\mathfrak{a}_{n+1}} \forall n > n_0$, also auch

$$V(\mathfrak{a}_n) = V(\sqrt{\mathfrak{a}_n}) = V(\sqrt{\mathfrak{a}_{n+1}}) = V(\mathfrak{a}_{n+1}) \quad \forall n > n_0. \qquad \square$$

KOROLLAR. Ist A ein noetherscher Ring, so ist $\operatorname{Spec} A$ ein noetherscher topologischer Raum.

Frage. Gilt auch die Umkehrung?

Antwort. Nein! Es gibt auch radiziell-noethersche Ringe, welche nicht noethersch sind, d.h. es existieren nicht noethersche Ringe, deren Spektrum ein noetherscher topologischer Raum ist.

Beispiel 6.2.7. Sei $A := \mathbb{Z}[X_1, X_2, \dots] = \varinjlim_n \mathbb{Z}[X_1, \dots X_n]$ (induktiver Limes). Betrachte die Idealkette

$$(X_1) \subsetneqq (X_1, X_2) \subsetneqq (X_1, X_2, X_3) \subsetneqq \dots$$

Offensichtlich ist A nicht noethersch. Es ist $(X_1, \cdots, X_k) \in \operatorname{Spec} A$ (also insbesondere radiziell), da

$$\begin{aligned} A/_{(X_1,\cdots,X_k)} &\cong \mathbb{Z}[X_{k+1}, X_{k+2}, \dots] \\ &\cong \mathbb{Z}[X_1, X_2, \dots] \end{aligned}$$

ein Integritätsbereich ist. Daher ist A nicht einmal radiziell noethersch, also $\operatorname{Spec} A$ kein noetherscher topologischer Raum.

Betrachten wir in A nun das Ideal $\mathfrak{a} := (X_i \cdot X_j \mid i, j \in \mathbb{N})$. Dann gilt offenbar $\mathfrak{a} \cap \mathbb{Z} = (0)$, $\mathfrak{a} \subseteq (X_1, X_2, \dots)$, $\mathfrak{a} \subsetneqq A$. Betrachte jetzt den Faktorring

$$A/_{\mathfrak{a}} = \mathbb{Z}[X_1, X_2, \dots]/_{(X_i \cdot X_j \mid i, j \in \mathbb{N})}.$$

Sei $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec}(A/_{\mathfrak{a}})$. Dann ist $\mathfrak{P} = \mathfrak{p}/_{\mathfrak{a}}$, mit $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$. Es gilt sogar:

$$\begin{aligned} \operatorname{Spec}(A/_{\mathfrak{a}}) &\rightleftarrows V(\mathfrak{a}) \subseteq \operatorname{Spec}(A) \\ \mathfrak{p}/_{\mathfrak{a}} &\longleftrightarrow \mathfrak{p} \end{aligned}$$

Nun ist $X_i^2 \in \mathfrak{a} \forall i \in \mathbb{N}$, also

$$\begin{aligned} & [X_i]_{\mathfrak{a}}^2 = [X_i^2]_{\mathfrak{a}} = [0]_{\mathfrak{a}} \in \mathfrak{P} \subseteq A/_{\mathfrak{a}} \\ \overset{\mathfrak{P}\text{ prim}}{\Longrightarrow} \quad & [X_i]_{\mathfrak{a}} \in \mathfrak{P} = \mathfrak{p}/_{\mathfrak{a}} \\ \Rightarrow \quad & X_i + \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}, \quad \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p} \\ \Rightarrow \quad & X_i \in \mathfrak{p} \quad \forall i \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow \quad & (X_1, X_2, \dots) \subseteq \mathfrak{p} \end{aligned}$$

Für $f \in A$ kann man f schreiben als $f = a_0 + g$, mit $a_0 \in \mathbb{Z}$, $g \in (X_1, X_2, \dots)$. Für $f \in \mathfrak{p}$ ergibt sich dann $a_0 \in \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = p \cdot \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{Z}$ prim. Damit ist $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}) + (X_1, X_2, \dots)$, also

$$\mathfrak{P} = (\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}) + (X_1, X_2, \dots)/_{\mathfrak{a}}.$$

Fazit.

(1) $\operatorname{Spec}(A/_{\mathfrak{a}}) = \left\{ p\mathbb{Z} + (X_1, X_2, \dots)/_{\mathfrak{a}} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z} \text{ prim} \right\}$.

(2) Es besteht eine 1-1-Korrespondenz:

$$\begin{aligned} \operatorname{Spec}(A/_{\mathfrak{a}}) &\rightleftarrows \operatorname{Spec} \mathbb{Z} \\ p\mathbb{Z} + (X_1, X_2, \dots)/_{\mathfrak{a}} &\longleftarrow p \cdot \mathbb{Z} \\ \mathfrak{P} = \mathfrak{p}/_{\mathfrak{a}} &\longmapsto \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} \end{aligned}$$

(3) Diese Korrespondenz ist ein Zariski-Homöomorphismus, induziert durch die Ring-Homomorphismen

$$\mathbb{Z} \xhookrightarrow{i} \mathbb{Z}[X_1, X_2, \dots] \xrightarrow{pr} \mathbb{Z}[X_1, X_2, \dots]/\mathfrak{a}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[X_1, X_2, \dots] &\xrightarrow{\pi} \mathbb{Z} \\ f = a_0 + g &\longmapsto a_0 = f(0), \end{aligned}$$

wobei $\ker pr = \mathfrak{a} \subseteq \ker \pi$, also eine Faktorisierung induziert wird:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[X_1, X_2, \dots] & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{Z} \\ {\scriptstyle pr}\downarrow & & \| \\ \mathbb{Z}[X_1, X_2, \dots]/\mathfrak{a} & \xrightarrow[\tilde{\pi}]{} & \mathbb{Z} \end{array} \qquad \text{mit } \tilde{\pi}([f]) := \pi(f)$$

Das heißt,

$$\begin{aligned} (pr \circ i)^* &: \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a} \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z} \\ \text{und} \quad \tilde{\pi}^* &: \operatorname{Spec} \mathbb{Z} \to \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a} \end{aligned}$$

sind zueinander inverse, zariski-stetige Abbildungen, d.h. $\operatorname{Spec} \mathbb{Z} \cong \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a}$, und da $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ als Spektrum eines HIR noethersch ist, ist auch $\operatorname{Spec} A/\mathfrak{a}$ noethersch, aber $A/\mathfrak{a}$ ist kein notherscher Ring, weil

$$([X_1]) \subsetneqq ([X_1], [X_2] \subsetneqq \dots$$

eine echt aufsteigende Idealkette in $A/\mathfrak{a}$ ist. (Ansonsten wäre ja im Fall $(X_1, \cdots, X_k)/\mathfrak{a} = (X_1, \cdots, X_{k+1})/\mathfrak{a}$ für ein $k \in \mathbb{N}$ auch

$$X_{k+1} \in \mathfrak{a} + (X_1, \cdots, X_k) = (X_i \cdot X_j \mid i, j \in \mathbb{N}) + (X_1, \cdots, X_k),$$

was offensichtlich nicht der Fall ist.)

Fazit. Allgemein gilt:

(1) $\operatorname{Spec}(B)$ noetherscher topologischer Raum $\not\Rightarrow$ B noetherscher Ring.

(2) $\mathbb{Z}[X_1, X_2, \dots]/(X_i \cdot X_j \mid i, j \in \mathbb{N})$ ist ein Beispiel für einen Ring, der radiziell-noethersch, aber nicht noethersch ist.

Irreduzible Komponenten noetherscher topologischer Räume

$\boxed{\text{Satz 6.2.10.}}$ Ein noetherscher topologischer Raum X besitzt nur endlich viele irreduzible Komponenten.

Beweis.

(1) Wir zeigen (stärker):

$\boxed{\text{Behauptung.}}$ Jede abgeschlossene Menge A in X ist Vereinigung endlich vieler irreduzibler abgeschlossener Teilmengen.

Angenommen,

$$\mathfrak{M} := \left\{ A \subseteq X \;\middle|\; \begin{array}{c} A \text{ abgeschlossen}, A \neq \varnothing, \\ A \text{ nicht Vereinigung endl.} \\ \text{vieler irreduz. abg. Teilmengen} \end{array} \right\} \neq \varnothing.$$

Weil X noethersch ist, besitzt $\mathfrak{M}$ ein minimales Element A_*. Dann gilt: A_* ist nicht irreduzibel, jede echte abgeschlossene Teilmenge on A_* ist Vereinigung endlich vieler irreduzibler abgeschlossener Mengen.

Damit existieren $B, C \in \mathrm{Abg}(A_*) \setminus \{A_*\}$, sogar abgeschlossen in X, da $A_* \in \mathrm{Abg}(X)$, mit $A_* = B \cup C$. Weil A_* minimal, ist $C = C_1 \cup \ldots \cup C_s$, $B = B_1 \cup \ldots B_t$, B_i, C_j abgeschlossen, irreduzibel, also ist

$$A_* = C_1 \cup \ldots \cup C_s \cup B_1 \cup \ldots \cup B_t$$

auch Vereinigung endlich vieler abgeschlossener, irreduzibler Mengen. Die Annahme ist also falsch, $\mathfrak{M} = \varnothing$, also gilt die Behauptung. $\square$(1)

(2) Aus (1) folgt insbesondere, dass $X = V_1 \cup \ldots \cup V_m$, V_i abgeschlossen, irreduzibel.

Sei nun $Z \subseteq X$ irreduzible Komponente von X. Dann ist

$$Z = X \cap Z = (V_1 \cap Z) \cup \ldots \cup (V_m \cap Z),$$

wobei Z irreduzibel und $V_i \cap Z \in \mathrm{Abg}(\mathbb{Z})$. Damit $\exists i : Z = V_i \cap Z$, d.h. $Z \subseteq V_i$, und da Z als Komponente maximal ist, ist $Z = V_i$.

Es gilt also: Ist $X = V_i \cup \ldots \cup V_m$ unverkürzbare Zerlegung in irreduzible, abgeschlossene Teilmengen, so sind die V_i die irreduziblen Komponenten.

Also hat X nur endlich viele irreduzible Komponenten.

$\square$

> $\boxed{\text{Korollar.}}$ Sei $X \neq \varnothing$ topologischer Raum, dann gilt:
> X noethersch und hausdorffsch
> $\Leftrightarrow$
> X ist endlich mit diskreter Topologie.

Beweis.

$\Rightarrow$ Da X noethersch, zerfällt X in (endlich viele) irreduzible Komponenten $X = Z_1 \cup \ldots Z_r$. Da X hausdorffsch, sind die Komponenten von der Form $Z_i = \{x_i\}$, also $X = \{x_1, \cdots, x_r\}$.

$\Leftarrow$ Klar. □

Beispiel 6.2.8. Sei A noetherscher Ring, also $X = \operatorname{Spec} A$ noethersch,

$$\operatorname{Nil}(A) = \sqrt{(0)} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A} \mathfrak{p} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \\ \text{minimal}}} \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_s$$

die Lasker-Noether-Zerlegung des Nilradikals. Da A noethersch ist, ist $\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{p} \text{ minimal}\} =: \{\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n\}$ endlich. Damit ergibt sich

$$X = V(\sqrt{(0)}) = V(\mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_s) = V(\mathfrak{p}_1) \cup \ldots \cup V(\mathfrak{p}_s),$$

wobei die $V(\mathfrak{p}_i)$ abgeschlossen und irreduzibel sind.

> $\boxed{\text{Fazit.}}$ Die Lasker-Noether-Zerlegung des Nilradikals eines noetherschen Ringes A stiftet eine Zerlegung des noetherschen topologischen Raumes $X = \operatorname{Spec} A$ in irreduzible abgeschlossene Teilmengen, welche überdies auch noch unverkürzbar ist.

Beweis der Unverkürzbarkeit. Sei $\sqrt{(0)} = \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_s$ (LNZ). Dann ist

$$X = V\left(\sqrt{(0)}\right) = V(0) = V(\mathfrak{p}_1) \cup \ldots \cup V(\mathfrak{p}_s).$$

Angenommen, $V(\mathfrak{p}_i) \subseteq \bigcup_{j \neq i} V(\mathfrak{p}_j)$, dann ist für $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{p}_i)$ auch $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{p}_{j_\mathfrak{p}})$, mit $j_\mathfrak{p} \in \{1, \cdots, s\} \setminus \{i\}$, d.h. $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{p}_{j_\mathfrak{p}}$. Schneiden über alle $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{p}_i)$ ergibt

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \cancel{\mathfrak{p}_i} \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_s \subseteq & \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{p}_i)} \mathfrak{p} \\ &= \sqrt{\mathfrak{p}_i} \\ &= \mathfrak{p}_i \end{aligned}$$

Das heißt (weil die $\mathfrak{p}_j$ Primideale sind), es existiert ein $k \neq i$ mit $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_k$, im Widerspruch zur LNZ. Damit ist die Annahme falsch, also ist

$$X = \bigcup_{\substack{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \\ \text{minimal}}} V(\mathfrak{p})$$

– im Falle noetherscher Ringe – die Zerlegung in irreduzible Komponenten. □

$\boxed{\text{KOROLLAR.}}$ Sei X noetherscher Raum, $X = W_1 \cup \ldots \cup W_m$ Zerlegung in irreduzible abgeschlossene Teilmengen. Dann gilt

(i) $X = W_1 \cup \ldots \cup W_m$ ist unverkürzbare Darstellung
$\Leftrightarrow \quad W_i \not\subseteq W_j \quad \forall i \neq j$.

(ii) Die Zerlegung $X = Z_1 \cup \ldots \cup Z_r$ von X in seine irreduziblem Komponenten ist die *einzige* unverkürzbare Zerlegung von X in irreduzible abgeschlossene Teilmengen.

Beweis.

(i) $\Rightarrow$: Klar, da sonst nicht unverkürzbar.
$\Leftarrow$: Sei $W_i \not\subseteq W_j$ für $i \neq j$. Angenommen, $X = W_1 \cup \ldots \cup W_m$ ist doch verkürzbar, also $W_i \subseteq \bigcup_{j \neq i} W_j$. Dann ist $W_i = \bigcup_{i \neq j} W_j \cap W_i$, und da W_i irreduzibel ist, folgt $W_i \subseteq W_k$ für ein $k \neq i$, im Widerspruch zur Voraussetzung. □(i)

(ii) Sei $X = Z_1 \cup \ldots Z_r$ die Zerlegung des noetherschen Raumes X in seine irreduziblen Komponenten und $X = W_1 \cup \ldots W_m$ eine unverkürzbare Zerlegung in abgeschlossene irreduzible Mengen. Dann gilt für $i \in \{1, \ldots r\}$:

$$Z_i = X \cap Z_i = (W_1 \cap Z_i) \cup \ldots \cup (W_m \cap Z_i),$$

wobei die $W_j \cap Z_i$ abgeschlossen in Z_i sind. Da Z_i irreduzibel ist, folgt

$$\exists k_i : \quad Z_i = W_{k_i} \cap Z_i \quad \Rightarrow \quad Z_i \subseteq W_{k_i}$$

Da aber Z_i als Komponente maximal ist, folgt

$$Z_i = W_{k_i}.$$

Anderseits wissen wir, dass jede irreduzible Menge in einer irreduziblen Komponente liegt, d.h. für alle $j \in \{1, \cdots, m\}$ gilt:

$$\exists i \in \{1, \cdots, r\} : \quad W_j \subseteq Z_i = W_{k_i}$$

und wegen der Unverkürzbarkeit der Darstellung ist $j = k_i$, d.h. $W_j = Z_i$. Wir erhalten also

$$\{Z_1, \cdots, Z_r\} = \{W_1, \cdots, W_m\}.$$

□(ii)

□

Die Zusammenhangskomponenten noetherscher topologischer Räume

Wir wissen, dass jede irreduzible Menge auch zusammenhängend ist. Daher betrachten wir für einen noetherschen topologischen Raum X seine Zerlegung in irreduzible Komponenten $X = Z_1 \cup \ldots \cup Z_r$. Falls $r = 1$ ist, ist $X = Z_1$ selbst irreduzibel, d.h. X Zariski-zusammenhängend, also X ist seine einzige Zusammenhangskomponente. Dieser Fall ist also uninteressant, also sei nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit X nicht irreduzibel, also $r \geq 2$, und sei $X = \dot{\bigcup}_{\alpha \in I} G_\alpha$ die Zerlegung von X in seine Zusammenhangskomponenten.

Lemma.

(1) In der Zerlegung $X = \dot{\bigcup}_{\alpha \in I} G_\alpha$ ist $|I| \leq r$ ($r =$ Anzahl der irreduziblen Komponenten)

(2) Jede Zusammenhangskomponente G_α ist Vereinigung von irreduziblen Komponenten und G_α ist offen (und abgeschlossen).

Beweis.

(1) Z_i irreduzibel $\Rightarrow Z_i$ zsh. $\Rightarrow \exists! \alpha \in I : Z_i \subseteq G_\alpha$. Da umgekehrt jedes G_α (da $\neq \varnothing$) mindestens ein Element enthält, welches in mindestens einer irreduziblen Komponente ist (die dann komplett in G_α liegt), ist $|I| \leq r$.

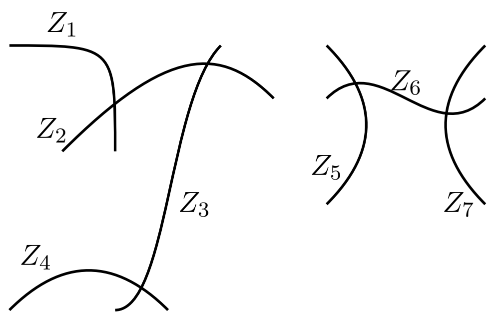
(2)

$$G_\alpha = G_\alpha \cap X = \bigcup_{i=1}^{r} (G_\alpha \cap Z_i) = \bigcup_{\substack{i=1 \\ G_\alpha \cap Z_i \neq \varnothing}}^{r} (G_\alpha \cap Z_i) =$$

$$= \bigcup_{\substack{i=1 \\ G_\alpha \supseteq Z_i}}^{r} (G_\alpha \cap Z_i) = \bigcup_{\substack{i=1 \\ G_\alpha \supseteq Z_i}}^{r} Z_i$$

□

Beispiel 6.2.9. Zur Anschauung ein Bild:



Es sind $G_1 = Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3$ und $G_2 = Z_5 \cup Z_6 \cup Z_7$ die Zusammenhangskomponenten von $X = G_1 \dot{\cup} G_2$.

Frage. Wann gehören in den Zerlegungen $X = Z_1 \cup \ldots \cup Z_r = G_1 \dot\cup \ldots \dot\cup G_s$ (mit $s \leq r$) zwei irreduzible Komponenten Z_i, Z_j zu einem G_α? Bzw. aus welchen Z_i setzt sich ein G_α zusammen?

Dafür betrachten wir folgende Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathfrak{J} = \{Z_1, \ldots Z_n\}$ der irreduziblen Komponenten:

$\boxed{\sim_{\text{verb}}}$ **Definition 6.9.** *$Z_i \sim_{\text{verb}} Z_j$ (Z_i und Z_j sind **verbindbar**), falls $\exists Z_{i_1}, \ldots Z_{i_k}$:*

$$Z_1 \cap Z_{i_1} \neq \varnothing, Z_{i_1} \cap Z_{i_2} \neq \varnothing, \cdots, Z_{i_{k-1}} \cap Z_{i_k} \neq \varnothing, Z_{i_k} \cap Z_j \neq \varnothing.$$

BEHAUPTUNG. In einem Noetherschen topologischen Raum X mit $X = Z_1 \cup \ldots \cup Z_r$ Zerlegung in irreduzible Komponenten und $X = G_1 \dot\cup \ldots \dot\cup G_s$ Zerlegung in Zusammenhangskomponenten gilt: Die Zusammenhangskomponenten sind genau die Vereinigungen der irreduziblen Komponenten einer Verbindungsklasse.

Beweis. Wir haben die Zerlegungen $X = Z_1 \cup \ldots \cup Z_r$ in irreduzible Komponenten, $X = V_1 \dot\cup \ldots \dot\cup V_t$ in Verbindungskomponenten und $X = G_1 \dot\cup \ldots \dot\cup G_s$ in Zusammenhangskomponenten, wobei gilt

$$V_i = \bigcup_{Z_k \cap V_i \neq \varnothing} Z_k = \bigcup_{Z_k \sim_{\text{verb}} Z_{k_i}} Z_k$$

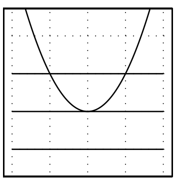
(mit einem beliebigen k_i mit $Z_{k_i} \cap V_i \neq \varnothing$) und

$$G_\alpha = \bigcup_{Z_i \cap G_\alpha \neq \varnothing} Z_i.$$

Die V_i sind als endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen abgeschlossen, und – da nur endlich viele davon disjunkt vereinigt den ganzen Raum ergeben – auch offen.

Jedes V_i liegt offensichtlich in genau einer Zusammenhangskomponente. Umgekehrt liegt jede Zusammenhangskomponente G_α auch in einem V_i, da sonst $G_\alpha \cap V_i \neq \varnothing$ und $G_\alpha \cap V_j \neq \varnothing$ mit $i \neq j$, also G_α nicht zusammengängend wäre. Damit sind die Verbindungskomponenten genau die Zusammenhangskomponenten. □

Beispiel 6.2.10.



W

(1) $\mathbb{A}^1_k$ ist irreduzibel und noethersch.

(2) $W \subsetneqq \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ (bzw. $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$) mit $W := V\big(Y \cdot (Y^2 - 1) \cdot (Y - X^2)\big)$ ist affine algebraische Menge.

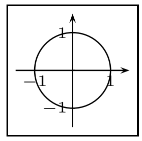
$$W = \underbrace{V(Y)}_{\cong \mathbb{A}^1_k} \cup \underbrace{V(Y+1)}_{\cong \mathbb{A}^1_k} \cup \underbrace{V(Y-1)}_{\cong \mathbb{A}^1_k} \cup \underbrace{V(Y - X^2)}_{\cong \mathbb{A}^1_k}$$

Dies ist also die Zerlegung in abgeschlossene irreduzible Komponenten. Es gibt (für $k = \mathbb{R}$) zwei Verbindungskomponenten, nämlich

$$\begin{aligned} G_1 &= V(Y+1) \\ G_2 &= V\big(Y \cdot (Y-1) \cdot (Y - X^2)\big) \end{aligned}$$

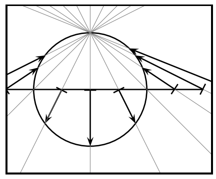
Für $k = \mathbb{C}$ gibt es die entsprechenden 4 irreduziblen Komponenten, aber jetzt ist W zusammenhängend, weil

$$(i, -1) \in V(Y+1) \cap V(Y - X^2) \neq \varnothing$$



$V(X^2+Y^2-1)$

(3) Der Kreis $V(X^2+Y^2-1) \subsetneqq \mathbb{A}_k^2$ ($\operatorname{char} k \neq 2$) ist irreduzibel (also zusammenhängend).



Beweis-Idee.

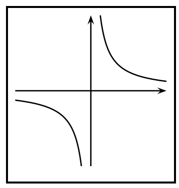
(a) Parametrisiere:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{A}_k^1 \setminus \left\{\pm\sqrt{-1}\right\} &\xrightarrow{\sim} V(X^2+V^2-1) \setminus \{0,1\} \\ t &\longmapsto \left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{t^2-1}{1+t^2}\right) \\ \frac{a}{1-b} &\longleftarrow (a,b) \end{aligned}$$

φ ist bijektiv.

(b) Zeige: φ ist Zariski-bistetig.

(c) Folgere:
- $\mathbb{A}_k^1$ ist irreduzibel, unendlich,
- $\mathbb{A}_k^1 \setminus \left\{\pm\sqrt{-1}\right\}$ ist offen, irreduzibel, dicht,
- $V(X^2+Y^2-1) \setminus \{(0,1)\}$ offen, irreduzibel,
- $\overline{V(X^2+Y^2-1) \setminus \{0,1\}} \overset{!}{=} V(X^2+Y^2-1)$ ist auch irreduzibel. □



$V(X \cdot Y - 1)$

Im allgemeinen gilt (für $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$): euklidisch zsh. $\Rightarrow$ Zariski-zsh., aber Zariski-zsh. $\not\Rightarrow$ euklidisch zsh. (Beispiel: Hyperbel).

6.3 Verschwindungsideale und Hilberts Nullstellen-Satz (1. Version)

Sei k unendlicher Körper, $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{AM_n(k)}$

Definition 6.10. *Wir bezeichnen mit*

$$AM_n(k) := \left\{V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_k^n \mid \mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq k[X_1, \cdots, X_n]\right\}$$

die Menge der affinen algebraischen Mengen in $\mathbb{A}_n^k$ und mit

$$RI_n(k) := \left\{\mathfrak{b} \subseteq k[X_1, \cdots, X_n] \mid \mathfrak{b} \textit{ Ideal}, \mathfrak{b} = \sqrt{\mathfrak{b}}\right\}$$

die Menge der radiziellen Ideale.

$\boxed{RI_n(k)}$

$\boxed{I(S)}$ **Definition 6.11.** *Für $S \subseteq \mathbb{A}_k^n = k^n$ heißt*

$$I(S) := \begin{cases} k[X_1, \cdots, X_n] & S = \varnothing \\ \{f \in k[X_1, \cdots, X_n] \mid f|_S = 0\} & \textit{sonst} \end{cases}$$

*das **Verschwindungsideal** von S.*

Offensichtlich ist $I(S)$ immer ein radizielles Ideal (ist $f^r|_S = 0$ mit $r \in \mathbb{N}$), so auch $f|_S = 0$, da k ein Körper). Wir haben also die Mengenabbildung

$$I : \mathfrak{P}(\mathbb{A}_k^n) \to RI_n(k)$$

mit folgenden Eigenschaften:

EIGENSCHAFTEN.

(1) I ist antimonoton: $S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow I(S_1) \supseteq I(S_2)$.

(2) $I(S) = k[X_1, \cdots, X_n] \Leftrightarrow S = \varnothing$.

(3) $\forall \mathfrak{a} \subsetneqq k[X_1, \cdots, X_n] : I\left(V(\mathfrak{a})\right) \supseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$

Beweis für (3). Es gilt $f \in \mathfrak{a} \Rightarrow f \in I(V(\mathfrak{a}))$, also $\mathfrak{a} \subseteq IV(\mathfrak{a})$. $\sqrt{\Box}$ ergibt

$$\sqrt{a} \subseteq \sqrt{IV(\mathfrak{a})} = IV(\mathfrak{a}).$$ □

Bemerkung. Aber es ist nicht unbedingt $IV(\mathfrak{a}) = \sqrt{(a)}$, etwa in $k = \mathbb{R}$, $n = 1$ mit $\mathfrak{a} = (X^2 + 1) = \sqrt{\mathfrak{a}}$ ist

$$V(\mathfrak{a}) = \varnothing \Rightarrow IV(\mathfrak{a}) = k[X] \supsetneqq (X^2 + 1).$$

Allgemein gilt: Ist k nicht algebraisch abgeschlossen ($k \neq \overline{k}$), so existiert $f \in k[X]$, $\deg f \geq 1$, f irreduzibel ohne Nullstellen. Damit ist $V(f) = \varnothing$, also

$$IV(f) = k[X] \supsetneqq \sqrt{(f)}.$$

Definition 6.12. *Ein Körper k heißt **HNS-Körper**, falls gilt:*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \mathfrak{a} \subseteq k[X_1, \cdots, X_n] : \quad IV(\mathfrak{a}) = \sqrt{\mathfrak{a}}$$

Bemerkung. Wir wissen, dass ($k \neq \overline{k} \Rightarrow k$ kein HNS-Körper. Wir wollen nun untersuchen, ob auch $\Leftarrow$ gilt.

Interpretation der HNS-Eigenschaft

HNS bedeutet für k: Sei $\{f_1, \dots f_t\} \subset k[X_1, \cdots, X_n]$, $g \in k[X_1, \cdots, X_n]$ weiteres Polynom mit $g|_{V(f_1, \cdots, f_t)} = 0$. Dann impliziert HNS: $\exists N \in \mathbb{N} : g^N \in (f_1, \cdots, f_t)$, d.h. $g \in \sqrt{(f_1, \cdots, f_t)} = IV(f_1, \cdots, f_t)$.

$\boxed{\text{SATZ 6.3.1.}}$ Für unendliche Körper k gilt:

(1) $VIV(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{a}) \quad \forall \mathfrak{a}$

(2) $\forall S \subseteq \mathbb{A}_k^n : \overline{S}^{\text{Zar}} = VI(S)$

(3) $V \circ I = \mathrm{id}_{\{\text{alg. Mengen}\}}$, d.h.

$$\begin{aligned} I &: \{\text{alg. Mengen}\} \hookrightarrow \{\text{rad. Ideale}\} \\ V &: \{\text{rad. Ideale}\} \twoheadrightarrow \{\text{alg. Mengen}\} \end{aligned}$$

(4) I bijektiv $\Leftrightarrow$ V bijektiv $\Leftrightarrow$ k ist HNS-Körper.

Beweis.

(1) Es gilt ja stets: $\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq IV(\mathfrak{a})$, also $V(\mathfrak{a}) \supseteq VIV(\mathfrak{a})$. Umgekehrt: Ist $a \in V(\mathfrak{a})$, so gilt $\forall g \in IV(\mathfrak{a}) : g(a) = 0$, d.h. $a \in VIV(\mathfrak{a})$.

(2) Es ist

$$\begin{aligned} & S \subseteq \overline{S} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{a} \\ V(\mathfrak{a}) \supseteq S}} V(\mathfrak{a}) \\ \xRightarrow[\text{monoton}]{I \text{ anti-}} \quad & I(S) \supseteq I\left(\overline{S}\right) \\ \xRightarrow[\text{monoton}]{V \text{ anti-}} \quad & VI(S) \subseteq VI\left(\overline{S}\right) \overset{(1)}{=\!=} \overline{S} \end{aligned}$$

Andererseits ist $VI(S)$ eine affine algebraische Menge, welche S umfasst, also $VI(S) \supseteq \bigcup_{V(\mathfrak{a}) \supseteq S} V(\mathfrak{a}) = \overline{S}$, also $VI(S) = \overline{S}$.

(3) Ist eine Umformulierung von (1).

(4) Folgt aus (3) und den vorherigen Betrachtungen.

□

$\boxed{\text{SATZ 6.3.2.}}$

(1) $\mathbb{A}_k^n$ ist noethersch (mit Zariski-Topologie).

(2) Jede affine algebraische Menge $V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_k^n$ ist ebenfalls noethersch.

(3) $\mathbb{A}_k^n$ ist irreduzibel.

Beweis.

(1) Sei

$$\mathbb{A}_k^n \supseteq W_1 \supseteq W_2 \supseteq \dots$$

absteigende Kette abgeschlossener Mengen.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad (0) \subseteq I(W_1) \subseteq I(W_2) \subseteq \dots \qquad \subseteq \underbrace{k[X_1, \cdots, X_n]}_{\text{noethersch}} \\
&\Rightarrow \quad I(W_k) = I(W_{k+1}) \quad \forall k \geq k_0 \\
&\Rightarrow \quad W_k = VI(W_k) = VI(W_{k+1}) = W_{k+1} \\
&\Rightarrow \quad \mathbb{A}_k^n \quad \text{noethersch.}
\end{aligned}$$

(2) Folgt aus (1) und der Definition von *noethersch*, da abgeschlossene Mengen in $V(\mathfrak{a})$ auch abgeschlossen in $\mathbb{A}_k^n$ sind.

(3) Angenommen, $\mathbb{A}_k^n$ wäre reduzibel, also $\mathbb{A}_k^n = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$, $V(\mathfrak{a}) \neq \mathbb{A}_k^n \neq V(\mathfrak{b})$. Dann ist $\mathbb{A}_k^n = V(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})$, also

$$(0) = I(\mathbb{A}_k^n) = I(V(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})) \supseteq \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}.$$

Nun ist aber $k[X_1, \cdots, X_n]$ Integritätsbereich (d.h. (0) Primideal), also $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = (0)$, somit $\mathfrak{a} = (0) \vee \mathfrak{b} = (0)$. Das heißt, $V(\mathfrak{a}) = \mathbb{A}_k^n$ oder $V(\mathfrak{b}) = \mathbb{A}_k^n$, im Widerspruch zur Annahme. □

SATZ 6.3.3. Sei k unendlicher Körper, dann gilt

(1) $\forall S, S' \in \mathbb{A}_k^n : \quad I(S \cup S') = I(S) \cap I(S')$.

(2) $\forall (S_i)_{i \in J} : S_i \subseteq \mathbb{A}_k^n : \quad I\left(\bigcup_{i \in J} S_i\right) \supseteq \sum_{i \in J} I(S_i)$

Beweis.

(1)
$$f|_{S \cup S'} = 0 \Leftrightarrow f|_S = 0 \wedge f|_{S'} = 0.$$

(2)
$$\begin{aligned}
&\forall j : \quad \bigcap_{i \in J} S_i \subseteq S_j \\
\Rightarrow \quad &\forall j : \quad I(S_j) \subseteq I\left(\bigcap_{i \in J} S_i\right) \\
\Rightarrow \quad &\sum_{j \in J} I(S_j) \subseteq I\left(\bigcap_{i \in J} S_i\right)
\end{aligned}$$

□

$\boxed{\text{Satz 6.3.4.}}$ *Charakterisierung der Irreduzibilität via I*
Sei $S \subseteq \mathbb{A}_k^n$, $W = \overline{W} \subseteq \mathbb{A}_k^n$. Dann

(1) W irreduzibel $\Leftrightarrow I(W)$ prim.

(2) S irreduzibel $\Leftrightarrow I(S)$ prim.

Beweis.

(1) $\Rightarrow$: Sei $W = V(\mathfrak{a})$ irreduzibel, $f, g \in k[X_1, \cdots, X_n]$ mit $f \cdot g \in I(W)$.

$$\begin{aligned}
&\underset{V}{\Rightarrow} && W = VI(W) \subseteq V(f \cdot g) = V(f) \cup V(g) \\
&\Rightarrow && W = (W \cap V(f)) \cup (W \cap V(g)) \\
&\xrightarrow[\text{oBdA}]{W \text{ irred.}} && W = W \cap V(f) \\
&\Rightarrow && W \subseteq V(f) \\
&\Rightarrow && I(W) \supseteq IV(f) \ni f \\
&\Rightarrow && f \in I(W).
\end{aligned}$$

$\square\Rightarrow$

$\Leftarrow$: Sei W affine algebraische Menge, $I(W)$ prim, und $W = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$. Dann ist

$$\begin{aligned}
& && I(W) = IV(\mathfrak{a}) \cap IV(\mathfrak{b}) \\
&\xrightarrow[\text{oBdA}]{I(W) \text{ prim}} && IV(\mathfrak{a}) \subseteq I(W) \\
&\Rightarrow && V(\mathfrak{a}) = VIV(\mathfrak{a}) \supseteq VI(W) = W \\
&\Rightarrow && W = V(\mathfrak{a}) \quad \text{ist irreduzibel.}
\end{aligned}$$

$\square\Leftarrow$

$\square(1)$

(2) folgt aus (1): S irreduzibel $\Leftrightarrow \overline{S}$ irreduzibel $\overset{(1)}{\Longleftrightarrow} I(\overline{S})$ prim $\xLeftrightarrow{I(S)=I(\overline{S})} I(S)$ prim. $\square(2)$

$\square$

Bemerkung. Im allgemeinen gilt nicht $\sqrt{\mathfrak{a}}$ prim $\Leftrightarrow V(\mathfrak{a})$ irreduzibel.

Beispiel 6.3.1. $k = \mathbb{R}$, $n = 1$, $\mathfrak{a} := (X \cdot (X^2 + 1))$. Dann ist $V(\mathfrak{a}) = V(X)$ irreduzibel, $\sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$, aber $\sqrt{\mathfrak{a}} = (X \cdot (X^2 + 1))$ kein Primideal.

Ist k ein HNS-Körper, so ist aber wirklich $V(\mathfrak{a})$ irreduzibel $\Leftrightarrow \sqrt{\mathfrak{a}}$ prim (weil $IV(\mathfrak{a}) = \sqrt{\mathfrak{a}}$.

$\boxed{\text{Satz 6.3.5.}}$ Es gilt: k HNS-Körper $\Leftrightarrow k = \overline{k}$.

Bemerkung. $\Rightarrow$ wurde bereits gezeigt.

Zunächst beweisen wir, dass Körper $k = \overline{k}$ mit überabzähhlbarer Mächtigkeit HNS-Körper sind (z.B. $k = \mathbb{C}$).

Lemma. Sei $k = \overline{k}$ überabzählbar, $k \subseteq L$ Erweiterungskörper mit $\dim_k L \leq \operatorname{card}(\mathbb{N})$. Dann $L = k$.

Beweis.

(1) Ist L algebraisch über k, d.h. $\forall \beta \in L$ existiert $p \in k[X]$ mit $p(\beta) = 0$, so ist $k = L$, weil k algebraisch abgeschlossen (d.h. alle Nullstellen von p liegen schon in k).

(2) Angenommen, $k \subsetneqq L$. Dann ist L nicht algebraisch über k, d.h. es gibt mindestens ein $\beta \in L \setminus k$, so dass $p(\beta) \neq 0 \forall p \in k[X]$. Dann hat

$$k(\beta) = \bigcup_{\substack{k \subseteq K \subseteq L \\ \beta \in K}} K = \operatorname{Quot} k[\beta]$$

die Eigenschaften $k[\beta] \cong k[X]$ und $k(\beta) \cong k(X)$, mit $k \subsetneqq k(\beta) \subseteq L$. Nach Voraussetzung ist

$$\operatorname{card}(\mathbb{N}) \geq \dim_k L \geq \dim_k k(\beta) = \dim_k k(X).$$

Nun existiert in $k[X]$ die Familie $\left\{ \frac{1}{X-a} \,\middle|\, a \in k \right\}$ mit Mächtigkeit $\operatorname{card} k > \operatorname{card} \mathbb{N}$. Diese Familie ist k-frei, denn sonst gäbe es $(a_i)_{i=1}^r \in k^r$ mit $a_i \neq a_j \forall i \neq j$, und $(\lambda_i)_{i=1}^r \in k^r \setminus 0$, mit

$$\begin{aligned}
&& \sum_{i=1}^r \frac{\lambda_i}{X - a_i} &= 0 \in k(X) \\
&\Rightarrow & \sum_{i=1}^r \lambda_i \cdot \prod_{j \neq i} (X - a_j) &= 0 \in k[X] \\
&\Rightarrow & \forall l \in \{1, \dots r\} : \sum \lambda_i \cdot \prod_{j \neq i} (a_l - a_j) &= 0
\end{aligned}$$

und da $\prod_{j \neq i}(a_l - a_j) = 0$ für $i \neq l$, folgt

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow & \forall l \in \{1, \dots r\} : \quad \lambda_l \cdot \prod_{j \neq l} (a_l - a_j) &= 0 \\
&\Rightarrow & \forall l \in \{1, \dots r\} : \quad \lambda_l &= 0
\end{aligned}$$

Somit ist $\operatorname{card}(\mathbb{N}) \geq \dim_k k(X) \geq \operatorname{card}(k) > \operatorname{card}(\mathbb{N})$, was offensichtlich ein Widerspruch ist. Somit ist unsere Annahme falsch, also stimmt der Satz. $\square$

Satz 6.3.6. *(Schwacher Hilbertscher Nullstellensatz)*
Sei k algebraisch abgeschlossener, überabzählbarer Körper, $\mathfrak{a} \subsetneqq k[X_1, \cdots, X_n]$ ein Ideal. Dann ist $V(\mathfrak{a}) \neq \varnothing$.

Beweis. Sei $\mathfrak{a} \subsetneqq k[X_1, \cdots, X_n]$, so existiert $\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} k[X_1, \cdots, X_n]$ mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$, also $V(\mathfrak{m}) \subseteq V(\mathfrak{a})$. Es beleibt zu zeigen, dass $V(\mathfrak{m}) \neq \varnothing$. Betrachte

$$k \xhookrightarrow{j} k[X_1, \cdots, X_n] \xrightarrow{\pi} k[X_1, \cdots, X_n]/\mathfrak{m} = k[\overline{X_1}, \cdots, \overline{X_n}] =: L$$

$\varphi := \pi \circ j$ ist injektiv, da Körperhomomorphismus. Damit ist $L : \varphi(k)$ Körpererweiterung, $\varphi(k) \cong k$. Weiterhin ist

$$\begin{aligned} \dim_k L &\leq \dim_k k[X_1, \cdots, X_n] \\ &= \dim_k \bigoplus_{(i_1, \cdots, i_n) \in \mathbb{N}^n} k \cdot X_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot X_n^{i_n} \\ &= \operatorname{card} \mathbb{N}^n \\ &= \operatorname{card} \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Wegen $\operatorname{card} k > \operatorname{card} \mathbb{N}$, $k = \overline{k}$ und dem Lemma folgt also $k \cong k[X_1, \cdots, X_n]/\mathfrak{m}$, d.h. $\exists \psi : k[X_1, \cdots, X_n]/m \xrightarrow{\sim} k$ mit $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$:

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r, tail, "i"'] \arrow[d, equal] & k[X_1, \cdots, X_n] \arrow[d, "\pi"] \arrow[dl, "\tilde{\psi}_{\mathfrak{m}}"'] \\ k & k[X_1, \cdots, X_n]/\mathfrak{m} \arrow[l, "\psi = \varphi^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Hierbei ist

$$\tilde{\psi}_{\mathfrak{m}} := \psi \circ \pi = (\pi \circ j)^{-1} \circ \pi \in \operatorname{Hom}_{k\text{-Alg}}(k[X_1, \cdots, X_n], k),$$

mit $\ker \tilde{\psi}_{\mathfrak{m}} = \ker \pi = \mathfrak{m}$. Wir haben also

$$\forall \mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} k[X_1, \cdots, X_n] : \qquad \exists! \tilde{\psi}_{\mathfrak{m}} \in \operatorname{Hom}_{k\text{-Alg}}(k[X_1, \cdots, X_n], k) : \quad \ker \tilde{\psi}_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}.$$

Damit haben wir eine bijektive Abbildung

$$\begin{aligned} \ker : \operatorname{Hom}_{k\text{-Alg}}(k[X_1, \cdots, X_n], k) &\xrightarrow{\sim} \operatorname{Specm} k[X_1, \cdots, X_n]. \\ \varphi &\longmapsto \ker \varphi \\ \tilde{\psi}_{\mathfrak{m}} &\longleftarrow\!\shortmid \mathfrak{m} \end{aligned}$$

Sei nun $a \in \mathbb{A}_k^n$ mit $a_i := \psi(\overline{X_i}) = \tilde{\psi}_{\mathfrak{m}}(X_i)$. Dann folgt sofort:

$$\begin{aligned} \mathfrak{m} &= \ker \tilde{\psi}_{\mathfrak{m}}(X_i) \\ &= \{f \in k[X_1, \cdots, X_n] \mid f(a) = 0\} \\ &= I(\{a\}) \\ &= (X_1 - a_1, \cdots, X_n - a_n) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad V(\mathfrak{m}) = \{a\} \neq \varnothing$$

□

Der Beweis zeigt:

$\boxed{\text{KOROLLAR.}}$ Ist $k = \overline{k}$ überabzählbarer Körper, dann gilt:

(1) Die Kern-Abbildung

$$\ker : \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(k[X_1, \cdots, X_n], k) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Specm} k[X_1, \cdots, X_n]$$

ist bijektiv.

(2) Das Maximalspektrum hat die Form

$$\operatorname{Specm} k[X_1, \cdots, X_n] = \{(X_1 - a_1, \cdots, X_n - a_n) \mid (a_i)_{i=1}^n \in k^n\}\,.$$

Es besteht also zumindest im Fall eines überabzählbaren $k = \overline{k}$ das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, mapsto] & \tilde{\psi}_{\mathfrak{m}_a} \\
\mathbb{A}^n_k \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(k[X_1, \cdots, X_n], k) \arrow[d, shift left] \\
 & \operatorname{Specm} k[X_1, \cdots, X_n] \arrow[u, shift left]
\end{tikzcd}$$

$$a \longmapsto (X_1 - a_1, \cdots, X_n - a_n) =: \mathfrak{m}_a \qquad \mathfrak{m} \longmapsto \tilde{\psi}_{\mathfrak{m}} \qquad \psi \longmapsto \ker \psi$$

$\boxed{\text{KOROLLAR.}}$ Sei $k = \overline{k}$ überabzählbar, A endlich erzeugte k-Algebra, etwa $A \cong k[X_1, \cdots, X_n]/\mathfrak{a} = k[\overline{X_1}, \cdots, \overline{X_n}]$.
Dann ist auch folgendes Diagramm kommutativ mit lauter Bijektionen:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, k) \arrow[rr, "\sim", "\ker"'] \arrow[dr, "\sim"] & & \operatorname{Specm} A \\
 & V(\mathfrak{a}) \arrow[ur, "\sim"'] &
\end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{SATZ 6.3.7.}}$ *Charakterisierung der HNS-Körper*

Sei k ein Körper, dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) $\forall n \in \mathbb{N} : I : AM_n(k) \to RI_n(k)$ ist bijektiv.

(2) $\forall n \in \mathbb{N} : V : RI_n(k) \to AM_n(k)$ ist bijektiv.

(3) k ist HNS-Körper, d.h.
$\forall n \in \mathbb{N} : \forall \mathfrak{a} \subseteq k[X_1, \cdots, X_n] : IV(\mathfrak{a}) = \sqrt{a}$.

(4) $\forall n \in \mathbb{N} : \forall \mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} k[X_1, \cdots, X_n] : V(\mathfrak{m}) \neq \varnothing$.

(5) $\forall n \in \mathbb{N} : \forall \mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} k[X_1, \cdots, X_n] : \quad \exists! a \in \mathbb{A}_n^k :$
$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_a = (X_1 - a_1, \cdots, X_n - a_n)$.

(6) $\forall n \in \mathbb{N} : \forall \mathfrak{a} \subsetneqq k[X_1, \cdots, X_n] : V(\mathfrak{a}) \neq \varnothing$.

(7) $\forall n \in \mathbb{N} : \forall \mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} k[X_1, \cdots, X_n] : k \xhookrightarrow{\pi_\mathfrak{m} \circ i} k[X_1, \cdots, X_n]/\mathfrak{m}$ ist Isomorphismus.

(8) $k = \overline{k}$ und $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} k[X_1, \cdots, X_n]$ gilt:
$k[X_1, \cdots, X_n]/\mathfrak{m} : k$ ist algebraische Erweiterung.

Aussage (3) wird auch **starker Hilbertscher Nullstellensatz** genannt.

Beweis.

(1) $\Leftrightarrow$ (2) $V \circ I = \mathrm{id}_{AM_n(k)}$ ist bekannt.

(1) $\Rightarrow$ (3) Sei $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq k[X_1, \cdots, X_n]$. Wegen (1) ist dann $\sqrt{\mathfrak{a}} = IV(\mathfrak{b})$ für ein $\mathfrak{b}$. Folglich ist

$$V(\mathfrak{a}) = V(\sqrt{\mathfrak{a}}) = VIV(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{b}),$$

also $IV(\mathfrak{a}) = IV(\mathfrak{b}) = \sqrt{\mathfrak{a}}$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Für $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$ gilt wegen (3) auch $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}} = IV(\mathfrak{a})$, d.h. $\mathfrak{a} \in \operatorname{im}(I)$. Damit ist I surjektiv, also bijektiv.

(3) $\Rightarrow$ (4) Sei $\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} k[X_1, \cdots, X_n]$. Nach (3) ist $\mathfrak{m} = \sqrt{\mathfrak{m}} = IV(\mathfrak{m})$. Wäre nun $V(\mathfrak{m}) = \varnothing$, so wäre $\mathfrak{m} = I(\varnothing) = k[X_1, \cdots, X_n]$ (was der Definition von Maximalideal widerspricht), also ist $V(\mathfrak{m}) \neq \varnothing$.

(4) $\Rightarrow$ (5) Sei $\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} k[X_1, \cdots, X_n]$.

$$\begin{aligned}
&\overset{(4)}{\Longrightarrow} \quad \exists a \in V(\mathfrak{m}) \subsetneqq \mathbb{A}_k^n \\
\Rightarrow \quad & I(a) = (X_1 - a_1, \cdots, X_n - a_n) \supseteq IV(\mathfrak{m}) \supseteq \mathfrak{m} \\
& \mathfrak{m} = (X_1 - a_1, \cdots, X_n - a_n) = \mathfrak{m}_a
\end{aligned}$$

(5) $\Rightarrow$ (6) Sei $\mathfrak{a} \subsetneqq k[X_1, \cdots, X_n]$. Dann $\exists \mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} k[X_1, \cdots, X_n]$: $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$. Es folgt $\varnothing \neq V(\mathfrak{m}) \subseteq V(\mathfrak{a})$, also $\varnothing \neq V(\mathfrak{a})$.

(6) $\Rightarrow$ (3) Dies zeigen wir mittels des *Tricks von Rabinovich*.

Sei also (6) erfüllt, d.h. es gelte $V(\mathfrak{a}) \neq \varnothing \forall a \subsetneqq k[X_1, \cdots, X_n]$. Es genügt nun, für alle echten Ideale $\mathfrak{a}$ zu zeigen (da ja $\sqrt{a} \subseteq IV(\mathfrak{a})$ sowieso gilt), dass $IV(\mathfrak{a}) \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$, d.h. $g \in IV(\mathfrak{a}) \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : g^N \in \mathfrak{a}$.

Sei also $\mathfrak{a} \subsetneqq k[X_1, \cdots, X_n]$ echtes Ideal, $g \in IV(\mathfrak{a})$. Wir betrachten nun die Ringerweiterung $k[X_1, \cdots, X_n] \subsetneqq k[X_1, \cdots, X_n, X_{n+1}]$ und darin das Ideal

$$\begin{aligned} \mathfrak{b} &:= (\mathfrak{a} \cup \{X_{n+1} \cdot g(X_1, \cdots, X_n) - 1\})_{k[X_1, \ldots X_{n+1}]} \\ &= \mathfrak{a}_{\text{ext}} + (X_{n+1} \cdot g - 1) \subseteq k[X_1, \cdots, X_{n-1}] \end{aligned}$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} V(\mathfrak{b}) &= \left\{ (a_1, \cdots, a_{n+1}) \in \mathbb{A}_k^{n+1} \,\middle|\, \begin{array}{c} (a_1, \cdots, a_n) \in V(\mathfrak{a}) \wedge \\ a_{n+1} \cdot g(a_1, \cdots, a_n) = 1 \end{array} \right\} \\ &\subseteq \left\{ (a_1, \cdots, a_{n+1}) \in \mathbb{A}_k^{n+1} \,\middle|\, \begin{array}{c} g(a_1, \ldots a_{n+1}) = 0 \wedge \\ a_{n+1} \cdot g(a_1, \cdots, a_n) = 1 \end{array} \right\} \\ &\subseteq \left\{ (a_1, \cdots, a_{n+1}) \in \mathbb{A}_k^{n+1} \mid a_{n+1} \cdot 0 = 1 \right\} \\ &= \varnothing \end{aligned}$$

Es ist also $V(\mathfrak{b}) = \varnothing$, und wegen (6) ist damit $\mathfrak{b} = k[X_1, \cdots, X_{n+1}]$, also $1 \in \mathfrak{b}$. Das heißt, es existieren $s \in \mathbb{N}$, $f_1, \cdots, f_s \in \mathfrak{a}$, $h_1, \ldots h_s, h \in k[X_1, \cdots, X_{n+1}]$ mit

$$(\star) \qquad \begin{aligned} 1 &= \sum_{i=1}^{s} h_i(X_1, \cdots, X_{n+1}) \cdot f_i(X_1, \cdots, X_n) + \\ &\quad + h(X_1, \ldots X_{n+1}) \cdot (X_{n+1} \cdot g(X_1, \cdots, X_n) - 1) \\ &\in k[X_1, \cdots, X_n, X_{n+1}] \subset k(X_1, \cdots, X_n)[X_{n+1}] \end{aligned}$$

Diese Identität gilt dann offenbar für alle Einsetzungen $\frac{\varphi(X_1, \cdots, X_n)}{\psi(X_1, \cdots, X_n)} \in k(X_1, \cdots, X_n)$ für X_{n+1}. Speziell sei $X_{n+1} := \frac{1}{g(X_1, \cdots, X_n)}$. Es ergibt sich

$$1 = \sum_{i=1}^{s} h_i \left(X_1, \cdots, X_n, \frac{1}{g(X_1, \cdots, X_n)} \right) \cdot f_i(X_1, \cdots, X_n) + 0.$$

Wählen wir nun $N \in \mathbb{N}$ groß genug, dass für alle i

$$h_i^* := h_i(X_1, \cdots, X_n, \frac{1}{g}) \cdot g^N \in k[X_1, \cdots, X_n]$$

ist[1], so ergibt sich

$$g^N = \sum_{i=1}^{s} h_i^* \cdot \underbrace{f_i}_{\in \mathfrak{a}},$$

[1] $N :=$ ⟨der größte Exponent von X_{n+1} in den h_i⟩ genügt

also $g^N \in \mathfrak{a}$, d.h. $g \in \sqrt{\mathfrak{a}}$.

Wir haben also gezeigt, dass hier $IV(\mathfrak{a}) \subseteq \sqrt{a}$.

(3) $\Rightarrow$ (7), (7) $\Rightarrow$ (8), (8) $\Rightarrow$ (3) Übungsaufgabe. □

KOROLLAR. Ist $k = \overline{k}$ und $\operatorname{card} k > \operatorname{card} \mathbb{N}$, so ist k ein HNS-Körper, erfüllt also den starken HNS.

Von unserem Ziel „$k = \overline{k} \Leftrightarrow k$ HNS-Körper“ haben wir also bereits $\Leftarrow$ sowie $\Rightarrow$ für den Fall überabzählbarer Körper geschafft.

6.4 Noether-Normalisierung von k-Algebren und der allgemeine HNS

Wir betrachten im folgenden beliebige Körper (auch endliche) sowie endlich erzeugte k-Algebren

$$A = k[\theta_1, \cdots, \theta_n] \cong k[X_1, \cdots, X_n]/\mathfrak{a}.$$

Wir interessieren uns für die feinere Struktur solcher Algebren.

Ziel. Ist A endlich erzeugte k-Algebra, so existiert eine Zwischenalgebra B (d.h. $k \subseteq B \subseteq A$) mit

(i) B ist k-Algebra-isomorph zu einer Polynomalgebra, d.h. $B = k$ oder B rein transzendent ($B \cong k[Y_1, \cdots, Y_d]$, $d \leq n$).

(ii) A ist als B-Modul endlich erzeugt.

Vorbereitungen

LEMMA. *(Kombinatorisches Lemma)*
Sei $\left(i_1^{(s)}, \cdots, i_n^{(s)}\right)_{s \in S}$ eine endliche Familie von n-Tupeln aus $\mathbb{N}^n$, $n \geq 2$, S endlich.
Dann existiert $p_1, \cdots, p_{n-1} \in \mathbb{N}$, so dass für alle $s, t \in S$ gilt:

$$(*) \qquad \sum_{\nu=1}^{n-1} p_\nu \cdot i_\nu^{(s)} + i_n^{(s)} = \sum_{\nu=1}^{n-1} p_\nu \cdot i_\nu^{(t)} + i_n^{(t)}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\left(i_1^{(s)}, \cdots, i_n^{(s)}\right) = \left(i_1^{(t)}, \cdots, i_n^{(t)}\right)$$

Beweis. per Induktion über $n \geq 2$:

$n = 2$: Setze $p_1 > \max\left\{i_2^(s) \mid s \in S\right\}$. Dann ist $(*)$ gerade

$$\begin{aligned} p_1 \cdot i_1^{(s)} + i_1^{(s)} &= p_1 \cdot i_1^{(t)} + i_2^{(t)} \\ \Rightarrow \quad p_1 \cdot \left(i_1^{(s)} - i_1^{(t)}\right) &= i_1^{(s)} - i_2^{(t)} \\ \Rightarrow \quad p_1 \cdot \left|i_1^{(s)} - i_1^{(t)}\right| &= \left|i_1^{(s)} - i_2^{(t)}\right| \end{aligned}$$

Nehmen wir an, es wäre $i_1^{(s)} \neq i_1^{(t)}$, dann ist

$$p_1 \leq p_1 \cdot \left|i_1^{(s)} - i_1^{(t)}\right| = \left|i_1^{(s)} - i_2^{(t)}\right| \leq \max\left\{i_1^{(s)}, i_2^{(t)}\right\} < p_1$$
$$p_1 < p_1,$$

offensichtlich ein Widerspruch. Daher muss $i_1^{(s)} = i_1^{(t)}$ und folglich auch $i_2^{(s)} = i_2^{(t)}$ sein.

$n \mapsto n+1$: Wir haben also unsere endliche Tupel-Familie $\left(i_1^{(s)}, \cdots, i_{n+1}^{(s)}\right)_{s \in S}$ nach Voraussetzung. Wir wählen nun $p_2, \ldots p_n \in \mathbb{N}^*$ nach Induktionsvoraussetzung, so dass die Bedingung des Lemmas für $\left(i_2^{(s)}, \cdots, i_{n+1}^{(s)}\right)_{s \in S}$ erfüllt ist. Dann setzen wir

$$p_1 > \max\left\{\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu \cdot i_\nu^{(s)} + i_{n+1}^{(s)} \,\middle|\, s \in S\right\}$$

Nun leistet $p_1, \ldots p_n \in \mathbb{N}$ das Gewünschte für $\left(i_1^{(s)}, \cdots, i_{n+1}^{(s)}\right)_{s \in S}$ (Beweis wie für $n = 2$). $\square$

Nun betrachten wir die algebraischen Konsequenzen daraus. Dieses kombinatorische Lemma ist eine Vorbereitung (Normierung) für Polynom-Algebren.

Problem. Sei k Körper, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $f \in k[X_1, \cdots, X_n]$. Beschreibe $k[X_1, \cdots, X_n]/(f)$, also $\dim_{\text{Krull}}$, Spec, Specm, ...

Lösungsidee. Finde einen k-Algebra-Isomorphismus $\sigma : k[X_1, \cdots, X_n] \xrightarrow{\sim} k[X_1, \cdots, X_n]$ derart, dass $\sigma(f)$ einfache Gestalt hat. Dann ist nämlich

$$k[X_1, \cdots, X_n]/(f) \cong k[X_1, \cdots, X_n]/(\sigma(f))$$

$\boxed{\textsc{Satz 6.4.1.}}$ *(Vorbereitungslemma)*
Sei k Körper, $n \geq 2$, $f \in k[X_1, \cdots, X_n]$, $\deg f \geq 1$. Dann existieren $p_1, \dots p_{n-1} \in \mathbb{N}$ mit:

(1) $\sigma : k[X_1, \cdots, X_n] \xrightarrow{\sim} k[X_1, \cdots, X_n]$, definiert durch $\sigma|_k := \mathrm{id}_k$, $\sigma(X_i) := X_i + X_n^{p_i}$ (für $i \leq n-1$) und $\sigma(X_n) := X_n$, ist ein k-Algebra-Isomorphismus.

(2) $\sigma(f) = a \cdot X_n^d + \sum\limits_{i=0}^{d-1} g_i(X_1, \cdots, X_{n-1}) \cdot X_n^i$ mit geeignetem $d \in \mathbb{N}$, $a \in k^*$.

(3) $k[X_1, \cdots, X_n]/(f)$ ist $k[X_1, \cdots, X_{n-1}]$-Modul, endlich erzeugt durch

$$\left\{\overline{1}, \overline{X_n}, \overline{X_n}^2, \cdots, \overline{X_n}^{d-1}\right\} \subset k[X_1, \cdots, X_n]/(\sigma(f)),$$

ja sogar frei vom Rang d.

Beweis.

(1) Es gilt sogar, dass jedes $(q_1, \cdots, q_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1}$ einen solchen Isomorphismus. Dieser hat dann die Inverse σ^{-1} mit $\sigma^{-1}|_k = \mathrm{id}_k$, $\sigma^{-1}(X_i) = X_i - X_n^{q_i}$, $\sigma^{-1}(X_n) = X_n$.

(2) Sei

$$f = \sum_{s \in S} a_{i_1^{(s)}, \dots i_n^{(s)}} \cdot X_1^{i_1^{(s)}} \cdots X_n^{i_n^{(s)}},$$

mit $|S| < \infty$, $a_{i^{(s)}} \neq 0$, $i_k^{(s)} \in \mathbb{N}$. Wir wählen nun zu $\left(i_1^{(s)}, \cdots, i_n^{(s)}\right)_{s \in S}$ nach dem kombinatorischem Lemma $(p_1, \cdots, p_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1}$ derart, dass

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} p_\nu^{i_\nu^{(s)}} + i_n^s \neq \sum_{\nu=1}^{n-1} p_\nu^{i_\nu^{(t)}} + i_n^t \qquad \forall s \neq t \in S.$$

Da diese Summen also alle verschieden sind, gibt es genau ein s^*, so dass $d := \sum_{\nu=1}^{n-1} p_\nu^{i_\nu^{(s^*)}} + i_n^s$ die maximale Summe ergibt.
Wir betrachten nun den durch $(p_1, \dots p_{n-1})$ induzierten k-Algebra-Isomorphismus σ. Dann wird

$$\sigma(f) = \sum_{s \in S} a_{i_1^{(s)}, \dots i_n^{(s)}} \cdot (X_1 + X_n^{p_1})^{i_1^{(s)}} \cdot \ldots \cdot (X_{n-1} + X_n^{p_{n-1}})^{i_{n-1}^{(s)}} \cdot X_n^{i_n^{(s)}}$$

und nach Ausmultiplizieren sowie Sortieren nach Potenzen von X_n ergibt sich

$$= \underbrace{a_{i_1^{(s^*)}, \dots i_n^{(s^*)}}}_{=:a} \cdot X^d + \sum_{i=0}^{d-1} g_i(X_1, \cdots, X_{n-1}) \cdot X_n^i.$$

(3) Mit (2) wird

$$k[X_1, \cdots, X_n]/(f) \xrightarrow[\sigma]{\sim} k[X_1, \cdots, X_n]/(\sigma(f)) =: k[\overline{X}_1, \cdots, \overline{X}_n]$$

Dabei ist wegen

$$\sigma(f) = a \cdot X_n^d + \sum_{i=1}^{d-1} g_i \cdot X_n^i$$

mit $a \in k^*$ also

$$(\sigma(f)) = \left(X_n^d + \sum_{i=1}^{d-1} \frac{g_i}{a} \cdot X_n^i \right),$$

folglich

$$\overline{X_n^n} = \sum_{i=0}^{d-1} \overline{\frac{g_i}{a}(X_1, \cdots, X_{n-1})} \cdot \overline{X_n^i}.$$

Weiterhin ist in

$$\underbrace{k[X_1, \cdots, X_{n-1}] \overset{j}{\hookrightarrow} k[X_1, \cdots, X_n] \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} k[X_1, \cdots, X_n]/(\sigma(f))}_{\pi \circ j}$$

$\pi \circ j$ injektiv, da $X_n \notin k[X_1, \cdots, X_{n-1}]$. Daher ist

$$k[\overline{X_1}, \cdots, \overline{X_n}] \cong \sum_{i=1}^{d-1} k[X_1, \cdots, X_{n-1}]\overline{X_n}^i,$$

also $k[X_1, \cdots, X_n]/(\sigma(f))$ ein endlich erzeugter $k[X_1, \cdots, X_{n-1}]$-Modul. Schließlich ist $k[X_1, \cdots, X_n]/(\sigma(f))$ auch frei über $k[X_1, \cdots, X_{n-1}]$, weil

$$\overline{0} = \sum_{i=0}^{d-1} P_i(X_1, \cdots, X_{n-1}) \cdot \overline{X_n^i} = 0$$

impliziert, dass

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{d-1} P_i(X_1, \cdots, X_{n-1}) \cdot X_n^i}_{\deg_n \leq d-1}$$

ein Vielfaches von

$$\underbrace{X_n^d + \sum_{i=0}^{d-1} \frac{g_i}{a}(X_1, \cdots, X_{n-1}) \cdot X_m^i}_{\deg_n = d}$$

ist, und aufgrund der Grade muss also hier $P_i = 0$ sein für alle i.

Wir erhalten also

$$k[X_1, \cdots, X_n] \big/ (\sigma(f)) \cong_{k[X_1,\cdots,X_{n-1}]} k[X_1, \cdots, X_{n-1}]^d. \qquad \square$$

Bemerkung. d ist *keine* Invariante, sondern von der $k[X_1, \cdots, X_n]$-Modulstruktur abhängig, also von den p_i.

> $\boxed{\text{Bemerkung 1.}}$ Für $\mathrm{card}(k) \geq \mathrm{card}(\mathbb{N})$ (unendliche Körper) reichen sogar affine Transformationen:
>
> $$\begin{aligned} X_i &\mapsto X_i + a_i X_n \\ X_n &\mapsto a_n X_n \quad (a_n \neq 0) \end{aligned}$$

Beweis. Übung. *Hinweis:* $f \in k[X_1, \cdots, X_n]$ kann geschrieben werden als $f = f_0 + \ldots + f_d$, $d := \deg f$, wobei

$$f_i = \sum_{\nu_1 + \ldots \nu_n = i} a_\nu X_1^{\nu_1} \cdots X_n^{\nu_n}$$

homogener Bestandteil vom Grad i. $\square$

Beispiel 6.4.1. Betrachte $f := X \cdot Y \in k[X, Y, Z]$. Es ist $f = \underbrace{a_{110}}_{=1} X^1 Y^1 Z^0$, d.h. $|S| = 1$, $S = \{(1, 1, 0)\}$. Nach kombinatorischem Lemma erhalten wir $p_1 = 1$, $p_1 = 2$ und

$$\sigma(f) = (X + Z^2)(Y + Z) = Z^3 + (YZ^2 + XZ + XY),$$

und damit

$$k[X, Y, Z] \big/ (XY) \cong k[X, Y, Z] \big/ Z^3 + (\ldots) \cong k[X, Y][Z] \big/ (Z^3 + (\ldots))$$

> $\boxed{\text{Satz 6.4.2.}}$ *(Existenz der allgemeinen Noether-Normalisierung)*
> Sei k ein beliebiger Körper, $n \in \mathbb{N}$, A endlich erzeugte k-Algebra, d.h. $A = k[v_1, \cdots, v_n] \cong k[X_1, \cdots, X_n] \big/ \mathfrak{a}$.
> Dann existiert ein $d \in \{0, \cdots, n\}$ und eine Zwischenalgebra B, $k \subseteq B \subseteq A$, derart, dass
>
> (1) $B \cong k[X_1, \cdots, X_d]$ ist rein transzendent
>
> (2) A ist *als B-Modul* endlich erzeugt, d.h.
>
> $$A = \sum_{i=1}^{r} B \cdot x_i.$$

Bemerkung. *Als B-Algebra* ist A ohnehin endlich erzeugt.

Definition 6.13. *$k \subseteq B \subseteq A$ (mit obigen Eigenschaften) heißt* ***Noether-Normalisierung*** *von A.*

Beweis. Der Beweis erfolgt durch Induktion über n, d.h. die Anzahl der Erzeugenden von A über k.

$n = 0$: Dann ist $A = B = k$, $d = 0$.

$n = 1$: Wir haben

$$A = k[v_1] \cong k[X]/\mathfrak{a} \cong k[X]/(f) \qquad \text{weil } k[X] \text{ HIR}$$

1. **Fall:** Ist $f = 0$, so auch $\mathfrak{a} = (0)$, also $A \cong k[X]/(0) = k[X]$, d.h. $B := A$, $d := 1$ erfüllt die Behauptung.
2. **Fall:** $f \in k[X] \setminus k$, d.h. $k[X] \neq \mathfrak{a} \neq (0)$, $f = X^r + a_{r-1}X^{r-1} + \ldots + a_0$. Wir wählen $B := k$, $d = 0$. Wir erhalten

$$k[X]/(f) = \bigoplus_{i=0}^{r} k \cdot \overline{X^i},$$

das ist ein k-Vektorraum (und also auch freier B-Modul) vom Rang $\deg f = r$.

$n > 1$: Sei $A = k[v_1, \cdots, v_n] \cong k[X_1, \cdots, X_n]/\mathfrak{a}$ k-Algebra mit n Erzeugenden.

1. **Fall:** $\mathfrak{a} = (0)$, So ist $A = k[X_1, \cdots, X_n]$, $B := A$ und $d := n$ tun es.
2. **Fall:** $\mathfrak{a} \neq (0)$, d.h. $\exists f \in \mathfrak{a} \setminus (0)$, mit $\deg(f) \geq 1$. Mittels σ kann man annehmen, dass

$$\sigma(f) = aX_n^d + \sum_{i=0}^{d-1} g_i(X_1, \cdots, X_{n-1})\dot{X}_n^i,$$

und wir erhalten

$$A \cong k[X_1, \cdots, X_n]/\sigma(\mathfrak{a}), \qquad \sigma(f) \in \sigma(\mathfrak{a}).$$

Sei also nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f = \sigma(f)$. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & & & A \arrow[d, equal] & \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{a} \arrow[r, tail] & k[X_1, \cdots, X_n] \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[d, equal] & k[X_1, \cdots, X_n]/\mathfrak{a} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & (f) \arrow[r, tail] \arrow[u] & k[X_1, \cdots, X_n] \arrow[r, two heads, "p_1"] & k[X_1, \cdots, X_n]/(f) \arrow[r] & 0 \\
 & & k[X_1, \cdots, X_{n-1}] \arrow[u, "j"] \arrow[uur, "\varphi"] \arrow[ur, "p_1 \circ j"'] & &
\end{tikzcd}$$

mit exakten Zeilen. Dabei ist (nach Isomorphiesatz)

$$A \cong \left({k[X_1, \cdots, X_n]}/{(f)} \right) \Big/ \left({\mathfrak{a}}/{(f)} \right),$$

also $A = {k[X_1, \cdots, X_n]}/{\mathfrak{a}}$ ein zyklischer ${k[X_1, \cdots, X_n]}/{(f)}$-Modul. $\varphi = \pi \circ i$ definiert $\varphi(k[X_1, \cdots, X_{n-1}]) =: A' \subseteq A$, als k-Unteralgebra, welche von $n-1$ Elementen $\varphi(X_1, \dots \varphi(X_{n-1})$ erzeigt wird. Die Induktionsvoraussetzung liefert dafür: Es existiert eine Unteralgebra B, $k \subseteq B \subseteq A'$, $B \cong k[X_1, \cdots, X_d]$, A' endlich erzeugter B-Modul. Die $k[X_1, \cdots, X_{n-1}]$-Modulstruktur von A' ist die von $p_1 \circ j$ induzierte. Also: A ist als ${k[X_1, \cdots, X_n]}/{(f)}$-Modul endlich erzeugt und ${k[X_1, \cdots, X_n]}/{(f)}$ ist nach Satz 6.4.1 und wegen der Form von f ein endlich erzeugter $k[X_1, \cdots, X_{n-1}]$-Modul.

$$A = \sum_{(i,j)} k[X_1, \cdots, X_{n-1}] \cdot \alpha_i \cdot \omega_j \qquad \alpha_i \in A, \omega_i \in {k[X_1, \cdots, X_n]}/{(f)}.$$

A ist also endlich erzeugter $k[X_1, \cdots, X_{n-1}]$-Modul und auch als A'-Modul endlich erzeugt.
Fazit.

$$k \subseteq \underbrace{B}_{=k[X_1,\cdots,X_d]} \subseteq \underbrace{A'}_{\substack{\text{endl. erz.} \\ B\text{-Modul}}} \subseteq \underbrace{A}_{\substack{\text{endl. erz.} \\ A'\text{-Modul}}}$$

Damit ist also A ein endlich erzeugter B-Modul, $B \cong k[X_1, \cdots, X_d]$ Polynomalgebra, $d \leq n-1 < n$. □

Satz 6.4.3. *(Zariski)*
Sei k Körper, $A = k[v_1, \cdots, v_n]$ endlich erzeugte k-Algebra. Ist A sogar Körper, so ist A algebraisch, und sogar endlich algebraisch, d.h. $\dim_k A < \infty$.

Beweis. Sei A Körper, $k \subseteq C \subseteq A$ die Noether-Normalisierung von A, d.h. A endlich erzeugter C-Modul, $C \cong k[T_1, \cdots, T_d]$. Sei $c \in C \setminus \{0\}$. Es gibt dann ein $c^{-1} \in A$. (Wir wollen zeigen: $c^{-1} \in C$.) Es ist

$$
\begin{aligned}
&& A &= \sum_{i=1}^{r} C \cdot \omega_i, \qquad \omega_i \in A \\
\Rightarrow \quad \forall i \in \{1, \cdots, r\}: && c^{-1}\omega_i &= \sum_{j=1}^{r} \alpha_{ji}\omega_i, \qquad (\alpha_{ji} \in C) \\
\Rightarrow \quad \forall i \in \{1, \cdots, r\}: && 0 &= \sum_{j=1}^{r} \left(c^{-1}\delta_{ji} - \alpha_{ji}\right) \cdot \omega_{ji} \\
&\xRightarrow[\text{Det-Trick}]{}& 0 &= \det\left((c^{-1}\delta_{ji} - \alpha_{ji})_{ji}\right) \cdot A \\
&\Rightarrow& 0 &= \det\left((c^{-1}\delta_{ji} - \alpha_{ji})_{ji}\right) \\
&& &= c^{-r} + \gamma_1 c^{-r+1} + \ldots + \gamma_{r-1}c^{-1} + \gamma_r \qquad (\gamma_i \in C) \\
&\xRightarrow[\cdot c^{r-1}]{}& 0 &= c^{-1} + \gamma_1 + \gamma_2 c + \ldots + \gamma_r c^{r-1} \\
&\Rightarrow& c^{-1} &= -\left(\gamma_1 + \gamma_2 c + \ldots + \gamma_r c^{r-1}\right) \in C
\end{aligned}
$$

Damit ist $c \in C^*$, also (weil $c \in C \setminus \{0\}$ beliebig war) C ein Körper, also (weil C rein transzendent) schon $k = C$. Weil A endlich erzeugter C-Modul ist, ist also $\dim_k A = \dim_C A < \infty$. □

Korollar. *(Hilberts Nullstellensatz)*
$k = \overline{k} \Leftrightarrow k$ ist HNS-Körper.

Beweis. $\Leftarrow$ haben wir bereits gesehen. Für $\Rightarrow$: Betrachte $k = \overline{k}$, $A := k[X_1, \cdots, X_n]/\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} k[X_1, \cdots, X_n]$, $k \subseteq A$ endlich erzeugte k-Algebra, sogar Körper (weil $\mathfrak{m}$ Maximalideal). Satz 6.4.3 liefert, dass $A : k$ algebraisch, sogar endlich algebraisch ist, d.h. $k \subseteq A \subseteq \overline{k} = k$, also $A = k$. Damit ist Bedingung (8) aus Satz 6.3.7 erfüllt, also k ein HNS-Körper. □

Korollar. Ist $k = \overline{k}$, so ist (für $n \in \mathbb{N}$) folgendes Diagramm kommutativ und alle vertikalen Abbildungen sind bijektiv:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{A}_n^k \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, shift right, "V"'] & AM_n(k) \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, shift right, "V"'] & AM_n(k) \arrow[d, shift right, "V"'] \\
\operatorname{Specm} k[X_1, \cdots, X_n] \arrow[r, "\subset"] \arrow[u, shift right, "I"'] & \operatorname{Spec} k[X_1, \cdots, X_n] \arrow[r, "\subset"] \arrow[u, shift right, "I"'] & RI_n(k) \arrow[u, shift right, "I"']
\end{tikzcd}
$$

6.5 Ganze Ringerweiterungen, „going up" (Cohen/Seidenbergs) und weitere Folgerungen der Noether-Normalisierung

Sei k beliebiger Körper, A endlich erzeugte k-Algebra, $k \subseteq C \subseteq A$ eine Noether-Normalisierung ($C \cong k[T_1, \cdots, T_d]$).

Fragen.

(1) Wenn W affine algebraische Menge in $\mathbb{A}_n^k$, $A \cong k[X_1, \cdots, X_n]/I(W)$, wie ist dann $C \cong k[T_1, \cdots, T_d] \subseteq k[X_1, \cdots, X_n]/I(W)$ geometrisch zu interpretieren?

(2) Inwieweit hängt d von A ab?

Definition 6.14. *Sei $A \subseteq B$ eine Ringerweiterung (unitärer Ringe). Ein Element $b \in B$ heißt* ***ganz über*** *A, falls es ein normiertes $p = X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_n \in A[X] \subseteq B[X]$ gibt mit $p(b) = 0$.*

EIGENSCHAFTEN.

(1) $b \in A \Rightarrow b$ ist Nullstelle von $X - b \Rightarrow b$ ganz.

(2) Für $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ und $b = \sqrt{2}$ findet sich $X^2 - 2$, d.h. $\sqrt{2}$ ist ganz über $\mathbb{Z}$. $\frac{1}{2}$, π, e sind nicht ganz.

(3) Ist $A = k$ Körper, so gilt „ganz" $\Leftrightarrow$ „algebraisch", aber für Ringe gilt i.a. nur „ganz" $\Rightarrow$ „algebraisch".

SATZ 6.5.1. *Charakterisierung für die Ganzheit von Elementen*
Sei $A \subseteq B$ Ringerweiterung, $b \in B$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) b ist ganz über A, d.h. $\exists a_0, ...a_n \in A$: $b^n + a_1b^{n-1} + \ldots + a_n = 0$.

(2) $A[b]$ ist ein endlich erzeugter A-Modul.

(3) Es existiert ein Zwischenring C, $A \subseteq C \subseteq B$, welcher als A-Modul endlich erzeugt ist und $b \in C$.

Beweis.

(1) $\Rightarrow$ (2): Sei $b \in B$ ganz über A, $b^n + a_1b^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ eine Ganzheitsgleichung, $a_i \in A$. Dann ist

$$A[b] = \left\{ \sum_{r=0}^{t} \alpha_i b^i \,\middle|\, t \in \mathbb{N}, \alpha_i \in A \right\} = \sum_{i=0}^{n-1} A \cdot b^i.$$

(2) ⇒ (3): Ergibt sich durch $C := A[b]$.

(2) ⇒ (1): Sei $A \subseteq C \subseteq B$, $b \in C$, $C = \sum_{i=1}^{s} A\gamma_i$, $\gamma_i \in C$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\forall i \in \{1, \cdots, s\}: \quad b \cdot \gamma_i &= \sum_{j=1}^{s} \alpha_{ji}\gamma_i, \quad \alpha_{ji} \in A \\
\xRightarrow[\text{Det-Trick}]{} \quad 0 &= \det\left((\delta_{ji} b - \alpha_{ji})_{ji}\right) \cdot C \\
\Rightarrow \quad 0 &= \det\left((\delta_{ji} b - \alpha_{ji})_{ji}\right) \\
0 &= b^s + a_1 b^{s-1} + \ldots + a_s \qquad \text{mit } a_i \in A, \text{ da } \alpha_{ji} \in A
\end{aligned}$$

Damit ist b ganz über A. □

Definition 6.15.

$$\overline{A}^B := \{b \in B \mid b \text{ ganz über } A\} \subseteq B$$

$\boxed{\overline{A}^B}$ *heißt **ganzer Abschluss von A in B**.*

> $\boxed{\text{Satz 6.5.2.}}$ $\overline{A}^B$ ist eine A-Unteralgebra von B.

Beweis. Zu zeigen ist:

$$\forall b, c \in \overline{A}^B : b + c, b \cdot c \in \overline{A}^B.$$

Es ist ja $A \subseteq A[B] \subseteq A[b, c] \subseteq B$. Nach Voraussetzung und Satz 6.5.1 gilt:

(i) $A[b]$ ist endlich erzeugter A-Modul.

(ii) c ist ganz über A, also erst recht über $A[b] \supseteq A$.

Damit ist auch $A[b, c] = A[b][c]$ endlich erzeugter $A[b]$-Modul, also

$$\begin{aligned}
A[b, c] &= \sum_{i=1}^{r} A[b] \cdot \omega_i & \omega_i \in A[b, c] \\
&= \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{i=1}^{t} \cdot A y_j \right) \cdot \omega_i & y_j \in A[b] \\
&= \sum_{i,j} A \cdot (y_i \cdot \omega_j)
\end{aligned}$$

Damit ist $A[b, c]$ auch ein endlich erzeugter A-Modul. Nach Satz 6.5.1 sind $b + c \in A[b, c]$ und $b \cdot c \in A[b, c]$ also ebenfalls ganz über A, d.h. $\overline{A}^B$ ist ein Ring, und wegen $A \subseteq \overline{A}^B$ auch eine A-Unteralgebra von B. □

Es gibt die beiden folgenden Extremfälle:

Definition 6.16. *Sei $A \subseteq B$ Ringerweiterung.*

*(1) Ist $\overline{A}^B = A$, so heißt A **ganz abgeschlossen** in B.*

*(2) Ist $\overline{A}^B = B$, dann heißt B eine **ganze Erweiterung** von A (bzw. kurz **ganz über** A).*

Definition 6.17. *Ein Integritätsbereich A heißt **normaler Ring**, falls A ganz abgeschlossen in seinem Quotientenkörper* $\mathrm{Quot}(A)$ *ist (d.h. $\overline{A}^{\mathrm{Quot}(A)} = A$).*

SATZ 6.5.3. Sei A faktorieller Ring, dann ist A normal. Die Umkehrung gilt nicht.

Beweis. Seien $\alpha, \beta \in A$, so dass $\frac{\alpha}{\beta} \in \overline{A}^{\mathrm{Quot}(A)}$, mit $\mathrm{ggT}(\alpha, \beta) = 1$. Dann gibt es eine Ganzheitsgleichung

$$\begin{aligned}
& & \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n + a_1 \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \quad (a_i \in A) \\
&\xRightarrow[\cdot \beta^n]{} & \alpha^n + (a_1\beta) \cdot \alpha^{n-1} + \ldots + a_n\beta^n = 0 \\
&\Rightarrow & \beta \cdot (a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_n\beta^{n-1}) = -\alpha^n \in A \\
&\xRightarrow[A \text{ faktoriell}]{} & \beta \mid \alpha^n \\
&\xRightarrow[\mathrm{ggT}(\beta,\alpha)=1]{} & \beta = 1 \\
&\Rightarrow & \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{1} = \alpha \in A
\end{aligned}$$

Also ist $\overline{A}^{\mathrm{Quot}(A)} \subseteq A$, also A normal. □

Definition 6.18. *Sei $K : \mathbb{Q}$ algebraische Erweiterung, z.B. $K \in \left\{\mathbb{Q}(\sqrt{2}), \mathbb{Q}(i)\right\}$. Dann nennt man K einen **algebraischen Zahlkörper** und $\overline{\mathbb{Z}}^K$ heißt **Ring der ganzen Zahlen in** K.*

SATZ OHNE NUMMER. Sei $A \subseteq B \subseteq C$ Ringerweiterung, B ganz über A (d.h. $\overline{A}^B = B$), C ganz über B (d.h. $\overline{B}^C = C$). Dann ist C ganz über A, also $\overline{A}^C = C$.

Besondere Eigenschaften ganzer Ringerweiterungen

Definition 6.19. *Sei $A \subseteq B$ Ringerweiterung. $A \subseteq B$ heißt **endliche Ringerweiterung**, falls B endlich erzeugter A-Modul, d.h.*

$$B = \sum_{i=1}^{t} A\eta_i, \quad t \in \mathbb{N}, \eta_i \in B.$$

Wegen Satz 6.5.1 gilt: $A \subseteq B$ endlich $\Rightarrow$ $A \subseteq B$ ganz, aber nicht umgekehrt.

> $\boxed{\text{Satz 6.5.4.}}$ Sei $A \subseteq B$ ganze Ringerweiterung von Integritätsbereichen. Dann gilt A ist Körper $\Leftrightarrow$ B ist Körper.

Beweis.

$\Rightarrow$: Sei A Körper, $b \in B \setminus \{0\}$. (z.z.: b ist invertierbar.) Da $A \subseteq B$ ganze Ringerweiterung, gibt es eine Ganzheitsgleichung

$$b^n + a_1 b^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \quad a_i \in A.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei diese so gewählt, dass n minimal ist, d.h. $a_n \neq 0 \in A$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \exists a_n^{-1} \in A \quad (\text{weil } A \text{ Körper}) \\ \Rightarrow \quad & b \cdot \left(b^{n-1} + a_1 b^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\right) = -a_n \\ \Rightarrow \quad & b \cdot \frac{b^{n-1} + a_1 b^{n-2} + \ldots + a_{n-1}}{-a_n} = 1 \\ \Rightarrow \quad & b \in B^*, \end{aligned}$$

also (da $b \in B \setminus \{0\}$ beliebig) $B^* = B \setminus \{0\}$, d.h. B Körper.

$\Leftarrow$: Sei B Körper, $a \in A \setminus \{0\}$. (z.Z: $a^{-1} \in B$ ist schon in A.) Dies geht analog zum Beweis von 6.4.3:

$$\begin{aligned} & (a^-1)^n + c_1 (a^{-1})^{n-1} + \ldots + c_n = 0 \quad c_i \in A \\ \xRightarrow[\cdot a^{n-1}]{} \quad & a^{-1} + c_1 + \ldots + c_n \cdot a^{n-1} = 0 \\ \Rightarrow \quad & -(c_1 + \ldots + c_n \cdot a^{n-1}) = a^{-1} \in A. \end{aligned}$$

$\square$

> $\boxed{\text{Bemerkung 1.}}$ Sei $A \subseteq B$ beliebige Ringerweiterung (nicht notwendig ganz). Dann hat man
>
> $$A \subseteq \overline{A}^B \subseteq B,$$
>
> ganze Erweiterung ganz abgeschlossen

Beweis. Es ist zu zeigen, dass

$$\overline{\overline{A}^B}^B = \overline{A}^B.$$

Sei $b \in \overline{\overline{A}^B}^B$, d.h.

$$0 = b^n + a_1 b^{n-1} + \ldots + a_n,$$

mit $a_i \in \overline{A}^B$, d.h. b ganz über $A[a_1, \cdots, a_n]$. Die a_i sind ganz über A, also ist $A[a_1, \cdots, a_n]$ endlich erzeugter A-Modul (Satz 6.5.1). Damit ist auch

$$A[a_1, \cdots, a_n][b] = A[a_1, \cdots, a_n, b]$$

endlich erzeugter A-Modul, also $b \in \overline{A}^B$, also $\overline{\overline{A}^B}^B = \overline{A}^B$. □

$\boxed{\text{Bemerkung 2.}}$ Sei $A \overset{j}{\hookrightarrow} B$ ganze Ringerweiterung, $\mathfrak{b} \subseteq B$ Ideal, $S \subseteq A$ multiplikatives System. Dann gilt:

(i) $$A/_{\mathfrak{b} \cap A} \overset{\bar{j}}{\hookrightarrow} B/_{\mathfrak{b}}$$ $$a + \mathfrak{b} \cap A \longmapsto a + \mathfrak{b}$$ ist injektiv, ganze Erweiterung.

(ii) $$S^{-1}A = A_S \overset{j_S}{\hookrightarrow} B_S = S^{-1}B$$ $$\frac{a}{s} \longmapsto \frac{a}{s}$$ ist ganze Ringerweiterung, injektiv.

Das heißt, ganze Ringerweiterungen sind verträglich mit Faktorisierungen und Lokalisierungen.

Beweis.

(i) Es ist für $a \in A$:
$$\bar{j}(a) = \bar{0} \Leftrightarrow a + \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{b} \Leftrightarrow a \in \mathfrak{b} \cap A,$$
folglich ist $\bar{j}$ injektiv. Weiterhin ist für $b \in B$: $b^n + a_1 b^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, mit $a_i \in A$, also $[b]_{\mathfrak{b}}^n + [a_1]_{\mathfrak{b}}[b]_{\mathfrak{b}}^n + \ldots + [a_n]_{\mathfrak{b}} = [0]_{\mathfrak{b}}$, also $[b]_{\mathfrak{b}}$ ganz über $A/_{\mathfrak{b} \cap A}$, d.h. $A/_{A \cap \mathfrak{b}} \hookrightarrow B/_{\mathfrak{b}}$ ganze Erweiterung.

(ii) j_S ist offensichtlich injektiv, da S auch multiplikatives System in B ist. Für $b \in B$ gilt nun
$$b^n + a_1 b^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad \text{mit } a_i \in A$$
und folglich gilt für beliebige $s \in S$:
$$\left(\frac{b}{s}\right)^n + \frac{a_1}{s}\left(\frac{b}{s}\right)^{n-1} + \ldots + \frac{a_1}{s^n} = 0$$
als Ganzheitsgleichung für $\frac{b}{s} \in B_S$ über A_S, und damit ist $A_S \hookrightarrow B_S$ ganze Erweiterung. □

Bemerkung 3. Sei $A \subseteq B$ beliebige Ringerweiterung, $\overline{A}^B$ der ganze Abschluss von A in B, weiterhin $S \subsetneqq A$ multiplikatives System in A, mit $A_S \subseteq B_S$ und $\overline{A_S}^{B_S}$ als ganzen Abschluss von A_S in B_S. Dann gilt:

$$\overline{A_S}^{B_S} = \left(\overline{A}^B\right)_S,$$

also: Lokalisierung und Abschluss sind vertauschbar.

Beweis. Trivial. $\square$

Bemerkung 4. Sei A Integritätsbereich mit Quotientenkörper $\operatorname{Quot}(A) = \operatorname{Quot}(A_\mathfrak{p}) \forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent::

(i) A normal, d.h. $\overline{A}^{\operatorname{Quot}(A)} = A$.

(ii) $\forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A : A_\mathfrak{p}$ ist normal, d.h. $\overline{A_\mathfrak{p}}^{\operatorname{Quot}(A_\mathfrak{p})} = A_\mathfrak{p}$.

(iii) $\forall \mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} A : A_\mathfrak{m}$ ist normal

Bemerkung. Daher sagt man *die Normalität von Integritätsbereichen ist ein lokale Eigenschaft*, bzw. *die Normalität genügt dem Lokal-Global-Prinzip.*

Beweis. Betrachte $A \subseteq \overline{A}^{\operatorname{Quot}(A)} \subseteq \operatorname{Quot}(A)$. Es ist

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \quad &\Rightarrow \quad A = \overline{A}^{\operatorname{Quot}(A)} \\
&\Rightarrow \quad \forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A: \quad j_\mathfrak{p} : A_\mathfrak{p} \hookrightarrow \left(\overline{A}^{\operatorname{Quot}(A)}\right)_\mathfrak{p} = \overline{A_\mathfrak{p}}^{\operatorname{Quot}(A_\mathfrak{p})} \text{ surjektiv} \\
&\Rightarrow \quad \forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A: \quad A_\mathfrak{p} \text{ normal} \quad \Leftrightarrow \quad \text{(ii)} \\
&\Rightarrow \quad \forall \mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} A: \quad A_\mathfrak{m} \text{ normal} \quad \Leftrightarrow \quad \text{(iii)} \\
&\Rightarrow \quad \forall \mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} A: \quad j_\mathfrak{m} : A_\mathfrak{m} \hookrightarrow \left(\overline{A}^{\operatorname{Quot}(A)}\right)_\mathfrak{m} = \overline{A_\mathfrak{m}}^{\operatorname{Quot}(A_\mathfrak{m})} \text{ surjektiv} \\
&\Rightarrow \quad \text{(i)}
\end{aligned}$$

$\square$

Satz 6.5.5. Sei $A \subseteq B$ ganze Ringerweiterung, $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec} B$, dann gilt

$$\mathfrak{P} \in \operatorname{Specm} B \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{p} := \mathfrak{P} \cap A \in \operatorname{Specm} A.$$

Achtung. Dies gilt für allgemeine (nicht-ganze) Ringerweiterungen nicht: Betrachte $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, $(0) \in \operatorname{Specm} \mathbb{Q}$, aber $(0) \cap \mathbb{Z} = (0) \notin \operatorname{Specm} \mathbb{Z}$.

Beweis. Nach Bemerkung 2 gilt: $A/_{\mathfrak{P}\cap A} \hookrightarrow B/_{\mathfrak{P}}$ ist ganze Erweiterung von Integritätsbereichen (da $\mathfrak{P}$ prim, ebenfalls $\mathfrak{p}\cap A$ prim). Damit gilt

$$\begin{aligned} & \mathfrak{P} \in \operatorname{Specm} B \\ \Leftrightarrow\ & B/_{\mathfrak{p}} \text{ ist Körper} \\ \underset{\text{Satz 4}}{\Longleftrightarrow}\ & A/_{\mathfrak{P}\cap A} \text{ ist Körper} \\ \Leftrightarrow\ & \mathfrak{P}\cap A \in \operatorname{Specm} A. \end{aligned}$$

□

> $\boxed{\text{SATZ 6.5.6.}}$ *Going-Up-Theorem of Cohen-Seidenberg*
> Sei $A \overset{i}{\hookrightarrow} B$ ganze Ringerweiterung. Dann gilt
>
> (i) $\forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A : \exists \mathfrak{P} \in \operatorname{Spec} B$ mit $\mathfrak{P}\cap A = \mathfrak{p}$.
> (Also: $j^* : \underset{\mathfrak{Q}\ \mapsto \mathfrak{Q}\cap A}{\operatorname{Spec} B \twoheadrightarrow \operatorname{Spec} A}$ ist surjektiv.)
>
> (ii) $\forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, $\forall \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2 \in \operatorname{Spec} B$: Wenn $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1 \cap A = \mathfrak{P}_2 \cap A$ und $\mathfrak{P}_1 \subseteq \mathfrak{P}_2$, dann $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}_2$.
>
> (iii) $\dim_{\text{Krull}} A = \dim_{\text{Krull}} B$.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[rr, mapsto] \arrow[ddd, mapsto] & & a \arrow[ddd, mapsto, bend left] & \\ & A \arrow[r, tail, "j"] \arrow[d, "i^A_{S_{\mathfrak{p}}}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & B \arrow[d, "i^B_{S_{\mathfrak{p}}}"] & b \arrow[d, mapsto] \\ \frac{a}{1} & A_{S_{\mathfrak{p}}} \arrow[r, tail, "j_{S_{\mathfrak{p}}}"'] & B_{S_{\mathfrak{p}}} & \frac{b}{s} \\ \frac{a}{s} \arrow[rr, mapsto] & & \frac{a}{s} & \frac{a}{1} \end{tikzcd}$$

Beweis.

(i) Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$. Betrachte das multiplikative System $S_{\mathfrak{p}} := A \setminus \mathfrak{p}$, also $A_{\mathfrak{p}} = A_{S_{\mathfrak{p}}}$. Nun existiert ein $\mathfrak{M} \in \operatorname{Specm}(B_{S_{\mathfrak{p}}})$ Nach Satz 6.5.5 ist $\mathfrak{M} \cap A_{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Specm} A_{\mathfrak{p}}$, also $\mathfrak{M} \cap A_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p} \cdot A_{\mathfrak{p}}$ (denn dies ist das einzige Maximalideal in $A_{\mathfrak{p}}$), und $\mathfrak{p} \cdot A_{\mathfrak{p}} \cap A = \mathfrak{p}$. Andersherum: $\mathfrak{p} = A \cap (i_B)^{-1}(\mathfrak{M})$. Also leistet $\mathfrak{P} := (i^B_{S_{\mathfrak{p}}})^{-1}(\mathfrak{M})$ das gewünschte.

(ii) Wir haben $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1 \cap A = \mathfrak{P}_2 \cap A$ und $\mathfrak{P}_1 \subseteq \mathfrak{P}_2$. Betrachte wieder

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{p} \arrow[ddd] & & & \mathfrak{P}_1 \subseteq \mathfrak{P}_2 \arrow[lll] \arrow[ddd] \\ & A \arrow[r, tail, "j"] \arrow[d, "i^A_{S_{\mathfrak{p}}}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & B \arrow[d, "i^B_{S_{\mathfrak{p}}}"] & \\ & A_{S_{\mathfrak{p}}} \arrow[r, tail, "j_{S_{\mathfrak{p}}}"'] & B_{S_{\mathfrak{p}}} & \\ \mathfrak{p} \cdot A_{\mathfrak{p}} & & & \mathfrak{P}_1 \cdot B_{S_{\mathfrak{p}}} \subseteq \mathfrak{P}_2 \cdot B_{S_{\mathfrak{p}}}, \arrow[lll] \end{tikzcd}$$

wobei $A_{\mathfrak{p}} = A_{S_{\mathfrak{p}}} \subseteq B_{S_{\mathfrak{p}}}$ ganz nach Bemerkung 2.

Es ist also $\mathfrak{P}_1 \cdot B_{S_{\mathfrak{p}}} \subseteq \mathfrak{P}_2 \cdot B_{S_{\mathfrak{p}}}$, und ${j_{S_{\mathfrak{p}}}}^{-1}(\mathfrak{P}_1 \cdot B_{S_{\mathfrak{p}}}) = {j_{S_{\mathfrak{p}}}}^{-1}(\mathfrak{P}_2 \cdot B_{S_{\mathfrak{p}}}) = \mathfrak{p} \cdot A_{\mathfrak{p}}$. Nun ist $\mathfrak{p} \cdot A_{\mathfrak{p}}$ Maximalideal in $A_{\mathfrak{p}}$, also nach Satz 6.5.5 sind also $\mathfrak{P}_1 \cdot B_{S_{\mathfrak{p}}}$ und $\mathfrak{P}_2 \cdot B_{S_{\mathfrak{p}}}$ beide maximal, und ineinander enthalten, folglich gleich. Schneiden mit B ergibt $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}_2$.

(iii) Sei $A \subseteq B$ ganze Erweiterung von Integritätsbereichen, $(0) \subsetneqq \mathfrak{p}_1 \subsetneqq \mathfrak{p}_2 \subsetneqq \dots \subsetneqq \mathfrak{p}_s$ echt aufsteigende Primidealkette in A.

Behauptung: Dann existiert eine echt aufsteigende Primidealkette

$$(0) \subsetneqq \mathfrak{q}_1 \subsetneqq \mathfrak{q}_2 \subsetneqq \dots \subsetneqq \mathfrak{q}_s$$

in B mit $\mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{p}_i$.

Dies beweisen wir mittels Induktion über s.

$s = 1$: Wir haben $(0) \subsetneqq \mathfrak{p}_1$, und nach (i) existiert dann auch $\mathfrak{q}_i \in \operatorname{Spec}(B) \setminus \{(0)\}$ mit $q_1 \cap A = \mathfrak{p}_1$.

$s \geq 2$: Sei $(0) \subsetneqq \mathfrak{p}_1 \subsetneqq \mathfrak{p}_2 \subsetneqq \dots \subsetneqq \mathfrak{p}_s$. Die Induktionsvoraussetzung liefert eine Kette $(0) \subsetneqq \mathfrak{q}_1 \subsetneqq \mathfrak{q}_2 \subsetneqq \dots \subsetneqq \mathfrak{q}_{s-1}$ mit $\mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{p}_1$ für alle i. Betrachte die (nach Bemerkung 2 ganze) Ringerweiterung

$$\mathfrak{p}_s/\mathfrak{p}_{s-1} \subseteq A/\mathfrak{p}_{s-1} \hookrightarrow B/\mathfrak{q}_{s-1}.$$

Nach (i) existiert ein $\mathfrak{q}_s \in \operatorname{Spec} B$, so dass $\mathfrak{q}_s/\mathfrak{q}_{s-1} \cap A/\mathfrak{p}_{s-1} = \mathfrak{p}_s/\mathfrak{p}_{s-1}$, also auch $\mathfrak{q}_s \cap A = \mathfrak{p}_s$.

Fazit. Jede Kette $(0) \subsetneqq \mathfrak{p}_1 \subsetneqq \mathfrak{p}_2 \subsetneqq \dots \subsetneqq \mathfrak{p}_s$ in A hat eine Liftung $(0) \subsetneqq \mathfrak{q}_1 \subsetneqq \mathfrak{q}_2 \subsetneqq \dots \subsetneqq \mathfrak{q}_s$ in B.

Andersherum schneidet jede echte Kette in B herunter zu einer (wegen (ii) echten) Kette in A. Also $\dim_{\text{Krull}} A = \dim_{\text{Krull}} B$ für ganze Erweiterungen. □

KOROLLAR. Sei k Körper, A endlich erzeugte k-Algebra, d.h. $A = k[v_1, \cdots, v_n] \cong k[X_1, \cdots, X_n]/\mathfrak{a}$, $k \subseteq C \subseteq A$ eine Noether-Normalisierung ($C \cong k[T_1, \cdots, T_d]$. Dann gilt:

$$\dim_{\text{Krull}} A = \dim_{\text{Krull}} C = \dim_{\text{Krull}} k[T_1, \dots T_d].$$

Beweis. A ist endlicher C-Modul $\xRightarrow[\text{det-Trick}]{}$ $C \subseteq A$ ist ganze Ringerweiterung (Determinante ist Ganzheitsgleichung) $\xRightarrow[\text{Seidenberg}]{\text{Cohen-}}$ $\dim C = \dim A$. □

SATZ 6.5.7. Sei k Körper, $d \in \mathbb{N}$, dann gilt für die Krulldimension:

$$\dim_{\text{Krull}} k[T_1, \dots T_d] = d.$$

Beweis. (Per Induktion über d – Induktionsanfang klar.)

Abschätzung nach unten: Es gibt die Primidealkette

$$(0) \subsetneqq (T_1) \subsetneqq (T_1, T_2) \subsetneqq \dots \subsetneqq (T_1, \cdots, T_d)$$

der Länge d, also $\dim_{\text{Krull}} k[T_1, \cdots, T_d] \geq d$.

Abschätzung nach oben: Sei $(0) \subsetneqq \mathfrak{p}_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq \mathfrak{p}_s$ echte Kette in $k[T_1, \cdots, T_d]$. Dann existiert $f \in \mathfrak{p}_1 \setminus (0)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist f irreduzibel, also $(f) \in \operatorname{Spec} k[T_1, \cdots, T_d]$. Damit ist also $(0) \subsetneqq (f) \subsetneqq \mathfrak{p}_2 \subsetneqq \ldots \subsetneqq \mathfrak{p}_s$ auch eine aufsteigende Primidealkette in $k[T_1, \cdots, T_d]$. Folglich gibt es die echte Kette

$$(0) \subsetneqq \mathfrak{p}_2/(f) \subsetneqq \ldots \subsetneqq \mathfrak{p}_s/(f) \qquad \text{im Faktorring} \quad k[T_1, \cdots, T_d]/(f)$$

der Länge $s-1$. Nach dem Vorbereitungslemma (Satz 6.4.1) ist

$$k[T_1, \cdots, T_{d-1}] \subseteq k[T_1, \cdots, T_d]/(f)$$

ganze, sogar endliche Ringerweiterung, und Satz 6.5.6 sagt uns, dass

$$\dim k[T_1, \cdots, T_d]/(f) = \dim k[T_1, \cdots, T_{d-1}] \underset{\text{Induktion}}{=\!=\!=} d-1.$$

Folglich ist $s - 1 \leq d - 1$, also $s \leq d$

Wir erhalten $\dim_{\text{Krull}} k[T_1, \cdots, T_d] = d$. □

$\boxed{\text{Korollar.}}$ Ist A endlich erzeugte k-Algebra, $k \subseteq C \subseteq A$ Noether-normalisierung mit $C \cong k[T_1, \cdots, T_d]$, so ist

$$\dim_{\text{Krull}} A = d < \infty.$$

Beweis. Satz 6.5.7 und der vorhergehende Korollar. □

$\boxed{\text{Satz 6.5.8.}}$ Sei $A \overset{j}{\subseteq} B$ ganze Erweiterung,

$$\begin{aligned} j^* : \operatorname{Spec} B &\longrightarrow \operatorname{Spec} A \\ \mathfrak{P} &\longmapsto \mathfrak{p} := \mathfrak{P} \cap A = j^{-1}(\mathfrak{P}) \end{aligned}$$

die dazugehörige Zariski-stetige Abbildung der Spektren. Dann ist j^* abgeschlossen.

Beweis. Betrachte $j^* : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ sowie eine beliebige abgeschlossene Menge

$$V(\mathfrak{b}) = \{\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec} B \mid \mathfrak{P} \supseteq \mathfrak{b}\}.$$

Es ist dann

$$\begin{aligned} j^*(V(\mathfrak{b})) &= \{\mathfrak{P} \cap A \mid \mathfrak{P} \supseteq \mathfrak{b}, \mathfrak{P} \in \operatorname{Spec} B\} \\ &\subseteq \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{p} \subseteq A \cap \mathfrak{b}\} \\ &= V(A \cap \mathfrak{b}) \end{aligned}$$

Letzteres ist abgeschlossen in $\operatorname{Spec} A$, wir müssen also nur zeigen, dass statt $\subseteq$ sogar $=$ gilt.

Sei also $\mathfrak{p} \in V(A \cap \mathfrak{b})$, also $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ mit $\mathfrak{p} \supseteq A \cap \mathfrak{b}$. Wir betrachten die induzierte ganze Ringerweiterung ${}^{A}\!/_{\mathfrak{b} \cap A} \subseteq {}^{B}\!/_{\mathfrak{b}}$, mit ${}^{\mathfrak{p}}\!/_{\mathfrak{b} \cap A} \in \operatorname{Spec} {}^{A}\!/_{\mathfrak{b} \cap A}$. Nach Cohen-Seidenberg (Satz 6.5.6) gibt es dann ein $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec} B$, so dass ${}^{\mathfrak{P}}\!/_{\mathfrak{b}} \in \operatorname{Spec} {}^{B}\!/_{\mathfrak{b}}$ mit

$$ {}^{\mathfrak{P}}\!/_{\mathfrak{b}} \cap {}^{\mathfrak{A}}\!/_{A \cap \mathfrak{b}} = {}^{\mathfrak{p}}\!/_{A \cap \mathfrak{b}}. $$

Das heißt, es gibt ein $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec} B$, so dass $\mathfrak{P} \supseteq \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap A$, also ist $\mathfrak{p} \in j^*(V(\mathfrak{b}))$, also gilt $=$, also ist j^* eine Zariski-abgeschlossene Abbildung. $\square$

Bemerkung. j^* ist dominant, d.h. $\operatorname{im}(j^*) = j^*(\operatorname{Spec} B)$ ist dicht in $\operatorname{Spec} A$.[2] Das heißt, ist j^* abgeschlossen, so ist j^* auch surjektiv.

Definition 6.20. *Sei $f : A \to B$ Homomorphismus.*

- *f heißt **ganz**, falls $f(A) \subseteq B$ ganze Ringerweiterung ist.*
- *f heißt **endlich**, falls $f(A) \subseteq B$ endliche Ringerweiterung, d.h. $B = \sum_{i=1}^{t} f(A) \cdot b_i$.*[3]

> KOROLLAR. Sei $f : A \to B$ ganz, dann ist $f^* : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ eine abgeschlossene topologische Abbildung.

Beweis. Betrachte

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads, "\hat{f}"] \arrow[rr, bend right] & f(A) \arrow[r, phantom, "\overset{i}{\subseteq}"] & B \end{tikzcd}$$

B, i ganze Ringerweiterung.

Dann haben wir

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} B \arrow[r, two heads, "i^*", "\text{abgeschlossen}"'] \arrow[rr, bend left, "f"', "f^*"] & \operatorname{Spec} f(A) \arrow[r, tail, "\hat{f}^*"] \arrow[d, equal, "\wr"] & \operatorname{Spec} A \\
& \operatorname{Spec} {}^{A}\!/_{\ker(f)} \arrow[r, equal, "\sim"] & V(\ker(f)) \arrow[u, "\substack{\text{abgeschlossene}\\ \text{Einbettung}}"']
\end{tikzcd}$$

Folglich ist f^* abgeschlossen als Komposition. $\square$

Eine weitere Folgerung aus dem Noetherschen Normalisierungssatz: Das Extensionstheorem

Wir untersuchen jetzt, wann sich Homomorphismen von Ringen auf Erweiterungsringe fortsetzen lassen.

[2] Dies folgt bekanntlich aus der Injektivität von $A \overset{j}{\hookrightarrow} B$, da $\overline{\operatorname{im} j^*}^{\operatorname{Spec} A} = V(\ker j) = V(0) = \operatorname{Spec} A$.

[3] also B endlich erzeugter $f(A)$-Modul, via $a \cdot b := f(a) \cdot b$ auch endlich erzeugter A-Modul.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & B \arrow[dl, dotted, "\tilde{\varphi}"] \\ L \end{tikzcd}$$

> $\boxed{\text{SATZ } 6.5.9.}$ *(Extensionslemma)*
> Sei $A \subseteq B$ eine ganze Ringerweiterung, $L = \overline{L}$ ein Körper, $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{URinge}}(A, L)$.
> Dann existiert ein $\tilde{\varphi} \in \mathrm{Hom}(B, L)$ mit $\tilde{\varphi}|_A = \varphi$.

Beweis. Wir führen den Beweis auf zwei Spezialfälle zurück (mittels Cohen-Seidenberg).

1. Fall Sei $A \subseteq B$ ganze Erweiterung, A und B beide Körper. Dann ist $B : A$ algebraische Körpererweiterung. Betrachte

$$\mathfrak{M} := \{(M, \psi) \mid M \text{ Körper}, A \subseteq M \subseteq B, \psi \in \mathrm{Hom}(M, L), \psi|_A = \varphi\}.$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & M \arrow[dl, "\psi"] \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & B \\ L \end{tikzcd}$$

Es ist $(A, \varphi) \in \mathfrak{M}$ und daher $\mathfrak{M} \neq \varnothing$. Definieren wir eine Ordnungsrelation in $\mathfrak{M}$:

$$(M, \psi) \leq (M', \psi') :\Leftrightarrow A \subseteq M \subseteq M' \subseteq B \wedge \psi'|_M = \psi$$

Damit wird $(\mathfrak{M}, \leq)$ offenbar zu einer induktiv geordneten Menge. Das Zornsche Lemma liefert, dass es in $\mathfrak{M}$ ein maximales Element (M_*, ψ_*) geben muss. (Wenn wir noch $M_* = B$ zeigen, sind wir fertig.) Angenommen, $M_* \subsetneqq B$, d.h. $\exists b \in B \backslash M_*$. Wir haben dann das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & M_* \arrow[dl, "\psi_*"] \arrow[r, phantom, "\subsetneqq"] & M_*(b) \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & B, \\ L \end{tikzcd}$$

wobei alle Homomorphismen injektiv sind, da wir es mit Körpern zu tun haben.

$b \in B \setminus M_*$ ist algebraisch über A (da $B : A$ ganze, also algebraische Körpererweiterung war), also ist erst recht b algebraisch über M_*, mit Minimalpolynom $\mu_b \in M_*[X]$. Es ist $\deg \mu_b \geq 2$, da $b \notin M_*$. μ_b ist normiert und irreduzibel, also ist das Ideal $(\mu_b) \in \operatorname{Specm} M_*[X]$, und folglich ist $\underset{\overline{X} \mapsto b}{M_*[X]/(\mu_b) \cong M_*[b]}$ ein Körper, also $M_*[b] = M_*(b)$.

Betrachten wir nun $\psi_*(\mu_b) \in L[X]$. Wegen $L = \overline{L}$ existiert ein $\lambda \in L$ mit $\psi_*(\mu_b)(\lambda) = 0$. Wir erhalten das Diagramm

$$\begin{tikzcd} M_* \arrow[d, "\psi_*"'] \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & M_*(b) \arrow[dl, dotted, "\tilde{\psi}_*"'] \arrow[d, equal, "\wr"] & b \\ L & M_*[X]/(\mu_b) \arrow[l] & \\ \lambda & & \overline{X} \arrow[ll, mapsto] \arrow[uu, mapsto] \end{tikzcd}$$

mit $\tilde{\psi}_*|_{M_*} = \psi_*, \tilde{\psi}_*(b) = \lambda$

Das heißt, ψ_* ist auf $M_*(b)$ fortsetzbar, also war (M_*, ψ_*) nicht maximal, also war unsere Annahme $M_* \neq B$ falsch sein, also ist $M_* = B$ und $\tilde{\varphi} := \psi_*$ erfüllt die Behauptung.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d, "0"'] & \\
\mathfrak{m} = \ker\varphi \arrow[d, "i"'] & \\
A \subseteq B \arrow[d] \arrow[dr, "\varphi"] & \\
\varphi(A) \subseteq \arrow[d, "0"'] & L \\
0 &
\end{tikzcd}$$

2. Fall $A \subseteq B$ sei ganze Ringerweiterung, $(A, \mathfrak{m})$ lokal mit $\mathfrak{m} = \ker\varphi$, wodurch es also (nach Satz 6.5.6) $\mathfrak{M} \in \operatorname{Specm} B$ gibt mit $\mathfrak{m} = \mathfrak{M} \cap A$. Wir erhalten hier das induzierte Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, tail] \arrow[d] \arrow[dd, bend right=60, "\varphi"'] & & B \arrow[d, "\pi"] \\
\varphi(A) \arrow[r, equal, "\sim"] \arrow[d, "j"] & A/\mathfrak{m} \arrow[r, tail] \arrow[dl] & B/\mathfrak{M} \arrow[dll, dashed, "\tilde{j}"] \\
L = \overline{L} & & \text{ganze Erweiterung}
\end{tikzcd}$$

Aus dem ersten Fall folgt nun die Existenz einer Extension $\tilde{j}$ von $j : A/\mathfrak{m}$ auf $B/\mathfrak{M}$. Setzen wir nun $\tilde{\varphi} := \tilde{j} \circ \pi : B \to L$, so ist dies die gewünschte Extension von $\varphi : A \to L$.

$$\begin{tikzcd}
A \subseteq B \arrow[d, "\varphi"'] \\
L
\end{tikzcd}$$

3. Fall (Allgemeiner Fall) Betrachten wir also nun allgemein die Situation der Voraussetzung. Es ist nun $\varphi(A) \subseteq L$ immer ein Integritätsbereich (da Unterring eines Körpers), und $A/\ker\varphi \cong \varphi(A)$, also ist $\mathfrak{p} := \ker\varphi$ ein Primideal. Wir haben daher die Lokalisierungsringe $A_\mathfrak{p} = A_{A\setminus\mathfrak{p}}$ und $B_{A\setminus\mathfrak{p}}$, und damit das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[d, "i_\mathfrak{p}"] \arrow[dd, bend right=60, "\varphi"'] & B \arrow[d, "i_{A\setminus\mathfrak{p}}"] \\
A_\mathfrak{p} \arrow[r, tail] \arrow[d, "\hat{\varphi}"] & B_{A\setminus\mathfrak{p}} \arrow[dl, dashed, "\exists\hat{\hat{\varphi}}"] \\
L = \overline{L} &
\end{tikzcd} \qquad \text{(ganze Erweiterung)}$$

Wir haben hierbei $A_\mathfrak{p}$ als lokalen Ring, mit

$$\ker\hat{\varphi} = \left\{ \frac{a}{s} \,\middle|\, s \notin \mathfrak{p}, \frac{\varphi(a)}{\varphi(s)} = \frac{0}{1} \right\} = \left\{ \frac{a}{s} \,\middle|\, \varphi(a) = 0 \right\} = \mathfrak{p} \cdot A_\mathfrak{p},$$

können also Fall 2 anwenden, und erhalten die Existenz von $\hat{\hat{\varphi}}$ als Erweiterung von $\hat{\varphi}$. Damit ist dann $\psi := \hat{\hat{\varphi}} \circ i_{A\setminus\mathfrak{p}}$ eine Fortsetzung von φ auf B. □

> $\boxed{\text{Satz 6.5.10.}}$ Sei A endlich erzeugte k-Algebra, dann ist $\operatorname{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, \overline{k}) \neq \varnothing$.

Beweis. Sei $k \subseteq C \subseteq A$ Noethernormalisierung von A. Die Inklusion $j : k \to \overline{k}$ besitzt eine Fortsetzung $\hat{j} : C \to \overline{k}$, mittels $\hat{j}|_k := \mathrm{id}_k$, $\hat{j}(T_i) := 0$.

$$\begin{tikzcd}
k \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[dd, "j"'] & C \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[d, equal, "\wr"] & A \arrow[ddll, dotted, bend left, "\varphi"] \\
& k[T_1, \cdots, T_d] \arrow[dl, dashed, "\hat{j}"] & \\
\overline{k} & &
\end{tikzcd}$$

Nach dem Extensionslemma (Satz 6.5.9) besitzt auch $\hat{\jmath}$ eine Fortsetzung $\varphi : A \to \overline{k}$ als Ringhomomorphismus, welcher als Erweiterung von j sogar ein k-Algebrahomomorphismus ist, also ist $\mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, \overline{k}) \neq \varnothing$. $\square$

$\boxed{\text{Gal}}$

$\boxed{\textsc{Satz 6.5.11.}}$ Sei k Körper, A endlich erzeugte k-Algebra. Dann gilt:

(1) Die Kernabbildung $\ker : \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, \overline{k}) \twoheadrightarrow \operatorname{Specm} A$ ist wohldefiniert und surjektiv.

(2) $\mathrm{Gal}(\overline{k} : k) := \left\{\alpha \in \mathrm{Aut}(\overline{k}) \mid \alpha|_k = \mathrm{id}_k\right\}$ (die Gruppe der **Decktransformationen**) operiert auf $\mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, \overline{k})$ und dabei ist

$$\mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, \overline{k}) \big/ \mathrm{Gal}(\overline{k} : k) \xrightarrow[\ker]{\sim} \operatorname{Specm} A$$

Beweis.

(1) Betrachte $A \xrightarrow{\varphi} \overline{k}$. Dann haben wir $k \subseteq A \xrightarrow{\varphi} \varphi(A) \subseteq \overline{k}$. Jedes Element in $\overline{k}$ hat ein Minimalpolynom über k, also erst recht über $\varphi(A) \supseteq k$, also ist $\overline{k}$ ganz über $\varphi(A)$. $\varphi(A)$ ist daher (Satz 6.5.4) auch ein Körper, also ist $\ker \varphi \in \operatorname{Specm} A$. Also ist $\ker : \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, \overline{k}) \to \operatorname{Specm} A$ als Mengenabbildung wohldefiniert.

Sei $\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} A$. Da A endlich erzeugte k-Algebra ist, ist $A/\mathfrak{m}$ algebraische Körpererweiterung von k, und man hat daher

$$\begin{tikzcd} k \arrow[d] & \subseteq & A/\mathfrak{m} \arrow[dll, dashed, "\exists\varphi"] \\ \overline{k} & & \end{tikzcd} \quad \text{(ganz/algebraisch)}$$

Damit ergibt sich das erweiterte Diagramm:

$$\begin{tikzcd} k \arrow[d, hook] \arrow[rr, bend left] & \subseteq \; A \arrow[r, two heads, "\pi_{\mathfrak{m}}"'] \arrow[dl, dashed, "\xi"] & A/\mathfrak{m} \arrow[dll, bend left, "\varphi"] \\ \overline{k} & & \end{tikzcd}$$

Wir haben also $\xi := \varphi \circ \pi_{\mathfrak{m}} \in \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, \overline{k})$ mit $\ker \xi = \ker \varphi = \mathfrak{m}$. Damit ist also $\ker : \mathrm{Hom}_k\, Alg(A, \overline{k}) \to \operatorname{Specm} A$ surjektiv.

(2) Seien $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, \overline{k})$ mit $\ker \varphi = \ker \psi$. Dann haben wir das Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \ker \varphi \arrow[r] \arrow[d, equal] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & \varphi(A) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\vartheta", "\wr"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \ker \psi \arrow[r] & A \arrow[r] & \psi(A) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

mit exakten Zeilen, und $\vartheta(\varphi(a)) := \psi(a) \forall a \in A$. Damit erhalten wir, da $\overline{k}$ algebraisch über $\varphi(A)$ ist, nach dem Extensionslemma (Satz 6.5.9) eine Liftung von ϑ zu $\sigma : \overline{k} \to \overline{k}$, mit $\sigma|_k = \mathrm{id}_k$:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, equal] \arrow[d] & A \arrow[d] \\
\varphi(A) \arrow[r, "\vartheta", "\sim"'] \arrow[d, tail] & \psi(A) \arrow[d, tail] \\
\overline{k} \arrow[r, dashed, "\sim", "\sigma"'] & \overline{k}
\end{tikzcd}$$

Wir haben also $\psi = \sigma \circ \varphi$, mit $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{k} : k)$, falls $\ker \varphi = \ker \psi$.

Fazit.

$$\ker \psi = \ker \psi \quad \Leftrightarrow \quad \exists \sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{k} : k) : \psi = \sigma \circ \varphi$$

Betrachte nun die Gruppenwirkung der Galoisgruppe:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Gal}(\overline{k} : k) \times \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, \overline{k}) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, \overline{k}) \\
(\sigma\ ,\ \varphi) &\longmapsto \sigma \circ \varphi
\end{aligned}$$

Dann erhalten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, \overline{k}) \arrow[rr, two heads, "\ker"'] \arrow[dr, "\pi_{\mathrm{Gal}}"'] & & \mathrm{Specm}\, A \\
& \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, \overline{k}) \big/ \mathrm{Gal}(\overline{k} : k) \arrow[ur, "\sim"'] &
\end{tikzcd}$$

□

Einige Folgerungen

Erinnerung. Ist k beliebiger Körper, A endlich erzeugte k-Algebra, dann ist

$$(*) \qquad \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, \overline{k}) \big/ \mathrm{Gal}(\overline{k} : k) \xrightarrow[\ker]{\sim} \mathrm{Specm}\, A$$

bijektiv.

> $\boxed{\textsc{Bemerkung 1.}}$ Für $k = \overline{k}$ ergibt sich aus $(*)$:
>
> $$\mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, k) \xrightarrow[\ker]{\sim} \mathrm{Specm}\, A \quad \text{ist bijektiv}$$

Dies ist bereits bekannt (HNS) und $(*)$ ist – mutatis mutandis – eine Verallgemeinerung davon.

> $\boxed{\text{Bemerkung 2.}}$ Sei k beliebiger Körper, A endlich erzeugte k-Algebra. Dann ist
> $$\bigcap_{\mathfrak{m}\in\operatorname{Specm} A} \mathfrak{m} = \operatorname{Nil}(A) = \sqrt{(0)}$$

Wir wissen, dass i.a. (für beliebige Ringe) schon gilt

$$\operatorname{Nil}(A) = \bigcap_{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec} A} \mathfrak{p} \subseteq \bigcap_{\mathfrak{m}\in\operatorname{Specm} A} \mathfrak{m} \qquad \text{i.a. } \neq$$

Beweis. A endlich erzeugte k-Algebra $\Rightarrow \operatorname{Specm} A = \left\{\ker\varphi \mid \varphi \in \operatorname{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, \overline{k})\right\}$, also

$$\bigcap_{\mathfrak{m}\in\operatorname{Specm} A} \mathfrak{m} = \bigcap_{\varphi\in\operatorname{Hom}_{k\text{-Alg}}(A,\overline{k})} \ker\varphi.$$

Ist nun $a \in \operatorname{Nil}(A)$, so

$$\begin{aligned}
& a^\nu = 0 \qquad \text{für ein } \nu \in \mathbb{N}\\
\Rightarrow\quad & \varphi(a^\nu) = \varphi(a)^\nu = 0 \quad \forall\varphi \in \operatorname{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, \overline{k})\\
\xRightarrow[\text{Körper}]{\overline{k}}\quad & \varphi(a) = 0 \quad \forall\varphi \in \operatorname{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, \overline{k})\\
\Rightarrow\quad & a \in \ker\varphi \quad \forall\varphi \in \operatorname{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, \overline{k})\\
\Rightarrow\quad & a \in \bigcap_{\varphi} \ker\varphi = \bigcap_{\mathfrak{m}} \mathfrak{m}
\end{aligned}$$

Also ist $\operatorname{Nil}(A) \subseteq \bigcap_{\mathfrak{m}} \mathfrak{m}$.[4]

Umgekehrt: Ist $a \notin \operatorname{Nil}(A)$, so ist $\{a^\nu \mid \nu \in \mathbb{N}_0\}$ ein multiplikatives System, und A_a existiert als Lokalisierungsring. A_a ist dann auch endlich erzeugte k-Algebra, denn aus $A = k[\nu_1, \cdots, \nu_n]$ folgt $A_a = k[\nu_1, \cdots, \nu_n, \frac{1}{a}]$. Also ist $\operatorname{Hom}_{k\text{-Alg}}(A_a, \overline{k}) \neq \varnothing$, sei also etwa ψ darin:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "i_a"] \arrow[rr, bend right, "\varphi := \psi\circ i_a"'] & A_a \arrow[r, "\psi"] & \overline{k}
\end{tikzcd}$$

Wir haben also $\varphi \in \operatorname{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, \overline{k})$ mit

$$1 = \varphi(1) = \psi\left(\frac{1}{1}\right) = \psi\left(\frac{a}{1}\cdot\frac{1}{a}\right) = \psi\left(\frac{a}{1}\right)\cdot\psi\left(\frac{1}{a}\right) = \varphi(a)\cdot\psi\left(\frac{1}{a}\right),$$

also $\varphi(a) \neq 0$, d.h. $a \notin \ker\varphi \in \operatorname{Specm} A$.

Das heißt, $a \notin \operatorname{Nil}(A) \Rightarrow a \notin \bigcap_{\mathfrak{m}} \mathfrak{m}$. ☐

[4] Dies wussten wir eigentlich schon vorher …

Bemerkung 3. Sei k ein Körper, A endlich erzeugte k-Algebra, und wir betrachten $\operatorname{Spec} A$ mit der Zariski-Topologie. Dann gilt

$$\overline{\operatorname{Specm}(A)}^{\operatorname{Spec} A} = \operatorname{Spec} A,$$

d.h. für endlich erzeugte Algebren über einem Körper liegt das Maximalspektrum stets dicht im Spektrum.

Bemerkung. Dies gilt nicht für beliebige Ringe, z.B. ist im Lokalisierungsring $\mathbb{Z}_{(2)}$ $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}_{(2)}) = \left\{(0), 2 \cdot \mathbb{Z}_{(2)}\right\}$ und $\operatorname{Specm}(\mathbb{Z}_{(2)}) = \left\{2 \cdot \mathbb{Z}_{(2)}\right\}$ ist einpunktig, d.h.

$$\overline{\operatorname{Specm} \mathbb{Z}_{(2)}}^{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}_{(2)}} = \operatorname{Specm} \mathbb{Z}_{(2)} \subsetneqq \operatorname{Spec} \mathbb{Z}_{(2)}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\overline{\operatorname{Specm} A}^{\operatorname{Spec} A} &= V(I(\operatorname{Specm} A)) \\
&= V\left(\bigcap_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} A} \mathfrak{m}\right) \\
&= V(\operatorname{Nil}(A)) \\
&= \operatorname{Spec} A
\end{aligned}$$

□

Achtung. Für $k = \overline{k}$, $V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}^n_k$ ist (nach HNS) $V(\mathfrak{a}) \cong \operatorname{Specm}\left(A/\sqrt{\mathfrak{a}}\right)$, also $V(\mathfrak{a})$ dicht in $\operatorname{Spec}\left(A/\sqrt{\mathfrak{a}}\right)$.

Aber: Wenn $k \neq \overline{k}$, so ist nur $\operatorname{Specm}\left(A/\sqrt{\mathfrak{a}}\right)$ dicht in $\operatorname{Spec}\left(A/\sqrt{\mathfrak{a}}\right)$, aber i.a. nicht $V(\mathfrak{a})$ dicht in $\operatorname{Spec}\left(A/\sqrt{\mathfrak{a}}\right)$, da $V(\mathfrak{a}) \underset{\text{i.a.}}{\subsetneqq} \operatorname{Specm}\left(A/\sqrt{\mathfrak{a}}\right)$, sogar $V(\mathfrak{a}) = \varnothing$ ist möglich, oder es kann $V(\mathfrak{a})$ endlich sein und $\operatorname{Specm}\left(A/\sqrt{\mathfrak{a}}\right)$ unendlich (z.B. $\mathfrak{a} := \left(X^2(X^2-1)+Y^2\right) \subsetneqq k[X,Y]$).

Bemerkung 4. Sei $A \subseteq B$ beliebige Ringerweiterung. Dann liefert das Going-Up-Theorem (Satz 6.5.6):

$$\dim_{\text{Krull}} A = \dim_{\text{Krull}} \overline{A}^B$$

Warnung. Dennoch können A und $\overline{A}^B$ sehr verschieden sein, also insbesondere $A \ncong \overline{A}^B$:

Beispiel 6.5.1.

(a) Betrachte etwa $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Q}(i)$, dann ist $cl[B]A = \overline{\mathbb{Z}}^{\mathbb{Q}(i)} = \mathbb{Z}[i]$. $\dim_{\text{Krull}} \mathbb{Z}[i] = 1 = \dim_{\text{Krull}} \mathbb{Z}$ (da $\mathbb{Z}[i]$ Hauptidealring). Aber es ist $\mathbb{Z} \ncong \mathbb{Z}[i]$, denn sonst wären auch die Quotientenkörper $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}(i)$ Körper-isomorph, also erst recht vektorraumisomorph, also $1 = \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q} = \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(i) = 2$.

(b) Wählen wir $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$, so ist $\overline{\mathbb{Z}}^{\mathbb{Q}(\sqrt{-5})} = \mathbb{Z} \oplus \sqrt{-5} \cdot \mathbb{Z}$, und das ist klar kein Hauptidealring, nicht einmal faktoriell, obwohl trotzdem gilt $\dim_{\mathrm{Krull}}(\mathbb{Z} \oplus \sqrt{-5}\mathbb{Z}) = 1 = \dim \mathbb{Z}$.

<table><tr><td>

$\boxed{\text{Bemerkung 5.}}$ Sei $A \overset{j}{\subseteq} B$ eine endliche Erweiterung von k-Algebren, also $B = \sum_{i=1}^{r} A\omega_i$ endlich erzeugter A-Modul. Dann gilt:

(1) $j^* : \operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ ist surjektiv, abgeschlossen.

(2) $j^*|_{\operatorname{Specm} B} : \operatorname{Specm} B \longrightarrow \operatorname{Specm} A$ ist wohldefiniert, und surjektiv, mit endlichen Fasern, d.h. $\forall \mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} A : |(j^*)^-1(\mathfrak{m})| < \infty$.

</td></tr></table>

Beweis.

(1) ist bekannt, gilt sogar für ganze Erweiterungen (going-Up, Satz 6.5.6).

(2) $A \subseteq B$ ist insbesondere eine ganze Erweiterung, daher gilt:

$$\forall \mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} A : \exists \mathfrak{P} \in \operatorname{Spec} B : A \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{m},$$

wobei sogar $\mathfrak{P} = \mathfrak{M} \in \operatorname{Specm} B$ ist, also $\mathfrak{M} \in (j^*)^{-1}(\mathfrak{m})$, also ist $j^*|_{\operatorname{Specm} B}$ surjektiv. Sei nun für $\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} A$ ein $\mathfrak{M}$ aus der Faser $(j^*)^{-1} \subseteq \operatorname{Specm} B$ gegeben, d.h. $\mathfrak{M} \cap A = \mathfrak{M}$, also $\mathfrak{M} \supseteq \mathfrak{m}_{\mathrm{ext}} = \mathfrak{m} \cdot B$. Umgekehrt folgt aus $\mathfrak{M} \supseteq (\mathfrak{m} \cdot B)$ auch

$$\mathfrak{M} \cap A \supseteq (\mathfrak{m} \cdot B) \cap A = (\mathfrak{m}_{\mathrm{ext}}) \cap A \supseteq \mathfrak{m},$$

also ist

$$(j^*)^{-1}(\mathfrak{m}) = \{\mathfrak{M} \in \operatorname{Specm} B \mid \mathfrak{M} \supseteq \mathfrak{m} \cdot B\}$$

Seien nun $\mathfrak{M}_1, \cdots, M_s \in (j^*)^{-1}(\mathfrak{m})$ paarweise verschieden, dann hat man den kanonischen k-Algebra-Homomorphismus

$$\begin{array}{ccccc} B/\mathfrak{m}B & \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} & B/\bigcap_{i=1}^{s} \mathfrak{M}_i & \xrightarrow[\substack{\text{Chin. Restsatz,} \\ \mathfrak{M}_i + \mathfrak{M}_j = B \forall i \neq j}]{\sim} & B/\mathfrak{M}_1 \times \ldots \times B/\mathfrak{M}_s \\ [b]_{\mathfrak{m}A} & \longmapsto & [b]_{\bigcap_i \mathfrak{M}_i} & & \end{array}$$

Außerdem sind $A/\mathfrak{m} \hookrightarrow B/\mathfrak{M}_i$ jeweils ganze k-Algebra-Homomorphismen. Weiterhin haben wir $\left(A/\mathfrak{m} \hookrightarrow B/\mathfrak{m}B\right) \in \operatorname{Hom}_{k\text{-Alg}}$, damit werden alle diese k-Algebra-Homomorphismen auch $A/\mathfrak{m}$-Vektorraum-Homomorphismen. Da φ surjektiv ist, ist nun

$$\begin{aligned} \dim_{A/\mathfrak{m}} B/\mathfrak{m}B &\geq \dim_{A/\mathfrak{m}} \left(B/\mathfrak{M}_1 \times \ldots \times B/\mathfrak{M}_s\right) \\ &= \sum_{i=1}^{s} \underbrace{\dim_{A/\mathfrak{m}} B/\mathfrak{M}_i}_{\geq 1} \\ &\geq s \end{aligned}$$

Wir haben also $s \leq \dim_{A/\mathfrak{m}} B/\mathfrak{m}B \leq \operatorname{Rg}_A B < \infty$, da ja B endlich erzeugt über A war. Damit gibt es eine endliche obere Schranke für $\left|(j^*)^{-1}(\mathfrak{m})\right|$, also sind die Fasern wirklich endlich. $\square$

$\boxed{\text{BEMERKUNG 6.}}$ Sei k Körper, A, B endlich erzeugte k-Algebren, $f \in \operatorname{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, B)$. Dann gilt:

(1) Das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\varphi \arrow[r, mapsto] & \varphi \circ f \\
\operatorname{Hom}_{k\text{-Alg}}(B, \overline{k}) \arrow[r, "\operatorname{hom}(f)"'] \arrow[d, "\ker"'] & \operatorname{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, \overline{k}) \arrow[d, "\ker"] \\
\operatorname{Specm} B \arrow[r, "f^*|_{\operatorname{Specm} B}"'] & \operatorname{Specm} A
\end{tikzcd}$$

ist kommutativ mit wohldefinierten Abbildungen.

(2) $\forall \mathfrak{M} \in \operatorname{Specm} B : f^*(\mathfrak{M}) = f^{-1}(\mathfrak{M}) \in \operatorname{Specm} A$.

Achtung. Für beliebige Ringhomomorphismen gilt dies i.a. nicht, etwa $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$, (0) maximal in $\mathbb{Q}$, aber (0) nicht maximal in $\mathbb{Z}$.

$\boxed{\text{FAZIT.}}$ k-Algebra-Homomorphismen ziehen grundsätzlich Maximalideale auf Maximalideale zurück, wenn die k-Algebren endlich erzeugt sind.

Beweis.

(1) Wir betrachten das Teildiagramm

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_{k\text{-Alg}}(B, \overline{k}) \arrow[rrr, "\operatorname{hom}(f)"] \arrow[dd, "\ker"'] & & & \operatorname{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, \overline{k}) \arrow[dd, "\ker"] \\
& \varphi \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \varphi \circ f \arrow[d, mapsto] & \\
\operatorname{Specm} B & \mathfrak{M} = \ker \varphi & \ker(\varphi \circ f) & \operatorname{Specm} A
\end{tikzcd}$$

Ist nun $\mathfrak{M} \in \operatorname{Specm} B$, so ist $\mathfrak{M} = \ker \varphi$ für ein $\varphi \in \operatorname{Hom}_{k\text{-Alg}}(B, \overline{k})$. Damit ist

$$\begin{aligned}
\ker(\hom(f)(\varphi)) &= \ker(\varphi \circ f) \in \operatorname{Specm} A \\
&= \{a \in A \mid (\varphi \circ f)(a) = 0\} \\
&= \{a \in A \mid \varphi(f(a)) = 0\} \\
&= \{a \in A \mid f(a) \in \ker(\varphi)\} \\
&= f^{-1}(\ker(\varphi)) \\
&= f^{-1}(\mathfrak{M}) \\
&= f^*(\mathfrak{M})
\end{aligned}$$

Also komplettiert $f^*|_{\operatorname{Specm} B}$ das Diagramm.

(2) folgt direkt aus (1). □

6.6 Koordinatenringe und die Kategorie der affinen algebraischen Mengen

Sei $V := V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}^n_k$, $k = \overline{k}$ (also HNS-Körper). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\mathfrak{a} = IV(\mathfrak{a}) = \sqrt{\mathfrak{a}}$.

Definition 6.21. *Eine **reguläre Funktion auf** V ist eine Abbildung $f : V \to k$, welche polynomial ist, d.h. $\exists p \in k[X_1, \cdots, X_n] : p|_V = f$.* $\boxed{\operatorname{Reg}(V)}$

$$\operatorname{Reg}(V) := A[V] := \{f \in \operatorname{Abb}(V, k) \mid \exists p \in k[X_1, \cdots, X_n] : f(a) = p(a) \forall a \in V\}$$

*heißt **Ring der regulären Funktionen** auf V, auch **Koordinatenring** von V.* $\boxed{A[V]}$

Bemerkung. Man hat einen kanonischen k-Algebra-Homomorphismus

$$\begin{aligned}
\pi : k[X_1, \cdots, X_n] &\longrightarrow A[V] \\
p &\longmapsto p|_V,
\end{aligned}$$

welcher nach Definition surjektiv ist. Dabei ist

$$\ker \pi = \{p \in k[X_1, \cdots, X_n] \mid p|_V = 0\} = I(V),$$

wir haben also

$$A[V] \cong k[X_1, \cdots, X_n]/_{I(V)}.$$

Aus den vorigen Betrachtungen ergibt sich folgender Satz:

> SATZ 6.6.1.
>
> (1) V ist irreduzibel $\Leftrightarrow A[V]$ ist Integritätsbereich.
>
> (2) V ist Zariski-zusammenhängend $\Leftrightarrow A[V]$ hat nur $\{0,1\}$ als idempotente Elemente $\Leftrightarrow A[V]$ ist einfach .

Ziel. Sind $V \subseteq \mathbb{A}_k^n$ und $W \subseteq \mathbb{A}_k^m$, dann

$$V \text{ „isomorph“ } W :\Leftrightarrow A[V] \cong A[W] \quad \text{als } k\text{-Algebren.}$$

Bemerkung. Für die relative Zariski-Topologie von W gilt:

$Y \subseteq W$ abgeschlossen in W
$\Leftrightarrow Y$ abgeschlossen in $\mathbb{A}_k^n$
$\Leftrightarrow Y = V(\mathfrak{a}) \subseteq VI(W), \mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$
$\Leftrightarrow Y = V(\mathfrak{a})$ mit $I(W) \supseteq \mathfrak{a}$, d.h. $\mathfrak{a}/I(\mathfrak{W}) \subseteq A[W]$ Ideal
$\Leftrightarrow Y = V(\mathfrak{a}/I(W))$ ist Verschwindungsideal eines Ideals regulärer Funktionen
$\Leftrightarrow Y = V(\mathfrak{A}), \quad \mathfrak{A} \subseteq A[W]$ Ideal

Die offenen Basismengen von W sind genau die Teilmengen $W \cap D(p)$ mit $p \in k[X_1, \cdots, X_n]$, das sind die Teilmengen $D(\overline{p}) = \{a \in W \mid \overline{p}(a) \neq 0\}$, $\overline{p} \in k[X_1, \cdots, X_n]/I(W)$, also die Teilmengen $D(f)$ mit $f \in A[W]$.

> BEMERKUNG 1. Ist $W \subseteq \mathbb{A}_k^n$, $W \neq \varnothing$ affine algebraische Menge, dann erfüllt das Paar $(W, A[W])$ folgende Bedingungen:
>
> (1) $W \neq \varnothing$
>
> (2) $A[W] \subseteq \mathrm{Abb}(W,k)$ ist k-Unteralgebra.
>
> (3) Die Bewertungsabbildung
>
> $$\begin{aligned} \chi_W : W &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(A[W], k) \\ a &\longmapsto (f \mapsto f(a)) \end{aligned}$$
>
> ist bijektiv.

Beweis.

(1) klar nach Definition.

(2) dito.

(3) Man hat

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\chi_W", "\sim"'] \arrow[dr, "\sigma"', "\wr"] & \mathrm{Hom}(A[W],k) \arrow[d, "\ker", "\wr"'] \\ & \mathrm{Specm}(A[W]) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} k=\overline{k} \arrow[d, hook, "\mathrm{incl}"'] \\ A[W] \arrow[d, two heads, "\pi_m"'] \\ A[W]/\mathfrak{m} \arrow[uu, bend right, "(\pi_{\mathfrak{m}}\circ\mathrm{incl})^{-1}"', "\wr"] \end{tikzcd}$$

wobei für $a=(a_1,\cdots,a_n)\in W$, $\varphi\in\mathrm{Hom}$, $\mathfrak{m}\in\mathrm{Specm}$:

$$\begin{aligned} \chi_W^{-1}(\varphi) &:= \big(\varphi(\overline{X}_1),\cdots,\varphi(\overline{X}_n)\big)\in W, \\ \ker^{-1}(\mathfrak{m}) &:= (\pi_{\mathfrak{m}}\circ\mathrm{incl})^{-1}\circ\pi_{\mathfrak{m}}, \\ \sigma(a) &:= {(X_1-a_1,\cdots,X_n-a_n)}\big/{I(W)}, \end{aligned}$$

$$\sigma^{-1}\Big({(X_1-a_1,\cdots,X_n-a_n)}\big/{I(W)}\Big)=(a_1,\cdots,a_n)=a$$

speziell gilt also auch (3). □

Abstrakte affine k-Varietäten

Die in der letzten Bemerkung erkannten Eigenschaften affiner algebraischer Mengen wollen wir jetzt verallgemeinern.

Definition 6.22. *Ein Tupel (X,A,j) heißt* ***abstrakte affine algebraische k-Varietät*** *(kurz auch* ***aaa-Varietät***[5]*), falls folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(1) $X\neq\varnothing$ ist Menge

(2) A ist endlich erzeugte, reduzierte k-Algebra.

(3) $j:A\hookrightarrow\mathrm{Abb}(X,k)$, d.h. $A\cong j(A)$ kann mit einer Unteralgebra gewisser k-wertiger Funktionen auf X aufgefasst werden.

(4) Die induzierte Bewertungsabbildung

$$\begin{aligned} \chi_X : X &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(A,k) \\ x &\longmapsto (\varphi\mapsto\chi_X(x)(\varphi):=j(\varphi)(x)) \end{aligned}$$

ist bijektiv.

X wird auch ***Trägermenge*** *von (X,A,j) genannt, A die* ***Algebra regulärer Funktionen****.*

Bemerkung. Statt (4) kann man (jedenfalls für $k=\overline{k}$) auch fordern:

(4') Es existiert eine Bijektion $\beta:X\xrightarrow{\sim}\mathrm{Specm}\,A$.

[5]Die Abkürzung *aaa-Varietät* stammt von P.E. und war nicht Teil der Vorlesung.

Prominente Beispiele

Beispiel 6.6.1. Die konkreten, d.h. in $\mathbb{A}_k^n$ eingebetteten, affinen algebraischen Varietäten:

$$\left(W, {}^{k[X_1,\cdots,X_n]}\!\big/_{I(W)}, j : {}^{k[X_1,\cdots,X_n]}\!\big/_{I(W)} \xrightarrow{\sim} A[W]\right)$$

ist auch eine abstrakte affine algebraische k-Varietät.

Beispiel 6.6.2. Sei A endlich erzeugte, reduzierte k-Algebra. Dann ist $(\operatorname{Specm} A, A, j)$ mit

$$\begin{aligned} j : A &\hookrightarrow \operatorname{Abb}(\operatorname{Specm}(A), k) \\ \varphi &\longmapsto \begin{pmatrix} ((\pi_\square \circ \mathrm{incl})^{-1} \circ \pi_\square)(\varphi) : \operatorname{Specm}(A) \to k \\ \qquad\qquad \mathfrak{m} \mapsto ((\pi_\mathfrak{m} \circ \mathrm{incl})^{-1} \circ \pi_\mathfrak{m})(\varphi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eine abstrakte affine algebraische k-Varietät.

Beweis.

(1) $\operatorname{Specm} A \neq \varnothing$.

(2) A ist endlich erzeugt und reduziert nach Vorraussetzung.

(3) j ist offenbar injektiver k-Algebra-Homomorphismus.

(4) Auch die Bewertungsabbildung

$$\begin{aligned} \chi_{\operatorname{Specm} A} : \operatorname{Specm} A &\xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, k) \\ \mathfrak{m} &\longmapsto (\pi_\mathfrak{m} \circ \mathrm{incl})^{-1} \circ \pi_\mathfrak{m}) \end{aligned}$$

ist bijektiv, da $k = \overline{k}$. □

Beispiel 6.6.3. Sei $A := k[X_1, \cdots, X_n]$, $F \in A$ mit $\deg F \geq 1$. Dann ist $D(F) = \mathbb{A}_k^n \backslash V(F)$ offene Basismenge ($\neq \varnothing$) in $\mathbb{A}_k^n$ und $D(F)$ ist nicht abgeschlossen (da $\mathbb{A}_k^n$ zusammenhängend). Aber $(D(F), A_F, \varkappa)$ mit $A_F := \left\{ \frac{G}{F^\nu} \mid G \in A, \nu \in \mathbb{N} \right\}$ (Lokalisierungsring) und

$$\begin{aligned} \varkappa : A_F &\longrightarrow \operatorname{Abb}(D(F), k) \\ \frac{G}{F^r} &\longmapsto \left(a \mapsto \varkappa\left(\frac{G}{F^r}\right)(a) := \frac{G(a)}{F(a)^r} \right) \end{aligned}$$

(das ist wohldefiniert, da $F(a) \neq 0$ für $a \in D(F)$) ist abstrakte affine algebraische k-Varietät im Sinne der Definition.

Beweis. Übungsaufgabe 1 in Serie 7. □

Achtung. Dies gilt nicht für beliebige offene Mengen $D(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_k^n$.

$\boxed{\text{SATZ 6.6.2.}}$ Sei A beliebige endlich erzeugte reduzierte k-Algebra ($k = \overline{k}$). Dann gilt:

(1) Es existiert eine abstrakte k-Varietät (X, A) mit A als Algebra regulärer Funktionen.

(2) Es gibt eine konkrete algebraische affine Menge $W \subseteq \mathbb{A}_k^n$ mit $A[W] \cong_{k\text{-Alg}} A$.

Beweis.

(1) Setze $X := \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, k)$ oder $X := \operatorname{Specm} A$ mit Beispiel 6.6.2.

(2) Da A endlich erzeugt und reduziert ist, existiert $n \in \mathbb{N}$ und $\theta_1, \cdots, \theta_n \in A$, so dass $A = k[\theta_1, \cdots, \theta_n]$. Damit haben wir den (surjektiven) k-Algebra-Homomorphismus

$$\begin{aligned} \hat{\Theta} : k[X_1, \cdots, X_n] &\twoheadrightarrow A = k[\theta_1, \cdots, \theta_n] \\ X_i &\longmapsto \theta_i \end{aligned}$$

mit $\mathfrak{a} := \ker \hat{\Theta}$ und dem induzierten Isomorphismus

$$\begin{aligned} \Theta : k[X_1, \cdots, X_n]/\mathfrak{a} &\xrightarrow{\sim} k[\theta_1, \cdots, \theta_n] = A \\ \overline{X}_i &\longmapsto \theta_i \end{aligned}$$

Dabei ist (weil A reduziert[6] ist) $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$, folglich ist $W := V(\mathfrak{a})$ affine algebraische Menge, mit

$$A[W] \cong k[X_1, \cdots, X_n]/I(W) = k[X_1, \cdots, X_n]/\mathfrak{a} \cong A. \qquad \square$$

Definition 6.23. *Für A (endlich erzeugte reduzierte k-Algebra) bzw.* (X, A) *(abstrakte affine algebraische k-Varietät) heißt eine solche (d.h. aus den Algebra-erzeugenden von A gewonnene) konkrete affine algebraische Menge* $W \subseteq \mathbb{A}_k^n$ *mit* $A[W] \cong A$ *eine **geometrische Realisierung** von A, wobei* $X \xrightarrow{\sim} W$ *bijektiv ist.*

Bemerkung. Es kann für A (bzw. (X, A)) *viele* geometrische Realisierungen geben: Je nach der Wahl der k-Algebra-Erzeugenden von A eine möglicherweise andere.

$\boxed{\text{SATZ 6.6.3.}}$ Sei (X, A) abstrakte affine algebraische k-Varietät ($k = \overline{k}$), dann existiert auf X eine natürliche **Zariski-Topologie** (also noethersch, quasikompakt etc.), die mit den Realisierungen verträglich ist.

[6] also $(0) = \mathrm{Nil}\left(k[X_1, \cdots, X_n]/\mathfrak{a}\right) = \mathfrak{a}/\sqrt{\mathfrak{a}}$

Beweis. Betrachte $A \hookrightarrow \mathrm{Abb}(X, k)$ als Funktionenalgebra auf X. Definiere für Ideale $\mathfrak{a} \subseteq A$ und für $\varphi \in A$:

$$V(\mathfrak{a}) := \{x \in X \mid \varphi(x) = 0 \forall \varphi \in \mathfrak{a}\}$$
$$D(\varphi) := \{x \in X \mid \varphi(x) \neq 0\} = X \setminus V(\varphi)$$ □

Morphismen von abstrakten affinen Varietäten

Definition 6.24. *Seien (X, A), (Y, B) abstrakte affine algebraische k-Varietät, also A, B Algebren regulärer Funktionen. Wir nennen $f : (X, A) \to (Y, B)$ **Morphismus**, ($f \in \mathrm{Mor}(X, Y)$), falls*

$\boxed{\mathrm{Mor}(X, Y)}$

(1) $f : X \to Y$ ist Mengenabbildung und

$\boxed{f^{\#}}$

(2) für den induzierten k-Algebra-Homomorphismus

$$f^{\#} : \mathrm{Abb}(Y, k) \longrightarrow \mathrm{Abb}(X, k)$$
$$\varphi \mapsto f^{\#}(\varphi) := \varphi \circ f$$

gilt: $f^{\#}(B) \subseteq A$.

Bemerkung. Vulgär formuliert sagt (2): *f zieht reguläre Funktionen auf Y auf reguläre Funktionen auf X zurück.*

Bemerkung. Es ist $\mathrm{id}_X^{\#} = \mathrm{id}_{\mathrm{Abb}(X,k)}$ und $(g \circ f)^{\#} = f^{\#} \circ g^{\#}$, also ist $(\mathrm{Abb}(\square, k), \square^{\#})$ ein kontravarianter Funktor von $\underline{\mathrm{Ens}}$ nach $\underline{k\text{-}\mathrm{Alg}}^{\mathrm{red}}$.

Bemerkung. Sei $f \in \mathrm{Mor}(X, Y)$, dann gilt:

(1) $f^{\#} \in \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(B, A)$.

(2) f ist (Zariski-)stetig, da $f^{-1}(D(\psi)) = D(\psi \circ f)$ für alle $\psi \in B$.

(3) $f^{\#} : B \to A$ induziert ein kommutierendes Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\chi_X"', "\wr"] & Y \arrow[d, "\chi_Y", "\wr"'] \\
\mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, k) \arrow[r, "\mathrm{hom}(f^{\#})"'] & \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(B, k)
\end{tikzcd}$$

Beweis. Für $x \in X$ und $\psi \in B$ ist

$$\begin{aligned}(\chi_Y \circ f)(x)(\psi) &= \chi_Y\left(f(x)\right)(\psi) \\ &= \psi(f(x)) \\ &= (\psi \circ f)(x) \\ &= \chi_X(x)(\psi \circ f) \\ &= \chi_X(x)(f^{\#}(\psi)) \\ &= (\chi_X(x) \circ f^{\#})(\psi) \\ &= (\hom(f^{\#})(\chi_X(x)))(\psi) \\ &= (\hom(f^{\#}) \circ \chi_X)(x)(\psi)\end{aligned}$$

Damit haben wir $\chi_Y \circ f = \hom(f^{\#}) \circ \chi_X$. $\square$

Satz 6.6.4. Seien (X, A) und (Y, B) abstrakte affine algebraische k-Varietät, $k = \overline{k}$. Dann:

(1) Die Funktoren-Abbildung $\square^{\#}$ liefert eine Bijektion

$$\begin{aligned}\operatorname{Mor}(X, Y) &\xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{k\text{-Alg}}(B, A) \\ f &\longmapsto f^{\#} \\ \chi_Y^{-1} \circ \hom(\zeta) \circ \chi_X =: \check{\zeta} &\longleftarrow\!\shortmid \varphi \qquad \text{mit } (\check{\zeta})^{\#} = \zeta\end{aligned}$$

(2) $\operatorname{Isom}(X, Y) \xrightarrow[\square^{\#}]{\sim} \operatorname{Isom}_{k\text{-Alg}}(B, A)$

(3) Die Kategorie der konkreten affinen algebraischen Mengen mit abstrakten Morphismen ($\underline{AM_k}$), die Kategorie abstrakter affiner algebraischer Varitäten mit abstrakten Morphismen und die $\underline{k\text{-Alg}}^{\text{ee,red}}$-Kategorie sind paarweise äquivalente Kategorien.

Beweis.

(1) Wir kennen die Diagramme

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\chi_X"', "\wr"] & Y \arrow[d, "\chi_Y", "\wr"'] \\
\mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(A,k) \arrow[r, "\mathrm{hom}(f^{\#})"'] & \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(B,k)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(A,k) \arrow[r, "\mathrm{hom}(g^{\#})"] & \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(B,k) \\
X \arrow[r, "g"'] \arrow[u, "\chi_X", "\wr"'] & Y \arrow[u, "\chi_Y"', "\wr"]
\end{tikzcd}$$

für $f, g \in \mathrm{Mor}(X, Y)$. Ist nun $f^{\#} = g^{\#}$, so ist auch $\mathrm{hom}(f^{\#}) = \mathrm{hom}(g^{\#})$, also auch

$$f = \chi_Y^{-1} \circ \mathrm{hom}(f^{\#}) \circ \chi_X = \chi_Y^{-1} \circ \mathrm{hom}(g^{\#}) \circ \chi_X = g.$$

Daher ist $\Box^{\#}$ injektiv.

Sei umgekehrt $\zeta \in \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(B, A)$. Wir setzen mit Hilfe des obigen Diagrammes $f := \chi_Y^{-1} \circ \mathrm{hom}(\zeta) \circ \chi_X$. Es ist $\chi_Y \circ f = \mathrm{hom}(\zeta) \circ \chi_X$, also für alle $x \in X$: $\chi_Y(f(x)) = \chi_X(x) \circ \varphi$. Für $\psi \in B$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
f^{\#}(\psi)(x) &= \psi(f(x)) \\
&= \chi_Y(f(x))(\psi) \\
&= \chi_X(x)(\zeta(\psi)) \\
&= \zeta(\psi)(x),
\end{aligned}$$

also $\zeta = f^{\#}$. Damit ist auch $f^{\#}(B) = \zeta(B) \subseteq A$, also $f \in \mathrm{Mor}(X, Y)$.

Also ist $\Box^{\#}$ auch surjektiv, also insgesamt bijektiv.

(2) Ist $f \in \mathrm{Isom}(X, Y)$, so existiert $g \in \mathrm{Mor}(Y, X)$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ und $g \circ f = \mathrm{id}_X$. Daher ist

$$g^{\#} \circ f^{\#} = (f \circ g)^{\#} = \mathrm{id}_Y^{\#} = \mathrm{id}_B,$$

und ebenso $f^{\#} \circ g^{\#} = \mathrm{id}_A$, also sind $f^{\#}$ und $g^{\#}$ zueinander inverse k-Algebra-Homomorphismen, insbesondere $f^{\#} \in \mathrm{Isom}_{k\text{-Alg}}(B, A)$.

Umgekehrt: Ist $f^{\#} \in \mathrm{Isom}_{k\text{-Alg}}(B, A)$, so existiert ein Inverses $\zeta \in \mathrm{Isom}_{k\text{-Alg}}(A, B)$, und nach Teil (1) haben wir auch $g \in \mathrm{Mor}(Y, X)$ mit $g^{\#} = \zeta$. Wir erhalten

$$(f \circ g)^{\#} = g^{\#} \circ f^{\#} = \zeta \circ f = \mathrm{id}_B = \mathrm{id}_Y^{\#},$$

also $(f \circ g)^{\#} = \mathrm{id}_Y^{\#}$, und wegen der Bijektivität von $\Box^{\#}$ auch $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Analog erhalten wir $g \circ f = \mathrm{id}_X$. Also ist $f \in \mathrm{Isom}(X, Y)$.

(3) Dies zeigen wir nach dem folgenden Diskurs (ab Seite 291). □

Diskurs über die Äquivalenz von Kategorien

Die grundlegenden Begriffe zu Kategorien sind in Kapitel 5 (ab Seite 203) zu finden.

Definition 6.25. *Sei $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ ein (kovarianter) Funktor zwischen Kategorien $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$. F heißt **Äquivalenz-Funktor**, falls*

*(1) F ist **volltreu**, d.h. für $C_1, C_2 \in \operatorname{obj}(\mathfrak{C})$ ist $\operatorname{Mor}_{\mathfrak{C}}(C_1, C_2) \xrightarrow[F]{\sim} \operatorname{Mor}_{\mathfrak{D}}(F(C_1), F(C_2))$ bijektiv.*

(2) F ist im wesentlichen surjektiv, *d.h.*

$$\forall D \in \operatorname{obj}(\mathfrak{D}) : \exists C \in \operatorname{obj}(\mathfrak{C}) : \operatorname{Isom}_{\mathfrak{D}}(D, F(C)) \neq \varnothing$$

Analog ist dies für kontravariante Funktoren definiert.

Bemerkung. Dies ist äquivalent zu der in Definition 5.24 verwendeten Charakterisierung

$$\exists G \in \underline{\operatorname{Funct}}(\mathfrak{D}, \mathfrak{C}) : \quad G \circ F \cong \operatorname{id}_{\mathfrak{C}}, F \circ G \cong \operatorname{id}_{\mathfrak{D}} \quad \left(\begin{array}{l}\text{jeweils Funktorisomor-}\\ \text{phie, siehe Def. 5.22}\end{array}\right)$$

Bemerkung. Salopp formuliert: Kategorien sind äquivalent, wenn die Äquivalenzklassen modulo jeweiliger Isomorphie in (Funktor-)Bijektion stehen.

Beweis von (3) aus Satz 6.6.4. Dies wenden wir nun an auf unsere Kategorien: $\boxed{\underline{AM_k}}$ $\boxed{\underline{AAV_k}}$ $\boxed{\underline{k\text{-Alg}^{\text{ee,red}}}}$

$\underline{AM_k}$:

$$\begin{aligned}\operatorname{obj}(\underline{AM_k}) &= \{V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_k^n \mid n \in \mathbb{N}, \mathfrak{a} \subseteq k[X_1, \cdots, X_n]\}\\ \operatorname{Mor}(\underline{AM_k}) &= \{\text{(abstrakte) Morphismen affiner algebraischer Mengen}\}\end{aligned}$$

$\underline{AAV_k}$:

$$\begin{aligned}\operatorname{obj}(\underline{AAV_k}) &= \{(X, A) \mid (X, A) \text{ abstrakte affine algebraische } k\text{-Varietät}\}\\ \operatorname{Mor}(\underline{AAV_k}) &= \left\{(X, A) \xrightarrow{f} (Y, B) \mid f^{\#}(B) \subseteq A\right\}\end{aligned}$$

$\underline{k\text{-Alg}^{\text{ee,red}}}$:

$$\begin{aligned}\operatorname{obj}(\underline{k\text{-Alg}^{\text{ee,red}}}) &= \{A \mid A \text{ endlich erzeugte reduzierte } k\text{-Algebra}\}\\ \operatorname{Mor}(\underline{k\text{-Alg}^{\text{ee,red}}}) &= \dot{\bigcup_{A,B \in \operatorname{obj}}} \operatorname{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, B)\end{aligned}$$

Wir haben folgende, größtenteils kanonische, Funktoren:

den **Koordinatenring-Funktor** (kontravariant)

$$\begin{aligned}A[\square] : \underline{AM_k} &\longrightarrow \underline{k\text{-Alg}^{\text{ee,red}}}\\ \mathbb{A}_k^n \supseteq V(\mathfrak{a}) &\longmapsto A[V(\mathfrak{a})] = k[X_1, \cdots, X_n]/\mathfrak{a}\\ f &\longmapsto f^{\#},\end{aligned}$$

den **Abstraktionsfunktor** (kovariant)

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : \underline{AM_k} &\longrightarrow \underline{AAV_k} \\ V(\mathfrak{a}) &\longmapsto (V(\mathfrak{a}), A[V(\mathfrak{a})])\,, \end{aligned}$$

den **Maximalspektrums-Funktor** (kontravariant)

$$\begin{aligned} \underline{\mathrm{Specm}} \colon \underline{k\text{-}\mathrm{Alg}}^{\mathrm{ee,red}} &\longrightarrow \underline{AAV_k} \\ A &\mapsto (\mathrm{Specm}\, A, A)\,, \end{aligned}$$

den **Projektionsfunktor** (kontravariant)

$$\begin{aligned} \pi : \underline{AAV_k} &\longrightarrow \underline{k\text{-}\mathrm{Alg}}^{\mathrm{ee,red}} \\ (X, A) &\longmapsto A \\ f &\longmapsto f^{\#}, \end{aligned}$$

sowie den **Realisierungsfunktor** (kontravariant)

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : \underline{k\text{-}\mathrm{Alg}}^{\mathrm{ee,red}} &\longrightarrow \underline{AM_k} \\ A \cong {k[X_1, \cdots, X_n]}/{\mathfrak{a}} &\longmapsto (V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_k^n, A[V(\mathfrak{a})] \cong A)\,. \end{aligned}$$

(Der Realisierungsfunktor $\mathcal{R}$ ist nicht eindeutig bestimmt, er hängt von der Wahl der Algebra-Erzeugenden von A (und damit des Ideals $\mathfrak{a}$) ab.)

Man hat damit folgende Diagramme von Funktoren

$$\begin{tikzcd} \underline{AM_k} \arrow[rr, "\mathcal{A}"] \arrow[dr, "{A[\square]}"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \underline{AAV_k} \arrow[dl, "\pi"] \\ & \underline{k\text{-}\mathrm{Alg}}^{\mathrm{ee,red}} & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \underline{AM_k} & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \underline{AAV_k} \arrow[ll, "\mathcal{R}\circ\pi"'] \\ & \underline{k\text{-}\mathrm{Alg}}^{\mathrm{ee,red}} \arrow[ul, "\mathcal{R}"] \arrow[ur, "\underline{\mathrm{Specm}}"'] & \end{tikzcd}$$

sowie die bekannte Tatsache

$$\begin{aligned} & V(\mathfrak{a}) \cong_{\underline{AM_k}} V(\mathfrak{b}) \\ \Leftrightarrow \quad & (V(\mathfrak{a}), A[V(\mathfrak{a})]) \cong_{\underline{AAV_k}} (V(\mathfrak{b}), A[V(\mathfrak{b})]) \\ \Leftrightarrow \quad & A[V(\mathfrak{a})] \cong_{\underline{k\text{-}\mathrm{Alg}}^{\mathrm{ee,red}}} A[V(\mathfrak{b})] \end{aligned}$$

Damit sind $\mathcal{A}$, π und $A[\square]$ Äquivalenzfunktoren. $\square$

Konkretisierung: Morphismen affiner algebraischer Mengen

Seien $V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_k^n$, $V(\mathfrak{b}) \subseteq \mathbb{A}_k^m$, mit Idealen $\mathfrak{a} \subseteq k[X_1, \cdots, X_n]$, $\mathfrak{b} \subseteq k[Y_1, \cdots, Y_m]$. Dann haben wir ja

$$\begin{aligned} \operatorname{Mor}_{\underline{AM}_k}(V(\mathfrak{a}), V(\mathfrak{b})) &:= \operatorname{Mor}((V(\mathfrak{a}), A[V(\mathfrak{a})]), (V(\mathfrak{b}), A[V(\mathfrak{b})])) \\ &\underset{6.6.4}{\overset{\sim}{=\!=}} \operatorname{Hom}_{k\text{-Alg}}(A[V(\mathfrak{b})], A[V(\mathfrak{a})]) \,. \end{aligned}$$

Frage. Wie sieht $\operatorname{Mor}(\mathbb{A}_k^n, \mathbb{A}_k^m)$ aus?

Es ist

$$\begin{aligned} & f : \mathbb{A}_k^n \to \mathbb{A}_k^m \qquad \text{Morphismus affiner algebraischer Mengen} \\ \Leftrightarrow \quad & f^{\#} : k[Y_1, \cdots, Y_m] \to k[X_1, \cdots, X_n] \qquad k\text{-Algebra-Homomorphismus} \\ \Leftrightarrow \quad & f^{\#}(Q(Y_1, \cdots, Y_m)) = Q(P_1(X_1, \cdots, X_n), \cdots, P_m(X_1, \dots X_n)) \end{aligned}$$

mit $f^{\#}(Y_i) = P_i$ für alle $i \in \{1, \cdots, m\}$.

Damit und mit unserem bekannten kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}_k^n \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "\chi_{\mathbb{A}_k^n}"', "\wr"] & \mathbb{A}_k^m \arrow[d, "\chi_{\mathbb{A}_k^m}", "\wr"'] \\ \operatorname{Hom}_{k\text{-Alg}}(k[X_1, \cdots, X_n], k) \arrow[r, "\operatorname{hom}(f^{\#})"] & \operatorname{Hom}_{k\text{-Alg}}(k[Y_1, \cdots, Y_m], k) \end{tikzcd}$$

berechnet sich f aus $f^{\#}$ wie folgt:

$$\begin{aligned} & & \chi_{\mathbb{A}_k^m} \circ f &= \operatorname{hom}(f^{\#}) \circ \chi_{\mathbb{A}_k^n} \\ \Rightarrow \quad & \forall a \in \mathbb{A}_k^n : & \chi_{\mathbb{A}_k^m}(f(a)) &= \chi_{\mathbb{A}_k^n} \circ f^{\#} \\ \Rightarrow \quad & \forall a \in \mathbb{A}_k^n, \forall i \in \{1, \cdots, m\} : & \chi_{\mathbb{A}_k^m}(f(a))(Y_i) &= f^{\#}(Y_i)(a) \\ \Rightarrow \quad & \forall a \in \mathbb{A}_k^n, \forall i \in \{1, \cdots, m\} : & \underbrace{Y_i(f(a))}_{i\text{-te Komponende von } f(a)} &= P_i(a) \\ \Rightarrow \quad & \forall a \in \mathbb{A}_k^n : & f(a) &= (P_1(a), \cdots, P_m(a)) \\ \Rightarrow \quad & & f &= (P_1, \cdots, P_m) \,. \end{aligned}$$

Fazit.

$$\operatorname{Mor}(\mathbb{A}_k^n, \mathbb{A}_k^m) = \{ f : \mathbb{A}_k^n \to \mathbb{A}_k^m \mid \exists P_1, \dots P_m \in k[X_1, \cdots, X_n] : f = (P_1, \cdots, P_m) \}$$

Frage. Sei $f = (P_1, \cdots, P_m) \in \operatorname{Mor}(\mathbb{A}_k^n, \mathbb{A}_k^m)$. Wie sehen dann $\overline{f(\mathbb{A}_k^n)}^{\mathbb{A}_k^m}$ und $A\left[\overline{f(\mathbb{A}_k^n)}^{\mathbb{A}_k^m}\right]$ aus? Wann ist $f(\mathbb{A}_k^n) = \overline{f(\mathbb{A}_k^n)}^{\mathbb{A}_k^m}$?

Beispiel 6.6.4. Betrachte $f : \mathbb{A}_k^2 \to \mathbb{A}_k^2$, $f(a,b) := (ab,b)$. $\Rightarrow$ f ist Morphismus, $f = (X_1 \cdot X_2, X_2)$. Es ist

$$f(\mathbb{A}_k^2) = \mathbb{A}_k^2 \setminus \{(t,0) \mid t \in k^*\},$$

da

$$f\left(\frac{u}{v}, v\right) = (u,v) \quad \forall v \in k^*$$

und

$$f(u,0) = (0,0) \quad \forall u \in k,$$

daher ist f auch nicht injektiv. Es ist

$$\overline{f(\mathbb{A}_k^2)} = VI(f(\mathbb{A}_k^2)),$$

wobei

$$I(f(\mathbb{A}_k^2)) = \{Q \in k[Y_1, Y_2] \mid Q(X_1 \cdot X_2, X_2) = 0\}$$

Solche Q kann man ja immer schreiben als $Q(Y_1,Y_2) = S(Y_1,Y_2) \cdot Y_1 + T(Y_2)$, und dann ergibt sich $0 = Q(X_1 \cdot X_2, X_2) = \underbrace{S(X_1 \cdot X_2, X_2) \cdot X_1 \cdot X_2}_{\deg_{X_1} \geq 1} + \underbrace{T(X_2)}_{\deg_{X_1} = 0}$, d.h. $S = 0$, $T = 0$ und damit $Q = 0$. Wir haben also

$$\begin{aligned} I(f(\mathbb{A}_k^2)) &= (0) \\ \overline{f(\mathbb{A}_k^2)} &= VI(0) = \mathbb{A}_k^2 \neq f(\mathbb{A}_k^2) \end{aligned}$$

Das heißt, f ist dominant, aber nicht abgeschlossen.

<table><tr><td>FAZIT. Unter Morphismen sind Bilder algebraischer Mengen nicht notwendig wieder algebraisch.</td></tr></table>

Weiterhin haben wir

$$A\left[\overline{f(\mathbb{A}_k^2)}\right] = A[\mathbb{A}_k^2] = k[Y_1, Y_2].$$

<table><tr><td>BEMERKUNG 1. Sei $f : \mathbb{A}_k^n \to \mathbb{A}_k^m$ Morphismus, $f = (P_1, \cdots, P_m)$, $P_i \in k[X_1, \cdots, X_n]$. Dann ist
$$A\left[\overline{f(\mathbb{A}_k^n)}\right] \cong k[P_1, \cdots, P_m] \subseteq k[X_1, \cdots, X_n]$$</td></tr></table>

Beweis. Wir haben

$$\begin{aligned} I(f(\mathbb{A}_k^n)) &= \{Q \in k[Y_1, \cdots, Y_m] \mid Q(P_1, \cdots, P_m) = 0\} \\ &= \left\{Q \in k[Y_1, \cdots, Y_m] \mid f^{\#}(Q) = 0\right\} \\ &= \ker(f^{\#}) \end{aligned}$$

mit $f^\# : k[Y_1, \cdots, Y_m] \to k[X_1, \cdots, X_n]$, $f^\#(Y_i) = P_i$, $f^\#(Q) = Q(P_1, \cdots, P_m)$. Daher ist

$$\begin{aligned} A\left[\overline{f(\mathbb{A}_k^n)}\right] &= k[Y_1, \cdots, Y_m] \big/ I\left(f(\mathbb{A}_k^n)\right) \\ &= k[Y_1, \cdots, Y_m] \big/ \ker(f^\#) \\ &\cong \operatorname{im} f^\# \\ &= \left\{ f^\#(Q) \,\middle|\, Q \in k[Y_1, \cdots, Y_m] \right\} \\ &= \{ Q(P_1, \cdots, P_n) \mid Q \in kYm \} \\ &= k[P_1, \cdots, P_n] \\ &\subseteq k[X_1, \cdots, X_n] \end{aligned}$$

□

KOROLLAR. Ist $f = (P_1, \cdots, P_m) : \mathbb{A}_k^n \to \mathbb{A}_k^m$ dominant, dann gilt: f Isomorphismus in $\underline{AM_k} \iff k[P_1, \cdots, P_m] \cong k[X_1, \cdots, X_m]$

(Dies kann nur für $m = n$ eintreten.)
Für radizielle Ideale $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq k[X_1, \cdots, X_n]$ und $\mathfrak{b} = \sqrt{\mathfrak{b}} \subseteq k[Y_1, \cdots, Y_m]$ gilt ja

$$\operatorname{Mor}(V(\mathfrak{a}), V(\mathfrak{b})) \cong \operatorname{Hom}_{k\text{-Alg}}\left(k[Y_1, \cdots, Y_m] \big/ \mathfrak{b}, k[X_1, \cdots, X_n] \big/ \mathfrak{a} \right)$$

Sei $f : V(\mathfrak{a}) \to V(\mathfrak{b})$ Morphismus. Dann haben wir das Diagramm

$$\begin{tikzcd} k[Y_1, \cdots, Y_m]/\mathfrak{b} \arrow[r, "f^\#"] & k[X_1, \cdots, X_n]/\mathfrak{a} \\ k[Y_1, \cdots, Y_m] \arrow[u, two heads, "\pi_2"] \arrow[ur, "f^\# \circ \pi_2"] & k[X_1, \cdots, X_n] \arrow[u, two heads, "\pi_1"'] \end{tikzcd}$$

Es ist ja $f^\#(\pi_2(Y_i)) = f^\#(\overline{Y_i})$ für $i \in \{1, \cdots, m\}$. Sei nun jeweils

$$P_i \in \pi_1^{-1}\left(f^\#(\overline{Y_i})\right) \subseteq k[X_1, \cdots, X_n]$$

beliebig gewählt (das geht, da π_1 surjektiv ist), also $\pi_1(P_i) = f^\#(\overline{Y_i})$. Dann können wir $\hat{f}(Y_i) := P_i$ setzen, und erhalten durch Fortsetzung einen k-Algebra-Homomorphismus $\hat{f}$, welcher das Diagramm komplettiert:

$$\begin{tikzcd} k[Y_1, \cdots, Y_m]/\mathfrak{b} \arrow[r, "f^\#"] & k[X_1, \cdots, X_n]/\mathfrak{a} \\ k[Y_1, \cdots, Y_m] \arrow[u, two heads, "\pi_2"] \arrow[ur, "f^\# \circ \pi_2"] \arrow[r, dashed, "\exists \hat{f}"'] & k[X_1, \cdots, X_n] \arrow[u, two heads, "\pi_1"'] \end{tikzcd}$$

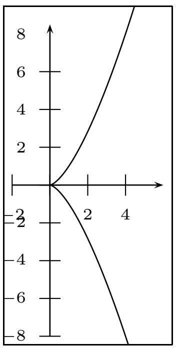
Dabei gilt $\hat{f}(\mathfrak{b}) \subseteq \mathfrak{a}$. Wir erhalten nach Satz 6.6.4 einen Morphismus $\tilde{f} : \mathbb{A}_k^n \to \mathbb{A}_k^m$, mit $(\tilde{f})^\# = \hat{f}$, und damit $\tilde{f}|_{V(\mathfrak{a})} = f$, also ein Diagramm

$$\begin{tikzcd} V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_k^n \arrow[d, "f"'] \arrow[d, shift left=8ex, "\tilde{f}"] \\ V(\mathfrak{b}) \subseteq \mathbb{A}_k^m \end{tikzcd}$$

Dies führt zu folgendem Satz:

$\boxed{\text{Satz 6.6.5.}}$ Seien W_1, W_2 affine Mengen über $k = \overline{k}$, $W_1 \in \mathbb{A}_k^n$, $W_2 \in \mathbb{A}_k^m$, $W_i = VI(W_i)$. Dann gilt

$$\mathrm{Mor}(W_1, W_2) = \left\{ f \in \mathrm{Abb}(W_1, W_2) \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists P_1, \cdots, P_m \in k[X_1, \cdots, X_n] : \\ f = (P_1|_{W_1}, \cdots, P_m|_{W_1}) \end{array} \right\}$$



$V(Y^2 - X^3)$

Beweis. Klar nach obiger Überlegung. □

Beispiel 6.6.5. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_k^1 &\xrightarrow{f} V(Y^2 - X^3) \\ t &\longmapsto (t^2, t^3) \end{aligned}$$

ist Morphismus, denn

(i) f ist komponentenweise polynomial

(ii) $\mathrm{im}(f) = V(Y^2 - X^3)$ ist altbekannt.

$\boxed{\text{Eigenschaften.}}$

(1) f ist abgeschlossen, sogar bijektiv und als Morphismus auch stetig.

(2) f ist bijektiv, stetig, abgeschlossen, also Homöomorphismus.

(3) f ist kein Isomorphismus, und überhaupt sind $V(Y^2 - X^3)$ und $\mathbb{A}_k^1$ nicht isomorph in $\underline{AM_k}$ (bzw. in $\underline{AAV_k}$).

Beweis.

(1) und (2) sind bekannt.

(3) Wir haben

$$f^\# : \underbrace{A[V(Y^2 - X^3)]}_{\cong k[X,Y]/(Y^2 - X^3)} \longrightarrow k[T]$$

mit $f^\#(\overline{X}) = T^2$, $f^\#(\overline{Y}) = T^3$, also

$$f^\# : A[V(Y^2 - X^3)] \xrightarrow{\sim} k[T^2, T^3] \subsetneqq k[T]$$

Das heißt, $f^\#$ ist zwar injektiv, aber nicht surjektiv, also kein k-Algebra-Isomorphismus. Nach Satz 6.6.4 ist also f kein Isomorphismus, sondern nur ein bijektiver Morphismus.

BEHAUPTUNG. $k[T]$ und $k[T^2, T^3]$ sind niemals isomorphe k-Algebren.

Beweis. $k[T^2, T^3]$ und $k[T]$ haben den gleichen Quotientenkörper $k(T)$. $k[T]$ ist faktoriell, also normal (ganz abgeschlossen im Quotientenkörper):

$$\overline{k[T]}^{k(T)} = k[T].$$

Aber wir haben $X^2 - T^2 \in k[T^2, T^3][X]$ als normiertes Polynom, mit Nullstelle T, also ist T ganz über $k[T^2, T^3]$, d.h.

$$\overline{k[T^2, T^3]}^{k(T)} = k[T].$$

Es ist also $k[T^2, T^3]$ nicht normal, womit die beiden k-Algebren nicht isomorph sein können. ☐

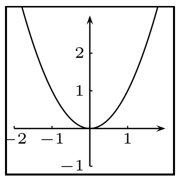
Damit sind auch $\mathbb{A}^1_k$ und $V(Y^2 - X^3)$ nicht-isomorphe k-Varietäten. ☐

Beispiel 6.6.6. Betrachten wir nun

$$\begin{aligned} f : \mathbb{A}^1_k &\longrightarrow V(Y - X^2) \\ t &\longmapsto (t, t^2) \end{aligned}$$

f ist bijektiv, polynomial, abgeschlossen, also Zariski-Homöomorphismus. Wir haben

$$\begin{aligned} f^\# : k[X,Y]/(Y - X^2) &\longrightarrow k[T] \\ \overline{X} &\longmapsto T \\ \overline{Y} &\longmapsto T^2 \end{aligned}$$

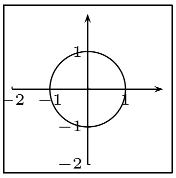


$V(Y - X^2)$

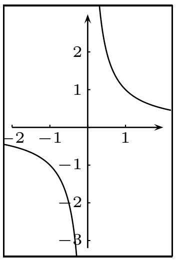
Es ist $f(\mathbb{A}^1_k) = \overline{f(\mathbb{A}^1_k)} = V(Y - X^2)$ und $A[V(Y - X^2)] \cong k[T, T^2] = k[T]$. Es ist also $f^\#$ ein k-Algebra-Isomorphismus, also insbesondere f ein Isomorphismus der affinen Varitäten $\mathbb{A}^1_k$ und $V(Y - X^2)$. Der Umkehr-Isomorphismus ist

$$\begin{aligned} f^{-1} = \pi_1 : V(Y - X^2) &\longrightarrow \mathbb{A}^1_k \\ (a, a^2) &\longmapsto a \end{aligned}$$

Beispiel 6.6.7. Betrachte $k = \mathbb{C}$ und



$V(X^2 + Y^2 - 1)$



$V(T \cdot U - 1)$

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^2 &\xrightarrow{f} \mathbb{C}^2 \\ V(X^2+Y^2-1) &\longrightarrow V(T\cdot U - 1) \\ (x,y) &\longmapsto (y+iy, y-iy) \end{aligned}$$

f ist sogar linearer Morphismus, mit Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & i \end{smallmatrix}\right) \in GL_2(\mathbb{C})$.

$\boxed{\text{Behauptung.}}$ f induziert einen $\mathbb{C}$-Isomorphismus zwischen dem Kreis $V(X^2 + Y^2 - 1)$ und der Hyperbel $V(T \cdot U - 1)$.

Beweis. (x, y) mit $x^2 + y^2 = 1$ geht über in

$$\begin{aligned} (u,v) &:= (x+iy, x-iy) \qquad \text{mit} \\ u \cdot v &= (x+iy)\cdot(x-iy) \\ &= x^2 + ixy - ixy - i^2y^2 \\ &= x^2 + y^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

umgekehrt geht (u, v) mit $u \cdot v = 1$ via f^{-1} über in

$$f^{-1}(u,v) = \left(\frac{u+v}{2}, -i\frac{u-v}{2}\right) =: (x,y),$$

wobei

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \frac{u^2+2uv+v^2}{4} - \frac{u^2-2uv+v^2}{4} \\ &= \frac{4uv}{4} = uv \\ &= 1. \end{aligned}$$

Es ist also $V(X^2 + Y^2 - 1) \cong V(U \cdot V - 1)$. □

$\boxed{\text{Satz 6.6.6.}}$ Seien (X, A), (Y, B) abstrakte affine algebraische k-Varietäten, $f \in \mathrm{Mor}(X, Y)$, $f^\# \in \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(B, A)$ der zugehörige Comorphismus. Dann gilt:

(1) f dominant $\Longleftrightarrow f^\#$ injektiv.

(2) $f^\#$ surjektiv $\Longleftrightarrow f : X \hookrightarrow Y$ ist abgeschlossene Einbettung.

Beweis.

(1) Wir kennen ja $\overline{f(X)}^Y = VI(f(X))$, wobei

$$\begin{aligned} I(f(X)) &= \{\varphi \in B \mid \varphi(f(x)) = 0 \forall x \in X\} \\ &= \left\{\varphi \in B \mid f^\#(\varphi)(x) = 0 \forall x \in X\right\} \\ &= \left\{\varphi \in B \mid f^\#(\varphi) = 0\right\} \\ &= \ker(f^\#) \end{aligned}$$

Daher haben wir

$$\begin{aligned} f \text{ dominant } &\iff \overline{f(X)}^Y = Y \iff V(\ker(f^\#)) = Y \\ &\underset{\text{HNS}}{\iff} \sqrt{\ker f^\#} = \operatorname{Nil} B \underset{\text{reduz.}}{\overset{B}{\iff}} \ker f^\# = (0) \iff f^\# \text{ injektiv.} \end{aligned}$$

(2) Sei $f^\#; B \to A$ surjektiv, dann haben wir die Faktorisierung:

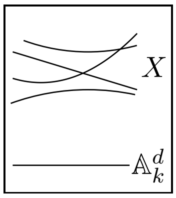
$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, two heads, "f^\#"] \arrow[d, two heads, "\pi"'] & A \\ B/\ker f^\# \arrow[ur, "\sigma^\#"', "\sim"] & \end{tikzcd}$$

Mit dem Äquivalenzsatz (6.6.4) ergibt sich daraus

$$\begin{tikzcd} Y & X \arrow[l, "f"'] \arrow[dl, "\sigma", "\sim"'] \\ V(\ker f^\#) \arrow[u, "j"] \arrow[r, equal] & \overline{f(X)}^Y \end{tikzcd}$$

Dabei ist $j^\# = \pi$ und σ ein Isomorphismus von X auf die (abgeschlossene) Teilmenge $\overline{f(X)}^Y \subseteq Y$. Also ist $f = j \circ \sigma$ eine abgeschlossene Einbettung. □

> **Satz 6.6.7.** *Geometrische Bedeutung der Noether-Normalisierung*
> Sei (X, A) eine abstrakte affine algebraische k-Varietät ($k = \overline{k}$) und $k \subseteq C \subseteq A$ mit $C \cong k[T_1, \cdots, T_d]$ eine Noether-Normalisierung von A. Dann existiert ein Morphismus $f : X \to \mathbb{A}_k^d$ mit:
>
> (1) f surjektiv
>
> (2) $f^\# : k[T_1, \cdots, T_d] \hookrightarrow A$ endliche Erweiterung
>
> (3) Die Fasern $f^{-1}(a)$ sind endlich für alle $a \in \mathbb{A}_k^d$, d.h. X ist endliche Überlagerung eines affinen Raumes der Dimension $d = \dim_{\text{Krull}}(A)$.



Beweis. $k \subseteq C \cong k[T_1, \cdots, T_d] \overset{j}{\hookrightarrow} A$ induziert einen Morphismus $X \xrightarrow{f} \mathbb{A}_k^q$ mit $f^\# = j$. Da j injektiv und ganze Erweiterung ist, ist f dominant (Satz 6.6.6) und abgeschlossen (Going-Up-Theorem, Satz 6.5.6), also surjektiv.

Ebenfalls aus dem Going-Up-Lemma ergab sich (das war irgendwann mal Bemerkung 5), dass für jedes $a \in \mathbb{A}_k^d$ die Menge der Urbilder $\mathfrak{M}_i \in \operatorname{Specm} A$ von $\mathfrak{m}_a \in \operatorname{Specm} k[T_1, \cdots, T_d]$ endlich ist, und damit auch die Faser in $X \cong \operatorname{Specm} A$. $\square$

6.7 Rationale Funktionenkörper, Garben und geringte Räume

Die Garbe der regulären Funktionen auf einer aaa-Varietät

Definition 6.26. *Sei (X, A) abstrakte affine algebraische k-Varietät, $k = \overline{k}$. Für alle $U \in \operatorname{Off}'(X) = \operatorname{Off}(X) \setminus \{\varnothing\}$ heißt*

$$\mathcal{O}_X^A(U) := \left\{ f \in \operatorname{Abb}(U, k) \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists \text{ Überdeckung } U = \bigcup_{i \in I} D(h_i), h_i \in A, \\ g_i \in A : f|_{D(h_i)} = \dfrac{g_i}{h_i} \end{array} \right\}$$

*die k-**Algebra der regulären Funktionen auf** U.*

Bemerkung. Es ist

$$\mathcal{O}_X^A(U) = \left\{ f \in \operatorname{Abb}(U, k) \;\middle|\; \begin{array}{c} \forall x \in U : \exists g, h \in A : \\ x \in D(g) \wedge f|_{D(g)} = \dfrac{g}{h} \end{array} \right\}$$

und, falls X noethersch ist, auch

$$= \left\{ f \in \operatorname{Abb}(U, k) \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists \text{ Überdeckung } U = \bigcup_{i=1}^{s} D(h_i), h_i \in A, \\ g_i \in A : f|_{D(h_i)} = \dfrac{g_i}{h_i} \end{array} \right\}$$

Bemerkung. $\mathcal{O}_X^A(U) \subseteq \operatorname{Abb}(U, k)$ ist k-Unteralgebra, und als Menge betrachtet auch $\mathcal{O}_X^A(U) \in \mathfrak{P}(\operatorname{Abb}(U, k)) \subset \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X \times k))$.

Definition 6.27. *Wir weiten die Definition auf alle offenen Mengen in X aus mittels*

$$\mathcal{O}_X^A(\varnothing) := (0) \subsetneq A$$

Fazit. Wir haben also eine Abbildung

$$\mathcal{O}_X^A : \operatorname{Off}'(X) \to \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X \times k))$$

mit den folgenden Eigenschaften:

$$\forall U \in \operatorname{Off}'(X) : \mathcal{O}_X^A(U) \subseteq \operatorname{Abb}(U, k) \text{ ist } k\text{-Unteralgebra.} \tag{6.1}$$

$$\forall U, V \in \operatorname{Off}'(X), U \subseteq V, \forall f \in \mathcal{O}_X^A(V) : f|_U \in \mathcal{O}_X^A(U). \tag{6.2}$$

$$\forall U \in \operatorname{Off}'(X), \forall (U_i)_i, U = \bigcup_i U_i, \forall (\varphi_i)_i \in \mathcal{O}_X^A(U_i) : \tag{6.3}$$
$$\left(\forall i, j : \varphi_i|_{U_i \cap U_j} = \varphi_j|_{U_i \cap U_j}\right) \Rightarrow \exists! \varphi \in \mathcal{O}_X^A(U) : \forall i : \varphi|_{U_i} = \varphi_i$$

Definition 6.28. $\mathcal{O}_X^A : \mathrm{Off}'(X) \to \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X \times k))$ *heißt auch* ***Garbe der regulären Funktionen*** *auf der abstrakten affinen algebraischen* k*-Varietät* (X, A).

$\boxed{\text{Satz 6.7.1.}}$ Sei $k = \overline{k}$, (X, A) abstrakte affine algebraische k-Varietät, $\mathcal{O}_X^A$ die Garbe der regulären Funktionen auf X bezüglich A. Dann gilt:

(1) $\forall g \in A \setminus \{0\} : \mathcal{O}_X^A(D(g)) \cong A_g = \left\{\frac{f}{g^n} \mid f \in A, n \in \mathbb{N}\right\}$

(2) $\mathcal{O}_X^A(X) \cong A$

Beweis.

(2) ergibt sich aus (1), da $X = D(1)$, also

$$\mathcal{O}_X^A(X) = \mathcal{O}_X^A(D(1)) \cong A_1 = A.$$

(1) Sei $D(g)$ offene Basismenge in X, $g \neq 0$ (d.h. $D(g) \neq \varnothing$). Sei $\varphi \in \mathcal{O}_X^A(D(g))$, also $\varphi : D(g) \to k$ mit Überdeckung $D(g) = \bigcup_{i=1}^s D(g_i)$ derart, dass $\varphi|_{D(g_i)} = \frac{f(i)}{g(i)}$, $f_i, g_i \in A$.

Für $i, j \in \{1, \cdots, s\}$ ist dann auf $D(g_i) \cap D(g_j) = D(g_i \cdot g_j)$ also $f_i \cdot g_j = f_j \cdot g_i$, somit ist $g_i \cdot g_j \cdot (f_i \cdot g_j - f_j \cdot g_i) = 0$ auf ganz X, insbesondere auf $D(g)$.

Setze $q_i := g_i^2$, $p_i := f_i \cdot g_i \forall i \in \{1, \cdots, s\}$. Dann ergibt sich:

(a) $D(q_i) = D(g_i^2) = D(g_i)$, und auf dieser Menge ist auch

$$\varphi|_{D(q_i)} = \frac{f_i}{g_i} = \frac{f_i \cdot g_i}{g_i^2} = \frac{p_i}{q_i}$$

(b) $q_j \cdot p_i = q_i \cdot p_i$ für alle $i, j \in \{1, \cdots, s\}$ gilt auf ganz X, speziell auf $D(g)$. Nun war

$$D(g) = \bigcup_{i=1}^s D(q_i),$$

d.h.

$$\begin{aligned} V(g) &= \bigcap_{i=1}^s V(q_i) \\ &= V\left(\sum_{i=1}^s (q_i)\right) \end{aligned}$$

und nach HNS

$$\sqrt{(g)} = \sqrt{\sum_{i=1}^s (q_i)}.$$

Das heißt, es existiert $\nu \in \mathbb{N}$ mit

$$g^\nu \in \sum_{i=1}^{s} (q_i),$$

also

$$g^\nu = \sum_{i=1}^{s} h_i \cdot q_i \qquad (h_i \in A \forall i \in \{1, \cdots, s\}).$$

Multiplizieren mit p_j ergibt für alle $j \in \{1, \cdots, s\}$:

$$\begin{aligned} g^\nu \cdot p_j &= \sum_{i=1}^{s} h_i q_i \cdot p_j \\ &= \sum_{i=1}^{s} h_i p_i \cdot q_j \\ &= q_j \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{s} h_i \cdot p_i}_{=:h \in A} \end{aligned}$$

Das ergibt dann (auf dem Bereich, wo $q_j \neq 0$ ist:)

$$\varphi|_{D(q_j)} = \frac{p_i}{q_i} = \frac{h}{g^\nu} \qquad \forall j \in \{1, \cdots, s\}\,.$$

Zusammensetzen ergibt auf ganz $D(g)$:

$$\varphi = \frac{h}{g^\nu} \in A_g$$

Wir haben also $\mathcal{O}_X^A(D(g)) \subseteq A_g$, und $A_g \subseteq \mathcal{O}_X^A(D(g))$ gilt ja schon nach Definition, also $\mathcal{O}_X^A(D(g)) = A_g$. $\square$

Garben

Diesen Begriff der *Garbe* wollen wir jetzt verallgemeinert definieren:

Definition 6.29. *Sei $X \neq \varnothing$ topologischer Raum, $E \neq \varnothing$ Menge. Eine **Garbe von E-wertigen Funktionen** auf X ist eine Abbildung $\mathcal{F} : \mathrm{Off}'(X) \to \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X \times E))$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(1) $\forall U \in \mathrm{Off}'(X) : \mathcal{F}(U) \subseteq \mathrm{Abb}(U, E) \subset \mathfrak{P}(X \times E)$

*(2) (**Einschränkungsaxiom**)* $\forall U, V \in \mathrm{Off}'(X)$ *mit* $U \subseteq V$, $\forall \varphi \in \mathcal{F}(V)$ *gilt:*

$$\varphi|_U \in \mathcal{F}(U).$$

(3) ***(Verklebungsaxiom)*** $\forall U \in \mathrm{Off}'(X)$, *für alle offenen Überdeckungen* $U = \bigcup_{i\in I} U_i$, $\forall (\varphi_i)_{i\in I} \in \bigtimes_{i\in I} \mathcal{F}(U_i)$ *mit* $\big(\forall (i,j) \in I^2 : \varphi_i|_{U_i\cap U_j} = \varphi_j|_{U_i\cap U_j}\big)$ *gilt:*

$$\exists! \varphi \in \mathcal{F}(U) : \forall i \in I : \varphi|_{U_i} = \varphi_i.$$

Bemerkung. Ein paar Übersetzungen:[7]

de	Garbe	Garben
en	sheaf	sheaves
eo	garbo	garboj
fr	faisceau	faisceaux

Beispiel 6.7.1. Für beliebige (X, E) (X topologischer Raum, E Menge) ist

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathrm{Off}'(X) &\to \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X, E)) \\ U &\mapsto \mathrm{Abb}(U, E) \end{aligned}$$

trivialerweise eine Garbe E-wertiger Funktionen. (Dies ist die „größte" solche Garbe: bei allen anderen sind die Funktionswerte Teilmengen der Funktionswerte dieser Garbe.)

Beispiel 6.7.2. Sei X topologischer Raum, dann ist

$$\begin{aligned} \mathcal{C} : \mathrm{Off}'(X) &\to \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X \times \mathbb{R})) \\ \mathcal{C}(U) &:= \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\} \end{aligned}$$

eine Garbe $\mathbb{R}$-wertiger Funktionen auf X, die **Garbe der stetigen reellen Funktionen auf** X.

Beispiel 6.7.3. Sei X differenzierbare Mannigfaltigkeit, $p \in \mathbb{N}$, dann bildet

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^p : \mathrm{Off}'(X) &\to \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X \times \mathbb{R})) \\ \mathcal{C}^p(U) &:= \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \ p\text{-fach stetig differenzierbar}\} \end{aligned}$$

eine Garbe $\mathbb{R}$-wertiger Funktionen auf X.

Beispiel 6.7.4. Ist X komplexe Mannigfaltigkeit, dann ist

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X : \mathrm{Off}'(X) &\to \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X \times \mathbb{C})) \\ U &\mapsto \{f : U \to \mathbb{C} \mid f \text{ holomorph}\} \end{aligned}$$

eine Garbe $\mathbb{C}$-wertiger Funktionen auf X.

Beispiel 6.7.5. Sei X topologischer Raum, E Menge.

$$\begin{aligned} \mathcal{G} : \mathrm{Off}'(X) &\to \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X \times E)) \\ \mathcal{G}(U) &:= \{f : U \to E \mid f \text{ konstant}\} \end{aligned}$$

ist eine Garbe nur, wenn X irreduzibel ist. Denn ansonsten gibt es disjunkte offene Mengen U_1 und U_2, und die Funktionen $\mathrm{const}_1 : U_1 \to \mathbb{R}$ und $\mathrm{const}_2 : U_2 \to \mathbb{R}$ lassen sich nicht zu einer konstanten Funktion auf $U_1 \dot\cup U_2$ verkleben.

Hingegen bilden die E-wertigen *lokal-konstanten* Funktionen auf X stets eine Garbe E-wertiger Funktionen.

[7] Die Esperanto-Übersetzung habe ich (P.E.) hinzugefügt, die anderen hat Herr Kleinert schon angeschrieben. Es waren (wenn ich mich richtig erinnere) auch welche in russisch und italienisch dabei, aber die sind in der Mitschrift nicht überliefert ...

$\boxed{\text{SATZ 6.7.2.}}$ *Kriterien für die Konstruktion von Garben*
Sei $X \neq \varnothing$ topologischer Raum, $B_X \subseteq \mathrm{Off}'(X)$ topologische Basis, $E \neq \varnothing$ Menge und

$$\mathcal{F}' : B_X \to \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X \times E))$$

eine Abbildung, in denen (1), (2), (3) aus Definition 6.29 für B_X statt $\mathrm{Off}'(X)$ gelten.
Dann existiert genau eine Garbe E-wertiger Funktionen auf X,

$$F : \mathrm{Off}'(X) \to \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X \times E)),$$

mit $F(U) = F'(U)$ für alle $U \in B_X$.

Beweis.

(a) Eindeutigkeit: Haben $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ die obige Eigenschaft, so gibt es für $U \in \mathrm{Off}'(X)$ aufgrund der Basiseigenschaft eine Überdeckung $U = \bigcup_{i \in I} V_i$, $V_i \in B_X$, und wegen des Verklebungsaxioms haben wir dann

$$\mathcal{F}(U) = \left\{ \varphi : U \to E \mid \exists \bigcup_i V_i, V_i \in B_X : \varphi|_{V_i} \in \mathcal{F}'(V_i) \right\} = \mathcal{G}(U),$$

also ist $\mathcal{F}$ aus $\mathcal{F}'$ eindeutig bestimmt.

(b) Existenz: Wie definieren einfach

$$\mathcal{F}(U) = \left\{ \varphi : U \to E \mid \exists \bigcup_i V_i, V_i \in B_X : \varphi|_{V_i} \in \mathcal{F}'(V_i) \right\}$$

und rechnen jetzt die Garben-Axiome (2) und (3) leicht nach. □

Bemerkung.

(1) Für eine abstrakte affine algebraische k-Varietät (X, A) hätte man mit Hilfe von Satz 6.7.2 und der Definition $\mathcal{O}_X^A(D(g)) := A_g$ für $g \in A \setminus \{0\}$ die Garbe $\mathcal{O}_X^A$ ebenfalls definieren können.

(2) Dieser Ansatz ist besonders verallgemeinerungsfähig:

Beispiel 6.7.6. Sei R Ring, $X := \mathrm{Spec}(R)$ mit Zariski-Topologie. Dann setzt man $\mathcal{O}_X(D(f)) := R_f$ für $f \in R \setminus \{0\}$ und erhält dann

$$\mathcal{O}_X(U) = \varprojlim_{D(f) \subseteq U} R_f.$$

Cartansche Räume

Definition 6.30. *Sei $E \neq \varnothing$ beliebige Menge. Ein Paar $(X, \mathcal{F})$ heißt* ***Cartanscher*** ***E-Raum****, falls X ein topologischer Raum und $\mathfrak{F}$ eine Garbe von E-wertigen Funktionen auf X ist.*

Beispiel 6.7.7. $(X, \mathcal{O}_X^A)$ für eine abstrakte affine algebraische k-Varietät (X, A) (mit $k = \overline{k}$).

Beispiel 6.7.8. $(X, \mathcal{O}_X)$ für eine komplexe Mannigfaltigkeit X mit ihrer Garbe der holomorphen Funktionen.

Beispiel 6.7.9. $(X, \mathbb{Z})$ für einen irreduziblen topologischen Raum X, $\mathbb{Z}$ aufgefasst als Garbe der konstanten, ganzzahligen Funktionen auf X.

Definition 6.31. *Seien $(X, \mathcal{F})$, $(Y, \mathcal{G})$ Cartansche E-Räume. Ein* ***Morphismus*** *$(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{G})$ ist*

(1) eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ mit

(2) $\forall V \in \mathrm{Off}'(Y)$ gilt für die induzierte „Zurückziehungs"-Abbildung

$$f_V^{\#} : \mathcal{G}(V) \longrightarrow \mathrm{Abb}(f^{-1}(V), E)$$
$$\varphi \longmapsto \varphi \circ f|_{f^{-1}(V)}$$

die Inklusion $f_V^{\#}(\mathcal{G}(V)) \subseteq \mathcal{F}(f^{-1}(V))$.

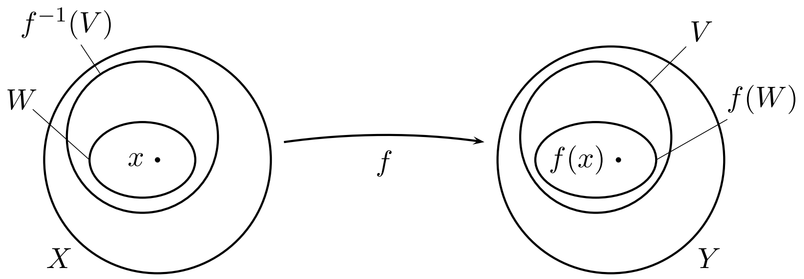
Bemerkung. Die Cartanschen E-Räume nebst den oben definierten Morphismen zwischen solchen bilden eine Kategorie $\underline{\mathrm{Cart}}_E$. $\boxed{\underline{\mathrm{Cart}}_E}$

$\boxed{\text{Satz 6.7.3.}}$ *Charakterisierungssatz für Morphismen Cartanscher Räume*

Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ Cartansche E-Räume und seien B_X, B_Y topologische Basen von X bzw. Y. Sei $f \in \mathrm{Abb}(X, Y)$.
Dann gilt $f \in \mathrm{Mor}_{\underline{\mathrm{Cart}}_E}((X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y))$ genau dann, wenn

$$\forall x \in X, \forall V \in B_Y \text{ mit } f(x) \in V : \exists W \in B_X :$$
$$x \in W \subseteq f^{-1}(V) \text{ und } f^{\#}|_V(\mathcal{O}_Y(V)) \subseteq \mathcal{O}_X(W).$$

Das heißt, f ist für alle x lokal ein Morphismus:



Beweis. relativ klar, aber technisch (Übung). □

$\boxed{\text{Bemerkung 1.}}$ Seien (X, A) und (Y, B) zwei abstrakte affine algebraische k-Varietäten, $k = \overline{k}$ und $(X, \mathcal{O}_X^A)$, $(Y, \mathcal{O}_Y^B)$ die assoziierten Cartanschen k-Räume, $f : X \to Y$ Abbildung. Dann gilt:

$$f \in \mathrm{Mor}_{\underline{AAV_k}}((X, A), (Y, B)) \iff f \in \mathrm{Mor}_{\underline{\mathrm{Cart}_k}}((X, \mathcal{O}_X^A), (Y, \mathcal{O}_Y^B)).$$

$\boxed{\text{Korollar.}}$ Der kanonische kovariante Funktor

$$\begin{aligned} \varkappa : \underline{AAV_k} &\longrightarrow \underline{\mathrm{Cart}_k} \\ (X, A) &\longmapsto (X, \mathcal{O}_X^A) \\ \Big((X, A) \xrightarrow{f} (Y, B)\Big) &\longmapsto \Big((X, \mathcal{O}_X^A) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{O}_Y^B)\Big) \end{aligned}$$

ist eine **volle Einbettung**, d.h. injektiv auf Objekten und volltreu.

Beweis der Bemerkung.

⇐: klar, denn es ist

$$f^\#(B) = f^\#(\mathcal{O}_Y^B(Y)) \subseteq \mathcal{O}_X^A(f^{-1}(Y)) = \mathcal{O}_X^A(X) = A,$$

d.h. $f^\#(B) \subseteq A$, also $f \in \mathrm{Mor}_{\underline{AAV_k}}$.

⇒: Ist $f : (X, A) \to (Y, B)$ Morphismus von abstrakten k-Varietäten, so ist f stetig und $f^\#(B) \subseteq A$. Für $\varphi \in B \setminus \{0\}$ ergibt sich dann durch Lokalisierung die Abbildung

$$\begin{aligned} f_\varphi^\# : B_\varphi &\longrightarrow A_{f^\#(\varphi)} \\ \frac{\psi}{\varphi^n} &\longmapsto \frac{f^\#(\psi)}{f^\#(\varphi)^n} \end{aligned}$$

d.h.

$$f_\varphi^\# : \mathcal{O}_Y^B(D(\varphi)) \longrightarrow \mathcal{O}_X^A(D(f^\#(\varphi)))$$

Wir erhalten also

$$f|_{D(f^\#(\varphi))} = f|_{f^{-1}(D(\varphi))} : D(f^{-1}(\varphi)) \longrightarrow D(\varphi)$$

als „lokalen“ Morphismus in $\underline{\mathrm{Cart}_k}$. Nach Satz 6.7.3 ist dann also

$$f \in \mathrm{Mor}_{\underline{\mathrm{Cart}_k}}((X, \mathcal{O}_X^A), (Y, \mathcal{O}_Y^B)).$$ □

Definition 6.32. *Wir bezeichnen mit* $\underline{\mathrm{Cart}}_k^{\mathrm{aff}}$ *die volle Unterkategorie von* $\underline{\mathrm{Cart}}_k$, *deren Objekte die sogenannten* ***affinen Cartanschen*** k***-Räume*** *sind, d.h.:* $\boxed{\underline{\mathrm{Cart}}_k^{\mathrm{aff}}}$

$$(X, \mathcal{O}_X) \in \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{Cart}}_k^{\mathrm{aff}}) :\Leftrightarrow \exists (Z, C) \in \mathrm{obj}(\underline{AAV}_k) : (X, \mathcal{O}_X) \cong_{\underline{\mathrm{Cart}}_k} (Z, \mathcal{O}_Z^C)$$

Bemerkung. Dies ist äquivalent zur folgenden Bedingung:

$$\ldots \Leftrightarrow \exists A \in \mathrm{obj}(\underline{k\text{-}\mathrm{Alg}}^{\mathrm{ee,red}}) : (X, \mathcal{O}_X) \cong (\mathrm{Specm}\, A, \mathcal{O}_{\mathrm{Specm}\, A})$$

Bemerkung. Der Funktor

$$\begin{aligned} \tilde{\varkappa} : \underline{AAV}_k &\to \underline{\mathrm{Cart}}_k^{\mathrm{aff}} \subseteq \underline{\mathrm{Cart}}_k \\ \tilde{\varkappa}((X, A)) = \varkappa((X, A)) &= (X, \mathcal{O}_X^A) \\ \tilde{\varkappa}(f) &= f \end{aligned}$$

hat einen „pseudoinversen Funktor“

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{\varkappa}} : \underline{\mathrm{Cart}}_k^{\mathrm{aff}} &\to \underline{AAV}_k \\ (X, \mathcal{O}_X) &\mapsto (X, \mathcal{O}_X(X)) \\ f &\mapsto f \end{aligned}$$

Dabei gibt es für $(X, \mathcal{O}_X)$ immer eine k-Algebra A und einen Isomorphismus

$$(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow[\theta]{\sim} (\mathrm{Specm}\, A, \mathcal{O}_{\mathrm{Specm}\, A}),$$

also ist $\mathcal{O}_X(X) \cong \mathcal{O}_{\mathrm{Specm}\, A}(\mathrm{Specm}\, A) = A$ endlich erzeugt, reduziert.

Das heißt, $\tilde{\varkappa}$ und $\tilde{\tilde{\varkappa}}$ vermitteln eine Äquivalenz zwischen den Kategorien $\underline{AAV}_k$ und $\underline{\mathrm{Cart}}_k^{\mathrm{aff}}$.

Fazit. Die folgenden Kategorien sind äquivalent:

$$\underline{AM}_k, \quad \underline{AAV}_k, \quad \underline{k\text{-}\mathrm{Alg}}^{\mathrm{ee,red}}, \quad \underline{\mathrm{Cart}}_k^{\mathrm{aff}}$$

und in jeder dieser Kategorien kann man arbeiten sowie je nach Bedarf zwischen ihnen hin- und herpendeln.

Induzierte Cartansche Räume

Definition 6.33. *Sei* $k = \overline{k}$, $(X, \mathcal{O}_X) \in \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{Cart}}_k)$ *und* $\varnothing \neq Z \subseteq X$, Z *betrachtet mit der Relativtopologie.*

Dann sei für alle $W \in \mathrm{Off}'(Z)$, *etwa* $W = Z \cap U_0$, $U_0 \in \mathrm{Off}'(X)$ *definiert:*

$$\mathcal{O}_X|_Z(W) := \left\{ \varphi \in \mathrm{Abb}(W, k) \;\middle|\; \begin{array}{r} \forall x \in W : \exists U \in \mathrm{Off}(X), \exists \psi \in \mathcal{O}_X(U) : \\ x \in U, \varphi|_{U \cap W} = \psi|_{U \cap W} \end{array} \right\}$$

Die so definierte Garbe k*-wertiger Funktionen* $\mathcal{O}_X|_Z =: \mathcal{O}_Z$ *heißt* ***Einschränkung der Strukturgarbe*** $\mathcal{O}_X$ ***auf die Teilmenge*** $Z \subseteq X$. $\boxed{\mathcal{O}_X|_Z}$

Der Cartansche Raum $(Z, \mathcal{O}_Z)$ *heißt* ***Cartanscher Unterraum*** *von* $(X, \mathcal{O}_X)$.

Bemerkung.

(1) Ist $Z' \subseteq Z \subseteq X$, $(X, \mathcal{O}_X) \in \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{Cart}}_k)$, so gilt

$$\mathcal{O}_X|_{Z'} = (\mathcal{O}_X|_Z)|_{Z'}$$

(2) $(Z, \mathcal{O}_Z) \xhookrightarrow{\mathrm{incl}} (X, \mathcal{O}_X)$ ist Morphismus Cartanscher k-Räume.

(3) Seien $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y) \in \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{Cart}}_k)$, und $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ offen überdeckt, $f_i : (U_i, \mathcal{O}_{U_i}) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ Morphismen $\forall i \in I$, mit $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$, dann

$$\exists! f \in \mathrm{Mor}_{\underline{\mathrm{Cart}}_k}((X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)) \quad \text{mit} \quad f|_{U_i} = f_i.$$

Das heißt, auch für Morphismen haben wir so eine Verklebungseigenschaft.

Prävarietäten

Definition 6.34. *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ Cartanscher k-Raum derart, dass $\forall U \in \mathrm{Off}'(X)$ die Menge $\mathcal{O}_X(U) \subseteq \mathrm{Abb}(U, k)$ schon eine k-Unteralgebra ist. Dann nennen wir $(X, \mathcal{O}_X)$ einen **geringten Raum**.*

Beispiel 6.7.10. Alle $(X, \mathcal{O}_X) \in \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{Cart}}_k^{\mathrm{aff}})$ sind geringte Räume.

Definition 6.35. *Ein geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt eine k-**Prävarietät**, falls*

(1) X ist als topologischer Raum kompakt.

(2) Es existiert eine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, so dass $(U_i, \mathcal{O}_{U_i}) \in \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{Cart}}_k^{\mathrm{aff}})$ für alle $i \in I$, d.h. $(U_i, \mathcal{O}_{U_i}) \cong_{\underline{\mathrm{Cart}}^{\mathrm{aff}}} (\mathrm{Specm}\, A_i, \mathcal{O}_{\mathrm{Specm}\, A_i})$ mit endlich erzeugten, irreduziblen k-Algebren A_i.

Bemerkung.

(a) Als äquivalente Definition kann statt (1) auch „X noethersch" verwendet werden (mit gleichem (2)), oder direkt: „X besitzt eine endliche Überdeckung $X = \bigcup_{i=1}^{s} U_i$, so dass $(U_i, \mathcal{O}_{U_i}) \in \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{Cart}}_k^{\mathrm{aff}})$".

(b) Jeder *affine* Cartansche k-Raum ist trivialerweise eine k-Prävarietät.

Beispiel 6.7.11. $\mathbb{A}_k^2 \setminus \{0\} = D(X_1) \cup D(X_2)$ ist k-Prävarietät, denn $D(X_1)$ und $D(X_2)$ sind offene affine Cartansche Unterräume von $(\mathbb{A}_k^2, \mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^2})$, mit $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^2} = k[X_1, X_2]$. Es ist dabei für $U \subseteq \mathbb{A}_k^2 \setminus \{0\}$

$$\mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^2 \setminus \{0\}}(U) = \mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^2}(U).$$

Aber $\mathbb{A}_k^2 \setminus \{0\}$ ist nicht affin, wie der folgende Satz zeigt.

$\boxed{\underline{\mathrm{PreVar}}_k}$ **Definition 6.36.** *Die volle Unterkategorie der Prävarietäten in $\underline{\mathrm{Cart}}_k$ heißt $\underline{\mathrm{PreVar}}_k$.*

$\boxed{\text{Satz 6.7.4.}}$ *(Charakterisierung affiner k-Varietäten (= affine Cartan-Räume) innerhalb der k-Prävarietäten)*
Sei $(X, \mathcal{O}_X) \in \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{PreVar}_k})$ eine k-Prävarietät. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(a) $(X, \mathcal{O}_X) \in \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{Cart}_k^{\mathrm{aff}}})$, d.h. $(X, \mathcal{O}_X)$ ist affin.

(b) $\forall (Y, \mathcal{O}_Y) \in \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{PreVar}_k})$ ist die kanonische Abbildung

$$\begin{aligned} \square^\# : \mathrm{Mor}_{\underline{\mathrm{PreVar}_k}}(Y, X) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(\mathcal{O}_X(X), \mathcal{O}_Y(Y)) \\ f &\longmapsto \begin{pmatrix} f^\# : \mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_Y(Y) \\ \varphi \mapsto \varphi \circ f \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bijektiv und $\mathcal{O}_X(X)$ ist endlich erzeugte k-Algebra.

(c) Es ist $\mathcal{O}_X(X)$ eine endlich erzeugte k-Algebra und die dann existierende kanonische Abbildung

$$\begin{aligned} \square^\# : \mathrm{Mor}_{\underline{\mathrm{PreVar}_k}}(\mathrm{Specm}\, \mathcal{O}_X(X), X) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(\mathcal{O}_X(X), \mathcal{O}_X(X)) \\ f &\longmapsto f^\# \end{aligned}$$

ist bijektiv.

Beweis.

(a) ⇒ (b): Sei $(X, \mathcal{O}_X) = (X, \mathcal{O}_X^A)$ affin. Dann ist $\mathcal{O}_X(X) = A$ endlich erzeugt. Sei Y eine beliebige k-Prävarietät, etwa $Y = \bigcup_{i=1}^s U_i$, $U_i \in \mathrm{Off}'(Y)$, $(U_i, \mathcal{O}_Y|_{U_i})$ affin $\forall i$. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{Mor}_{\underline{\mathrm{PreVar}_k}}(Y, X) &\xrightarrow{\square^\#} \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(\mathcal{O}_X(X), \mathcal{O}_Y(Y)) \\ f &\longmapsto f^\# \end{aligned}$$

kanonisch existent, aufgrund der Eigenschaften von Morphismen Cartanscher Räume.

Zu zeigen bleibt, dass $\square^\#$ bijektiv ist. Sei $f \in \mathrm{Mor}_{\underline{\mathrm{PreVar}_k}}(Y, X)$. Dann sind

$$f_i := f|_{U_i} : (U_i, \mathcal{O}_{U_i}) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$$

ebenfalls Morphismen für alle i. Die Inklusionen $\nu_i : U_i \hookrightarrow Y$ induzieren außerdem Homomorphismen $\nu_i^\# : \mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_{U_i}(U_i)$. Wir erhalten ein kommutatives

Diagramm

$$\begin{tikzcd}
f \arrow[rr, mapsto] & & (f|_{U_i})_{i\in I} = (f_i)_{i\in I} \\
\operatorname{Mor}_{\underline{\mathrm{PreVar}_k}}(X,Y) \arrow[rr, tail, "\vartheta"'] \arrow[d, "\square^{\#}"'] & & \bigtimes_{i=1}^{s} \operatorname{Mor}_{\underline{\mathrm{PreVar}_k}}(U_i,X) \arrow[d, "\wr\ \theta"] \\
\operatorname{Hom}_{k\text{-Alg}}(\mathcal{O}_X(X),\mathcal{O}_Y(Y)) \arrow[rr, "\left(\hom(\nu_i^{\#})\right)_{i=1}^{s}"'] & & \bigtimes_{i=1}^{s} \operatorname{Hom}_{k\text{-Alg}}(\mathcal{O}_X(X),\mathcal{O}_{U_i}(U_i))
\end{tikzcd}$$

Die Bijektivität von $\theta = \bigtimes_{i=1}^{s} \square_i^{\#}$, ergibt sich aus der Bijektivität der einzelnen

$$\square_i^{\#} : \operatorname{Mor}(U_i, X) \to \operatorname{Hom}_{k\text{-Alg}}(\mathcal{O}_X(X), \mathcal{O}_{U_i}(U_i)),$$

welche ja aufgrund der Affinität von U_i und X bekannt ist. Damit haben wir eine injektive Abbildung

$$\theta \circ \vartheta = \left(\hom(\nu_i^{\#})\right)_{i=1}^{s} \circ \square^{\#}$$

also ist auch $\square^{\#}$ injektiv.

Sei nun $\zeta \in \operatorname{Hom}_{k\text{-Alg}}(\mathcal{O}_X(X), \mathcal{O}_Y(Y))$. Betrachten wir (für jedes $i \in \{1, \cdots, s\}$)

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(X) \arrow[r, "\zeta"] \arrow[rr, bend right, "\tilde{\zeta}_i"'] & \mathcal{O}_Y(Y) \arrow[r, "\nu_i^{\#}"] & \mathcal{O}_Y|_{U_i}(U_i) = \mathcal{O}_{U_i}(U_i) = A_i
\end{tikzcd}$$

$$(\text{mit } \operatorname{Specm} A_i \cong U_i)$$

Es sind U_i und X affin, also ist $\tilde{\zeta}$ induziert von einem Morphismus in $\underline{\mathrm{Cart}_k^{\mathrm{aff}}}$, etwa $\zeta_i : U_i \to X$. Da $Y = \bigcup_{i=1}^{s} U_i$ affin überdeckt ist, gilt für alle (i, j):

$$\zeta_i|_{U_i \cap U_j} = \zeta_j|_{U_i \cap U_j},$$

da entsprechendes für die $\tilde{\zeta}_i$ und $\tilde{\zeta}_j$ aufgrund ihrer Konstruktion galt. Damit verkleben sich die ζ_i zu einem $\check{\zeta} : Y \to X$ mit $\check{\zeta}^{\#} = \zeta$. Also ist $\square^{\#}$ auch surjektiv, also bijektiv.

(b) ⇒ (c): Sei also $\mathcal{O}_X(X)$ endlich erzeugte k-Algebra und

$$\square^{\#} : \operatorname{Mor}_{\underline{\mathrm{PreVar}_k}}(Y, X) \to \operatorname{Hom}_{k\text{-Alg}}(\mathcal{O}_X(X), \mathcal{O}_Y(Y))$$

stets bijektiv für alls k-Prävarietäten $(Y, \mathcal{O}_Y)$. Mit $Y := \operatorname{Specm} \mathcal{O}_X(X)$ erhalten wir speziell die Bijektion

$$\operatorname{Mor}_{\underline{\mathrm{PreVar}_k}}(\operatorname{Specm}(\mathcal{O}_X(X)), X) \xrightarrow[\square^{\#}]{\sim} \operatorname{Hom}_{k\text{-Alg}}(\mathcal{O}_X(X), \mathcal{O}_X(X))$$

(c) $\Rightarrow$ (a): Sei also $\mathcal{O}_X(X)$ endlich erzeugte k-Algebra und die Bijektion

$$\mathrm{Mor}_{\underline{\mathrm{PreVar}}_k}(\mathrm{Specm}(\mathcal{O}_X(X)), X) \xrightarrow[\square^\#]{\sim} \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(\mathcal{O}_X(X), \mathcal{O}_X(X)).$$

Da insbesondere $\mathrm{id}_{\mathcal{O}_X(X)} \in \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(\mathcal{O}_X(X), \mathcal{O}_X(X))$ ist, hat dieses genau ein Urbild, nennen wir es f:

$$\begin{aligned} f &\longleftarrow \mathrm{id}_{\mathcal{O}_X(X)} \\ f^\# &= \mathrm{id}_{\mathcal{O}_X(X)} \end{aligned}$$

Weil id ein Isomorphismus ist, ist also auch $f : \mathrm{Specm}\, \mathcal{O}_X(X) \xrightarrow{\sim} X$ einer, d.h. X ist affin. $\square$

Beispiel 6.7.12. Sei $n \geq 2$, $(X, \mathcal{O}_X) := (\mathbb{A}^n \setminus \{0\}, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n \setminus \{0\}})$. Dann haben wir die offene Überdeckung $X = \bigcup_{i=1}^n D(X_i)$ und $(D(X_i), \mathcal{O}_{D(X_i)})$ ist der Cartansche Raum zu $(D(X_i), k[X_1, \cdots, X_n]_{X_i})$. Wir berechnen die Algebra der globalen regulären Funktionen auf $X = \mathbb{A}^n \setminus \{0\}$:

Ist $\varphi \in \mathcal{O}_X(X)$, so ist $\varphi|_{D(X_i)} \in \mathcal{O}_X(D(X_i)) = k[X_1, \cdots, X_n]_{X_i}$, also $\varphi|_{D(X_i)} = \frac{\tilde{g}_i}{X_i^{m_i}}$, mit $g_i \in k[X_1, \cdots, X_n]$, für alle $i \in \{1, \cdots, n\}$. Durch $m := \max_i m_i$, $g_i := \tilde{g}_i \cdot X_i^{m-m_i}$ erhalten wir $\varphi|_{D(X_i)} = \frac{g_i}{X_i^m}$. Dies ergibt für (i, j):

$$\begin{aligned}
& \frac{g_i}{X_i^m} = \frac{g_j}{X_j^m} && \text{auf } D(X_i) \cap D(X_j) = D(X_j \cdot X_j) \\
\Rightarrow\quad & X_j^m \cdot g_i = X_i^m \cdot g_j && \text{auf } D(X_i) \cap D(X_j) \\
\Rightarrow\quad & X_j^{m+1} \cdot X_i \cdot g_i = X_i^{m+1} \cdot X_j \cdot g_j && \text{auf } \mathbb{A}_k^n \text{ (d.h. in } k[X_1, \cdots, X_n]) \\
\xrightarrow[\text{faktoriell}]{k[X_1, \cdots, X_n]}\quad & X_j^m \cdot g_i = X_i^m \cdot g_j && \text{und } X_j^m | g_j, X_i^m | g_i \\
\Rightarrow\quad & \varphi|_{D(X_i)} = \frac{g_i}{X_i^m} =: h_i \in k[X_1, \cdots, X_n], \\
& h_i - h_j = 0 && \text{auf } \underbrace{D(X_i \cdot X_j)}_{\text{offen, dicht}} \subseteq \mathbb{A}^n \\
\Rightarrow\quad & h_i = h_j =: h \in k[X_1, \cdots, X_n] \quad \forall i, j \in \{1, \cdots, n\}
\end{aligned}$$

Da umgekehrt trivialerweise jedes Polynom auch eine globale reguläre Funktion ist, gilt

$$\Rightarrow \quad \mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^n \setminus \{0\}}(\mathbb{A}_k^n \setminus \{0\}) = k[X_1, \cdots, X_n] = \mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^n}(\mathbb{A}_k^n).$$

Nehmen wir nun an, $\mathbb{A}_k^n \setminus \{0\}$ wäre affin, dann hätten wir

$$\begin{array}{cc}
\mathrm{Mor}_{\underline{\mathrm{PreVar}}_k}(\mathbb{A}_k^n, \mathbb{A}_k^n \setminus \{0\}) & f \\
\Big\downarrow \wr\, \square^\# & \Big\uparrow \\
\mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(k[X_1, \cdots, X_n], k[X_1, \cdots, X_n]) & \mathrm{id} \\
\Big\uparrow \wr\, \square^\# & \Big\downarrow \\
\mathrm{Mor}_{\underline{\mathrm{PreVar}}_k}(\mathbb{A}^n \setminus \{0\}, \mathbb{A}^n) & g
\end{array}$$

Wir haben also $f^\# = \mathrm{id} = g^\#$, damit $(g \circ f)^\# = \mathrm{id}$ und $(f \circ g)^\# = \mathrm{id}$, mithin $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{A}_k^n}$, $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{A}^n \setminus \{0\}}$, also f und g zueinander inverse Isomorphismen von k-Varietäten.

Für $g : \mathbb{A}_k^n \setminus \{0\} \to \mathbb{A}_k^n$ gilt dann wegen $g^\# = \mathrm{id}$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{A}_k^n \setminus \{0\}, \forall \psi \in k[X_1, \cdots, X_n] : \quad \chi_{g(x)}(\psi) &= \psi(g(x)) \\ &= (g^\#(\psi))(x) \\ &= \psi(x) \end{aligned}$$

Einsetzen der X_i für ψ ergibt

$$g(x) = x,$$

also ist g gleichzeitig Inklusion (d.h. kein Element bildet auf 0 ab) und bijektiv (d.h. 0 hat ein Urbild), das ist ein Widerspruch.

> $\boxed{\text{Fazit.}}$ Für $n \geq 2$ ist $\mathbb{A}_k^n \setminus \{0\}$ eine Prävarietät, aber keine affine Varietät.

Bemerkung. Für $n = 1$ ist $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\} = D(X)$ affin.

Der Projektive Raum $\mathbb{P}^n(k)$

Allgemeines zu Faktorräumen

Erinnerung. Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe mit neutralem Element e, X eine Menge. Eine Abbildung $G \times X \xrightarrow{\varphi} X$ heißt **Gruppenwirkung** auf X, falls:

(1) $\forall x \in X : \varphi(e, x) = x$

(2) $\forall g, h \in G, \forall x \in X$ gilt $\varphi(g \cdot h, x) = \varphi(g, \varphi(h, x))$.

Bemerkung. Jede Gruppenwirkung φ induziert eine Einbettung

$$\begin{aligned} (G, \cdot) &\hookrightarrow (\mathrm{Bij}(X), \circ) \\ g &\longmapsto \varphi(g, \Box) : X \to X. \end{aligned}$$

So eine Einbettung heißt auch **Darstellung** von $(G, \cdot)$ in $(\mathrm{Bij}(X), \circ)$.

$\boxed{\sim_G}$ **Definition 6.37.** *Eine Gruppenwirkung $\varphi : G \times X \to X$ induziert eine Äquivalenzrelation auf X:*

$$\forall x, y \in X : x \sim_G y \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists g \in G : gx = y$$

$\boxed{G \cdot x}$ *Die Menge $G \cdot x := \{g \cdot x = \varphi(g, x) \mid g \in G\}$ heißt G-**Orbit** von $x \in X$.*

Bemerkung. Dabei ist

$$Gx = Gy \Leftrightarrow x \in G_y \Leftrightarrow y \in G_x \Leftrightarrow x \sim_G y,$$

d.h. es ist $Gx = [x]_{\sim_G}$ die Äquivalenzklasse von x.

Definition 6.38. *Die Menge*

$$X/G := X/{\sim_G} = \{Gx \mid x \in X\}$$

heißt ***Orbitraum von*** X ***modulo*** G. $\boxed{X/G}$

Bemerkung. Wir haben die kanonische Projektion

$$\begin{aligned} \pi : X &\twoheadrightarrow X/G \\ x &\longmapsto Gx \end{aligned}$$

welche für jede weitere Menge E eine Bijektion der Abbildungsmengen induziert:

$$\begin{aligned} \pi^{\#} : \mathrm{Abb}(X/G, E) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Abb}(X, E)^G \subseteq \mathrm{Abb}(X, E) \\ \left(f : X/G \to E\right) &\longmapsto \begin{pmatrix} f \circ \pi : X \to E \\ \qquad x \mapsto f(Gx) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \tilde{g} : X/G \to E \\ \qquad [x] \mapsto g(x) \end{pmatrix} &\longleftarrow (g : X \to E) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \mathrm{Abb}(X, E)^G &:= \{f : X \to E \mid f \text{ auf } G\text{-Orbits konstant}\} \\ &= \{f : X \to E \mid \forall x \in X, \forall g \in G : f(gx) = f(x)\} \end{aligned}$$

Ist $E = k$ ein Körper, so ist $\mathrm{Abb}(X, k)^G$ die k-Unteralgebra der G-**Invarianten** in $\mathrm{Abb}(X, k)$. $\boxed{\mathrm{Abb}(X, E)^G}$

Einführung des $\mathbb{P}^n(k)$

Bemerkung. Wir haben für einen Körper k auf dem Raum $\mathbb{A}_k^{n+1} \setminus \{0\}$ ja eine Wirkung der Gruppe $k^* = k \setminus \{0\}$, nämlich die Einschränkung der üblichen Skalarmultiplikation:

$$\begin{aligned} k^* \times \mathbb{A}_k^{n+1} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{A}_k^{n+1} \setminus \{0\} \\ (\lambda, (a_0, \cdots, a_n)) &\longmapsto (\lambda a_0, \cdots, \lambda a_n) \end{aligned}$$

Gemäß obigen Betrachtungen induziert dies die Äquivalenzrelation $\sim_{k^*}$ und einen Orbitraum.

Definition 6.39. *Wir nennen den Orbitraum* $\boxed{\mathbb{P}_k^n}$

$$\mathbb{P}_k^n := \mathbb{A}_k^{n+1} \setminus \{0\}/k^* = \mathbb{A}_k^{n+1} \setminus \{0\}/{\sim_{k^*}}$$

den n***-dimensionalen projektiven Raum über*** k*, schreiben für die Äquivalenzklassen (= Elemente von* $\mathbb{P}_k^n$*)* $\boxed{(a_0 : \ldots : a_n)}$

$$(a_0 : \ldots : a_n) := k^* \cdot (a_0, \cdots, a_n) = \{(\lambda a_0, \cdots, \lambda a_n) \mid \lambda \in k^*\}$$

und nennen $a_0, \cdots, a_n$ *die* ***homogenen Koordinaten*** *von* $(a_0 : \ldots : a_n) \in \mathbb{P}_k^n$.

Bemerkung. Ist $\xi = (a_0 : \ldots : a_i : \ldots : a_n) \in \mathbb{P}_k^n$ mit $a_i \neq 0$, so ist auch

$$\xi = \left(\frac{a_0}{a_i} : \ldots : 1 : \ldots : \frac{a_n}{a_i}\right).$$

Bemerkung. Die allgemein für Orbiträume existierende Bijektion ergibt hier

$$\mathrm{Abb}(\mathbb{P}_k^n, k) \cong \mathrm{Abb}(\mathbb{A}_k^{n+1} \setminus \{0\}, k)^{k^*}.$$

Dabei ist $\mathbb{A}_k^{n+1} \setminus \{0\} = \bigcup_{i=1}^n D(X_i)$ f+r $n \geq 1$ eine Prävarietät, welche nicht affin ist. Etwa allgemeiner kann man auch definieren:

$\boxed{\mathbb{P}_k(\mathfrak{V})}$ **Definition 6.40.** *Für einen beliebigen k-Vektorraum $\mathfrak{V}$ nennen wir*

$$\mathbb{P}_k(\mathfrak{V}) := \mathfrak{V}/_{k^*}$$

den ***projektiven Raum von*** $\mathfrak{V}$.

Bemerkung. Es ist offenbar $\mathbb{P}_k(k^{n+1}) = \mathbb{P}_k^n$.

k-Cartan-Struktur auf $\mathbb{P}_k^n$

Definition 6.41. $\mathbb{P}_k^n$ *erhalte die Quotiententopologie von* $\mathbb{A}_k^{n+1} \setminus \{0\}$ *via*

$$\pi : \mathbb{A}_k^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}_k^n.$$

Bemerkung. Dann ist

$$\begin{aligned}
&Z \subseteq \mathbb{P}_k^n \text{ abgeschlossen} \\
&\Leftrightarrow \pi^{-1}(Z) \subseteq \mathbb{A}_k^{n+1} \setminus \{0\} \text{ abgeschlossen} \\
&\Leftrightarrow \pi^{-1}(Z) = V(\mathfrak{a}) \cap \mathbb{A}_k^{n+1} \setminus \{0\} \\
&\Leftrightarrow \pi^{-1}(Z) = V(\mathfrak{a}) \setminus \{0\} \\
&\Leftrightarrow \pi^{-1}(Z) \cup \{0\} = V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_k^{n+1},
\end{aligned}$$

mit $\mathfrak{a} = IV(\mathfrak{a})$. Dabei gilt für $\varphi \in \mathfrak{a} \subseteq k[X_0, \cdots, X_n]$ und $a \in \mathbb{A}_k^{n+1}$:

$$\varphi(a) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(\lambda a) = 0 \ \ \forall \lambda \in k^*.$$

Ist nun $d = \deg \varphi$, so lässt sich φ in seine homogenen Komponenten zerlegen:

$$\begin{aligned}
\varphi &= \varphi_0 + \varphi_1 + \ldots + \varphi_d, \\
\varphi_i &= \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{N}^n, \\ \sum \nu_j = i}} a_\nu \cdot X_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot X_n^{\nu_n} \\
\varphi(a) &= \varphi_0 + \varphi_1(a) + \ldots + \varphi_d(a) \\
\varphi(\lambda a) &= \varphi_0 + \lambda\varphi_1(a) + \ldots + \lambda^d \varphi_d(a)
\end{aligned}$$

Setzen wir $d+1$ verschiedene Werte $\lambda_i \in k^*$ ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 0=\varphi(a) \quad &\Longleftrightarrow \quad (\forall i \in \{1,\cdots,d+1\}:\ \varphi(\lambda_i a)=0) \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^d \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_{d+1} & \dots & \lambda_{d+1}^d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1(a) \\ \vdots \\ \varphi_d(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Da diese Vandermondematrix regulär ist:

$$\Longleftrightarrow \quad \varphi_0=\varphi_1(a)=\ldots=\varphi_d(a)=0$$

Zusammengefasst ergibt sich hier:

$$\forall \varphi \in \mathfrak{a},\ \text{mit } \varphi=\varphi_0+\ldots+\varphi_d,\ \varphi_i \text{ homogen},\ \deg(\varphi_i)=i \forall i: \\ \forall a \in V(\mathfrak{a}), \forall i: \quad \varphi_i(a)=0,$$

also $\varphi_i \in \mathfrak{a}$ für alle i. Folglich ist $\mathfrak{a}$ ein **homogenes Ideal**, d.h. $\mathfrak{a}$ enthält mit jedem Polynom auch dessen homogene Summanden.

Fazit. $Z \subseteq \mathbb{P}_k^n$ ist abgeschlossen $\Longleftrightarrow$ $\pi^{-1}(Z) \cup \{0\} = V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_k^{n+1}$, mit $\mathfrak{a} \subseteq k[X_0,\cdots,X_n]$ homogenes Ideal.

$\boxed{\mathfrak{a}^\lambda}$

$\boxed{\text{Lemma.}}$ Sei $\mathfrak{a} \subseteq k[X_0,\cdots,X_n]$ Ideal und für $\lambda \in k$

$$\mathfrak{a}^\lambda := \{f(\lambda X_0,\cdots,\lambda X_n) \mid f \in \mathfrak{a}\}.$$

Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(i) $\mathfrak{a}$ homogenes Ideal, d.h. für jedes Polynom in $\mathfrak{a}$ sind auch dessen homogene Komponenten in $\mathfrak{a}$

(ii) $\mathfrak{a}$ besitzt ein endliches Erzeugendensystem aus *homogenen* Polynomen

(iii) $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}^\lambda$ für alle $\lambda \in k^*$.

Beweis. Einfach. □

Fazit. $Z \subseteq \mathbb{P}_k^n$ ist abgeschlossen $\Longleftrightarrow$ $\pi^{-1}(Z) \cup \{0\} = V(f_1,\cdots,f_s)$, mit $f_i \in k[X_0,\cdots,X_n]$ homogen.

$\boxed{V_+(f_1,\ldots f_s)}$ $\boxed{V_+(\mathfrak{a})}$ $\boxed{D_+(\mathfrak{a})}$

Definition 6.42. *Seien $f_1,\cdots,f_s \in k[X_0,\cdots,X_n]$ homogene Polynome. Dann sei*

$$\begin{aligned} V_+(f_1,\cdots,f_s) &:= \pi(V(f_1,\ldots f_s) \setminus \{0\}) \\ &= \{\xi=(a_0:\ldots:a_n) \in \mathbb{P}_k^n \mid f_i(a_1,\cdots,a_n)=0\ \forall i\}. \end{aligned}$$

Für ein homogenes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq k[X_0, \cdots, X_n]$ sei

$$\begin{aligned} V_+(\mathfrak{a}) &:= \pi(V(\mathfrak{a}) \setminus \{0\}) \\ &= \{\xi = (a_0 : \ldots : a_n) \in \mathbb{P}_k^n \mid \forall \varphi \in \mathfrak{a} : \ \varphi(a_1, \cdots, a_n) = 0\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} D_+(\mathfrak{a}) &:= \mathbb{P}_k^n \setminus V_+(\mathfrak{a}) \\ &= \{(a_1 : \ldots : a_n) \mid \exists \varphi \in \mathfrak{a} : \varphi(a_1, \cdots, a_n) \neq 0\} \end{aligned}$$

FAZIT.

(1) Die abgeschlossenen Mengen des $\mathbb{P}_k^n$ sind

$$\begin{aligned} \mathrm{Abg}(\mathbb{P}_k^n) &= \{V_+(f_1, \cdots, f_n) \mid f_i \in k[X_0, \cdots, X_n] \text{ homogen}\} \\ &= \{V_+(\mathfrak{a}) \mid \mathfrak{a} \subseteq k[X_0, \cdots, X_n] \text{ homogenes Ideal}\} \end{aligned}$$

(2) Die offenen Mengen sind

$$\mathrm{Off}(\mathbb{P}_k^n) = \{D_+(\mathfrak{a}) \mid \mathfrak{a} \text{ homogenes Ideal}\}$$

mit den offenen Basismengen

$$B_{\mathbb{P}_k^n} = \{D_+(f) \mid f \in k[X_0, \cdots, X_n] \text{ homogen}\}\,.$$

Dieser Topologie verpassen wir nun eine Strukturgarbe:

Definition 6.43. *Für alle $U \in \mathrm{Off}'(\mathbb{P}_k^n)$ sei*

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(U) &:= \mathrm{Abb}(\pi^{-1}(U), k)^{k^*} \cap \mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^{n+1} \setminus \{0\}}(\pi^{-1}(U)) \\ &= \mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^{n+1}}(\pi^{-1}(U))^{k^*}, \end{aligned}$$

also die ***Algebra der k^*-invarianten regulären Funktionen auf*** *$\pi^{-1}(U)$.*

Bemerkung. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n} : \mathrm{Off}'(\mathbb{P}_k^n) \to k\text{-Alg}$ ist offenbar eine Garbe, weil $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^{n+1}}$ eine solche ist. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}$ ist Garbe von k-Algebren k-wertiger Funktionen auf $\mathbb{P}_k^n$, und damit wird $(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n})$ ein Cartanscher Raum, ja sogar ein geringer Raum.

$\boxed{\text{SATZ 6.7.5.}}$ Sei $k = \overline{k}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

(1) $(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k})$ ist Prävarietät über k.

(2) Für alle homogenen $f \in k[X_0, \cdots, X_n]$ ist

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(D_+(f)) = \left\{ \frac{g}{f^\nu}\Big|_{D(f)} \;\middle|\; \begin{array}{c} g \in k[X_0, \cdots, X_n], \\ g \text{ homogen mit} \\ \deg g = \nu \cdot \deg f = \deg(f^\nu) \end{array} \right\}.$$

(3) Die global regulären Funktionen sind

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(\mathbb{P}^n_k) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(D_+(1)) = k \subset k[X_0, \cdots, X_n],$$

also nur die konstanten Funktionen.

(4) $\mathbb{P}^n_k$ ist für $n \geq 1$ nicht affin.

Beweis. Es ist ja

$$\mathbb{P}^n_k = \bigcup_{i=0}^n D_+(X_i),$$

mit

$$\begin{aligned} D_+(X_i) &= \pi(D(X_i)) \\ &= \{(a_0 : \ldots : a_n) \mid a_i \neq 0\} \\ &= \{(b_0 : \ldots : 1 : \ldots : b_n) \mid (b_0, \cdots, \cancel{1}, \cdots, b_n) \in \mathbb{A}^n_k\}. \end{aligned}$$

ad (2): Wir haben für homogenes $F \in k[X_0, \cdots, X_n]$ mit $\deg F \geq 1$:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(D_+(F)) &= \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+1}_k}(\pi^{-1}(D_+(F)))^{k^*} \\ &= \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+1}_k}(D(F))^{k^*} \\ &= \left\{ \frac{H}{F^\nu} \;\middle|\; \begin{array}{c} H \in k[X_0, \cdots, X_n], \\ \forall \lambda \in k^*, \forall a \in D(F) : \dfrac{H(\lambda a)}{F(\lambda a)^\nu} = \dfrac{H(a)}{F(a)^\nu} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Für ein solches H gilt dabei

$$\begin{aligned} H(\lambda a) &= \frac{F(\lambda a)^\nu}{F(a)^\nu} \cdot H(a) \\ &= \frac{\lambda^{\deg F \cdot \nu} \cdot F(a)^\nu}{F(a)^\nu} \cdot H(a) \\ &= \lambda^{\deg F \cdot \nu} \cdot H(a) \end{aligned}$$

für alle $\lambda \in k^*$ und $a \in D(F)$, also (weil $D(F) \subseteq \mathbb{A}_k^{n+1}$ dicht ist) für alle $\lambda \in k^*$:

$$\begin{aligned} H^\lambda(X_0, \cdots, X_n) &= H(\lambda X_0, \cdots, \lambda X_n) \\ &= \lambda^{\deg F \cdot \nu} \cdot H(X_0, \cdots, X_n), \end{aligned}$$

d.h.

$$H^\lambda = \lambda^{\deg F \cdot \nu} \cdot H.$$

Eine kurze Betrachtung der Zerlegung von H in homogene Komponenten liefert, dass H homogen vom Grad $\deg F \cdot \nu$ sein muss. Wir erhalten

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(D_+(F)) = \left\{ \frac{H}{\nu} \;\middle|\; H \in k[X_0, \cdots, X_n] \text{ homogen mit } \deg H = \deg(F^\nu) \right\}$$

ad (1): Aufgrund der bereits festgestellten Überdeckung durch die offenen $D_+(X_i)$ genügt es zu zeigen, dass $(D_+(X_i), \mathcal{O}_{D_+(X_i)}) \in \underline{\mathrm{Cart}}_k^{\mathrm{aff}}$ ist.

Wir betrachten dazu die Abbildungen

$$\begin{gathered} \mathbb{A}_k^n \underset{g_i}{\overset{f_i}{\rightleftarrows}} D_+(X_i) \subseteq \mathbb{P}_k^n \qquad \text{für} \quad i \in \{0, \cdots, n\} \\ (a_1, \cdots, a_n) \longmapsto (a_1 : \ldots : a_i : 1 : a_{i+1} : \ldots : a_n) \\ \left(\frac{b_0}{b_i}, \cdots, \cancel{1}, \cdots, \frac{b_n}{b_i}\right) \longleftarrow\!\shortmid \left(\frac{b_0}{b_i} : \ldots : 1 : \ldots : \frac{b_n}{b_i}\right) = (b_0 : \ldots : b_i : \ldots : b_n) \end{gathered}$$

Offenbar sind f_i und g_i jeweils zueinander inverse Abbildungen. Für eine offene Menge $D_+(F) \subseteq D_+(X_i)$ ist auch

$$\begin{aligned} f_i^{-1}(D_+(F)) &= \{(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{A}_k^n \mid F(a_1, \cdots, 1, \cdots, a_n) \neq 0\} \\ &= D(F_i^\flat) \end{aligned}$$

mit

$$F_i^\flat(T_1, \cdots, T_n) := F(T_1, \cdots, T_i, 1, T_{i+1} \ldots T_n),$$

also ist das Urbild einer offenen Basismenge wieder eine offene Menge, d.h. f_i ist stetig.

Bemerkung.

$\boxed{\square_i^\flat}$ (i) Wir haben also die Abbildung (sogar k-Algebra-Homomorphismus)

$$\begin{aligned} \square_i^\flat : k[X_0, \cdots, X_n] &\longrightarrow k[T_1, \cdots, T_n] \\ X_j &\longmapsto \begin{cases} T_{j+1} & j < i \\ 1 & j = i \\ T_j & j > i \end{cases} \end{aligned}$$

(mit k-Algebra-Fortsetzung). Für homogene F ist $F_i^\flat$ i.a. nicht mehr homogen, deswegen nennt man diese Abbildung (bzw. das Ergebnis davon) eine **Dehomogenisierung**. Es gilt jedoch für homogene F

$$F(X_0, \cdots, X_n) = X_i^{\deg F} \cdot F_i^\flat\left(\frac{X_0}{X_i}, \cdots, \cancel{\frac{X_i}{X_i}}, \cdots, \frac{X_n}{X_i}\right),$$

bei Kenntnis des Grades sind die homogenen Polynome also aus ihren Dehomogenisierungen reproduzierbar.

(ii) $\square_i^\flat$ induziert einen k-Algebra-Homomorphismus

$$\begin{aligned} \varphi_i : \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(D_+(X_i)) &\longrightarrow k[T_1, \cdots, T_n] \\ \frac{G}{X_i^\nu} &\longmapsto G_i^\flat \end{aligned}$$

(iii) Man hat auch umgekehrt eine Abbildung

$$\begin{aligned} \square_i^\natural : k[T_1, \cdots, T_n] &\longrightarrow k[X_0, \cdots, X_n] \\ P(T_1, \cdots, T_n) &\longmapsto P_i^\natural(X_0, \cdots, X_n) \\ &:= X_i^{\deg P} \cdot P\left(\frac{X_0}{X_i}, \cdots, \cancel{1}, \cdots, \frac{X_n}{X_i}\right), \end{aligned}$$

die sogenannte **Homogenisierung**. (Dies ist kein k-Algebra-Homomorphismus.) $\square_i^\natural$ induziert nun eine Abbildung

$$\begin{aligned} \psi_i : k[T_1, \cdots, T_n] &\longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(D_+(X_i)) \\ P(T_1, \cdots, T_n) &\longmapsto P\left(\frac{X_0}{X_i}, \cdots, \cancel{1}, \cdots, \frac{X_n}{X_i}\right) \\ &= \frac{1}{X_i^{\deg P}} \cdot P_i^\natural(X_0, \cdots, X_n), \end{aligned}$$

welche nun ein k-Algebra-Homomorphismus ist. Offenbar sind φ_i und ψ_i zueinander invers, also haben wir

$$\mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^n}(\mathbb{A}_k^n) = k[T_1, \cdots, T_n] \underset{\varphi_i}{\overset{\psi_i}{\rightleftarrows}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(D_+(X_i)),$$

als isomorphe k-Algebren, und beide endlich erzeugt.

(iv) Die Abbildung $g_i : D_+(X_i) \to \mathbb{A}_k^n$ ist ebenfalls stetig, weil

$$g_i^{-1}(D(P)) = D_+(P_i^\natural) \cap D_+(X_i)$$

offen in $D_+(X_i)$ ist.

(v) Aus der Konstruktion folgt, dass für $f_i^\# : \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(D_+(X_i))) \to \mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^n}(\mathbb{A}_k^n)$ gilt $f_i^\#\left(\frac{G}{X_i^\nu}\right) = G_i^\flat$, also $f_i^\# = \varphi_i$. Ebenso gilt $g_i^\# = \psi_i$.

Fazit. Die Abbildungen

$$\mathbb{A}_k^n \overset{f_i}{\underset{g_i}{\rightleftarrows}} D_+(X_i)$$

sind zueinander inverse Homöomorphismen und auch zueinander inverse Morphismen Cartanscher Räume, also Cartan-Isomorphismen. Damit sind die $D_+(X_i)$ affin, also $\mathbb{P}_k^n = \bigcup_{i=0}^n D_+(X_i)$ eine Prävarietät.

Ad (3): Wir haben

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(\mathbb{P}_k^n) &= \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(D_+(1)) \\ &= \{G \in k[X_0, \cdots, X_n] \mid G \text{ homogen vom Grad } 0\} \\ &= k \subsetneq k[X_0, \cdots, X_n]\end{aligned}$$

Ad (4): Wäre $(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n})$ affin, so wäre

$$\mathbb{P}_k^n \cong \operatorname{Specm}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(\mathbb{P}_k^n)) \overset{(3)}{=\!=} \operatorname{Specm} k = \{(0)\},$$

und das ist für $n \geq 1$ ein Widerspruch (für $n = 0$ ist es trivial). $\square$

> BEMERKUNG 1. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ eine k-Prävarietät, $x \in X$, dann ist $\overline{\{x\}}^X = \{x\}$.

Beweis. Ist $X = \bigcup_{i=1}^s U_i$ Überdeckung durch affine offene Teilmengen, dann haben wir

$$\overline{\{x\}}^X \cap U_i = \overline{\{x\}}^{U_i} = \{x\} \quad \text{für die } i \text{ mit } x \in U_i,$$

also

$$\overline{\{x\}}^X = \bigcup_{i=1}^s \left(\overline{x}^X \cap U_i\right) = \bigcup_{i=1}^s \{x\} = \{x\}. \qquad \square$$

Unterprävarietäten

$\boxed{\operatorname{Abg}'(X)}$ $\boxed{\operatorname{Loc ab}(X)}$ $\boxed{\operatorname{Loc ab}'(X)}$

Definition 6.44. *Für einen topologischen Raum X bezeichne*

- $\operatorname{Abg}'(X) := \operatorname{Abg}(X) \setminus \{\varnothing\}$ *die Menge der nichtleeren abgeschlossenen Mengen in X,*
- $\operatorname{Loc ab}(X) := \{X = A \cap U \mid A \in \operatorname{Abg}(X), U \in \operatorname{Off}(X)\}$ *die Menge der **lokal abgeschlossenen Mengen** und*
- $\operatorname{Loc ab}'(X) := \operatorname{Loc ab}(X) \setminus \{\varnothing\}$ *die Menge der nichtleeren lokal abgeschlossenen Mengen.*

$\boxed{\text{SATZ 6.7.6.}}$ Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ eine k-Prävarietät ($k = \overline{k}$), dann gilt:

(1) $\forall U \in \mathrm{Off}'(X)$ ist $(U, \mathcal{O}_U)$ eine Prävarietät.

(2) $\forall A \in \mathrm{Abg}'(X)$ ist $(A, \mathcal{O}_A)$ eine Prävarietät.

(3) $\forall Z \in \mathrm{Loc\,ab}'(Z)$ ist $(Z, \mathcal{O}_Z)$ eine Prävarietät.

Beweis. Sei jeweils $X = \bigcup_{i=1}^s U_i$ eine offene affine Überdeckung von X, d.h. $(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$ affin.

(1) Wir haben, da die U_i affin sind,

$$U = \bigcup_{i=1}^{s} U_i \cap U = \bigcup_{i=1}^{s} \underbrace{\bigcup_{j=1}^{r_i} D(f_{ij})}_{=U_i \cap U \subset U_i},$$

mit $f_{ij} \in \mathcal{O}_{U_i}(U_i) = \mathcal{O}_X(U_i)$, und $D(f_{ij})$ affin, also ist $U = \bigcup_{i,j} D(f_{ij})$ Prävarietät.

(2) Es ist $A = \bigcup_{i=1}^s U_i \cap A$, und $(U_i \cap A) \in \mathrm{Abg}(U_i) \cap \mathrm{Off}(A)$, also affin, also ist dies eine Überdeckung von A durch offene, affine Teilmengen. Damit wird $(A, \mathcal{O}_A)$ zu einer k-Prävarietät.

(3) Es ist $Z = A \cap U$ mit $U \in \mathrm{Off}'(X)$, $A \in \mathrm{Abg}'(X)$. Damit ist U Prävarietät nach (1), und $Z \in \mathrm{Abg}(U)$, also Z Prävarietät nach (2). □

Definition 6.45.

*(1) Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ eine k-Prävarietät, $Z \subseteq X$ Teilmenge, $Z \neq \varnothing$. Wir nennen Z eine **Unterprävarietät** von X, falls $Z \in \mathrm{Loc\,ab}'(X)$ und betrachten in diesem Fall $(Z, \mathcal{O}_Z := \mathcal{O}_X|_Z)$.*

*(2) Man nennt auch lax eine beliebige Prävarietät $(Y, \mathcal{O}_Y)$ **Unterprävarietät** von $(X, \mathcal{O}_X)$, falls es einen Isomorphismus $\varphi \in \mathrm{Isom}_{\underline{\mathrm{PreVar}_k}}(Y, Z)$ gibt, und $Z \in \mathrm{Loc\,ab}'(X)$.*

Definition 6.46. *Die Unterprävarietäten von $\mathbb{A}_k^n$ heißen **quasi-affine Varietäten**, die abgeschlossenen Unterprävarietäten von $\mathbb{A}_k^n$ heißen **affine Varietäten**, die Unterprävarietäten von $\mathbb{P}_k^n$ heißen **quasi-projektive Varietäten**, die abgeschlossenen Unterprävarietäten von $\mathbb{P}_k^n$ (also $V_+(F_1, \cdots, F_n)$, F_i homogen) heißen **projektive Varietäten**.*

Allgemeiner bezeichnen wir auch dazu isomorphe Varietäten (die rein formal nichts mit $\mathbb{A}_k^n$ oder $\mathbb{P}_k^n$ zu tun haben müssen) jeweils genauso.

Bemerkung. Wir haben also bisher folgende Hierarchie:

$$
\begin{array}{ccccc}
\{\text{ aff. Var.}\} & & & & \\
\rotatebox[origin=c]{-90}{$\subsetneq$} & & & & \\
\{\text{ quasi-aff. Var.}\} & & & & \{\text{proj. Var.}\} \\
 & \rotatebox[origin=c]{-90}{$\subsetneq$} & & \rotatebox[origin=c]{-90}{$\subsetneq$} & \\
 & & \{\text{ quasi-proj. Var.}\} & & \\
 & & \rotatebox[origin=c]{-90}{$\subsetneq$} & & \\
 & & \{\text{ Prävar.}\} & &
\end{array}
$$

Frage. Was ist $\{$ proj. Var. $\} \cap \{$ aff. Var.$\}$?

Varietäten (bzw. separierte Prävarietäten)

Aus der Topologie ist folgender Charakterisierungssatz für die T_2-(d.h. Hausdorff-)Eigenschaft bekannt (für den wir erst einmal ein paar Begriffe definieren müssen).

Definition 6.47. *Seien X und Y Mengen, $f, g : Y \to X$ Abbildungen. Dann ist*

$\boxed{\Delta_X}$
- $\Delta_X := \{(x, x) \mid x \in X\} \subseteq X \times X$ *die **Diagonale** von $X \times X$,*

$\boxed{\tilde{Y}(f,g)}$
- $\tilde{Y}(f, g) := \{y \in Y \mid f(y) = g(y)\}$ *der **Differenzkern** von f und g und*

$\boxed{\Gamma_f}$
- $\Gamma_f := \{(y, f(y)) \mid y \in Y\} \subseteq Y \times X$ *der **Graph** von f.*

$\boxed{\tilde{Y}(f,g)}$

$\boxed{\text{Satz 6.7.7.}}$ *(Charakterisierungssatz für die T_2-Eigenschaft)*
Sei $X \neq \varnothing$ topologischer Raum. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) X ist T_2-Raum.

(2) Die Diagonale $\Delta_X \subseteq X \times X$ ist abgeschlossen in der *Produkttopologie.*

(3) Für alle $Y \in \operatorname{obj}(\underline{\text{Top}})$, für alle stetigen $f, g : Y \to X$ (d.h. $f, g \in \operatorname{Mor}_{\underline{\text{Top}}}(Y, X)$) gilt: $\tilde{Y}(f, g)$ ist abgeschlossen in Y.

(4) Für alle $Y \in \operatorname{obj}(\underline{\text{Top}})$, für alle $f \in \operatorname{Mor}_{\underline{\text{Top}}}(Y, X)$ gilt: Der Graph Γ_f ist abgeschlossen in $Y \times X$ bezüglich der Produkttopologie.

Beweis.

(1) $\Leftrightarrow$ (2) ist bekannt.

(2) $\Rightarrow$ (3): Es ist $\tilde{Y}(f, g) = (f, g)^{-1}(\Delta)$ mit der stetigen Abbildung $(f, g) : Y \to X \times X$.

(3) $\Rightarrow$ (2): Es ist (mit den kanonischen Projektionen $\pi_1, \pi_2 : X \times X \to X$):

$$\Delta_x = \{(x, y) \in X \times X \mid \pi_1((x, y)) = \pi_2((x, y))\} = \tilde{Y}(\pi_1, \pi_2).$$

(2) ⇒ (4) Sei $Y \xrightarrow{f} Y$ stetig, so ist auch $Y \times X \xrightarrow{f\times\mathrm{id}} X \times X$ stetig. Wir haben außerdem $\Gamma_f = (f \times \mathrm{id})^{-1}(\Delta_X)$. Weil Δ_X abgeschlossen ist, ist also auch Γ_f abgeschlossen.

(4) ⇒ (2) Sind alle Graphen von stetigen Abbildungen nach X abgeschlossen, so ist insbesondere auch $\Gamma_{\mathrm{id}_X} = \Delta_X$ abgeschlossen. □

Wir wollen nun ein Analogon zum Hausdorff-Begriff in der Welt der Prävarietäten (die ja bekanntlich außer im einelementigen Fall sämtlich *nicht hausdorffsch* sind) schaffen. Dazu verwenden wir eine Variante der dritten Bedingung:

Definition 6.48. *Eine k-Prävarietät $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt* ***separierte Prävarietät*** *oder auch* ***Varietät****, falls für alle k-Prävarietäten $(Y, \mathcal{O}_Y)$ und für jedes Paar von Morphismen $f, g : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ gilt:*

$$\tilde{Y}(f, g) := \{y \in Y \mid f(y) = g(y)\}$$

ist abgeschlossene *Untervarietät von Y.*
Die volle Unterkategorie der Varietäten in $\underline{\mathrm{PreVar}_k}$ bezeichnen wir mit $\underline{\mathrm{Var}_k}$. $\boxed{\underline{\mathrm{Var}_k}}$

Diese Bedingung nennt man auch kategoriales Hausdorff-Axiom für die Kategorie $\underline{\mathrm{PreVar}_k}$. Allgemeiner:

Definition 6.49. *Sei $\mathfrak{C}$ eine Kategorie mit Vergissfunktor $V : \mathfrak{C} \to \underline{\mathrm{Top}}$. Ein Objekt $X \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C})$ erfüllt das* ***kategoriale Hausdorff-Axiom für $\mathfrak{C}$****, falls*

$$\forall Y \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C}), \forall f, g \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(Y, X) :$$
$$\tilde{Y}(f, g) := \{y \in V(Y) \mid V(f)(y) = V(g)(y)\} \in \mathrm{Abg}(V(Y)).$$

Bemerkung. Für $\mathfrak{C} := \underline{\mathrm{Top}}$ (mit $V := \mathrm{id}_{\underline{\mathrm{Top}}}$) ist das kategoriale auch das übliche Hausdorff-Axiom, wie Satz 6.7.7 aussagt.

$\boxed{\text{Satz 6.7.8.}}$ *Charakterisierung der Separiertheit von Prävarietäten*
Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ eine k-Prävarietät, $k = \overline{k}$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) $(X, \mathcal{O}_X)$ ist separiert, also k-Varietät.

(2) Für alle $Y \in \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{PreVar}_k}^{\mathrm{aff}})$, für alle Morphismen $Y \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} X$ gilt: $\tilde{Y}(f, g) \in \mathrm{Abg}(Y)$.

(3) $\forall Y \in \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{PreVar}_k}), \forall f, g \in \mathrm{Mor}_{\underline{\mathrm{PreVar}_k}}(Y, X)$:

$$f = g \iff \exists S \subseteq Y \text{ dicht } : f|_S = g|_S$$

Beweis.

(1) $\Rightarrow$ (2) ist klar.

(2) $\Rightarrow$ (1): Sei Y Prävarietät, $Y = \bigcup_{i=1}^{s} U_i$ offene affine Überdeckung, $Y \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} X$ Morphismen. Wir betrachten nun für $i \in \{1, \cdots, s\}$ die Verknüpfungen $U_i \subseteq Y \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} X$ und erhalten (aufgrund (2)), dass für alle i

$$\tilde{Y}(f,g) \cap U_i = \tilde{U}_i(f|_{U_i}, f|_{U_i}) \in \operatorname{Abg}(U_i)$$

ist. Daher ist $\tilde{Y}(f,g) \in \operatorname{Abg}(Y)$.

(1) $\Rightarrow$ (3): Sei X separiert, $S \subseteq Y$ dicht, $Y \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} X$ Morphismen mit $f|_S = g|_S$. Es ist $S \subseteq \tilde{Y}(f,g)$, und nach (1) ist $\tilde{Y}(f,g)$ abgeschlossen, also

$$Y = \overline{S}^Y \subseteq \tilde{Y}(f,g) \subset Y,$$

also $\tilde{Y}(f,g) = Y$, d.h. $f = g$.

(3) $\Rightarrow$ (1): Seien $Y \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} X$ Morphismen und gelte (3). Für $\tilde{Y}(f,g) = \varnothing$ ist schon $\tilde{Y}(f,g) \in \operatorname{Abg}(Y)$. Ansonsten haben wir

$$\varnothing \neq \tilde{Y}(f,g) \underset{\text{dicht}}{\subseteq} \overline{\tilde{Y}(f,g)}^Y \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} X$$

mit $f|_{\tilde{Y}(f,g)} = g|_{\tilde{Y}(f,g)}$ per Definition, und nach (3) auch $f|_{\overline{\tilde{Y}(f,g)}^Y} = g|_{\overline{\tilde{Y}(f,g)}^Y}$, also $\overline{\tilde{Y}(f,g)}^Y \subseteq \tilde{Y}(f,g)$, d.h. $\tilde{Y}(f,g)$ ist abgeschlossen in Y. $\square$

Satz 6.7.9.

(1) Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ eine k-Varietät, also separiert, $(Z, \mathcal{O}_Z)$ Unterprävarietät von $(X, \mathcal{O}_X)$, so ist auch $(Z, \mathcal{O}_Z)$ separiert.

(2) Jede quasi-affine Prävarietät ist separiert.

(3) Jede quasi-projektive Prävarietät ist separiert.

Wir haben also die quasi-affinen und quasi-projektiven Prävarietäten zu Recht gleich *Varietäten* genannt.

Beweis.

(1) Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ k-Varietät, $Z \subseteq X$ Unterprävarietät mit $\mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_X|_Z$ und $\left(Y \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Z\right) \in \operatorname{Mor}(\underline{\text{PreVar}_k})$. Dann haben wir

$$Y \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Z \in \operatorname{Mor}(\underline{\text{PreVar}_k}) \overset{i}{\hookrightarrow} X,$$

wobei $\tilde{Y}(f,g) = \tilde{Y}(i \circ f, i \circ g)$, also abgeschlossen ist (weil X separiert).

(2) Nach (1) reicht es zu zeigen, dass $\mathbb{A}_k^n$ separiert ist für $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten also Morphismen $Y \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} \mathbb{A}_k^n$ in $\underline{\text{PreVar}}_k$, Y affin, sowie die Koordinatenmorphismen

$$\begin{aligned} \pi_i : \mathbb{A}_k^n &\longrightarrow \mathbb{A}_k^1 = k \\ (a_1, \cdots, a_n) &\longmapsto a_i. \end{aligned}$$

Es ist dann

$$\begin{aligned} \tilde{Y}(f,g) &= \bigcap_{i=1}^n \tilde{Y}(\pi_i \circ f, \pi_i \circ g) \\ &= \bigcap_{i=1}^n \underbrace{V\Big(\overbrace{\pi_i \circ f - \pi_i \circ g}^{\in \mathcal{O}_Y(Y)}\Big)}_{\in \operatorname{Abg}(Y)} \\ &\in \operatorname{Abg}(Y), \end{aligned}$$

also ist $\mathbb{A}_k^n$ separiert, also k-Varietät.

(3) kommt später. □

Studium der Morphismen $\mathbb{P}_k^n \to \mathbb{P}_k^m$ in $\underline{\text{PreVar}}_k$

Erinnerung. Im affinen Fall ist ja

$$\operatorname{Mor}_{\underline{\text{PreVar}}_k}(\mathbb{A}_k^n, \mathbb{A}_k^m) \cong \operatorname{Hom}_{k\text{-Alg}}(k[Y_1, \cdots, Y_m], k[X_1, \cdots, X_n]) \cong k[X_1, \cdots, X_n]^m$$

Für den projektiven Raum wird aber alles ganz anders.

> **LEMMA.** Sei $f : \mathbb{P}^n \to X$ Mengenabbildung, X k-Varietät, dann sind folgende Bedingungen äquivalent:
>
> (1) $f \in \operatorname{Mor}_{\underline{\text{PreVar}}_k}(\mathbb{P}^n, X)$
>
> (2) Mit der Projektion $\pi : \mathbb{A}_k^{n+1} \setminus \{0\} \twoheadrightarrow \mathbb{P}^n$ ist
>
> $$\pi \circ f \in \operatorname{Mor}_{\underline{\text{PreVar}}_k}(\mathbb{A}_k^{n+1} \setminus \{0\}, X)$$
>
> $$\begin{tikzcd} \mathbb{P}_k^n \arrow[r, "f"] & X \\ \mathbb{A}_k^n \setminus \{0\} \arrow[u, "\pi"] \arrow[ur, "\pi \circ f"'] & \end{tikzcd}$$

Beweis. geht mittels Lokal-Global-Prinzip für Morphismen. □

Sei nun $f : \mathbb{P}_k^n \to \mathbb{P}_k^m$ ein Morphismus in $\underline{\text{PreVar}}_k$. Zunächst studieren wir f lokal.

Sei $a = (a_0 : \ldots : a_n) \in D_+(X_i) \subset \mathbb{P}_k^n$ beliebig, $f(a) \in D_+(Y_j) \subset \mathbb{P}_k^m$ für ein $(i,j) \in \{1, \cdots, n\} \times \{1, \cdots, m\}$. Dann haben wir den eingeschränkten Morphismus

$$\underbrace{D_+(X_i) \cap f^{-1}(D_+(Y_j))}_{\ni a} \xrightarrow{f} D_+(Y_j).$$

Es ist $D_+(X_i) \cap f^{-1}(D_+(Y_j))$ offen in $D_+(X_i) \cong \mathbb{A}_k^n$, also existiert eine offene Basismenge $D_+(F) \subset \mathbb{P}_k^n$ mit $F \in k[X_0, \cdots, X_n]$ homogen, $\deg F = d \geq 1$, so dass

$$a \in D_+(F) \subseteq D_+(X_i) \cap f^{-1}(D_+(Y_i)) \subseteq D_+(X_i).$$

Wir erhalten das Diagramm:

$$\begin{tikzcd} D_+(F) \arrow[r, "f"] & D_+(Y) \arrow[r, equal, "\sim"] & \mathbb{A}_k^m \\ \pi^{-1}(D_+(F)) \arrow[u, two heads, "\pi"] \arrow[r, equal] & D(F) \subseteq \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[u, "f \circ \pi"'] & \end{tikzcd}$$

Dabei ist $D(F)$ bekanntlich affin in $\mathbb{A}_k^{n+1}$. Wegen $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^{n+1}}(D(F)) = (k[X_0, \cdots, X_n])_F$ (Lokalisierungsring) folgt aus der Beschreibung von Morphismen zwischen affinen Varietäten:

$$\forall b \in D(F): \quad (f \circ \pi)(b) = \left(\frac{H_0}{F^\nu}(b) : \ldots : 1 : \ldots : \frac{H_m}{F^\nu}(b) \right),$$

wobei $H_0, \cdots, \cancel{H_j}, \cdots, H_m$ homogene Polynome in $k[X_0, \cdots, X_n]$ vom Grad $\nu \cdot \deg F = \nu \cdot d$ sind. Das ergibt

$$\forall b \in D(F): \quad (f \circ \pi)(b) = (H_0(b) : \ldots : F^\nu(b) : \ldots : H_m(b))$$

und mit $H_j := F^\nu$:

$$= (H_0(b) : \ldots : H_j(b) : \ldots : H_m(b))$$

Das führt zu folgendem Satz:

$\boxed{\text{Satz 6.7.10.}}$ Sei $f : \mathbb{P}_k^n \to \mathbb{P}_k^m$ Mengenabbildung. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) $f \in \mathrm{Mor}_{\underline{\mathrm{PreVar}}_k}(\mathbb{P}_k^n, \mathbb{P}_k^m)$

(2) Es gibt $m+1$ homogene Polynome $H_0, \cdots, H_m \in k[X_0, \cdots, X_n]$ vom gleichen Grad d ohne gemeinsame Faktoren und mit $V(H_0, \cdots, H_m) \subseteq \{0\} \subsetneqq \mathbb{A}_k^{n+1}$, so dass f global durch $H_0, \cdots, H_n$ darstellbar ist.

Beweis.

(2) $\Rightarrow$ (1): Ist klar nach Beschränkung auf die „affinen Teile“ von $\mathbb{P}_k^n$ und $\mathbb{P}_k^m$ und der Charakterisierung von Morphismen zwischen affinen Varietäten (+ Lokal-Global-Prinzip für Morphismen).

(1) $\Rightarrow$ (2): Sei $f : \mathbb{P}_k^n \to \mathbb{P}_k^m$ Morphismus. Dann existiert für alle $a \in \mathbb{P}_k^n$ eine offene affine Umgebung W_a (das ist $D_+(F)$ in obiger Betrachtung) derart, dass $f|_{W_a} : W_a \to \mathbb{P}_k^n$ gegeben ist durch

$$f|_{W_a} = (H_0|_{W_a} : \ldots : H_m|_{W_a}),$$

wobei die H_i Polynome wie in (2).

Sind nun außerdem $b \in \mathbb{P}_k^n$, W_b Umgebung von b und $\tilde{H}_i$ die zugehörigen Polynome mit (2), dann ist $W_a \cap W_b \neq \varnothing$ offen, also dicht in $\mathbb{P}_k^n$, und wir haben

$$\begin{aligned} W_a \cap W_b &\xrightarrow{f} \mathbb{P}_k^n \\ y &\mapsto (H_0(y) : \ldots : H_m(y)) \\ &\quad = (\tilde{H}_0(y) : \ldots : \tilde{H}_m(y)), \end{aligned}$$

Aufgrund der Dichtheit ist $H_i = \lambda \tilde{H}_i$ für alle i, auf ganz $\mathbb{P}_k^n$.

Fazit. Ist $f \in \mathrm{Mor}_{\underline{\mathrm{PreVar}}_k}(\mathbb{P}_k^n, \mathbb{P}_k^m)$, so existieren homogene Polynome $H_0, \cdots, H_m$ mit (2), so dass $f = (H_0 : \ldots : H_m)$. ☐

Beispiel 6.7.13. Betrachten wir den Fall $m := 1$. Im Affinen ist dann

$$\begin{aligned} \mathrm{Mor}_{\underline{\mathrm{PreVar}}_k}(\mathbb{A}_k^n, \mathbb{A}_k^1) &\cong \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(k[Y], k[X_1, \cdots, X_n]) \\ &\cong k[X_1, \cdots, X_n] = \mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^n}(\mathbb{A}_k^n) \end{aligned}$$

Im Kontrast dazu steht das Verhalten im Projektiven:

Ist (für $n \geq 2$) $f : \mathbb{P}_k^n \to \mathbb{P}_k^1$ Morphismus, so erhalten wir nach Satz 6.7.10

$$f(a) = (H_0(a) : H_1(a)) \quad \text{für alle} \quad a \in \mathbb{P}^n,$$

mit H_0, H_1 homogen vom gleichen Grad d und $V(H_1, H_0) \subseteq \{0\} \subsetneqq \mathbb{A}_k^{n+1}$.

Das heißt, f ist entweder konstant (also $d = 0$) oder es ist $d \geq 1$ und $V(H_0, H_1) = \{0\}$. Wir wissen aber im zweiten Fall, dass

$$\dim V(H_0) = \dim V(H_1) = (n+1) - 1 = n,$$

ist, also

$$\dim(V(H_0) \cap V(H_1)) \geq n - 1 \geq 1,$$

also muss insbesondere $V(H_0) \cap V(H_1) = V(H_0, H_1)$ unendlich sein, im Widerspruch zu $V(H_0, H_1) = \{0\}$.

Also bleibt nur, dass f konstant ist.

Der Veronese-Morphismus v_d

$\boxed{\Xi_d}$ **Definition 6.50.** *Seien $n, d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$. Dann definieren wir*

$$\Xi_d := \{(\nu_0, \cdots, \nu_n) \in \mathbb{N}_0^n \mid \textstyle\sum_{i=0}^n \nu_i = d\}$$

und damit

$$\begin{aligned} v_d : \mathbb{P}_k^n &\longrightarrow \mathbb{P}_k^{\binom{n+d}{d}-1} \\ (a_0 : \ldots : a_n) &\longmapsto (\ldots : (a_0^{\nu_0} \cdot \ldots \cdot a_n^{\nu_n}) : \ldots)_{\nu \in \Xi_d}. \end{aligned}$$

$\boxed{v_d}$ $\boxed{M_\nu}$

*v_d heißt **Veronese-Morphismus**[8] von $\mathbb{P}_k^n$. Es ist $v_d = (\ldots : M_\nu : \ldots)_{\nu \in \Xi_d}$, wobei $M_\nu := M_{(\nu_0, \cdots, \nu_n)} := X_0^{\nu_0} \cdot \ldots \cdot X_n^{\nu_n}$ ist, und die Monome in lexikographischer Anordnung aufgereiht seien.*

Beispiel 6.7.14. Wir haben $\mathbb{P}^1 \overset{v_d}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^d$ und speziell

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1 &\overset{v_2}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^2 \\ (a : b) &\longmapsto (a^2 : ab : b^2) \in V^+(Y_0 \cdot Y_2 - Y_1^2) \end{aligned}$$

Bemerkung.

(1) v_d ist wohldefiniert als Abbildung, da für $a = (a_0 : \ldots : a_n)$ mit $a_i \neq 0$ auch $M_{(0, \cdots, 0, \underset{(i)}{d}, 0, \cdots, 0)}(a) = a_i^d \neq 0$ ist.

(2) v_d ist auch ein Morphismus in $\underline{\mathrm{PreVar}}_k$, denn die Monome M_ν sind homogen vom selben Grad d und haben wegen (1) außer $0 \in \mathbb{A}_k^{n+1}$ keine gemeinsamen Nullstellen.

$\boxed{\tilde{V}_+}$ (3) Das Bild $\mathrm{im}(v_d) = v_d(\mathbb{P}_k^n) \subsetneqq \mathbb{P}^N$, $N := \binom{n+d}{d} - 1_k$, liegt in der projektiven Untervarietät

$$\tilde{V}_+ := V_+\left(\{Y_\nu \cdot Y_\mu - Y_\varkappa \cdot Y_\lambda \mid \nu, \mu, \varkappa, \lambda \in \Xi_d, \nu + \mu = \varkappa + \lambda\}\right).$$

Es gilt sogar:

> $\boxed{\text{SATZ 6.7.11.}}$ Der Veronese-Morphismus $v_d : \mathbb{P}_k^n \hookrightarrow \mathbb{P}^{\binom{n+d}{d}-1}$ ist eine abgeschlossene Einbettung mit Bild
>
> $$\tilde{V}_+ = V_+\left(\left\{Y_\nu \cdot Y_\mu - Y_\varkappa \cdot Y_\lambda \;\middle|\; \begin{array}{l} \nu, \mu, \varkappa, \lambda \in \Xi_d, \\ \nu + \mu = \varkappa + \lambda \end{array}\right\}\right)$$

[8] Die Veronese-Abbildung wurde nicht nach dem Renaissance-Künstler *Paolo Veronese*, sondern nach dem Mathematiker *Guiseppe Veronese*, 1854–1917, benannt.

Beweis.

(a) v_d ist injektiv:

Sei $v_d(a) = v_d(b)$, so gibt es ein $\lambda \in k^*$ mit $M_\nu(b) = \lambda \cdot M_\nu(a)$ für alle $\nu \in \Xi$, speziell

$$\begin{aligned} \forall i \in \{0, \cdots, n\}: \qquad a_i^d &= M_{(0,\cdots,0,\cdots,\underset{(i)}{d},\cdots,0)}(a) \\ &= \lambda \cdot M_{(0,\cdots,0,\cdots,\underset{(i)}{d},\cdots,0)}(b) \\ &= \lambda \cdot b_i^d \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \forall i \neq j \in \{0, \cdots, n\}: \qquad a_i^{d-1} \cdot a_j &= M_{(0,\cdots,\underset{(j)}{1},\cdots,\underset{(i)}{d-1},\cdots,0)}(a) \\ &= \lambda \cdot M_{(0,\cdots,\underset{(j)}{1},\cdots,\underset{(i)}{d-1},\cdots,0)}(b) \\ &= \lambda \cdot b_i^{d-1} \cdot b_j. \end{aligned}$$

Etwas Umformen ergibt $b_i \cdot a_j = b_j \cdot a_i$, und wenn wir ein i mit $a_i \neq 0$, d.h. $b_i \neq 0$ wählen, haben wir $b_j = \mu \cdot a_j$, für alle j, mit $\mu := \frac{b_i}{a_i} \in k^*$. Es ist also $a = b \in \mathbb{P}_k^n$, also v_d injektiv.

(b) Sei $a \in \mathbb{P}_k^n$, $a \in D_+(X_i)$, also $a_i \neq 0$. Dann ist

$$v_d|_{D_+(X_i)} =: v_d^{(i)} : D_+(X_i) \hookrightarrow \tilde{V}_+ \cap D(Y_{(0,\cdots,\underset{(i)}{d},\cdots,0)})$$

die Einschränkung der Veronese-Abbildung auf $D_+(X_i)$. Es gilt dabei

$$\tilde{V}_+ = \bigcup_{i=0}^{n} \left(D_+(Y_{(0,\cdots,\underset{(i)}{d},\cdots,0)}) \cap \tilde{V}_+ \right),$$

denn:

Sei $b = (\ldots : b_\xi : \ldots)_{\xi \in \Xi} \in \tilde{V}_+$, mit $b_\nu \neq 0$ für ein $\nu \in \Xi$.

1. Fall: Ist auch $b_{(0,\cdots,\underset{(i)}{d},\cdots,0)} \neq 0$ für ein i, so ist $b \in D(Y_{(0,\cdots,\underset{(i)}{d},\cdots,0)})$, also in der rechten Seite der Gleichung enthalten, und wir sind fertig.

2. Fall: Andernfalls sei $\nu = (\nu_0, \cdots, \nu_n) \in \Xi$ von minimaler lexikographischer Ordnung gewählt, so dass $b_\nu \neq 0$. Es gibt dann (weil nicht der erste Fall eintrat) ein Paar (i,j) mit $0 \leq i < j \leq n$, $\nu_i > 0$ und $\nu_j > 0$. Folglich haben wir (aufgrund der Definition von $\tilde{V}_+$) auch

$$0 \neq b_\nu \cdot b_\nu = b_{(\nu_0,\cdots,\underset{(i)}{\nu_i - 1},\cdots,\underset{(j)}{\nu_j + 1},\cdots,\nu_n)} \cdot b_{(\nu_0,\cdots,\underset{(i)}{\nu_i + 1},\cdots,\underset{(j)}{\nu_j - 1},\cdots,\nu_n)},$$

also sind auch die beiden rechten Faktoren nicht 0. In lexikographischer Ordnung ist aber

$$(\nu_0,\cdots,\underbrace{\nu_i-1}_{i},\cdots,\underbrace{\nu_j+1}_{j},\cdots,\nu_n) < (\nu_0,\cdots,\underset{i}{\nu_i},\cdots,\underset{j}{\nu_j},\cdots,\nu_n)=\nu,$$

was im Widerspruch zur Minimalität von ν steht. Damit tritt Fall 2 nicht auf.

Wir haben also wirklich

$$\tilde{V}_+ = \bigcup_{i=0}^{n}\left(D_+(Y_{(0,\cdots,\underset{i}{d},\cdots,0)})\cap\tilde{V}_+\right).$$

Betrachten wir nun erneut die Einschränkung

$$v_d^{(i)}:\underbrace{D_+(X_i)}_{\text{affin}}\hookrightarrow\underbrace{\tilde{V}_+\cap D(Y_{(0,\cdots,\underset{i}{d},\cdots,0)})}_{\text{affin}}$$

und konstruieren zu $v_d^{(i)}$ einen inversen Morphismus als

$$\begin{aligned} w_i:\tilde{V}_+\cap D(Y_{(0,\cdots,\underset{i}{d},\cdots,0)}) &\longrightarrow D_+(X_i)\\ b=(b_\nu)_{\nu\in\Xi} &\longmapsto \Big(\ldots:\underbrace{b_{(0,\cdots,\underset{j}{1},\cdots,\underset{i}{d-1},\cdots,0)}}_{j}:\ldots:\underbrace{b_{(0,\cdots,\cdots,\underset{i}{d},0,\cdots,0)}}_{i}:\ldots\Big)\end{aligned}$$

w_i ist wohhldefiniert, weil $b_{(0,\cdots,\cdots,\underset{i}{d},0,\cdots,0)}\neq 0$ ist. Außerdem ist w_i ein Morphismus, weil es aus den homogenen Monomen $X_i^{d-1}\cdot X_j$ vom Grad d besteht. Weiterhin gilt für die Verknüpfung $w_i \circ v_d^{(i)}$:

$$\begin{tikzcd}
 & a \arrow[d, equal] \\
D_+(X_i) \arrow[d, "v_d^{(i)}"'] & (a_1 : \ldots : a_n) \arrow[d, mapsto] \arrow[dddd, equal, bend left=60] \\
\tilde{V}_+ \cap D(Y_{(0,\cdots,\underset{(i)}{d},\cdots,0)}) \arrow[d, "w_i"'] & (\ldots : \underbrace{M_\nu(a)}_{(\nu)} : \ldots) \arrow[d, mapsto] \\
D_+(X_i) & \left(M_{(1,0,\cdots,\underset{(i)}{d-1},\cdots,0)}(a) : \ldots : \underbrace{M_{(0,\cdots,\underset{(i)}{d},\cdots,0)}(a)}_{(i)} : \ldots : M_{(0,\cdots,\underset{(i)}{d-1},\cdots,0,1)}(a)\right) \arrow[d, equal] \\
 & (\underset{(i)}{a_0 \cdot a_i^{d-1} : \ldots : a_i^d : \ldots : a_n \cdot a_i^{d-1}}) \arrow[d, equal] \\
 & (a_0 : \ldots : a_i : \ldots : a_n) \arrow[d, equal] \\
 & a
\end{tikzcd}$$

Das heißt, wir haben $w_i \circ v_d^{(i)} = \mathrm{id}_{D_+(X_i)}$, und da die $v_d^{(i)}$ injektiv sind, auch

$$v_d^{(i)} \circ w_i = \mathrm{id}_{\tilde{V}_+ \cap D(Y_{(0,\cdots,\underset{(i)}{d},\cdots,0)})},$$

also $w_i = \left(v_d^{(i)}\right)^{-1}$, auch als Morphismus.

Aufgrund der Injektivität von v_d sind die w_i miteinander verträglich (d.h. auf gemeinsamen Definitionsbereich jeweils identisch), es existiert also eine Verklebung

$$w : \tilde{V}_+ = \bigcup_{i=0}^{n} \left(\tilde{V} + \cup D(Y_{(0,\cdots,\underset{(i)}{d},\cdots,0)})\right) \longrightarrow \bigcup_{i=0}^{n} D_+(X_i) = \mathbb{P}_k^n$$

mit $w|_{\tilde{V} + \cup D(Y_{(0,\cdots,\underset{(i)}{d},\cdots,0)})} = w_i$ für alle i. Es ist also $w = v_d^{-1}$ inverse Abbildung, und nach dem Lokal-Global-Prinzip ist w auch ein Morphismus. □

Definition 6.51. $v_d : \mathbb{P}_k^n \to \mathbb{P}_k^{\binom{n+d}{n}-1}$ *heißt auch* ***Veronese-Einbettung von*** $\mathbb{P}_k^n$.
Für $n = 1$ *und*

$$\begin{aligned} v_d : \mathbb{P}_k^1 &\hookrightarrow \mathbb{P}_k^{\binom{1+d}{1}-1} = \mathbb{P}_k^d \\ (a : b) &: \longmapsto (b^d : b^{d-1} \cdot a : \ldots : a^d) \end{aligned}$$

heißt $v_d(\mathbb{P}^1_k) \subsetneqq \mathbb{P}^d_k$ *auch die* ***Normalkurve im projektiven Raum****. Diese ist isomorph zu* $\mathbb{P}^1_k$.

Beispiel 6.7.15.

$d = 2$**:** Hier ist

$$\begin{aligned} v_2 : \mathbb{P}^1_k &\hookrightarrow \mathbb{P}^2_k \\ (a:b) &\mapsto (b^2 : ab : a^2) \end{aligned}$$

mit $v_2(\mathbb{P}^1_k) = V_+(Y_0 \cdot Y_2 - Y_1^2)$.

$d = 3$**:** Hier haben wir

$$\begin{aligned} v_3 : \mathbb{P}^1_k &\hookrightarrow \mathbb{P}^3_k \\ (a:b) &\mapsto (b^3 : b^2a : ba^2 : a^3) \end{aligned}$$

und $v_3(\mathbb{P}^1) = V_+(Y_0 \cdot Y_3 - Y_1 \cdot Y_2, Y_0 \cdot Y_2 - Y_1^2, Y_1 \cdot Y_3 - Y_2^2)$ ist die **projektive räumliche Normalkurve im Raum** $\mathbb{P}^3_k$, welche zwar Durchschnitt von drei Hyperflächen ist, aber nicht Durchschnitt zweier projektiver Hyperflächen (ohne Beweis) und damit **Kroneckers Kurven-Problem**[9] löst.

Bemerkung. Im Affinen ist die Veronese-Abbildung zwar injektiv, aber nicht mehr abgeschlossen.

Bemerkung. Der projektive Raum lässt sich darstellen als disjunkte Vereinigung affiner Räume:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^n &\cong \mathbb{A}^n_k \,\dot\cup\, \mathbb{P}^{n-1}_k \\ &\cong \dots \\ &\cong \mathbb{A}^n_k \,\dot\cup\, \mathbb{A}^{n-1}_k \,\dot\cup \dots \dot\cup\, \mathbb{A}^1_k \,\dot\cup\, \mathbb{A}^0_k \end{aligned}$$

$\boxed{\mathrm{PGL}_k(n)}$

$\boxed{\text{SATZ 6.7.12.}}$ *Automorphismen-Gruppe des* $\mathbb{P}^n_k$

(1) $\mathrm{Aut}_{\underline{\mathrm{PreVar}_k}}(\mathbb{P}^n_k) = \mathrm{PGL}_k(n) := {}^{GL_k(n+1)}\!/\!_{k^*}$

(2) $\mathrm{Aut}_{\underline{\mathrm{PreVar}_k}}(\mathbb{P}^n_k) = \mathrm{Aut}_{\mathrm{linear}}(\mathbb{P}^n_k)$

Beweis. Sei $f : \mathbb{P}^n_k \to \mathbb{P}^n_k$ ein Varietäten-Automorphismus, $f = (H_0 : \ldots : H_n)$, H_i homogen vom Grad d, ohne gemeinsame Nullstelle (außer $0 \in \mathbb{A}^{n+1}_k$). Sei $g : \mathbb{P}^n_k \to \mathbb{P}^n_k$ der inverse Automorphismus zu f, etwa $g = (G_0 : \ldots : G_n)$, G_i homogen, $\deg g_i = e$, keine gemeinsamen Nullstellen außer 0. Wir haben dann

$$f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{P}^n_k} = g \circ f,$$

[9] ich habe im Netz gerade überhaupt nichts zu diesem Problem gefunden ...

und damit für alle $a \in \mathbb{P}_k^n$:

$$\begin{aligned}(X_0(a) : \ldots : X_n(a)) &= a \\ &= g(f(a)) \\ &= (G_0(f(a)) : \ldots : G_n(f(a))) \\ &= (G_0(H_0(a) : \ldots : H_n(a)) : \ldots : G_n(H_0(a) : \ldots : H_n(a)))\end{aligned}$$

Das ergibt also

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \sim_{k^*} & G_0(H_0 : \ldots : H_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \underbrace{X_n}_{\deg \square = 1} & \sim_{k^*} & \underbrace{G_n(H_0 : \ldots : H_n)}_{\deg \square = e \cdot d} \end{array}$$

(Die Gradbetrachtung gilt für alle Zeilen, obwohl uns eine genügt.) Damit ist $1 = e \cdot d$, also $e = d = 1$, also sind die H_i und G_i lineare Polynome, also sind f und g projektive lineare Abbildungen, homogen und umkehrbar. Wir erhalten

$$(*) \qquad f(a) = A \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

mit $A \in GL(n+1, k) = GL_k(n+1)$. A ist bis auf k^*-Äquivalenz eindeutig, also definiert f genau ein $\tilde{A} \in PGL_k(n)$. Umgekehrt definiert auch jede Matrix $\tilde{A} \in PGL_k(n)$ mittels $(*)$ einen Morphismus $f : \mathbb{P}_k^n \to \mathbb{P}_k^n$, welcher $f^{-1} \mathrel{\hat{=}} \tilde{A}^{-1}$ als inversen Morphismus hat. Etwas nachrechnen zeigt, dass

$$\begin{aligned}\mathrm{Aut}_{\underline{\mathrm{PreVar}}_k}(\mathbb{P}_k^n) &\xrightarrow{\sim} PGL_k(n) \\ f &\longleftrightarrow A\end{aligned}$$

sogar ein Gruppenisomorphismus ist. $\square$

> $\boxed{\text{Satz 6.7.13.}}$ Sei $F \in k[X_0, \cdots, X_n]$, F homogen, $\deg F > 1$ und $D_+(F) \subseteq \mathbb{P}_k^n$ die dazugehörige offene quasiprojektive Untervarietät. Dann ist $(D_+(F), \mathcal{O}_{D_+(F)})$ sogar schon affin.

Bemerkung. Dies ist nicht trivial! Man kann nicht wie folgt argumentieren:
Betrachte

$$\mathbb{A}_k^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}_k^n$$

und

$$\pi^{-1}(D_+(F)) = D(F) \xrightarrow{\pi_{D_+(F)}} D_+(F),$$

wobei $D(F)$ affin und k^*-invariant ist, mit $0 \notin D(F)$. Es ist im topologischen Sinne $D_+(F) = {}^{D(F)}\!/\!_{k^*}$.

Aber aus der Affinität von $D_+(F)$ folgt nicht automatisch, dass ${}^{D(F)}\!/\!_{k^*}$ affin ist, denn es ist ja

$$\mathcal{O}_{D_+(F)}(D_+(F)) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(D_+(F)) = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+1}_k}(D(F))^{k^*}.$$

Dabei ist $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+1}_k}(D(F)) = (k[X_0, \cdots, X_n])_F \cong {}^{k[X_0,\cdots,X_n,Y]}\!/\!_{(Y\cdot F-1)}$ eine endlich erzeugte k-Algebra, und es ist überhaupt nicht klar, warum dann auch $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+1}_k}(D(F))^{k^*}$ endlich erzeugt sein soll, denn Unterringe von noetherschen Ringen sind nicht notwendig noethersch.

Beweis. Sei $\deg F = d \geq 1$, F homogen, etwa

$$F = \sum_{\nu \in \Xi_d} a_\nu \cdot X_0^{\nu_0} \cdot \ldots \cdot X_n^{\nu_n}.$$

Betrachten wir die d-te Veronese-Abbildung

$$v_d : \mathbb{P}^n_k \xrightarrow{\sim} \tilde{V}_+ = v_d(\mathbb{P}^n_k) \subsetneqq \mathbb{P}_k^{\binom{n+d}{d}-1}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} v_d(D_+(F)) &= \tilde{V}_+ \cap D_+\Big(\sum_{\nu\in\Xi_d} a_\nu \cdot Y_\nu\Big) \\ &= \tilde{V}_+ \cap \Big(\underbrace{\mathbb{P}_k^{\binom{n+d}{d}-1} \setminus V_+\big(\underbrace{\sum_{\nu\in\Xi_d} a_\nu \cdot Y_\nu}_{\text{lineares Polynom}}\big)}_{\text{projektive Hyperebene}}\Big) \end{aligned}$$

Die markierte Hyperebene im $\mathbb{P}_k^{\binom{n+d}{d}-1}$ entsteht als Bild der Projektion $\pi_* : \mathbb{A}_k^{\binom{n+d}{d}} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}_k^{\binom{n+d}{d}-1}$ aus der affinen Hyperebene

$$H = V\Big(\sum_{\nu\in\Xi_d} a_\nu \cdot Y_\nu\Big).$$

H ist sogar ein k-Untervektorraum von $\mathbb{A}^{\binom{n+d}{d}}$ der Kodimension 1. Es gibt daher einen Automorphismus $\tilde{\sigma} \in \mathrm{Aut}_k(\mathbb{A}_k^{\binom{n+1}{d}})$, $\tilde{\sigma} \triangleq B \in k^{\binom{n+d}{d}\times\binom{n+d}{d}}$, der H in

$$\tilde{\sigma}(H) = V(Y_{(d,0,\cdots,0)})$$

transformiert. $\tilde{\sigma}$ stiftet ein $\check{\sigma} \in PGL_k(\binom{n+d}{d} - 1)$, also einen Automorphismus $\sigma \in \mathrm{Aut}_{\underline{\mathrm{PreVar}}_k}\big(\mathbb{P}_k^{\binom{n+d}{d}-1}\big)$. Es ergibt sich

$$(\sigma \circ v_d)(D_+(F)) = \underbrace{\sigma(\tilde{V}_+)}_{\text{abgeschlossen}} \cap \underbrace{D_+(Y_{(d,0,\cdots,0)})}_{\text{bekanntermaßen affin}},$$

also ist $(\sigma \circ v_d)(D_+(F))$ als abgeschlossene Teilmenge einer affinen Menge ebenfalls affin. Damit ist $D_+(F)$ (da isomorph dazu) ebenfalls affin. □

Es gilt also insbesondere:

$$\mathcal{O}_{D_+(F)}(D_+(F)) = \mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^{n+1}}(D(F))^{k^*}$$

ist endlich erzeugt.

Bemerkung. Hiermit wurde für einen Spezialfall ($A = \mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^{n+1}}(D(F))$, $G := (k^*, \cdot)$) eine positive Antwort auf das sogenannte *14. Hilbertsche Problem* gegeben. Hilbert fragte: Sei G Grupppe, die auf $k[X_1, \cdots, X_n]$ als k-Algebren-Automorphismengruppe operiert. Ist dann $k[X_1, \cdots, X_n]^G$ endlich erzeugte k-Algebra?

VERALLGEMEINERUNG. Sei A beliebige endlich erzeugte k-Algebra, $(G, \cdot)$ Gruppe und

$$\begin{aligned} G \times A &\xrightarrow{\varphi} A \\ (g, \alpha) &\longmapsto \varphi(g, \alpha) =: g \cdot \alpha \end{aligned}$$

eine Gruppenwirkung mit:

(1) Für alle $g \in G$ ist $\lambda_g : A \longrightarrow A$ ein k-Algebra-Homomorphismus.
$\alpha \longmapsto g \cdot \alpha$

(2) G ist **lineare algebraische Gruppe**, d.h. $G \subseteq GL_k(m)$ ist Untergruppe, Zariski-abgeschlossen, so dass die Gruppenoperationen $\cdot$ und $\square^{-1}$ stetig sind.

Dann gilt: A^G ist stets eine endlich erzeugte k-Algebra.

Beispiel 6.7.16.

(a) $GL_k(n)$ ist algebraische Gruppe, denn $GL_k(n) = D(\det) \subseteq \mathbb{A}_k^{n^2}$ und

$$\begin{aligned} \det : \mathbb{A}_k^{n^2} &\longrightarrow k \\ (x_{11}, \cdots, x_{nn}) &\longmapsto \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot x_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot x_{n\sigma(n)} \end{aligned}$$

ist eine reguläre Funktion. Dabei ist

$$\mathbb{A}_k^{n^2} \supset D(\det) \cong V(Y \cdot \det - 1) \subseteq \mathbb{A}_k^{n^2+1}$$

mit

$$A\left[\mathbb{A}_k^{n^2+1}\right] = k[X_{11}, \cdots, X_{nn}, Y],$$

also

$$A[GL_k(n)] \cong k[X_{11}, \cdots, X_{nn}, Y]/_{(Y \cdot \det - 1)},$$

und $Y \cdot \det - 1$ ist irreduzibel nach Eisenstein. Damit ist $(GL_k(n), A[GL_k(m)])$ eine affine Varietät.

(b) $(k^*, \cdot)$ ist ebenfalls algebraische Gruppe:

$$\begin{aligned} k^* &= D(T) \subseteq \mathbb{A}^1_k \\ &\cong V(Y \cdot T - 1) \subseteq \mathbb{A}^2_k. \end{aligned}$$

und sogar lineare Gruppe mit der Einbettung

$$\begin{aligned} k^* &\hookrightarrow GL_k(m) \\ \lambda &\mapsto \begin{pmatrix} \lambda & & & & \\ & \frac{1}{\lambda} & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei

$$k^* \cong V\left(X_{11} \cdot X_{22} - 1, X_{33} - 1, \cdots, X_{nn} - 1, X_{ij} \mid i \neq j\right)$$

(c) Ist G endliche Gruppe, dann ist G affin und sogar linear.

Beweis. $(G, \mathrm{Abb}(G, k))$ ist offenbar k-Varietät. Es ist

$$\mathrm{Abb}(G, k) = k[\delta_g \mid g \in G] = k[G]$$

mit

$$\begin{aligned} \delta_g : G &\to k \\ \gamma &\mapsto \delta_{g\gamma} = \begin{cases} 1 & \gamma = g \\ 0 & \gamma \neq g \end{cases} \end{aligned}$$

Damit wird G affin linear, via $G \hookrightarrow GL_k(m)$, m geeignet. Darstellung z.B. als Translation

$$\begin{aligned} g : k^m &\to k^m \qquad\qquad \text{in } GL_k(m) \\ x &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

□

(d) $SL_k(n) \subseteq GL_k(n)$ ist ebenfalls lineare algebraische Gruppe, es ist

$$k[X_{11}, \cdots, X_{nn}]^{SL_k(n)} = \left\{ P \mid P(\gamma^-1 \circ A \circ \gamma) = P(A) \forall A \in k^{n^2}, \gamma \in SL_k(n) \right\}$$

Hilbert zeigte 1891, dass $k[X_{11}, \cdots, X_{nn}]^{SL_k(n)}$ endlich erzeugt ist.

1958 gab Nagata ein Gegenbeispiel für das 14. Hilbertsche Problem. Es stellt sich die *Frage.* Für welche Gruppen $G \subseteq GL_k(m)$ ist die Hilbertsche Vermutung noch richtig?

Definition 6.52. *Eine lineare algebraische Gruppe G heißt* **reduktiv**, *falls für alle (endlichen, d.h. $\dim V < \infty$) Gruppendarstellungen $\rho \in \mathrm{Hom}_{Gr}(G, GL(V))$, V beliebiger Vektorraum,*

$$\rho : G \to GL(V)$$

und die induzierte Wirkung

$$\begin{aligned} G \times V &\to V \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x := \rho(g)(x) \end{aligned}$$

gilt:

(1) $\forall$ Untervektorräume $W \subseteq V$, W G-invariant (also $\rho(g)(W) \subseteq W$ $\forall g \in G$) und $W \oplus Y = V$ ist Y ebenfalls G-invariant.

(2) G wirkt auf einer endlich erzeugten k-Algebra A als Automorphismengruppe, d.h.

$$\forall g \in G : \quad \begin{pmatrix} \lambda_g : A \to A \\ \qquad x \mapsto g \cdot x \end{pmatrix} \in \mathrm{Aut}_{k\text{-Alg}}(A) \subseteq GL(A),$$

d.h. $\begin{aligned} G &\hookrightarrow \mathrm{Aut}_{k\text{-Alg}}(A) \\ g &\mapsto \lambda_g \end{aligned}$

$\boxed{\text{Satz 6.7.14.}}$ *(Nagata)*
Sei G eine reduktive lineare algebraische Gruppe, A endliche erzeugte k-Algebra, $k = \overline{k}$, dann ist A^G ebenfalls endlich erzeugt.

Beweis für den Spezialfall einer endlichen Gruppe. Sei $G \times A \xrightarrow{\varphi} A$ Gruppenwirkung, G endlich, A endlich erzeugte k-Algebra mit zugeordneter Darstellung (nicht notwendigerweise injektiv)

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow \mathrm{Aut}_{k\text{-Alg}}(A) \\ g &\longmapsto \lambda_g. \end{aligned}$$

Es ist zu zeigen, dass A^G nun ebenfalls endlich erzeugt ist. (G ist offenbar reduktiv, aber das braucht man hier gar nicht explizit.)

Betrachte die k-Unteralgebra

$$A^G = \{\alpha \in A \mid g \cdot \alpha = \alpha \ \forall g \in G\} \subseteq A.$$

Sei $\alpha \in A \setminus \{0\}$, dann gilt für das spezielle Polynom $P_\alpha(T) := \prod_{g \in G}(T - g \cdot \alpha) \in A[T]$: Wenn $G = \{e = g_1, g_2, \cdots, g_d\}$ ist, so ist $P_\alpha(\alpha) = 0$ (denn $\alpha = e\alpha$).

Nun ist

$$\begin{aligned} P_\alpha(T) &= (T - g_1\alpha) \cdot \ldots \cdot (T - g_d\alpha) \\ &= T^d + \sum_{i=1}^{d} (-1)^i \cdot \sigma_k(g_1\alpha, \cdots, g_d\alpha) \cdot T^{d-i}, \end{aligned}$$

wobei

$$\sigma_k(X_1, \cdots, X_d) = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le d} X_{i_1} \cdot \ldots \cdot X_{i_k}$$

$\boxed{\sigma_k}$ die k-te **elementarsymmetrische Funktion** in d Variablen ist. Für die elementarsymmetrischen Polynome gilt:

$$\begin{aligned} \sigma_1(X_1, \cdots, X_d) &= X_1 + \ldots + X_d \\ \sigma_2(X_1, \cdots, X_d) &= X_1X_2 + \ldots + X_1X_d + X_2X_3 + \ldots + X_{d-1}X_d \\ &\vdots \\ \sigma_d(X_1, \cdots, X_d) &= X_1 \cdot \ldots \cdot X_d, \end{aligned}$$

und S_k hat in dieser Darstellung $\binom{d}{k}$ Summanden.

Außerdem ist natürlich $\sigma_k(g_1\alpha, \cdots, g_d\alpha) \in A^G$, da

$$\begin{aligned} & g_j \cdot \sigma_k(g_1\alpha, \cdots, g_d\alpha) \\ &= \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le d} g_j \cdot (g_{i_1} \cdot \alpha) \cdot \ldots \cdot g_j \cdot (g_{i_k}\alpha) \\ &= \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le d} \underbrace{(g_j \cdot g_{i_1})}_{=:g_{j_1}} \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot (g_j \cdot g_{i_k})_{=:g_{j_k}} \alpha \end{aligned}$$

(Verschieben der Summationsindices)

$$= \sigma_k(g_1\alpha, \cdots, g_k\alpha)$$

Folglich ist $P_\alpha(T) \in A^G[T] \subseteq A[T]$ und $P_\alpha(T)$ ist normiert mit $P_\alpha(\alpha) = 0$, also ist $A^G \subseteq A$ ganze Erweiterung.

> BEHAUPTUNG. $A^G \subseteq A$ ist sogar endliche Erweiterung, d.h. A ist endlich erzeugter A^G-Modul.

Beweis. Sei $A = k[\eta_1, \cdots, \eta_s]$, die η_i ganz über A^G. Dann haben wir

$$A^G \subseteq A^G[\eta_1] \subseteq A^G[\eta_1, \eta_2] \subseteq \ldots \subseteq A^G[\eta_1, \cdots, \eta_s] = G$$

wobei aufgrund der Ganzheit von η_1 der Ring $A^G[\eta_1]$ nach Satz 6.5.1 endlich erzeugter A^G-Modul ist, und ebenso $A^G[\eta_1, \eta_2] = A^G[\eta_1][\eta_2]$ ein endlich erzeugter $A^G[\eta_1]$-Modul, also auch endlich erzeugter A^G-Modul ist usw. □

Betrachte nun $P_{\eta_i}(T)$ mit $P_{\eta_i}(\eta_i) = 0$ wie oben. Wir erhalten

$$k^@ := k[\cdots \text{ Koeffizienten der } P_{\eta_i} \mid i \in \{1, \cdots, s\}] \subseteq A^G \subseteq A$$

als endliche Erweiterungen. Dabei ist $k^@$ noetherscher Ring und A endlich erzeugter Modul darüber, also ebenfalls noethersch.

A^G ist dann als Untermodul des noetherschen Moduls A wieder noethersch, also endlich erzeugt. □

Bemerkung. In diesem Fall ist $A^G \overset{i}{\hookrightarrow} A$ endliche Erweiterung endlich erzeugter k-Algebren und damit existiert ein k-Varietäten-Morphismus

$$X := \operatorname{Specm} A \overset{q}{\twoheadrightarrow} \operatorname{Specm} A^G =: Y,$$

surjektiv nach Satz 6.5.6 (Cohen-Seidenberg), mit $q^\# = i : A^G \to A$. $q^\#$ ist damit endlicher Morphismus mit endlichen Fasern, also $\dim_{\text{Krull}} A = \dim_{\text{Krull}} A^G$.

6.8 Geometrische Invariantentheorie affiner Varietäten (Hilbert-Nagata-Mumford-Theorie)

Problem. (**14. Hilbertsches Problem**)

(a) Sei $k \subseteq K \subseteq k(X_1, \cdots, X_n)$ Körperturm. Ist dann $K \cap k[X_1, \cdots, X_n]$ endlich erzeugt?

(b) Sei k Körper, A endlich erzeugte k-Algebra, G lineare algebraische Gruppe, $\rho : G \to \operatorname{Aut}_{k\text{-Alg}}(A)$ eine Darstellung, die eine Wirkung

$$\begin{aligned} G \times A &\to A \\ (g, \alpha) &\mapsto g \cdot \alpha := \rho(g)(\alpha) \end{aligned}$$

induziert.

Ist dann $A^G := \{\alpha \in A \mid g\alpha = \alpha \forall g \in G\}$ endlich erzeugt?

Sehen wir uns zunächst das weniger schwere (b) an, und geben eine partielle Antwort.

(1) Ist G endlich, $k = \overline{k}$, so ist A^G endlich erzeugt. (Dies hatten wir als Spezialfall von Satz 6.7.14 im letzten Kapitel bewiesen.)

(2) Ist G reduktiv, $k = \overline{k}$, so ist A^G endlich erzeugt. (Satz 6.7.14, von Nagata 1958 bewiesen.)

(3) Ist G nicht reduktiv, $k = \overline{k}$, so muss A^G nicht endlich erzeugt sein. (Ein Beispiel wurde von Nagata 1985 gegeben.)

(Literatur dazu: Masayoshi Nagata; M Pavaman Murthy, *Lectures on the fourteenth problem of Hilbert*, Bombay, Tata Institute of Fundamental Research, 1965.)

Wir haben gesehen:
Ist A endlich erzeugte k-Algebra, $G \times A \to A$ Wirkung mit Darstellung $\rho : G \to \mathrm{Aut}_{k\text{-Alg}}(A)$, dann ist $A^G \subseteq A$ ganze, sogar endliche Erweiterung.

Geometrische Interpretation
Sei $(X, \mathcal{O}_X(X) =: A)$ affine k-Varietät, $G \subseteq GL_k(n)$ endliche algebraische lineare Gruppe, $G \times X \to X$ algebraische Wirkung von G auf X, dann haben wir hier eine Darstellung $\rho : G \to \mathrm{Aut}_{\underline{\mathrm{Var}}_k}(X)$. Dann hat man via

$$\begin{aligned} \pi : X &\to {}^{X}\!/_{G} \\ x &\mapsto Gx \end{aligned}$$

$\boxed{{}^{X}\!/\!\!/_{G}}$ auch ${}^{X}\!/_{G}$ als topologischen Quotienten. Zudem hat man noch den **kategoriellen Quotienten** ${}^{X}\!/\!\!/_{G} := \mathrm{Specm}\, A^G$. Da G endlich ist, ist A^G endlich erzeugt, also $({}^{X}\!/\!\!/_{G}, A^G)$ affine k-Varietät. ${}^{X}\!/_{G}$, der Orbitraum, ist a priori nur topologischer Raum mit Zariski-Quotiententopologie von X.

Frage. Sind ${}^{X}\!/\!\!/_{G}$ (mit A^G-Zariski-Topologie) und ${}^{X}\!/_{G}$ mit π-Quotienten-Topologie homöomorph, so dass $({}^{X}\!/_{G}, A^G)$ wieder affine Varietät ist?

Antwort. Wenn G endlich ist, dann ja. Ist G nur reduktiv, dann ist A^G zwar endlich erzeugt, aber ${}^{X}\!/_{G}$ nicht unbedingt affine Varietät, wie wir im Folgenden sehen werden.

$\boxed{\text{Satz 6.8.1.}}$ *(Endlicher Fall)*
Sei $(X, \mathcal{O}_X(X) =: A)$ affine k-Varietät, G endliche, lineare, algebraische Gruppe, die auf X als algebraische Transformationsgruppe wirkt, ${}^{X}\!/\!\!/_{G} := \mathrm{Specm}\, A^G$ der kategorielle Quotient. Dann hat $({}^{X}\!/\!\!/_{G}, A^G)$ die folgende *Universaleigenschaft bezüglich* (X, G):

(1) Der kanonische Morphismus $X \xrightarrow{q} {}^{X}\!/\!\!/_{G}$ mit $q^\# = i : A^G \hookrightarrow A$ ist surjektiv und konstant auf den Orbits:

$$\forall X \in X, \forall g \in G : \quad q(g(x)) = q(x) \quad \text{bzw.} \quad q(Gx) = \{q(x)\}\,.$$

(2) Ist $X \xrightarrow{f} Y$, $f \in \mathrm{Mor}_{\underline{\mathrm{Var}}_k^{\mathrm{aff}}}(X, Y)$ und f konstant auf den G-Orbits, dann existiert genau ein Morphismus $h : {}^{X}\!/\!\!/_{G} \to Y$ mit $f = h \circ q$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q"'] & & Y \\ & {}^{X}\!/\!\!/_{G} \arrow[ur, dashed, "\exists! h"'] & \end{tikzcd}$$

Beweis.

(1) Die Surjektivität von q mit $q^{\#} = i$ folgt aus der Endlichkeit von $i : A^G \hookrightarrow A$ und kommutativer Algebra (Satz 6.5.6).

Bemerkung. Man kann dies auch ad hoc zeigen und diese Methode ist sogar verallgemeinerbar auf allgemeine reduktive Gruppen (Methode der Reynolds-Operatoren/Averaging Operators):

Definition 6.53. *Für $k = \overline{k}$, G eine endliche Gruppe, die auf A operiert,* $\operatorname{char}(k) \not| |G|$ *heißt die Abbildung*

$$\begin{aligned} R : A &\longrightarrow A^G \\ f &\longmapsto \sum_{g \in G} g \cdot f \end{aligned}$$

der ***Reynolds-Operator*** *zu G auf A.*

R ist offenbar k-linear, $R(f) \in A^G$ für $f \in A$ und $R(f) = f$ für $f \in A^G$, $R^2 = R$ (also R surjektiv), $R(f \cdot h) = f \cdot R(h)\ \forall f \in A^G, h \in A$.

Fazit. Wir haben also $A \overset{R}{\twoheadrightarrow} A^G \overset{i}{\hookrightarrow} A$ mit $R \circ i = \mathrm{id}_{A^G}$.

$\boxed{\text{Lemma.}}$ Für alle Ideale $\mathfrak{a} \subseteq A^G$ (nicht notwendig auch Ideale in A) gilt: $(\mathfrak{a} \cdot A) \cap A^G = \mathfrak{a}$.

Beweis. $\supset$ ist klar. Umgekehrt: Sei $f \in (\mathfrak{a} \cdot A) \cap A^G$, dann ist $f = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \cdot h_i \in A^G$, mit $\alpha_i \in \mathfrak{a}$, $h_i \in A$. Daher ist

$$f = R(f) = \sum_{i=1}^{s} R(\alpha_i h_i) = \sum_{i=1}^{s} \underbrace{\alpha_i}_{\in \mathfrak{a}} \cdot \underbrace{R(h_i)}_{\in A^G} \in \mathfrak{a}. \qquad \square$$

Bemerkung. Es gilt eine 1–1-Korrespondenz:

$$\left\{ \begin{matrix} \text{Ideale} \\ \text{in } A^G \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{matrix} \text{Ideale} \\ \text{in } A \end{matrix} \right\}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} &\longmapsto \mathfrak{a} \cdot A \\ \mathfrak{a} \cap A^G &\longleftarrow\!\shortmid\ \mathfrak{a}, \end{aligned}$$

die sogar inklusionserhaltend ist. Dies beweist im ganz allgemeinen Fall für $\operatorname{char}(A) \not| |G| \in \mathbb{N}$, $G \times A \to A$, A Ring, G endliche Gruppe, mit Darstellung $\rho : G \to \operatorname{Aut}_{\text{Ringe}}(A)$, dass A genau dann noethersch ist, wenn A^G noethersch ist.

Betrachte nun noch einmal $X \xrightarrow{q} X/\!\!/G$, $q^{\#} = i$ ist injektiv, also q dominant.

Sei $y \in {}^{X}\!/\!\!/_{G}$, $y = \mathfrak{m} \in \operatorname{Specm}(A^G)$. Dann ist $q^{-1}(y) = V(\sqrt{\mathfrak{m}A}) \subseteq X$, mit $A = \mathcal{O}_X(X)$.

Angenommen, q ist nicht surjektiv, also $\exists y : q^{-1}(y) = \varnothing$. Dann existiert $\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} A^G$ mit $\mathfrak{m}A = A$, also $\mathfrak{m} = (\mathfrak{m}A) \cap A^G = A^G$, im Widerspruch zu $\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} A^G$.

Es bleibt zu zeigen, dass q auf den G-Orbits konstant ist. Das bekannte Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\chi_X"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & {}^{X}\!/\!\!/_{G} \arrow[d, "\chi({}^{X}\!/\!\!/_{A})"] \\
\operatorname{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, k) \arrow[r, "\hom(i)"'] & \operatorname{Hom}_{k\text{-Alg}}(A^G, k)
\end{tikzcd}$$

ist kommutativ. Daher gilt für alle $x \in X$ und $g \in G$:

$$\begin{aligned}
& \forall x \in X : && q(gx) = q(x) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x \in X : && \chi\left({}^{X}\!/\!\!/_{G}\right) q(gx) = \chi\left({}^{X}\!/\!\!/_{G}\right) q(x) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x \in X : \forall f \in A^G : && f(q(gx)) = f(q(x)) \\
\Leftrightarrow\ & \forall x \in X : \forall f \in A^G : && q^\#(f)(gx) = q^\#(f)(x)
\end{aligned}$$

$(q^\# = i)$

$$\Leftrightarrow\ \forall x \in X : \forall f \in A^G : \qquad f(gx) = f(x)$$

und das letzte ist bekanntlich erfüllt (das ist ja gerade die Definition von A^G).

(2) Sei $X \xrightarrow{f} Y$ Morphismus affiner Varietäten, konstant auf den G-Orbits in X, $A := \mathcal{O}_X(X)$, $B := \mathcal{O}_Y(Y)$. Dann haben wir auch $f^\# : B \to A$. Für alle $\beta \in B$ gilt dann

$$\begin{aligned}
f^\#(\beta)(gx) &= \beta(f(gx)) \\
&= \beta(f(x)) \quad \text{(da } f \text{ auf } G\text{-Orbits konstant)} \\
&= f^\#(\beta)(x),
\end{aligned}$$

also ist $f^\#(\beta) \in A^G$. Damit entsteht die (eindeutige) Faktorisierung

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "f^\#"] \arrow[dr, "\tilde{f}^\#"'] & & A \\
& A^G, \arrow[ur, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

welche ihrerseits eine Faktorisierung von f induziert:

$$\begin{tikzcd}
Y & & X \arrow[ll, "f"'] \arrow[dl, "q"] \\
& {}^{X}\!/\!\!/_{G} \arrow[ul, dashed, "\exists! h := \tilde{f}"] &
\end{tikzcd}$$

Damit ist unser Satz bewiesen. $\square$

Weitere charakteristische Eigenschaften von $X \xrightarrow{q} X/\!\!/G$ im endlichen Fall

Satz 6.8.2. *(G-Abgeschlossenheit von q)*
Seien X und G wie üblich, $W \in \operatorname{Abg}(X)$ G-invariant, d.h. $g \cdot W \subseteq W$ für alle $g \in G$. Dann ist $q(W) \in \operatorname{Abg}\left(X/\!\!/G\right)$ (d.h. abgeschlossen bezüglich der A^G-Zariski-Topologie auf $X/\!\!/G = \operatorname{Specm} A^G$).

Beweis. Sei $W = V(\mathfrak{a})$, $I(W) =: a$, $\mathfrak{a} \subseteq A$ radizielles Ideal, also $A[W] = A/\mathfrak{a}$. Da W G-invariant ist, gilt für $f \in \mathfrak{a}$:

$$\begin{aligned}
&\forall x \in W : && f(x) = 0 \\
\Rightarrow\ &\forall g \in G : && \forall x \in W : f(gx) = 0 \\
\Rightarrow\ &\forall g \in G : && \forall x \in W : (gf)(x) = 0 \\
\Rightarrow\ &\forall g \in G : && gf \in \mathfrak{a},
\end{aligned}$$

also ist $G \cdot \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}$, d.h. $\mathfrak{a}$ ist G-invariantes Ideal. Da W G-invariant und affin ist, existiert der kategoriale Quotient $W/\!\!/G$ mit $A\left[W/\!\!/G\right] = \left(A/\mathfrak{a}\right)^G$. Somit hat man für

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, two heads, "q"] \arrow[rr, bend right, "q_1"'] \arrow[rrr, bend right=40, "q_2"'] & q(W) \subseteq & \underbrace{\overline{q(W)}}_{\text{affin}} \subseteq & X/\!\!/G
\end{tikzcd}$$

das entsprechende Diagramm der Koordinatenringe:

$$\begin{tikzcd}
A/\mathfrak{a} & & A^G/\sqrt{A^G} = A^G/\mathfrak{a}^G \arrow[ll, "q_1^{\#}"'] \arrow[dl, "\tilde{\pi}_G"] & \mathfrak{a}^G := \mathfrak{a} \cap A^G \\
& \left(A/\mathfrak{a}\right)^G \arrow[ul, "j"] & &
\end{tikzcd}$$

Satz 6.8.1 und die Konstanz von q_1 auf den Fasern liefern eine Faktorisierung von q_1 unter $W/\!\!/G$. $\pi : A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{a}$ ist G-invarianter Homomorphismus, da $\mathfrak{a}$ G-invariant ist. Also gibt es $\pi_G : A^G \twoheadrightarrow \left(A/\mathfrak{a}\right)^G$, und dies ist surjektiv wegen der Existenz der Reynolds-Operatoren für A und $A/\mathfrak{a}$. Der Homomorphiesatz liefert $\tilde{\pi}_G : A^G/\ker \pi_G \cong \left(A/\mathfrak{a}\right)^G$, und es gilt $\ker \pi_G = \mathfrak{a}$. Zurück auf den definierenden Varietäten ergibt dies

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, two heads, "q"] \arrow[dr, "q_2"'] & q(W) \subseteq \overline{q(W)} \\
& W/\!\!/G \arrow[u, "l"']
\end{tikzcd}$$

mit $l^{\#} = \tilde{\pi}_G$. Also ist $q(W) = \overline{q(W)} \in \operatorname{Abg}(X/\!\!/G)$. $\square$

Satz 6.8.3. *(G-Trennungseigenschaft von $X \xrightarrow{q} X/\!\!/G$)*
Sei G endliche Gruppe $G \times X \to X$ algebraische Gruppenwirkung auf $X \in \operatorname{obj}(\underline{\mathrm{Var}}_k^{\mathrm{aff}})$, $\left(X/\!\!/G, \mathcal{O}_X(X)^G\right)$ der kategorielle Quotient. Dann gilt:
Sind $V, W \subseteq X$ abgeschlossen und G-invariant, $q : X \to X/\!\!/G$ die Quotientenabbildung, dann ist $q(V \cap W) = q(V) \cap q(W)$.

Beweis. Da V und W abgeschlossen und G-invariant sind, gilt dies auch für $V \cap W$. Folglich sind $q(V)$, $q(W)$, $q(V \cap W)$ sämtlich nach Satz 6.8.2 abgeschlossen in $X/\!\!/G$. Für Mengen-Abbildungen gilt ja allgemein $q(V \cap W) \subseteq q(V) \cap q(W)$. Wir müssen zeigen, dass die Einbettung $j : q(V \cap W) \hookrightarrow q(V) \cap q(W)$ auch surjektiv ist.

Betrachten wir dazu den adjungierten k-Algebra-Homomorphismus

$$j^{\#} : A[q(V) \cap q(W)] \twoheadrightarrow A[q(V \cap W)].$$

Seien $\mathfrak{a} := I(V)$, $\mathfrak{b} := I(W)$ die (radiziellen) Verschwindungsideale von V und W in $\mathcal{O}_X(X) =: A$, also $V = V(\mathfrak{a})$, $W = V(\mathfrak{b})$. Dann sind auch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ G-invariant, da dies für V und W galt. Seien $\mathfrak{a}^G := \mathfrak{a} \cap A^G$, $\mathfrak{b}^G := \mathfrak{b} \cap A^G$ die Zurückziehungen auf $A^G \subseteq A$, dann haben wir ja

$$j^{\#} : A^G\big/\sqrt{\mathfrak{a}^G + \mathfrak{b}^G} \twoheadrightarrow A^G\big/\sqrt{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}}^G,$$

wobei (wegen $f \in \sqrt{\mathfrak{a}^G + \mathfrak{b}^G} \Rightarrow \exists \nu \in \mathbb{N} : f^\nu \in \mathfrak{a}^G + \mathfrak{b}^G \subseteq \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \Rightarrow f \in \sqrt{\mathfrak{a} + b} \xRightarrow{f \in A^G} f \in \sqrt{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}}^G$) schon gilt

$$\sqrt{\mathfrak{a}^G + \mathfrak{b}^G} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}}^G \qquad \text{in } A^G.$$

Wir wollen nun noch zeigen, dass $j^{\#}$ ein Isomorphismus ist, also $\ker j^{\#} = (0)$, also $\sqrt{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}}^G = \sqrt{\mathfrak{a}^G + \mathfrak{b}^G}$. Die eine Hälfte ($\supseteq$) haben wir gezeigt, die andere hier:

Sei $f \in \sqrt{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}}^G$, dann existiert ein $\nu \in \mathbb{N}$ mit $f^\nu = \alpha + \beta$, $\alpha \in \mathfrak{a}, \beta \in \mathfrak{b}$. Dann haben wir den Reynolds-Operator $R : A \to A^G$, $R(\varphi) = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} g\varphi$, für den dann wegen $f \in A^G$ $R(f) = f$ gilt. Weiter ist

$$f^\nu = R(f^\nu) = R(\alpha) + R(\beta) \in \mathfrak{a}^G + \mathfrak{b}^G,$$

$f \in \sqrt{\mathfrak{a}^G + \mathfrak{b}^G}$. Insgesamt ist also wirklich $\sqrt{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}}^G = \sqrt{\mathfrak{a}^G + \mathfrak{b}^G}$, damit ist $j^{\#}$ Isomorphismus, also $q(V \cap W) = q(V) \cap q(W)$. □

Bemerkung. Beim Beweis war wieder die Existenz des Reynolds-Operators R wichtig, mit

$$R : A \to A, \qquad \operatorname{im}(R) = A^G, R^2 = R.$$

$\boxed{\text{Korollar.}}$ Ist G endlich, $G \times X \to X$ eine Wirkung, X affin, $\tilde{q} : X/G \to X/\!\!/G$ die durch die Universaleigenschaft von $X/\!\!/G$ gegebene Abbildung.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, two heads, "q"] \arrow[dr, "\pi = G\cdot\square"'] \arrow[rr, phantom, shift right=6ex, "\circlearrowleft"] & & X/\!\!/G \\ & X/G \arrow[ur, "\sim", "\tilde{q}"'] & \end{tikzcd}$$

Dann ist $\tilde{q}$ bijektiv.

Beweis. G ist endlich, also ist $\forall x \in X$ auch Gx endlich, also $Gx \in \operatorname{Abg}(X)$. Gx ist auch G-invariant, ist also nach Satz 6.8.2 $q(Gx)$ abgeschlossen in $X/\!\!/G$. Nach Satz 6.8.3 gilt dann für $Gx \neq Gy$ (d.h. $Gx \cap Gy = \varnothing$) auch $q(Gx) \cap q(Gy) = \varnothing$, also $\tilde{q}(Gx) \neq \tilde{q}(Gy)$. Das heißt $\tilde{q}$ ist injektiv, surjektiv sowieso, also bijektiv. $\square$

$\boxed{\text{Satz 6.8.4.}}$ Sei G endliche Gruppe, $G \times X \to X$ algebraische Wirkung, X affin, $X \overset{q}{\twoheadrightarrow} X/\!\!/G = \operatorname{Specm} A^G$ der kategoriale Quotient, $q^\# = i : A^G \hookrightarrow A = \mathcal{O}_X(X)$. Dann gilt: Die A^G-Zariski-Topologie auf $X/\!\!/G$ stimmt mit der durch $q : X \to X/\!\!/G$ erzeugten Quotienten-Topologie überein.

Beweis. Wir müssen zeigen: S Zariski-abgeschlossen in $X/\!\!/G \iff q^{-1}(S)$ ist abgeschlossen in X (d.h. S ist q-Quotienten-topologisch abgeschlossen).

$\Rightarrow$: q ist als Morphismus stetig.

$\Leftarrow$: Sei $S \subseteq X/\!\!/G$ und $q^{-1}(S) \in \operatorname{Abg} X$. Dann ist $q^{-1}(S) = \pi^{-1}(\tilde{q}^{-1}(S))$, also G-invariant. Nach Satz 6.8.2 ist also $q(q^{-1}(S)) \in \operatorname{Abg}(X/\!\!/G)$. Da q surjektiv ist, ist $S = q(q^{-1}(S))$, also S abgeschlossen in $X/\!\!/G$. $\square$

$\boxed{\text{Korollar.}}$ In dem Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, two heads, "q"] \arrow[dr, "\pi"'] \arrow[rr, phantom, shift right=6ex, "\circlearrowleft"] & & X/\!\!/G & \mathcal{O}_X(X)^G\text{-Zariski-Topologie} \arrow[l, dotted] \\ & X/G \arrow[ur, "\sim", "\tilde{q}"'] & & \pi\text{-Quotienten-Topologie} \arrow[lll, dotted] \end{tikzcd}$$

ist $\tilde{q}$ ein Homöomorphismus.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass $\tilde{q}$ bijektiv, stetig und abgeschlossen ist.

- Die Bijektivität haben wir in dem letzten Korrollar (auf Seite 345) gezeigt.
- $\tilde{q}$ ist stetig, denn ist $S \in \operatorname{Abg}(X/\!\!/G)$, so ist $q^{-1}(S) = \pi^{-1}(\tilde{q}^{-1}(S))$ abgeschlossen in X, also $\tilde{q}^{-1}(S) \in \operatorname{Abg}(X/G)$.
- $\tilde{q}$ ist abgeschlossen, denn ist $T \in \operatorname{Abg}(X/G)$, so ist $\pi^{-1}(T)$ abgeschlossen und G-invariant in X, also ist (nach Satz 6.8.2) auch $q(\pi^{-1}(T))$ abgeschlossen in $X/\!\!/G$, wobei
$$q(\pi^{-1}(T)) = \tilde{q}(\pi(\pi^{-1}(T))) = \tilde{q}(T).$$

Also ist $\tilde{q} : X/G \xrightarrow{\sim} X/\!\!/G$ ein Homöomorphismus. □

> $\boxed{\text{Fazit.}}$ Ist G endliche Gruppe, $G \times X \to X$ algebraische Wirkung auf affiner Varietät X, dann ist
> $$\left(X/G, \mathcal{O}_X(X)^G\right) \cong_{\underline{\mathrm{Var}}_k^{\mathrm{aff}}} \left(X/\!\!/G, \mathcal{O}_X(X)^G\right)$$
> und X/G ist auch eine affine Varietät mit Universaleigenschaft, $\pi : X \to X/G$ ist der universelle Morphismus.

Erinnerung. $X/\!\!/G$ heißt **geometrischer Quotient** von X und G, falls $X/\!\!/G$ kategorieller Quotient und $\tilde{q} : X/G \to X/\!\!/G$ Homöomorphismus ist.

> $\boxed{\text{Fazit.}}$ Ist G endlich, X affin, dann existiert stets der geometrische Quotient $X/\!\!/G = X/G$.

Da $X/\!\!/G$ affin ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit
$$X/\!\!/G \subseteq \mathbb{A}_k^N \subsetneq \mathbb{P}_k^N,$$
und folglich ist $\overline{X/\!\!/G}^{\mathbb{P}_k^N}$ eine mögliche Komplettisierung (Kompaktifizierung).

Beispiel 6.8.1. $G := \mathfrak{S}_n$, $X := \mathbb{A}_k^n$ mit der Wirkung
$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_n \times \mathbb{A}_k^n &\longrightarrow \mathbb{A}_k^n \\ (\sigma, a) &\longmapsto \sigma a := (a_{\sigma(1)}, \cdots, a_{\sigma(n)}) \end{aligned}$$

Wir haben dann
$$\mathbb{A}_k^n/\!\!/\mathfrak{S}_m \cong \mathbb{A}_k^n/\mathfrak{S}_n$$

und

$$\mathbb{A}_k^n \xrightarrow{q} \mathbb{A}_k^n /\!\!/ \mathfrak{S}_n$$

Dabei sind die Fasern von q endlich mit je $n!$ Elementen, weil $|\mathfrak{S}_n| = n!$ und es ist

$$\begin{aligned} A\left[\mathbb{A}_k^n/\mathfrak{S}_n\right] &= A\left[\mathbb{A}_k^n/\!\!/\mathfrak{S}_n\right] \\ &= k[X_1, \cdots, X_n]^{\mathfrak{S}_n} \\ &= \left\{P \in k[X_1, \cdots, X_n] \mid \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n : P(X_1, \cdots, X_n) = P(X_{\sigma(1)}, \cdots, X_{\sigma(n)})\right\} \\ &= k\text{-Algebra der symmetrischen Polynome in } n \text{ Variablen.} \end{aligned}$$

Man weiß:

(1) $k[X_1, \cdots, X_n]^{\mathfrak{S}_n} = k[\sigma_1, \cdots, \sigma_n]$, wobei

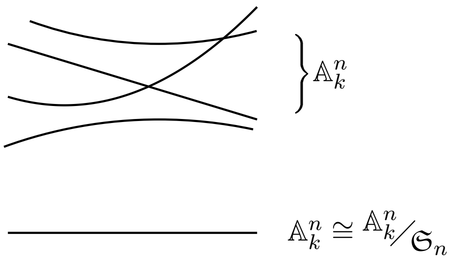
$$\sigma_k(X_1, \cdots, X_n) := \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} X_{i_1} \cdot \ldots \cdot X_{i_k}$$

die k-te **elementarsymmetrische Funktion** in n Variablen ist. (Beweis später). $\boxed{\sigma_k}$

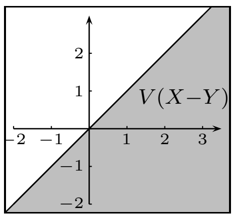
(2) $k[\sigma_1, \cdots, \sigma_n] \cong k[T_1, \cdots, T_n]$, denn $\{\sigma_1, \cdots, \sigma_n\}$ sind algebraisch unabhängig, d.h. $Q(\sigma_1, \cdots, \sigma_n) = 0 \Leftrightarrow Q = 0$.

Daher ist

$$\mathbb{A}_k^n /\!\!/ \mathfrak{S}_m \cong \mathbb{A}_k^n / \mathfrak{S}_n \cong \mathbb{A}_k^n$$



Wir haben hier also eine verzweigte Überlagerung, etwa verzweigt an der Diagonalen, wie noch besser im folgenden Beispiel zu erkennen ist.



Beispiel 6.8.2. Der Raum $\mathbb{A}_k^2/\mathfrak{S}_2$ ist verzweigt an der Diagonalen.

Beispiel 6.8.3. Wir betrachten die *unendliche* Gruppe $G := k^*$ mit $k = \overline{k}$, $X := \mathbb{A}_k^2$ und die Wirkung

$$\begin{aligned} k^* \times \mathbb{A}^2 &\longrightarrow \mathbb{A}^2 \\ (\lambda, (a, b)) &\longmapsto (\lambda a, \frac{1}{\lambda} b) \end{aligned}$$

und haben folgende

Fragen.

(1) Ist $k[X,Y]^{k^*}$ bzgl. dieser Wirkung endlich erzeugte k-Algebra?

(2) Falls ja, ist dann $\mathbb{A}^2_k/\!\!/_{k^*} = \operatorname{Specm}\left(k[X,Y]^{k^*}\right)$ sogar geometrischer Quotient, also homöomorph zu $\mathbb{A}^2_k/_{k^*}$?

ad (1) Es ist

$$\begin{aligned}
k[X,Y]^{k^*} &= \left\{P(X,Y) \mid \forall \lambda \in k^* : P(\lambda X, \frac{1}{\lambda} Y) = P(X,Y)\right\} \\
&= \left\{\sum_{(i,j)} a_{ij} X^i Y^j \mid \forall \lambda \in k^* : \sum_{(i,j)} a_{ij} \lambda^{i-j} X^i Y^j = \sum_{(i,j)} a_{ij} X^i Y^j\right\} \\
&= \left\{\sum a_i (XY)^i \mid a_i \in k\right\} \\
&= k[X \cdot Y] \subsetneqq k[X,Y].
\end{aligned}$$

Folglich ist $k[X \cdot Y]^{k^*} = k[X \cdot Y]$ endlich erzeugt (von $X \cdot Y$), also existiert $\mathbb{A}^2_k/\!\!/_{k^*}$.

ad (2) Damit haben wir die (universelle) Quotientenabbildung q mit dem induzierten $\tilde{q}$:

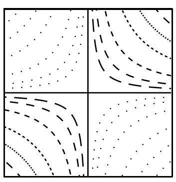
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}^2_k \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathbb{A}^2_k/\!\!/_{k^*} \\
& \mathbb{A}^2_k/_{k^*} \arrow[ur, "\tilde{q}"'] &
\end{tikzcd} \qquad \text{mit } q^\# = i : K[X \cdot Y] \subseteq k[X,Y]$$

Dabei haben wir

$$\begin{aligned}
k[T] &\xrightarrow[\theta]{\sim} k[X \cdot Y] \\
T &\longmapsto X \cdot Y,
\end{aligned}$$

denn θ ist surjektiv und wegen $P(X,Y) = 0 \Leftrightarrow P = 0$ auch injektiv. Unser Diagramm lässt sich also erweitern zu:

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{A}^2_k/\!\!/_{k^*} \arrow[r, "\sim", "h"'] & \mathbb{A}^1_k \\
\mathbb{A}^2_k/_{k^*} \arrow[ur, "\tilde{q}"] & & \mathbb{A}^2_k \arrow[ll, "\pi"] \arrow[ul, "q"']
\end{tikzcd}$$


Fasern von q

Die Fasern von q sind dabei

$$q^{-1}(q(a,b)) = V(X \cdot Y - a \cdot b),$$

insbesondere

$$q^{-1}(q(0,0)) = V(X \cdot Y).$$

Sehen wir uns nun noch die Orbits (d.h. die Elemente von $X/_G$) an:

(1) Für $(a,b) \in \mathbb{A}^2$ mit $a \cdot b \neq 0$ ist

$$\begin{aligned}(u,v) \in k^* \cdot (a,b) &\Leftrightarrow \exists \lambda \in k^* : u = \lambda a \wedge \lambda v = b \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow u \cdot v - a \cdot b = 0 \Leftrightarrow (u,v) \in V(X \cdot Y - a \cdot b)\end{aligned}$$

Hier entspricht also jeder Orbit einer Faser von q.

(2) Für die $(a,b) \in \mathbb{A}^2$ mit $a \cdot b = 0$ (d.h. $(a,b) \in q^{-1}(q((0,0)))$ ergeben sich dagegen die 3 Orbits $\{(0,0)\}$, $V(X) \setminus \{0\}$ und $V(Y) \setminus \{0\}$.

Also ist $X/G \xrightarrow{\tilde{q}} X/\!\!/G$ in diesem Fall nicht injektiv.

Fazit. $\mathbb{A}^2_k/\!\!/k^*$ existiert als kategorialer Quotient, obwohl k^* nicht endlich ist, aber nicht als geometrischer!

Frage. Für welche nicht-endlichen, linearen algebraischen Gruppen $G \subseteq GL_k(N)$ (Zariski-abgeschlossene Untergruppen) und ihre Wirkungen auf affinen algebraischen Varietäten X kann man erwarten, dass $\mathcal{O}_X(X)^G$ endlich erzeugt ist und damit der kategoriale Quotient $X/\!\!/G$ existiert?

Die Antwort liefert uns die Hilbert-Nagata-Theorie.

Definition 6.54. *Sei $G \subseteq GL_k(N)$ ($N \in \mathbb{N}$) eine lineare algebraische Gruppe. G heißt **reduktiv**, falls für alle endlichen (d.h. $\dim V < \infty$) Darstellungen $\rho : G \to GL(V)$ gilt: Ist $W \subseteq V$ ein **G-invarianter** Untervektorraum (also $GW \subseteq W$), so hat W in V ein G-invariantes Komplement, d.h. es existiert $W' \subseteq V$ mit $W' \oplus W = V$ und W' ebenfalls G-invariant.*

Definition 6.55. *Sei G lineare algebraische algebraische Gruppe, $\rho : G \to GL(V)$ beliebige lineare Darstellung, $\dim_k V$ beliebig.*

*(a) ρ heißt **lokal-endliche Darstellung**, falls für alle $x \in V$ ein G-invarianter Untervektorraum $W \subseteq V$ existiert, so dass $x \in W$ und $\dim_k W < \infty$.*

*(b) Entsprechend heißt die zugehörige Wirkung $\varphi : G \times V \to V$ **lokal-endliche Wirkung**.*

Bemerkung. Die induzierte Darstellung $\tilde{\rho} : G \to GL(W)$ ist dann wieder eine endliche Darstellung.

$\boxed{V^G}$

$\boxed{\text{Satz 6.8.5.}}$ *Existenzsatz für Reynolds-Operatoren bei lokal-endlichen Wirkungen reduktiver linearer algebraischer Gruppen*

Sei G eine reduktive lineare algebraische Gruppe, $G \times V \xrightarrow{\varphi} V$ lokal-endliche Wirkung. Dann gilt:

(1) $V^G := \{x \in V \mid \forall x \in X : gx = x\}$ besitzt genau ein G-invariantes Komplement V_G, so dass $V = V^G \oplus V_G$.

(2) Es existiert ein Operator $R := R_V : V \to V$ mit $R^2 = R$ und $R(V) = V^G$.

Beweis.

(1) V^G ist ein G-invarianter Unterraum. Betrachten wir nun

$$\mathfrak{M} := \left\{ W \subseteq V \;\middle|\; \begin{array}{c} W \text{ ist } k\text{-UVR und } G\text{-invariant} \\ W \cap V^G = (0) \end{array} \right\}.$$

$(\mathfrak{M}, \subseteq)$ ist offensichtlich induktiv geordnet. Das Zornsche Lemma liefert uns, dass es in $\mathfrak{M}$ mindestens ein maximales Element V_G gibt, also $V_G \cap V^G = (0)$, $V^G \oplus V_G \subseteq V$ und V_G ist G-invariant. Wir zeigen im folgenden, dass V_G auch eindeutig ist:

Sei $W \in \mathfrak{M}$, $W \neq \varnothing$ (für $\mathfrak{M} = \{\varnothing\}$ ist die Behauptung trivial). Da die Wirkung von G lokal-endlich ist, erhalten wir

$$\forall x \in W : \exists W' \subseteq W : x \in W, W \ G\text{-invariant}, \dim_k W' < \infty.$$

Da G reduktiv ist, haben wir

$$W' = (W' \cap V_G) \oplus W'',$$

$W'' \subseteq W'$ ist endlich-dimensionales G-invariantes Komplement von $W' \cap V_G$ in W'. Es ergibt sich

$$(W' \cap V_G)^G \oplus W''^G = W'^G = (0),$$

denn es ist $W' \subseteq W \in \mathfrak{M}$, also $(W')^G \subseteq W^G = W \cap V^G = (0)$. Damit ist auch $W''^G = (0)$, also $W'' \cap V^G = (0)$. Es ergibt sich, dass auch

$$(V_G + W'') \cap V^G = (0)$$

ist, folglich $V_G \subseteq V_G + W''$, also (da V_G ein maximales Element in $\mathfrak{M}$ war) $W'' \subseteq V_G$. Damit ist

$$x \in W' = (W' \cap V_G) \oplus W'' \subseteq V_G,$$

also $x \in V_G$, d.h. $W \subseteq V_G$.

Es bleibt zu zeigen, dass $V^G \oplus V_G = V$ ist. Sei dazu $x \in V$ beliebig. Aufgrund der lokal-endlichen Wirkung von G existiert ein Untervektorraum $W' \subseteq V$ mit $x \in W'$, $\dim_k W' < \infty$ und $G \cdot W' \subseteq W'$. G ist reduktiv, daher haben wir wieder

$$\begin{aligned} W' &= (W' \cap V^G) \oplus W'', \\ G \cdot W'' &\subseteq W'', \\ W'' \cap V^G &= (0), \\ \Rightarrow \quad & W'' \in \mathfrak{M} \\ \Rightarrow \quad & W'' \subseteq V_G. \end{aligned}$$

Daher können wir alle $y \in W'$ als $y = u + v$ schreiben, mit $u \in W' \cap V^G \subseteq V^G$ und $v \in W'' \subseteq V_G$. Insbesondere geht diese Zerlegung für unser $x \in V$, also haben wir

$$V^G \oplus V_G = V.$$

(2) Aufgrund der Zerlegung $V = V^G \oplus V_G$ mit eindeutigem V_G existiert eine Projektion

$$\begin{aligned} \pi : V &\twoheadrightarrow V^G \\ x = u + v &\mapsto u \end{aligned}$$

und damit ein Reynolds-Operator

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[rr, bend right, "R_V"'] & V^G \arrow[r, hook, "i"] & V \end{tikzcd}$$

mit

$$R_V^2 = R_V, \qquad \operatorname{im} R_V = \operatorname{im} \pi = V^G, \quad \ker R_V = V_G$$ □

Fazit. Bei lokal endlichen Wirkungen reduktiver linearer algebraischer Gruppen auf beliebige k-Vektorräume existiert stets ein Reynolds-Operator, der i.a. nicht explizit beschreibbar ist (da mit Zornschem Lemma gewonnen).

Eigenschaften des Reynolds-Operators

Definition 6.56. *Seien $\rho : G \to GL(V)$, $\omega : G \to GL(W)$ zwei beliebige lineare Darstellungen der reduktiven linearen algebraischen Gruppe G, $f \in \operatorname{Hom}_k(V, W)$. f heißt **G-äquivariant** (d.h.* mit den Wirkungen verträglich*), falls für alle $x \in X$, für alle $g \in G$ gilt:*

$$\underbrace{f(gx)}_{f(\rho(g)(x))} = \underbrace{gf(x)}_{\omega(g)(f(x))}.$$

> $\boxed{\text{Lemma.}}$ Sei G reduktiv, ρ, ω lokal endliche Darstellungen (wie oben), $f \in \operatorname{Hom}_k(V, W)$ G-äquivariant, $R_V \in \operatorname{End}_k(V)$, $R_W \in \operatorname{End}_k(W)$ die entsprechenden Reynolds-Operatoren für ρ und ω.
>
> (a) Dann ist das Diagramm
>
> $$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "R_V"'] & W \arrow[d, "R_W"] \\ V^G \arrow[r, "f|_{V^G}"'] & W^G \end{tikzcd}$$
>
> wohldefiniert und kommutativ.
>
> (b) Ist f surjektiv, so ist auch $f|_{V^G} : V^G \twoheadrightarrow W^G$ surjektiv.

Beweis.

(a) **Wohldefiniertheit:** Ist $x \in V^G$, so ist $gx = x$ $\forall g \in G$, also $f(x) = f(gx) = gf(x)$ (aufgrund der Äquivarianz von f), also $f(x) \in W^G$.

Kommutativität: Aufgrund der Linearität sämtlicher Abbildungen genügt es zu zeigen, dass das Diagramm für $x \in V^G$ und $x \in V_G$ kommutiert.

- Sei $x \in V^G$, so ist $f(x) \in W^G$, also $R_W(f(x)) = f(x)$ und $R_V(x) = x$, damit
$$f(R_V(x)) = f(x) = R_W(f(x).$$
- Sei $x \in V_G$, dann existiert (aufgrund der lokal-Endlichkeit der Darstellung) ein $W' \subseteq V_G$ mit $\dim'_W < \infty$, $GW' \subseteq W'$. Da G reduktiv ist, ist $W' = (W' \cap \ker f) \oplus W''$, mit $W'' \subseteq W'$, $GW'' \subseteq W''$ (da $\ker f$ ein G-invarianter Unterraum ist, weil f G-äquivariant ist). Wir haben also
$$W'' \xrightarrow[f]{\sim} f(W'),$$
und die G-Äquivarianz von f liefert noch einmal
$$(W'')^G \cong_f f(W')^G = (0),$$
d.h. $f(W') \subseteq W_G$, also $f(x) \in W_G = \ker R_W$. Es ergibt sich
$$f(R_V(x)) = f(0) = 0 = R_W(f(x)),$$
also haben wir auch hier die Kommutativität. □

$\boxed{\text{Lemma.}}$ Sei G reduktive lineare algebraische Gruppe, A eine k-Algebra $\rho : G \to \operatorname{Aut} A \subseteq GL_k(A)$ lokal-endliche Darstellung von G, R_A der zugehörige Reynolds-Operator. Dann gilt:
$$\forall (f, h) \in A^G \times A : \quad R(fh) = f(Rh)$$
und speziell $f \in A^G \Rightarrow R_A(f) = f$.

Bemerkung. R_A ist i.a. kein Ringhomomorphismus, sondern nur k-linear.

Beweis. Dieses Lemma ist ein Spezialfall des vorherigen Lemmas: $A \xrightarrow{\square\cdot f} A$ ist k-linear, G-äquivariant, daher kommutiert das Diagramm
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\square\cdot f"] \arrow[d, "R_A"'] & A \arrow[d, "R_A"] \\ A^G \arrow[r, "\square\cdot f"'] & A^G \end{tikzcd}$$
und wir haben also $R_A(h \cdot f) = R_A(h) \cdot f$. □

Definition 6.57. *Sei G algebraische Gruppe, damit auch affine Varietät, X weitere affine Varietät. Eine Gruppenwirkung $G \times X \xrightarrow{\varphi} X$ heißt **rationale Wirkung** von G auf X, falls auch $\varphi \in \operatorname{Mor}_{\underline{\mathrm{Var}}_k^{\mathrm{aff}}}(G \times X, X)$.*

Bemerkung. Sei G algebraische Gruppe (also auch affine Varietät), X affine Varietät, so ist $(G \times X, A[G] \otimes \mathcal{O}_X(X))$ ebenfalls affine Varietät mit
$$\sum_{i=1}^{r} \gamma_i \otimes f_i(g, x) := \sum_{i=1}^{r} \gamma_i(g) \cdot f_i(x).$$

$\boxed{\text{Satz 6.8.6.}}$ *(Hilbert-Nagata – Geometrische Variante)*
Sei X affine k-Varietät, $A = \mathcal{O}_X(X)$ reduzierte k-Algebra, G reduktive lineare algebraische Gruppe, $G \subseteq GL_k(A)$, $G \times X \xrightarrow{\varphi} X$ rationale Wirkung von G auf X.
Dann gilt für die induzierte Wirkung

$$\begin{aligned} G \times \mathcal{O}_X(X) &\longrightarrow \mathcal{O}_X(X) \\ (g, f) &\longmapsto g \cdot f : X \to k \qquad\qquad : \\ &\qquad\qquad\quad x \mapsto f(g^{-1}(x)) \end{aligned}$$

(1) $A^G = \mathcal{O}_X(X)^G$ ist endlich erzeugte k-Algebra.

(2) $X/\!\!/G := \operatorname{Specm}(\mathcal{O}_X(X)^G)$ existiert als kategorieller Quotient mit allen Eigenschaften: G-Abgeschlossenheit, G-Trennungseigenschaft, Universalität, wie im Fall endlicher Gruppen (mit R_A statt $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\square$). Allerdings gilt nicht, dass $\tilde{q}$ Homöomorphismus ist:

$$q^{\#} = i : A^G \to A \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[rr, two heads, "q"] \arrow[dr, "\pi"'] & & X/\!\!/G \\ & X/G \arrow[ur, "\tilde{q}"'] & \end{tikzcd}$$

Vielmehr sind die Fasern von q Vereinigungen von Orbits.

Beweis. Später. $\square$

Beispiel 6.8.4. Sei $G := GL_2(\mathbb{C})$, $X := \mathbb{C}^{2\times 2} \cong \mathbb{C}^4 = \mathbb{A}^4_{\mathbb{C}}$. Dann haben wir

$$\mathcal{O}_X(X) = \mathbb{C}[X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22}]$$

und

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (S, A) &\mapsto S \cdot A := A \circ A \circ S^{-1} \qquad \text{(Konjugation)} \end{aligned}$$

Es ergibt sich für den Koordinatenring

$$\mathbb{C}^{[}X_{11}, \cdots, X_{22}]^{GL_2(\mathbb{C})} = \mathbb{C}[\mathrm{Spur}, \det] \cong \mathbb{C}[T_1, T_2]$$

Wir erhalten das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^{2\times 2}/\!\!/GL_2(\mathbb{C}) \arrow[r, equal, "\sim"] & \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} \\ \mathbb{C}^{2\times 2}/GL_2(\mathbb{C}) \arrow[u, "\tilde{q}"] & \mathbb{C}^{2\times 2} \arrow[l, "\pi"] \arrow[ul, "q"'] \arrow[u, "\lambda"'] \end{tikzcd}$$

mit $\lambda(A) := (a, b)$, wobei $\lambda_A =: X^2 + aX + b$ das charakteristische Polynom zu A ist.

Allerdings gibt es Matrizen mit gleichem charakteristischem Polynom, die nicht ähnlich sind, d.h. $\tilde{q}$ ist nicht Homöomorphismus, also ist $\mathbb{C}^{2\times 2} /\!\!/ GL_2(\mathbb{C})$ kein geometrischer Quotient.

Teil IV

Algebraische Geometrie II

Überblick der Vorlesung

§1 Produkte und komplette Prävarietäten

§2 Spezielle komplette Varietäten: projektive und abelsche Varietäten

§3 Elliptische Kurven als abelsche Varietäten ($k = \bar{k}$, $\operatorname{char}(k) \notin \{2, 3\}$)

§4 *(Überschrift fehlt)*

§5 Konkrete Anwendungen: Modulräume algebraischer Vektorbündel und lineare Unterräume in projektiven Flächen

7 Algebraische Geometrie II

7.1 Produkte und komplette Varietäten

Definition 7.1. *Sei $k = \overline{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper.*

*Eine k-**Prävarietät** ist ein Paar $(X, \mathcal{O}_X)$, wobei X ein topologischer Raum und $\mathcal{O}_X$ eine Garbe endlich erzeugter reduzierter k-Algebren ist, und eine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i=1}^r U_i$ derart existiert, dass $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ offene affine Varietät ist.*

Frage. Gibt es in den Kategorien $\underline{\mathrm{PreVar}_k}$ und $\underline{\mathrm{Var}_k}$ kategorielle Produkte?

Definition 7.2. *Sei $\mathfrak{C}$ eine Kategorie, seien A, B Objekte in $\mathfrak{C}$. Ein **kategorielles Produkt** (auch kurz **Produkt**) von A und B ist ein Tripel (C, p, q) derart, dass*

(1) $C \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C})$, $p \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(C, A)$, $q \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(C, B)$.

(2) Für alle Tripel (D, φ, ψ) (mit $D \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C})$, $\varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(D, A)$, $\psi \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(D, B)$) existiert genau ein $h \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(D, C)$, so dass $\varphi = p \circ h$, $\psi = q \circ h$.

$$\begin{tikzcd}
A & C \arrow[l, "p"'] \arrow[r, "q"] & B \\
& D \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[u, dotted, "\exists! h"'] \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

Bemerkung. Das kategorielle Produkt ist offenbar ein universelles Objekt.

Allgemeiner stellt sich die Frage so:

Frage. Ist $\mathfrak{C}$ als Kategorie gegeben, hat dann $\mathfrak{C}$ Produkte für je zwei Objekte?

Definition 7.3. *(Verallgemeinerung) Sei $\mathfrak{C}$ eine Kategorie, $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 2$), $A_1, \cdots, A_n$ Objekte in $\mathfrak{C}$. Ein **Produkt** von $A_1, \cdots, A_n$ ist ein $(n+1)$-Tupel $(C, p_1, \cdots, p_n)$ mit*

(1) $C \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C})$, $\forall i \in \{1, \cdots, n\} : \ p_i \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(C, A_i)$

(2) Für alle Tupel $(D, \varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ mit (1) gibt es genau ein $h \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(D, C)$ derart, dass $p_i \circ h = \varphi_i$ für alle $i \in \{1, \cdots, n\}$.

$$\begin{tikzcd}
 & A_1 & \\
 & A_2 & \\
C \arrow[uur, "p_1"] \arrow[ur, "p_2"'] \arrow[dr, "p_n"'] & \vdots & D \arrow[uul, "\varphi_1"'] \arrow[ul, "\varphi_2"] \arrow[dl, "\varphi_n"] \arrow[ll, dotted, bend left=60, "\exists! h"] \\
 & A_n &
\end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{Bemerkung 1.}}$

(1) Falls das Produkt einiger Objekte existiert, so ist es bis auf Isomorphie (in $\mathfrak{C}$) eindeutig.

(2) Bezeichnet man *ein* Produkt von $A_1, \cdots, A_n$ mit $\prod_{i=1}^n A_i = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, so ist für $\sigma \in \mathfrak{S}_n$

$$\prod_{i=1}^n A_i \cong_{\mathfrak{C}} \prod_{i=1}^n A_{\sigma(i)}$$

und es ist für $n \in \{2, \cdots, s-1\}$:

$$\prod_{i=1}^n A_i \cong_{\mathfrak{C}} \left(\prod_{i=1}^s A_i\right) \times \left(\prod_{i=s+1}^n A_i\right)$$

Insbesondere ist

$$\prod_{i=1}^n A_i \cong_{\mathfrak{C}} A_1 \times (A_2 \times (\ldots \times (A_{n-1} \times A_n) \ldots))$$

Beispiel 7.1.1. In der Kategorie $\underline{\text{Ens}}$ der Mengen ist für $X, Y \in \text{obj}(\underline{\text{Ens}})$ das kartesische Produkt $X \times Y$ mit den kanonischen Projektionen $\pi_X : X \times Y \to X$ und $\pi_Y : X \times Y \to Y$ ein (kategorielles) Produkt von X und Y.

Beispiel 7.1.2. Ist $\mathfrak{C} = \underline{\text{Top}}$, $X, Y \in \text{obj}(\underline{\text{Top}})$, dann ist $X \times Y$ mit der Produkttopologie und den kanonischen Projektionen ein kategorielles Produkt.

Beispiel 7.1.3. Für $\mathfrak{C} = \underline{\text{Mf}}^{\text{diff}}$, die Kategorie der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten, ist $X \times Y$ mit Produkttopologie und der durch Produktatlas eindeutig festgelegten Differenzierbarkeitsstruktur sowie den kanonischen Projektionsabbildungen ein kategorielles Produkt.

$\boxed{A \amalg B}$ **Definition 7.4.** *Ein* ***Koprodukt*** *von* $A, B \in \text{obj}(\mathfrak{C})$ *(oft mit* $A \amalg B$ *bezeichnet) ist ein Produkt von* A *und* B *in der oppositionellen Kategorie* $\mathfrak{C}^o$ *(analog für höhere Produkte).*

Bemerkung. Das heißt, (C, p, q) ist ein Koprodukt von A und B, falls

(1) $C \in \text{obj}(\mathfrak{C})$, $p \in \text{Mor}_{\mathfrak{C}}(A, C)$, $q \in \text{Mor}_{\mathfrak{C}}(B, C)$

(2) Für alle Tripel (D, φ, ψ) (mit $D \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C})$, $\varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(A, D)$, $\psi \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(B, D)$) existiert genau ein $h \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(C, D)$, so dass $\varphi = h \circ p$, $\psi = h \circ q$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "\varphi"'] & C \arrow[d, dotted, "\exists! h"] & B \arrow[l, "q"'] \arrow[dl, "\psi"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

Produkte in $\underline{\mathrm{Var}}_k^{\mathrm{aff}}$

Wir wissen (Satz 6.6.4), dass $\underline{\mathrm{Var}}_k^{\mathrm{aff}}$ kategoriell äquivalent ist zu $\underline{k\text{-}\mathrm{Alg}}^{\mathrm{ee,red}}$, der Kategorie der endlich erzeugten reduzierten k-Algebren, mittels der kontravarianten Funktoren

$$\begin{aligned} A[\square] : \underline{\mathrm{Var}}_k^{\mathrm{aff}} &\longrightarrow \underline{k\text{-}\mathrm{Alg}}^{\mathrm{ee,red}} \\ (X, \mathcal{O}_X) &\longmapsto \mathcal{O}_X(X) =: A[X] \\ \mathbb{A}_k^n \supseteq W &\longmapsto A[W] := {}^{k[X_1, \cdots, X_n]}\!\big/_{I(W)} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathrm{Specm} : \underline{k\text{-}\mathrm{Alg}}^{\mathrm{ee,red}} &\longrightarrow \underline{\mathrm{Var}}_k^{\mathrm{aff}} \\ B &\longmapsto (\mathrm{Specm}(B), \mathcal{O}_{\mathrm{Specm}(B)}) \end{aligned}$$

Das heißt, die Produkte in $\underline{\mathrm{Var}}_k^{\mathrm{aff}}$ entsprechen den Koprodukten in $\underline{k\text{-}\mathrm{Alg}}^{\mathrm{ee,red}}$. Und letzteres Problem kann sogar etwas allgemeiner gelöst werden.

Sei R ein (wie immer kommutativer und unitärer) Ring, seien $R \xrightarrow{\varphi} A$ und $R \xrightarrow{\psi} B$ zwei R-Algebren (mit Strukturmorphismen).

Ziel. Konstruktion eines Koproduktes von (A, φ) und (B, ψ) in $\underline{R\text{-}\mathrm{Alg}}$.

> $\boxed{\text{Satz 7.1.1.}}$ In $\underline{R\text{-}\mathrm{Alg}}$ existieren Koprodukte (von endlich vielen R-Algebren), für jeden Ring R.

Beweis. A und B sind (via φ und ψ) auch R-Moduln, und damit existiert $A \otimes_R B$ als R-Modul. Für $(a, b) \in A \times B$ hat man die Abbildung

$$\begin{aligned} \theta_{(a,b)} : A \times B &\longrightarrow A \otimes_R B \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \theta_{(a,b)}(\alpha, \beta) := a \cdot \alpha \otimes b \cdot \beta. \end{aligned}$$

$\theta_{(a,b)}$ ist bilinear, liftet (aufgrund der Universaleigenschaft des Tensorproduktes) also zu

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{(a,b)} : A \otimes_R B &\longrightarrow A \otimes_R B \\ \sum_{i=1}^{r} a_i \otimes b_i &\longmapsto \sum_{i=1}^{r} (a \cdot a_i \otimes b \cdot b_i), \end{aligned}$$

was ein Endomorphismus in $A \otimes_R B$ ist. Damit hat man auch eine Abbildung

$$\begin{aligned} \hat{\theta} := \hat{\theta}_\Box : A \times B &\longrightarrow \mathrm{End}_R(A \otimes_R B). \\ (a,b) &\longmapsto \hat{\otimes}_{(a,b)} \end{aligned}$$

$\hat{\theta}$ ist ebenfalls bilinear, liftet also zum R-Modulhomomorphismus

$$\begin{aligned} \hat{\hat{\theta}} : A \otimes_R B &\longrightarrow \mathrm{End}_R(A \otimes_R B) \\ a \otimes b &\longmapsto \hat{\theta}_{(a,b)} \\ &\quad\ \hat{\theta}_{(a,b)}(\alpha \otimes \beta) = a \cdot \alpha \otimes b \cdot \beta. \end{aligned}$$

$\hat{\hat{\theta}}$ wiederum liefert eine *Multiplikationsabbildung*:

$$\begin{aligned} \cdot : (A \otimes_R B) \times (A \otimes_R B) &\longrightarrow A \otimes_R B \\ (\mathfrak{t}, \mathfrak{s}) &\longmapsto \mathfrak{t} \cdot \mathfrak{s} := \hat{\hat{\theta}}(\mathfrak{t})(\mathfrak{s}) \\ \left(\sum_i a_i \otimes b_i, \sum_j \alpha_j \otimes \beta_j \right) &\longmapsto \sum_{i,j} (a_i \cdot \alpha_j) \otimes (b_i \otimes \beta_j) \end{aligned}$$

Man sieht sofort, dass $(A \otimes_R B, +, \cdot)$ ein (k&u-)Ring ist, und sogar R-Algebra mit Strukturmorphismus $j_A \circ \varphi = j_B \circ \psi$ (d.h. das folgende Diagramm ist kommutativ:)

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & A \arrow[d, "j_A"] & a \arrow[d, mapsto] \\ B \arrow[r, "j_B"'] & A \otimes_R B & a \otimes 1_B \end{tikzcd}$$

$$b \longmapsto 1_A \otimes b$$

Es bleibt zu zeigen, dass $(A \otimes_R B, j_A, j_B)$ wirklich ein Koprodukt in $\underline{R\text{-Alg}}$ ist, d.h. die Universaleigenschaft erfüllt. Sei also D eine beliebige R-Algebra mit zwei R-Algebra-Homomorphismen $f : A \to D$ und $g : B \to D$.

Wir müssen zeigen, dass es dann genau eine gemeinsame Faktorisierung $h \in \mathrm{Hom}_{\underline{R\text{-Alg}}}(A \otimes_R B, D)$ gibt, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "j_A"] \arrow[dr, "f"'] & A \otimes_R B \arrow[d, dotted, "\exists! h"] & B \arrow[l, "j_B"'] \arrow[dl, "g"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

Eindeutigkeit: Angenommen, es gäbe eine solche Faktorisierung $h : A \otimes_R B$. Dann gilt

$$\begin{aligned} h(a \otimes 1) &= (h \circ j_A)(a) \\ &= f(a) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} h(1 \otimes b) &= (h \circ j_B)(b) \\ &= g(b), \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} h(a \otimes b) &= h((a \otimes 1) \cdot (1 \otimes b)) \\ &= h(a \otimes 1) \cdot h(1 \otimes b) \\ &= f(a) \cdot g(b) \end{aligned}$$

Damit (und additiver Fortsetzung) ist h – falls existent – eindeutig durch f und g bestimmt.

Existenz: Wir betrachten die bilineare Abbildung

$$\begin{aligned} \lambda : A \times B &\longrightarrow D \\ (a, b) &\longmapsto f(a) \cdot g(b), \end{aligned}$$

welche liftet zu

$$\begin{aligned} h : A \otimes_R B &\longrightarrow D \\ a \otimes b &\mapsto \lambda(a, b) = f(a) \cdot g(b), \end{aligned}$$

und hier ist offenbar $(h \circ j_A)(a) = h(a \otimes 1) = f(a) \cdot g(1) = f(a)$ sowie $(h \circ j_B)(b) = h(1 \otimes b) = f(1) \cdot g(b) = g(b)$, d.h. h erfüllt die Bedingung. □

Frage. Existieren Koprodukte auch in den Unterkategorien $\underline{k\text{-Alg}}^{\text{ee}}$ und $\underline{k\text{-Alg}}^{\text{red}}$? Bzw. landet $(A \otimes_R B)$ in k-Alg$^{\text{ee}}$ bzw. k-Alg$^{\text{red}}$, falls A und B aus k-Alg$^{\text{ee}}$ bzw. k-Alg$^{\text{red}}$?

$\boxed{\text{Satz 7.1.2.}}$ *(Tensorprodukte von Faktormoduln)*
Seien R ein Ring,

$$0 \to E' \overset{f}{\hookrightarrow} E \overset{g}{\twoheadrightarrow} E'' \to 0$$

und

$$0 \to F' \overset{s}{\hookrightarrow} F \overset{t}{\twoheadrightarrow} F'' \to 0$$

zwei kurze exakte Sequenzen von R-Moduln. Dann gilt:

(1) Die Abbildung

$$\begin{aligned} g \otimes t : E \otimes_R F &\longrightarrow E'' \otimes F'' \\ x \otimes y &\longmapsto g(x) \otimes t(y) \quad \text{(und additive Fortsetzung)} \end{aligned}$$

ist surjektiv.

(2) $\ker(g \otimes t) = \operatorname{im}(f \otimes \mathrm{id}_F) + \operatorname{im}(\mathrm{id}_E \otimes f)$

(3) $E'' \otimes_R F'' \cong {}^{E \otimes_R F}\big/_{\operatorname{im}(f \otimes \mathrm{id}_F) + \operatorname{im}(\mathrm{id}_E \otimes s)}$

$\boxed{\text{KOROLLAR.}}$ Sei k Körper.

(1) Seien $k[X_1, \cdots, X_n]$ und $k[Y_1, \cdots, Y_m]$ zwei Polynomringe über k. Dann ist

$$k[X_1, \cdots, X_n] \otimes_k k[Y_1, \cdots, Y_m] \xrightarrow{\sim} k[X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_m],$$

als Lift von

$$\begin{aligned} k[X_1, \cdots, X_n] \times k[Y_1, \cdots, Y_m] &\longrightarrow k[X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_m] \\ (f(X_1, \cdots, X_n), g(Y_1, \cdots, Y_n)) &\longmapsto f(X_1, \cdots, X_n) \cdot g(Y_1, \cdots, Y_n) \end{aligned}$$

(2) Seien A und B endlich erzeugte k-Algebren. Dann ist $A \otimes_k B$ wieder endlich erzeugte k-Algebra.

Beweis des Korollars.

(1) Für eine bilineare Abbildung $\varphi : k[X_1, \cdots, X_n] \times k[Y_1, \dots Y_m] \to D$ (mit einem beliebigen k-Vektorraum D) definieren wir die Abbildung

$$\begin{aligned} \hat{\varphi} : k[X_1, \cdots, X][Y_1, \cdots, Y_n] &\longrightarrow D \\ \sum_{(i_1, \cdots, i_m)} P_{i_1, \cdots, i_m}(\underline{X}) \cdot Y_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot Y_m^{i_m} &\longmapsto \sum_{(i_1, \cdots, i_m)} \varphi\left(P_{i_1, \cdots, i_m}(\underline{X}), Y_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot Y_m^{i_m}\right) \end{aligned}$$

Für $(f, g) \in k[X_1, \cdots, X_n] \times k[Y_1, \cdots, Y_m]$ ist dann

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(f(\underline{X}) \cdot g(\underline{Y})) &= \hat{\varphi}\left(f(\underline{X}) \cdot \sum_{(i_1, \cdots, i_m)} b_{i_1 \dots i_m} \cdot Y_1^{i_1} \cdot \ldots Y_m^{i_m}\right) \\ &= \hat{\varphi}\left(\sum_{(i_1, \cdots, i_m)} b_{i_1 \dots i_m} \cdot f(\underline{X}) \cdot Y_1^{i_1} \cdot \ldots Y_m^{i_m}\right) \end{aligned}$$

und nach unserer Definition von $\hat{\varphi}$ ist das

$$\begin{aligned} &= \sum_{(i_1, \cdots, i_m)} \varphi\left(b_{i_1 \dots i_m} \cdot f(\underline{X}), Y_1^{i_1} \cdot \ldots Y_m^{i_m}\right) \\ &= \sum_{(i_1, \cdots, i_m)} \varphi\left(f(\underline{X}), b_{i_1 \dots i_m} \cdot Y_1^{i_1} \cdot \ldots Y_m^{i_m}\right) \\ &= \varphi\left(f(\underline{X}), \sum_{(i_1, \cdots, i_m)} b_{i_1 \dots i_m} \cdot Y_1^{i_1} \cdot \ldots Y_m^{i_m}\right) \\ &= \varphi(f(\underline{X}), g(\underline{Y})). \end{aligned}$$

Wir haben also $\cdot \circ \hat{\varphi} = \varphi$ (für alle φ und D), das heißt,

$$(k[X_1, \cdots, X_n][Y_1, \cdots, Y_m] = k[X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_m], \cdot)$$

erfüllt die Universaleigenschaft des Tensorproduktes, es ist also $k[X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_m] \cong k[X_1, \cdots, X_n] \otimes_k k[Y_1, \cdots, Y_m]$.

(2) Sei etwa $A \cong k[X_1, \cdots, X_n] / \mathfrak{a}$, $B \cong k[Y_1, \cdots, Y_n] / \mathfrak{b}$. Dann ist nach dem Satz

$$A \otimes_k B \cong k[X_1, \cdots, X_n] \otimes_k k[Y_1, \cdots, Y_m] / \mathfrak{a} \cdot k[Y_1, \cdots, Y_m] + k[X_1, \cdots, X_n] \cdot \mathfrak{b}$$

und nach (1)

$$\begin{aligned} &\cong k[X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_m] / \mathfrak{a} \cdot k[Y_1, \cdots, Y_n] + \mathfrak{b} \cdot k[X_1, \cdots, X_n] \\ &\cong k[X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_m] / \mathrm{Ideal}(\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}), \end{aligned}$$

und dies ist als Faktorring einer endlich erzeugten k-Algebra ebenfalls endlich erzeugt. □

Beweis von Satz 2. Seien also R ein Ring,

$$0 \to E' \xhookrightarrow{f} E \xrightarrow{g} E'' \to 0$$

und

$$0 \to F' \xhookrightarrow{s} F \xrightarrow{t} F'' \to 0$$

zwei kurze exakte Sequenzen von R-Moduln. Dann induzieren g und t eine R-bilineare Abbildung

$$\begin{aligned} \otimes \circ (g \times t) : E \times F &\longrightarrow E'' \otimes_R F'' \\ (x, y) &\longmapsto g(x) \otimes t(y), \end{aligned}$$

welche also zur R-linearen Abbildung

$$\begin{aligned} g \otimes t : E \otimes_R F &\twoheadrightarrow E'' \otimes_R F'' \\ x \otimes y &\longmapsto g(x) \otimes t(y) \end{aligned}$$

liftet. Wir haben das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
E'\otimes F' \arrow[r, "f\otimes \mathrm{id}_{F'}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{E'}\otimes s"'] \arrow[dr, "f\otimes s"'] & E\otimes F' \arrow[r, two heads, "g\otimes \mathrm{id}_{F'}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_E\otimes s"'] \arrow[dr, "g\otimes s"] & E''\otimes F' \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_{E''}\otimes s"] & 0 \\
E'\otimes F \arrow[r, "f\otimes \mathrm{id}_F"] \arrow[d, two heads, "\mathrm{id}_{E'}\otimes t"'] \arrow[dr, "f\otimes t"'] & E\otimes F \arrow[r, two heads, "g\otimes \mathrm{id}_F"] \arrow[d, two heads, "\mathrm{id}_E\otimes t"'] \arrow[dr, "g\otimes t"] & E''\otimes F \arrow[r] \arrow[d, two heads, "\mathrm{id}_{E''}\otimes t"] & 0 \\
E'\otimes F'' \arrow[r, "f\otimes \mathrm{id}_{F''}"'] \arrow[d] & E\otimes F'' \arrow[r, two heads, "g\otimes \mathrm{id}_{F''}"'] \arrow[d] & E''\otimes F'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Die Zeilen und Spalten sind exakt, weil $\Box \otimes X$ und $X \otimes \Box$ ja rechtsexakte Funktoren sind. Davon betrachten wir im folgenden Ausschnitte.

$$\begin{tikzcd}
E\otimes F \arrow[r, two heads, "g\otimes \mathrm{id}_F"] \arrow[dr, "g\otimes t"'] & E''\otimes F \arrow[d, "\mathrm{id}_{E''}\otimes t"] \\
 & E''\otimes F''
\end{tikzcd}$$

(1) $g\otimes t$ ist surjektiv, weil g und t dies sind.

(2) Wir müssen jetzt also $\ker(g\otimes t)$ berechnen. Sei $\xi \in \ker(g\otimes t)$. Wegen $(g\otimes t)(\xi) = 0$ ist auch

$$(\mathrm{id}_{E''}\otimes t)((g\otimes \mathrm{id}_F)(\xi)) = 0,$$

also

$$(g\otimes \mathrm{id}_F)(\xi) \in \ker(\mathrm{id}_{E''}\otimes t).$$

Aufgrund der Exaktheit von $E''\otimes F' \xrightarrow{\mathrm{id}_{E''}\otimes s} E''\otimes F \xrightarrow{\mathrm{id}_{E''}\otimes t} E''\otimes F'' \to 0$ ist damit

$$(g\otimes \mathrm{id}_F)(\xi) \in \mathrm{im}(\mathrm{id}_{E''}\otimes s),$$

d.h. es existiert ein $\eta \in F''\otimes F$ mit

$$(\mathrm{id}_E\otimes s)(\eta) = (g\otimes \mathrm{id}_F)(\xi).$$

Da auch $g\otimes \mathrm{id}_{F'}$ surjektiv ist, gibt es ein $\omega \in E\otimes F'$ mit

$$\eta = (g\otimes \mathrm{id}_{F'})(\omega).$$

Nun betrachten wir das folgende (kommutative) Teildiagramm:

$$\begin{tikzcd}
E\otimes F' \arrow[r, "g\otimes \mathrm{id}_{F'}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_E\otimes s"'] \arrow[dr, "g\otimes s"'] & E''\otimes F' \arrow[d, "\mathrm{id}_{E''}\otimes s"] \\
E\otimes F \arrow[r, "g\otimes \mathrm{id}_F"'] & E''\otimes F
\end{tikzcd}$$

Es ist hierbei

$$\begin{aligned}(g \otimes \mathrm{id}_F)(\xi) &= ((\mathrm{id}_E \otimes s) \circ (g \otimes \mathrm{id}_{F'}))(\omega)\\ &= (g \otimes s)(\omega)\\ &= ((g \otimes \mathrm{id}_F) \circ (\mathrm{id}_E \otimes s))(\omega),\end{aligned}$$

wir haben also

$$\begin{aligned}(g \otimes \mathrm{id}_F)(\xi - (\mathrm{id}_E \otimes s)(\omega)) &= 0,\\ (\xi - (\mathrm{id}_E \otimes s)(\omega)) &\in \ker(g \otimes \mathrm{id}_F),\end{aligned}$$

und da auch $E' \otimes F \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}_F} E \otimes F \xrightarrow{g \otimes \mathrm{id}_F} E'' \otimes F$ exakt ist:

$$(\xi - (\mathrm{id}_E \otimes s)(\omega)) \in \mathrm{im}(f \otimes \mathrm{id}_F)$$

Es existiert also ein $\alpha \in E' \otimes F$ mit

$$\begin{aligned}(f \otimes \mathrm{id}_F)(\alpha) &= \xi - (\mathrm{id}_E \otimes s)(\omega)\\ \Rightarrow \quad \xi &= (f \otimes \mathrm{id}_F)(\alpha) + (\mathrm{id}_E \otimes s)(\omega)\\ &\in \mathrm{im}(f \otimes \mathrm{id}_F) + \mathrm{im}(\mathrm{id}_E \otimes s)\end{aligned}$$

Insgesamt haben wir also die Inklusion

$$\ker(g \otimes t) \subseteq \underbrace{\mathrm{im}(f \otimes \mathrm{id}_F)}_{=\ker(g \otimes \mathrm{id}_F)} + \underbrace{\mathrm{im}(\mathrm{id}_E \otimes s)}_{=\ker(\mathrm{id}_E \otimes t)},$$

und die umgekehrte Inklusion ist durch die Inklusionen $\ker(g \otimes \mathrm{id}_F) \subseteq \ker(g \otimes t)$ und $\ker(\mathrm{id}_E \otimes t) \subseteq \ker(g \otimes t)$ auch gegeben. Wir haben also insgesamt

$$\ker(g \otimes t) = \mathrm{im}(f \otimes \mathrm{id}_F) + \mathrm{im}(\mathrm{id}_E \otimes s).$$

Der Homomorphie-Satz liefert aus (1) und (2) einen R-Modul-Isomorphismus

$$E \otimes F \big/ \mathrm{im}(f \otimes \mathrm{id}_F) + \mathrm{im}(\mathrm{id}_E \otimes s) \cong E'' \otimes F'',$$

welcher sich auch als R-Algebra-Isomorphismus erweist. □

FAZIT. Auch in $\underline{k\text{-Alg}}^{\mathrm{ee}}$ existieren Koprodukte.

Satz 7.1.3. In der Kategorie $\underline{k\text{-Alg}}^{\text{ee,red}}$ ist $A \otimes_k B$ ebenfalls ein Koprodukt.

Beweis. Zu zeigen ist, dass für reduzierte, endlich erzeugte k-Algebren $A \otimes_k B$ ebenfalls reduziert ist.

Sei also $t = \sum_{i=1}^r a_i \otimes b_i \in \operatorname{Nil}(A \otimes_k B)$. (Zu zeigen ist $t = 0$.)

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei r minimal gewählt, also $\{a_1, \cdots, a_r\}$ und $\{b_1, \cdots, b_r\}$ jeweils k-frei. Betrachte für $\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm}(A)$ die Tensorabbildung $\psi_{\mathfrak{m}}$, gegeben durch

$$\begin{tikzcd} A \otimes_k B \arrow[r, two heads, "\pi_{\mathfrak{m}} \otimes \mathrm{id}_B"] \arrow[rr, bend left, "\psi_{\mathfrak{m}}"] & A/\mathfrak{m} \otimes_k B \arrow[r, "\sim"] & k \otimes_k B \cong B \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, equal] & A \arrow[r, two heads, "\pi_{\mathfrak{m}}"] & A/\mathfrak{m} \arrow[dll, "\sim"] \\ \overline{k} & & \end{tikzcd}$$

Dabei ist die erste Isomorphie gegeben durch das Extensionslemma aus Algebraischer Geometrie I (Satz 6.5.9, mit $k = \overline{k}$).

Da $t \in \operatorname{Nil}(A \otimes_k B)$ ist, ist auch

$$\psi_{\mathfrak{m}}(t) \in \operatorname{Nil}(B),$$

also

$$\psi_{\mathfrak{m}}(t) = 0,$$
$$\sum_{i=1}^r [a_i]_{\mathfrak{m}} \cdot b_i = 0$$

Da nun die $\{b_1, \cdots, b_r\}$ k-frei sind, ist

$$\forall i \in \{1, \cdots, r\}: \quad [a_i]_{\mathfrak{m}} = [0]_{\mathfrak{m}},$$

und zwar für alle $\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm}(A)$, d.h.

$$a_i \in \mathfrak{m} \quad \forall \mathfrak{m} \in \operatorname{Specm}(A)$$
$$a_i \in \bigcap_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm}(A)} \mathfrak{m},$$

und weil B eine endlich erzeugte k-Algebra ist, ist dies (nach Bemerkung 2 auf Seite 279) äquivalent zu

$$\begin{aligned} a_i &\in \sqrt{(0)} \\ &= (0), \qquad \text{weil } B \text{ reduziert ist.} \end{aligned}$$

Damit ist $t = 0$ und $A \otimes_k B$ ist reduziert, also ein Koprodukt in $\underline{k\text{-Alg}}^{\text{ee,red}}$. $\square$

> $\boxed{\text{Satz 7.1.4.}}$ Auch in $\underline{k\text{-Alg}}^{\mathrm{ee,IntB}}$, der Kategorie der endlich erzeugten k-Integritätsalgebren, ist $A \otimes_k B$ ein Koprodukt von A und B.

Beweis. Seien $t = \sum_{i=1}^{r} a_i \otimes b_i, \sigma = \sum_{j=1}^{s} \alpha_j \otimes \beta_j \in A \otimes_k B$ mit $t \cdot \sigma = 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien r und s jeweils minimal gewählt, so dass $\{b_i\}_i$ und $\{\beta_j\}_j$ jeweils k-frei sind.

Wir haben wieder $\psi_{\mathfrak{m}} : A \otimes_k B \to A/_{\mathfrak{m}} \otimes_k B \cong B$, mit

$$\psi_{\mathfrak{m}}(t) \cdot \psi_{\mathfrak{m}}(\sigma) = \psi(t \cdot \sigma) = \psi(0) = 0.$$

Da B ein Integritätsbereich ist, ist mindestens einer der Faktoren 0, ohne Beschränkung der Allgemeinheit etwa $0 = \psi_{\mathfrak{m}}(t) = \sum_{i=1}^{r} [a_i]_{\mathfrak{m}} \cdot b_i$. Da $\{b_1, \cdots, b_r\}$ ein k-freies System ist, muss (analog zum letzten Beweis) $[a_i]_{\mathfrak{m}} = 0$ sein für alle i und $\mathfrak{m}$, also $a_i = 0$ und damit $t = 0$. $\square$

> $\boxed{\text{Korollar.}}$ In $\underline{\mathrm{Var}}_k^{\mathrm{aff}}$ existieren Produkte, ebenso in $\underline{\mathrm{Var}}_k^{\mathrm{aff,irr}}$ (der Kategorie der irreduziblen affinen Varietäten).

Beschreibung der algebro-geometrischen Produkte

Seien X und Y affine Varietäten, $A := \mathcal{O}_X(X)$, $B := \mathcal{O}_Y(Y)$, also $(X, \mathcal{O}_X) \cong (\mathrm{Specm}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Specm}(A)})$ und $(Y, \mathcal{O}_Y) \cong (\mathrm{Specm}(B), \mathcal{O}_{\mathrm{Specm}(B)})$. Nach obigen Sätzen ist also $\mathrm{Specm}(A \otimes_k B)$ *ein* Produkt von X und Y in $\underline{\mathrm{Var}}_k^{\mathrm{aff}}$. Nun haben wir ja ebenfalls das mengentheoretische Produkt $X \times Y$, und mengentheoretisch (d.h. in $\underline{\mathrm{Ens}}$) haben wir

$$\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[r, equal, "\sim"] \arrow[dr, dotted, "\sim", "\beta_x \times \beta_y"'] \arrow[ddr, dotted, "\sim", "\beta"'] \arrow[dd, dotted, "\psi"', "\wr"] & \mathrm{Specm}(A) \times \mathrm{Specm}(B) \\
 & \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, k) \times \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(B, k) \arrow[u, "\wr"', "\ker \times \ker"] \\
\mathrm{Specm}(A \otimes_k B) & \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(A \otimes_k B, k) \arrow[l, "\sim", "\ker"'] \arrow[u, "\wr"', "\vartheta"]
\end{tikzcd}$$

als Bijektionskette. Hierbei sind $\beta_X : X \to \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(A, k)$ und $\beta_Y : \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(B, k)$ die bekannten Bewertungsfunktionen, ebenso wie $\beta : X \times Y \to \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(A \otimes B, k)$.

Wir nehmen nun $X \times Y$ (als Mengen-Produkt) und transportieren via ψ die affine Varietätenstruktur von $(\mathrm{Specm}(A \times B), \mathcal{O}_{\mathrm{Specm}(A \times B)})$ darauf.

Eine Topologie-Basis auf $X \times Y$ ist nun gegeben durch

$$B_{X \times Y} = \left\{ D(t) \,\middle|\, t = \sum_i f_i \otimes g_i \in \mathcal{O}_X(X) \otimes \mathcal{O}_Y(Y) \right\}$$

mit

$$\begin{aligned} D(t) &= \{(x,y) \in X \times Y \mid t(x,y) \neq 0\} \\ &= \left\{(x,y) \in X \times Y \,\middle|\, \sum_i f_i(x) \cdot g_i(x) \neq 0\right\} \end{aligned}$$

Definition 7.5. *Diese Topologie heißt **Zariski-Topologie von** $X \times Y$, und $X \times Y$ mit $\mathcal{O}_{X\times Y}(D(T)) := (\mathcal{O}_X(X) \otimes \mathcal{O}_Y(Y))_t$ (übliche Lokalisierung) und den Projektionen $\pi_X : (X \times Y, \mathcal{O}_{X\times Y}) \to (X, \mathcal{O}_X)$ und $\pi_Y : (X \times Y, \mathcal{O}_{X\times Y}) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ heißt* das Produkt *von $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$.*

Achtung. Die Zariski-Topologie auf $X \times Y$ ist i.a. nicht die Produkttopologie der Zariski-Topologien auf X und Y, sondern *feiner* als diese.

Jede Basismenge der Produkttopologie ist von der Form $D(f) \times D(g) = D(f \otimes g)$, also auch eine Basismenge der Zariski-Topologie des Produktes. Die Umkehrung gilt nicht:

Beispiel 7.1.4. In $\mathbb{A}^1_k \times \mathbb{A}^1_k$ (mit unendlichem k) ist

$$\mathbb{A}^1_k \times \mathbb{A}^1_k \setminus \Delta_{\mathbb{A}^1_k} = D(T_1 \otimes 1 - 1 \otimes T_2) =: E$$

Zariski-offen, aber nicht offen in der Produkt-Topologie, E enthält nicht einmal eine offene Basismenge $D(f) \times D(g) \neq \varnothing$:

$$\begin{aligned} & D(f) \times D(g) \subseteq E \\ \Rightarrow\quad & V(f \otimes g) \supseteq \Delta_{\mathbb{A}^1_k} \\ \Rightarrow\quad & \forall t \in k : (f \otimes g)(t,t) = 0 \\ \Rightarrow\quad & \forall t \in k : f(t) \cdot g(t) = 0 \\ \Rightarrow\quad & f \text{ oder } g \text{ hat unendlich viele Nullstellen} \\ \Rightarrow\quad & f = 0 \text{ oder } g = 0 \\ \Rightarrow\quad & D(f) \times D(g) = \varnothing, \end{aligned}$$

Produkte in $\underline{\mathrm{PreVar}}_k$

Sei $k = \overline{k}$ (algebraisch abgeschlossener Körper), X eine k-Prävarietät, Y auch, etwa $X = \bigcup_{i=1}^r U_i$, $U_i \in \mathrm{Off}^{\mathrm{aff}}(X)$, $Y = \bigcup_{j=1}^s V_j$, $V_j \in \mathrm{Off}^{\mathrm{aff}}(X)$.

Ziel. Wir wollen das mengentheoretische Produkt $X \times Y$ mit einer Topologie und Strukturgarbe $\mathcal{O}_{X\times Y}$ von k-wertigen Funktionen versehen, so dass

(1) $(X \times Y, \mathcal{O}_{X\times Y})$ eine Prävarietät und

(2) $(X \times Y, \mathcal{O}_{X\times Y})$ sogar Produkt von $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ in $\underline{\mathrm{PreVar}}_k$ ist.

Mengentheoretisch ist ja

$$\begin{aligned} X \times Y &= \left(\bigcup_{i=1}^{r} U_i\right) \times \left(\bigcup_{j=1}^{s} V_j\right) \\ &= \bigcup_{i=1}^{r} \bigcup_{j=1}^{s} U_i \times V_j, \end{aligned}$$

und die $U_i \times V_j$ sind affine Varietäten nach der Produktkonstruktion für affine Varietäten. Wir definieren eine Topologie auf $X \times Y$ durch

$$\operatorname{Off}(X \times Y) := \left\{ U \subseteq X \times Y \;\middle|\; \begin{array}{c} \forall (i,j) \in \{1, \cdots, r\} \times \{1, \cdots, s\} : \\ U \cap (V_i \times V_j) \in \operatorname{Off}(U_i \times V_j) \end{array} \right\}$$

$\boxed{\text{Bemerkung 1.}}$

(1) $X \times Y$ ist damit ein topologischer Raum, ebenfalls noethersch und damit quasikompakt.

(2) Diese Topologie auf $X \times Y$ hängt offenbar nicht von den gewählten affinen Überdeckungen $(U_i)_i$ und $(V_j)_j$ ab.

Definition 7.6. *Auf $X \times Y$ mit dieser (induzierten) Topologie ist eine Garbe $\mathcal{O}_{X \times Y}$ k-wertiger Funktionen wie folgt definiert:*

$$\forall U \in \operatorname{Off}(X \times Y) :$$

$$\mathcal{O}_{X \times Y}(U) := \left\{ f \in \operatorname{Abb}(U, k) \;\middle|\; \begin{array}{r} \forall i, j : \qquad\qquad\qquad\qquad \\ f|_{U \cap (V_i \times V_j)} \in \mathcal{O}_{U \cap (V_i \times V_j)}(U \cap (V_i \times V_j)) \\ = (\mathcal{O}_X(U_i) \otimes \mathcal{O}_Y(V_j))(U \cap (U_i \cap V_j)) \end{array} \right\}$$

$\boxed{\text{Bemerkung 2.}}$

(1) $\mathcal{O}_{X \times Y}$ ist wirklich eine Garbe, da durch Verklebung aus den Garben $\mathcal{O}_{U_i \times V_j}$ entstanden.

(2) $(X \times Y, \mathcal{O}_{X \times Y})$ ist dann eine Prävarietät mit affiner Überdeckung $X \times Y = \bigcup_{i,j} U_i \times V_j$.

$\boxed{\text{Satz 7.1.5.}}$ In $\underline{\text{PreVar}}_k$ ist $(X \times Y, \mathcal{O}_{X \times Y})$ ein Produkt (das sogenannte **gute Produkt** von $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$).

Beweis. Seien $X \xrightarrow{f} X$ und $Z \xrightarrow{g} Y$ Morphismen in $\underline{\mathrm{PreVar}}_k$ und $X = \bigcup_{i=1}^r U_i$, $Y = \bigcup_{j=1}^s V_j$ affine offene Überdeckungen. Dann ist

$$Z = \bigcup_{i=1}^{r} f^{-1}(U_i) = \bigcup_{j=1}^{s} g^{-1}(V_j),$$

wobei die $f^{-1}(U_i)$ und $g^{-1}(V_j)$ offen in Z sind. Damit ist

$$\begin{aligned} Z &= \bigcup_{(i,j)} f^{-1}(U_i) \cap g^{-1}(V_j) \\ &= \bigcup_{\substack{(i,j) \\ f^{-1}(U_i)\cap g^{-1}(V_j)\neq\varnothing}} f^{-1}(U_i) \cap g^{-1}(V_j) \end{aligned}$$

(endliche) offene Überdeckung. Damit hat man die Morphismen

$$\begin{tikzcd} & U_i \\ f^{-1}(U_i)\cap g^{-1}(V_j) \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \\ & V_j. \end{tikzcd}$$

Ist $W_{ij}^l \in \mathrm{Off}^{\mathrm{aff}}(X \times Y)$ mit $W_{ij}^l \subseteq f^{-1}(U_i) \cap g^{-1}(V_j)$ (etwa aus einer affinen offenen Überdeckung $\bigcup_l W_{ij}^l = f^{-1}(U_i) \cap g^{-1}(V_j)$), so ergibt sich das Diagramm:

$$\begin{tikzcd} & & U_i & \\ W_{ij}^l \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[rrr, dotted, bend right=40, "\exists! h_{ij}^l"'] & f^{-1}(U_i)\cap g^{-1}(V_j) \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & U_i \times V_j \arrow[ul, "\pi_{U_i}"'] \arrow[dl, "\pi_{V_j}"] \\ & & V_j & \end{tikzcd}$$

Aufgrund der Universaleigenschaft von $U_i \times V_j$ (in $\underline{\mathrm{Var}}_k^{\mathrm{aff}}$) gibt es nun einen (eindeutig bestimmten) Morphismus $h_{ij}^l : W_{ij}^l \to U_i \times V_j$ mit $h_{ij}^l(z) = (f(z), g(z))$ für alle $z \in W_{ij}^l$. Damit verkleben sich die $\left\{h_{ij}^l\right\}_{(i,j,l)}$ zu einem Morphismus $h : Z \to X \times Y$, $h = (f, g)$. □

$\boxed{(X \times Y, \mathcal{O}_{x\times y})}$ **Definition 7.7.** *Für* $(X,Y) \in \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{PreVar}}_k)^2$ *bezeichne* $(X \times Y, \mathcal{O}_{x\times y})$ *das oben definierte* gute Produkt *von* $(X, \mathcal{O}_X)$ *und* $(Y, \mathcal{O}_Y)$.

$\boxed{\text{Korollar.}}$ Seien $X \xrightarrow{f} Y$ und $X' \xrightarrow{f'} Y'$ Morphismen in $\underline{\mathrm{PreVar}}_k$. Dann ist auch

$$\begin{aligned} f \times f' : X \times X' &\longrightarrow Y \times Y' \\ (x, x') &\longmapsto (f(x), f'(x')) \end{aligned}$$

ein Morphismus in $\underline{\mathrm{PreVar}}_k$.

Beweis. Wir haben folgendes Diagramm von Morphismen in $\underline{\text{PreVar}}_k$:

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[r, "f"] & Y & \\
X \times X' \arrow[ur, "\pi_X"] \arrow[dr, "\pi_{X'}"'] \arrow[rrr, dotted, "\exists! h"] & & & Y \times Y' \arrow[ul, "\pi_Y"'] \arrow[dl, "\pi_{Y'}"] \\
 & X' \arrow[r, "f'"'] & Y' &
\end{tikzcd}$$

Die Universaleigenschaft von $Y \times Y'$, angewandt auf $f' \circ \pi_{X'}$ und $f \circ \pi_X$ liefert einen eindeutigen faktorisierenden Morphismus $h : X \times X' \to Y \times Y'$, welcher das Diagramm kommutativ macht. Dabei ist dann für alle $(x, x') \in X \times X'$:

$$\begin{aligned}
\pi_Y(h(x, x')) &= f(x), \\
\pi_{Y'}(h(x, x')) &= f'(x)
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
h(x, x') &= (f(x), f'(x')) \\
&= (f \times f')(x, x').
\end{aligned}$$

□

$\boxed{\text{Satz 7.1.6.}}$ Sei $X \in \text{obj}(\underline{\text{Var}}_k^{\text{aff}})$ eine affine k-Varietät, $X \times X$ das (affine!) Produkt mit der Produktstruktur. Dann ist die Diagonale $\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$ stets abgeschlossen in $X \times X$.

Beweis. Sei $(x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta_X$ beliebig, d.h. $x \neq y$. Jetzt hat man die bijektive Evaluierungsabbildung

$$\begin{aligned}
\beta : X &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{k\text{-Alg}}(\mathcal{O}_X(X), k) \\
x &\longmapsto \beta(x) : \mathcal{O}_X(X) \to k \quad , \\
&\qquad\qquad \varphi \mapsto \varphi(x)
\end{aligned}$$

daher ist $\beta(x) \neq \beta(y)$. Das heißt, es gibt ein $\varphi \in \mathcal{O}_X(X)$ mit $\varphi(x) = \beta(x)(\varphi) \neq \beta(y)(\varphi) = \varphi(y)$, und damit ist $(x, y) \in D(\varphi \otimes 1 - 1 \otimes \varphi) \in \text{Off}(X, X)$, mit $D(\varphi \otimes 1 - 1 \otimes \varphi) \subseteq X \times Y \setminus \Delta_X$. Offenbar existiert für alle $(x, y) \notin \Delta_X$ eine solche Umgebung, damit ist $X \times Y \setminus \Delta_X$ offen, und Δ_X abgeschlossen. □

Erinnerung. Sei X topologischer Raum, $\varnothing \neq Z \subseteq X$ Teilmenge. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) $Z = U \cap A$, U offen in X, A abgeschlossen.

(2) $Z \in \text{Off}(\overline{(Z)}^X)$.

(3) $\forall z \in Z : \exists U_z \in \text{Off}(z) : \quad z \in U_z, Z \cap U_z \in \text{Abg}(U_z)$.

(4) Es existiert eine offene Überdeckung $Z \subseteq \bigcap_{i \in I} U_i$, so dass $Z \cap U_i \in \text{Abg}(U_i)$ ist für alle $i \in I$.

Wenn Z die äquivalenten Bedingungen (1) bis (4) erfüllt, so heißt Z eine **lokal abgeschlossene** (oder **lokal-abgeschlossene**) Teilmenge von X.

Erinnerung. Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ Prävarietät, $\varnothing \neq Z \subseteq X$, Z lokal abgeschlossen, so ist $(Z, \mathcal{O}_X|_Z)$ wieder eine Prävarietät (eine sogenannte **Unterprävarietät**).

$\boxed{\text{Korollar.}}$ Seien $X, Y \in \operatorname{obj}(\underline{\mathrm{PreVar}}_k)$ und $Y \xrightarrow{f} X$ Morphismus. Dann:

(1) $\Delta_X \subseteq X \times X$ ist lokal abgeschlossen.

(2) $\Gamma_f = \{(y, f(y)) \mid y \in Y\}$ (der Graph von f) ist ebenfalls lokal abgeschlossen, d.h. Unterprävarietät von $X \times Y$.

Beweis.

(1) Sei $X = \bigcup_{i=1}^r U_i$ mit $U_i \in \mathrm{Off}^{\mathrm{aff}}(X) \forall i$. Für alle $x \in X$ gilt dann $(x, x) \in \Delta_X$, und es gibt ein i mit $x \in U_i$, also

$$(x, x) \in U_i \times U_i \in \mathrm{Off}^{\mathrm{aff}}(X \times X).$$

Offenbar ist sogar $(x, x) \in (U_i \times U_i) \cap \Delta_X = \Delta_{U_i}$, und Δ_{U_i} ist abgeschlossen in $U_i \times U_i$ nach Satz 7.1.6. Damit ist eine Bedingung für lokal abgeschlossene Mengen erfüllt.

(2) Das Diagramm $\begin{matrix} Y \\ X \end{matrix} \overset{f}{\underset{\mathrm{id}_X}{\rightrightarrows}} X$ induziert den Produktmorphismus $f \times \mathrm{id}_X : Y \times X \to X \times X$, wobei

$$\Gamma_f = \{(y, x) \in Y \times X \mid f(y) = x\} = (f \times \mathrm{id}_X)^{-1}(\Delta_X)$$

ist. Da Δ_X lokal abgeschlossen und $f \times \mathrm{id}_X$ stetig ist, ist Γ_f auch lokal abgeschlossen. $\square$

Fazit. Graphen sind stets lokal abgeschlossen.

Separierte Prävarietäten (= Varietäten)

Definition 7.8. *Eine k-Prävarietät $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt **separiert** oder **Varietät**, falls für alle k-Prävarietäten Y und alle Morphismenpaare $f, g : Y \rightrightarrows X$ der Differenzkern*

$$\tilde{Y}(f, g) = \{y \in Y \mid f(y) = g(y)\}$$

abgeschlossen in Y ist.

Erinnerung. Diese Definition entspricht dem *kategorialen Hausdorff-Axiom* in $\underline{\mathrm{PreVar}}_k$.

> $\boxed{\text{SATZ 7.1.7.}}$ Sei $X \in \operatorname{obj}(\underline{\text{PreVar}}_k)$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:
>
> (1) X ist k-Varietät (d.h. separiert).
>
> (2) $\Delta_X \in \operatorname{Abg}(X \times X)$.

Beweis.

(1) ⇒ (2): Setze $Y := X \times X$, $f := \pi_1$, $g := \pi_2$, dann liefert (1):

$$\Delta_X = \widetilde{X \times X}(\pi_1, \pi_2) \in \operatorname{Abg}(X \times X).$$

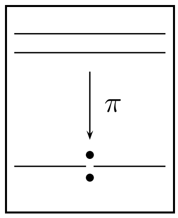
(2) ⇒ (1): Seien $X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} X$ Morphismen. Dann ergibt sich das Diagramm:

$$\begin{tikzcd} & X \\ Y \arrow[ur, bend left, "f"] \arrow[r, "(f,g)"] \arrow[dr, bend right, "g"'] & X \times X \arrow[u, "\pi_1"'] \arrow[d, "\pi_2"] \\ & X. \end{tikzcd}$$

Wir haben also $\tilde{Y}(f,g) = (f,g)^{-1}(\Delta_X)$, und da (f,g) stetig und nach (2) Δ_X abgeschlossen ist, ist auch $\tilde{Y}(f,g) \in \operatorname{Abg}(Y)$. ☐

Achtung. Es gibt nicht-separierte Prävarietäten!

Beispiel 7.1.5. Betrachte die disjunkte Vereinigung $\mathbb{A}^1_k \amalg \mathbb{A}^1_k = \mathbb{A}^1_k \times \{1,2\}$ mit den beiden kanonischen Einbettungen $\mathbb{A}^1_k \overset{j_1}{\underset{j_2}{\rightrightarrows}} \mathbb{A}^1_k \amalg \mathbb{A}^1_k$, und darauf die Äquivalenzrelation $\sim$, definiert durch



$$(x,1) \sim (y,2) \Leftrightarrow x = y \neq 0, \quad (x,1) \sim (y,1) \Leftrightarrow x = y, \quad (x,2) \sim (y,2) \Leftrightarrow x = y.$$

Dies induziert die Faktor-Prävarietät $X := {}^{\mathbb{A}^1_k \amalg \mathbb{A}^1_k}\!/\!_{\sim}$ mit

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^1_k \arrow[dr, "j_1"] & & \\ & \mathbb{A}^1_k \amalg \mathbb{A}^1_k \arrow[r, two heads, "\pi"] & {}^{\mathbb{A}^1_k \amalg \mathbb{A}^1_k}\!/\!_{\sim} \\ \mathbb{A}^1_k \arrow[ur, "j_2"'] & & \end{tikzcd}$$

Der Differenzkern von $\pi \circ j_1$ und $\pi \circ j_2$ ist dann

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbb{A}^1_k}(\pi \circ j_1, \pi \circ j_2) &= \left\{ x \in \mathbb{A}^1_k \mid \pi(j_1(x)) = \pi(j_2(x)) \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{A}^1_k \mid \pi(x,1) = \pi(x,2) \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{A}^1_k \mid (x,1) \sim (x,2) \right\} \\ &= \mathbb{A}^1_k \setminus \{0\}, \end{aligned}$$

und das ist keine abgeschlossene Menge in $\mathbb{A}^1_k$.

> $\boxed{\text{KOROLLAR.}}$ *Weitere äquivalente Separiertheitsbedingung*
> Sei $X \in \operatorname{obj}(\underline{\mathrm{PreVar}_k})$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:
>
> (1) $X \in \operatorname{obj}(\underline{\mathrm{Var}_k})$, d.h. X ist separiert.
>
> (2) Für alle $Y \in \operatorname{obj}(\underline{\mathrm{PreVar}_k})$ und alle Morphismen $Y \xrightarrow{f} X$ gilt: $\Gamma_f \in \operatorname{Abg}(Y \times X)$.

> $\boxed{\text{BEMERKUNG 1.}}$
>
> (1) Sei X eine k-Varietät, $Z \subseteq X$ Unterprävarietät (d.h. lokal abgeschlossen in X). Dann ist Z ebenfalls k-Varietät.
>
> (2) Seien X und Y k-Varietäten. Dann ist $X \times Y$ ebenfalls eine k-Varietät.

Beweis.

(1) Seien $Y \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Z$ Morphismen in $\underline{\mathrm{PreVar}_k}$. Dann haben wir mit der Einbettung $Y \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Z \overset{i}{\hookrightarrow} X$, und es ist

$$\begin{aligned}\tilde{Y}(f,g) &= \{y \in Y \mid f(y) = g(y)\}\\ &= \{y \in Y \mid i(f(y)) = i(g(y))\}\\ &= \tilde{Y}(i \circ f, i \circ g)\\ &\in \operatorname{Abg}(Y),\end{aligned}$$

weil X separiert ist.

(2) Seien $V \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} X \times Y$ Morphismen in $\underline{\mathrm{PreVar}_k}$. Mit den kanonischen Projektionen haben wir

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "\pi_X \circ f"] \arrow[dr, "f"] \arrow[ddrr, bend right, "\pi_Y \circ f"'] & & X \\
& X \times Y \arrow[ur, "\pi_X"'] \arrow[dr, "\pi_Y"] & \\
V \arrow[rr, "\pi_Y \circ g"'] \arrow[ur, "g"'] \arrow[uurr, bend left, "\pi_X \circ g"] & & Y
\end{tikzcd}$$

und es ist offenbar

$$\tilde{V}(f,g) = \tilde{V}(\pi_X \circ f, \pi_X \circ g) \cap \tilde{V}(\pi_Y \circ f, \pi_Y \circ g) \in \operatorname{Abg}(V),$$

denn es sind ja X und Y separiert. $\square$

Frage. Wir wissen, dass affine Varietäten separiert sind. Sind auch projektive Varietäten separiert?

Achtung. Es geht hier nicht so einfach wie bei affinen Varietäten, wo ja $\mathbb{A}_k^n = \mathbb{A}_k^1 \times \ldots \times \mathbb{A}_k^1$ war, und damit (induktive Anwendung der vorherigen Bemerkung) separiert.

Es ist aber $\mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m \not\cong \mathbb{P}^N$ für beliebige $n, m, N \geq 1$.

$\boxed{\text{Satz 7.1.8.}}$ *(Großes Separiertheitskriterium)*
Sei $X \in \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{PreVar}}_k)$, $k = \overline{k}$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) X ist eine k-Varietät.

(2) $\Delta_X \in \mathrm{Abg}(X \times X)$.

(3) Für alle $Y \in \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{PreVar}}_k)$, $\forall f \in \mathrm{Mor}_{\underline{\mathrm{PreVar}}_k}(Y, X)$ ist $\Gamma_f \in \mathrm{Abg}(Y \times X)$.

(4) $\forall U, V \in \mathrm{Off}^{\mathrm{aff}}(X)$ gilt:
 (a) $U \cap V \neq \varnothing \Rightarrow U \cap V \in \mathrm{Off}^{\mathrm{aff}}(X)$ (nichtleere Durchschnitte offener affiner Mengen sind wieder affin)
 (b) Der kanonische k-Alg-Homomorphismus

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X(U) \otimes \mathcal{O}_X(V) &\longrightarrow \mathcal{O}_X(U \cap V) \\ f \otimes g &\longmapsto f|_{U \cap V} \cdot g|_{U \cap V} \end{aligned}$$

 ist *surjektiv.*

(5) Es existiert eine endliche offene affine Überdeckung $X = \bigcup_{i=1}^r U_i$, $U_i \in \mathrm{Off}^{\mathrm{aff}}(X)$, so dass
 (a) $\forall (i,j) : U_i \cap U_j \neq \varnothing \Rightarrow U_i \cap U_j$ affin
 (b) $\forall (i,j)$ mit $U_i \cap U_j \neq \varnothing$ ist

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X(U_i) \otimes \mathcal{O}_X(U_j) &\longrightarrow \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j) \\ f \otimes g &\longmapsto f|_{U_i \cap U_j} \cdot g|_{U_i \cap U_j} \end{aligned}$$

 surjektiv.

Beweis. Zunächst eine (triviale) Vorbemerkung: Ist $f : X \to Y$ Morphismus in $\underline{\mathrm{Var}}_k$, so haben wir auch die Graphenabbildung $\gamma_f := (\mathrm{id}_X, f) : X \to X \times Y$, die offenbar ebenfalls Morphismus ist. Es ist $\mathrm{im}(\gamma_f) = \gamma_f(X) = \Gamma_f$, und $\gamma_f : X \xrightarrow{\sim} \Gamma_f$ ist Isomorphismus (mit inversem Morphismus $\pi_1|_{\Gamma_f}$).

(1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3): Ist bekannt.

(4) $\Rightarrow$ (5): Ist klar (Spezialfall, Existenz der Überdeckung wegen Quasi-kompaktheit.)

(2) ⇒ (4): Seien U und V offen und affin in X mit $U \cap V \neq \varnothing$. Dann haben wir den Inklusionsmorphismus $U \cap V \overset{i}{\hookrightarrow} X$, und es ist

$$U \cap V \cong_{\gamma_i} \Gamma_i \subseteq (U \cap V) \times X \subseteq X \times X$$

Dabei ist $\Gamma_i = \{(x,x) \mid x \in (U \cap V)\} = (U \times V) \cap \Delta_x$, wobei $U \times V$ affin ist. Da Δ_X abgeschlossen ist, ist auch Γ_i abgeschlossen in $U \times V$, also ebenfalls affin. Damit ist auch $U \cap V$ affin. Damit haben wir

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(U \cap V) \arrow[rr, "\sim", "\gamma_i^*"'] & & \mathcal{O}_{\Gamma_i}(\Gamma_i) \arrow[d, equal] \\
 & & \mathcal{O}_X(U) \otimes \mathcal{O}_X(V) \big/ I(\Gamma_i) \\
\mathcal{O}_X(U) \otimes \mathcal{O}_X(V) \arrow[uu, dotted, "\psi"] \arrow[urr, "\pi"'] & &
\end{tikzcd}$$

ψ ist surjektiver k-Algebra-Homomorphismus, wobei

$$\psi(f \otimes g) = \pi(f \otimes g) \circ \gamma_i$$

ist, also für $x \in U \cap V$:

$$\begin{aligned} \psi(f \otimes g)(x) &= (f \otimes g)(x,x) \\ &= f(x) \cdot g(x), \end{aligned}$$

ψ ist also gerade die zu untersuchende kanonische Abbildung, letztere ist also surjektiv.

(5) ⇒ (2): Sei X Prävarietät, $X = \bigcup_{i=1}^r U_i$, mit U_i offen und affin, und

(i) $\forall (i,j)$ ist $U_i \cap U_j$ affin, falls nicht $\varnothing$.

(ii) Die kanonische Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X(U_i) \otimes \mathcal{O}_X(U_j) &\xrightarrow{\rho_{ij}} \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j) \\ f \otimes g &\longmapsto f|_{U_i \cap U_j} \cdot g|_{U_i \cap U_j} \end{aligned}$$

ist surjektiv. Wir müssen nun zeigen, dass $\Delta_X \in \mathrm{Abg}(X \times X)$ ist.

Wir haben wieder (für $U_i \cap U_j \neq \varnothing$) die Inklusion

$$U_i \cap U_j \overset{\varkappa}{\hookrightarrow} X$$

und deren Graphenabbildung

$$\gamma_\varkappa = (\mathrm{id}, \varkappa) : U_i \cap U_j \xrightarrow{\sim} \Gamma_\varkappa = (U_i \times U_j) \cap \Delta_X,$$

was auch affin ist, da $\gamma_{\varkappa}$ ja ein Isomorphismus ist, und eingebettet ist via

$$(U_i \times U_j) \cap \Delta_X \overset{\lambda}{\hookrightarrow} U_i \times U_j.$$

Dies induziert folgendes Diagramm von k-Algebra-Morphismen:

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{O}_X(U_i) \otimes_k \mathcal{O}_X(U_j) \arrow[r, two heads, "\lambda^{\#}", "\pi"'] \arrow[dr, "\rho_{ij}"'] & \mathcal{O}_{\Gamma_{\varkappa}}(\Gamma_{\varkappa}) \arrow[d, "\wr \gamma_{\varkappa}^{\#}"] \\
\mathcal{O}_X(U_i) \otimes_k \mathcal{O}_X(U_j) \big/ \ker(\rho_{ij}) & & \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)
\end{tikzcd}$$

Dieses Diagramm ist kommutativ:

$$\begin{aligned}
(\gamma_{\varkappa}^{\#} \circ \lambda^{\#})(f \otimes g)(x) &= (\lambda \circ \gamma_{\varkappa})^{\#}(f \otimes g)(x) \\
&= (f \otimes g)((\lambda \circ \gamma_{\varkappa})(x)) \\
&= (f \otimes g)(\lambda(\gamma_{\varkappa}(x)) \\
&= (f \otimes g)(x, x) \\
&= f(x) \cdot g(x) \qquad\qquad\qquad = \rho_{ij}(f \otimes g)(x)
\end{aligned}$$

Es ist also

$$\gamma_{\varkappa}^{\#} \circ \lambda^{\#} = \rho_{ij},$$

und damit ist auch $\lambda^{\#}$ surjektiv, also

$$U_i \times U_j) \cap \Delta_X = \Gamma_{\varkappa} = V(\ker(\rho_{ij})) = V(\ker(\lambda^{\#})) \subseteq U_i \times U_j,$$

insbesondere also abgeschlossen in $U_i \times U_j$. Da dies für alle (i, j) mit $U_i \cap U_j \neq \varnothing$ gilt (die zusammen ja eine offene Überdeckung von $X \times X$ bilden), ist $\Delta_X \in \mathrm{Abg}(X \times X)$. □

KOROLLAR. $\mathbb{P}_k^n$ ist Varietät, und damit ist auch jede quasi-projektive Varietät separiert.

Beweis. Wir haben die übliche offene affine Überdeckung $\mathbb{P}_k^n = \bigcup_{i=0}^n D_+(X_i)$, mit

$$D_+(X_i) = \{(a_0 : \ldots : a_n) \in \mathbb{P}_k^n \mid a_i \neq 0\} \cong_{\underline{\mathrm{PreVar}}_k} \mathbb{A}_k^n.$$

Wir prüfen die Bedingung (5) in Satz 7.1.8:

(a) Es ist $D_+(X_i) \cap D_+(X_j) = D_+(X_i \cdot X_j)$, $X_i \cdot X_j$ ist homogenes Polynom vom Grad 2, und nach Satz 6.7.13 ist $D_+(F)$ für homogene F immer affin.

(b) Wir haben

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(D_+(X_i \cdot X_j)) = \left\{ \frac{G}{(X_i \cdot X_j)^k} \;\middle|\; \begin{matrix} k \in \mathbb{N}_0, \deg G = 2 \cdot k, \\ G \text{ homogen} \end{matrix} \right\}$$

und

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(D_+(X_i)) \otimes_k \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(D_+(X_j)) = \left\{ \frac{H}{X_i^\nu} \;\middle|\; \begin{matrix} \deg(H) = \nu, \\ H \text{ homogen} \end{matrix} \right\} \otimes \left\{ \frac{L}{X_j^\mu} \;\middle|\; \begin{matrix} \deg(L) = \mu, \\ L \text{ homogen} \end{matrix} \right\}$$

Der kanonische Morphismus ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(D_+(X_i)) \otimes_k \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(D_+(X_j)) &\longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(D_+(X_i \cdot X_j)) \\ \frac{H}{X_i^\nu} \otimes \frac{L}{X_j^\mu} &\longmapsto \frac{H \cdot L}{X_i^\nu \cdot X_j^\mu} \end{aligned}$$

Ist nun

$$G = \sum_{\substack{(i_0,\cdots,i_n) \\ i_0+\ldots+i_n=2k}} \alpha_{i_0\ldots i_n} \cdot X_0^{i_0} \cdot \ldots \cdot X_n^{i_n}$$

eines der Zählerpolynome für $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(D_+(X_i \cdot X_j))$, so können wir die Indices aufteilen in $\hat{i}_0 + \ldots + \hat{i}_n = k$ und $(i_0 - \hat{i}_0) + \ldots + (i_n - \hat{i}_n) = k$, und damit G darstellen als

$$G = \sum_{\ldots} \left(\alpha_{i_0\ldots i_n} \cdot X_0^{\hat{i}_0} \cdot \ldots \cdot X_n^{\hat{i}_n} \right) \cdot \left(X_0^{i_0-\hat{i}_0} \cdot \ldots \cdot X_n^{i_n-\hat{i}_n} \right)$$

und damit

$$\begin{aligned} \frac{G}{(X_i \cdot X_j)^k} &= \sum_{\ldots} \frac{\alpha_{i_0\ldots i_n} \cdot X_0^{\hat{i}_0} \cdot \ldots \cdot X_n^{\hat{i}_n}}{X_i^k} \cdot \frac{X_0^{i_0-\hat{i}_0} \cdot \ldots \cdot X_n^{i_n-\hat{i}_n}}{X_j^k} \\ &= \psi \left(\sum_{\ldots} \frac{\alpha_{i_0\ldots i_n} \cdot X_0^{\hat{i}_0} \cdot \ldots \cdot X_n^{\hat{i}_n}}{X_i^k} \otimes \frac{X_0^{i_0-\hat{i}_0} \cdot \ldots \cdot X_n^{i_n-\hat{i}_n}}{X_j^k} \right) \end{aligned}$$

Das heißt, ψ ist surjektiv. □

Weitere Beispiele für Varietäten

Algebraische Gruppen

Definition 7.9. *Eine* ***algebraische Gruppe*** *über* $k = \overline{k}$ *ist ein Quadrupel* $(G, \mathcal{O}_G, \mu, \mathrm{inv})$ *mit folgenden Eigenschaften:*

(1) $(G, \mathcal{O}_G)$ *ist eine* k*-Prävarietät.*

(2) $\mu : G \times G \to G$ *und* $\mathrm{inv} : G \to G$ *sind Morphismen in* $\underline{\mathrm{PreVar}}_k$.

(3) (G,μ) ist Gruppe und für $g \in G$ gilt $\mu(g, \mathrm{inv}(g)) = e_G$ (d.h. $g^{-1} = \mathrm{inv}(g)$).

Mit anderen Worten: Eine Algebraische Gruppe ist eine (abstrakte) Gruppe mit fixierter Prävarietäten-Struktur derart, dass die Verknüpfung und die Inversenbildung Morphismen sind.

Beispiel 7.1.6. *Lineare algebraische Gruppen*, (d.h. abgeschlossene Untergruppen von $\mathrm{GL}(n,k)$), etwa

- $\mathrm{GL}(n,k) = D(\det) \subseteq \mathbb{A}_k^{n^2}$
- $\mathrm{SL}(n,k) = V(\det - 1) \subseteq \mathrm{GL}(n,k)$.

Diese Gruppen sind sogar affin.

SATZ 7.1.9. Algebraische Gruppen sind stets separiert, also stets Varietäten.

Beweis. Sei $(G, \mathcal{O}_G, \mu, \mathrm{inv})$ eine algebraische Gruppe. (Wir wollen zeigen, dass $\Delta_X \in \mathrm{Abg}(G \times G)$ ist.) Dazu betrachten wir die Morphismenfolge

$$\begin{aligned} G \times G &\xrightarrow{\mathrm{id}_G \times \mathrm{inv}} G \times G \xrightarrow{\mu} G \\ (g,h) &\longmapsto (g, h^{-1}) \longmapsto g \cdot h^{-1} = \mu(g, h^{-1}) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad = \mu(g, \mathrm{inv}(h)). \end{aligned}$$

Da $\{e_G\} \in \mathrm{Abg}(G)$ ist (e_G bezeichne das neutrale Element von G), ist auch

$$\Delta_G = (\mu \circ (\mathrm{id}_G \times \mathrm{inv}))^{-1}(\{e\}) \in \mathrm{Abg}(G \times G),$$

und damit G separiert. □

Rationale Gruppenwirkungen auf Varietäten

Definition 7.10. *Sei $(G, \mathcal{O}_G)$*[1] *algebraische Gruppe, $X \in \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{Var}_k})$. Eine* ***rationale Wirkung*** *von G auf X ist eine Gruppenwirkung $\varphi : G \times X \to X$ (im üblichen Sinne*[2]*), wobei φ überdies auch ein Morphismus in $\underline{\mathrm{Var}}_k$ ist.*

Beispiel 7.1.7. Sei $X = \mathbb{A}_k^{n^2} \cong M_k(n,n)$ und $G := \mathrm{GL}(n,k)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \varphi : \mathrm{GL}(n,k) \times M_k(n,n) &\longrightarrow M_k(n,n) \\ (S,A) &\longmapsto S \cdot A \cdot S^{-1} \end{aligned}$$

eine algebraische Gruppenwirkung.

[1] $(G, \mathcal{O}_G)$ sei hier als Kurzschreibweise für $(G, \mathcal{O}_G, \cdot, \square^{-1})$ aufgefasst.
[2] φ Gruppenwirkung heißt $\varphi(g \cdot h, x) = \varphi(g, \varphi(h,x))$ und $\varphi(e_G, x) = x$.

Bemerkung. Ist $G \times X \to X$ rationale Gruppenwirkung in $\underline{\mathrm{Var}}_k$, so induziert φ eine Wirkung $\hat{\varphi}$ von G auf $\mathcal{O}_X(X)$ via

$$\begin{aligned}\hat{\varphi} : G \times \mathcal{O}_X(X) &\longrightarrow \mathcal{O}_X(X)\\ (g,\psi) &\longmapsto g\cdot\psi : X \to k \qquad intertextalso(\hat{\varphi}(g,\psi))(x) \quad = \psi(\varphi(g^{-1},x)).\\ &\qquad\qquad x \mapsto \psi(g^{-1}\cdot x)\end{aligned}$$

Bemerkung. Für $g \in G$ haben wir

$$\begin{aligned}\lambda_g : X &\longrightarrow X\\ x &\longmapsto g^{-1}\cdot x = \varphi(g^{-1},x)\end{aligned}$$

als Morphismus, sogar k-Isomorphismus, weil $\lambda_g \circ \lambda_{g^{-1}} = \mathrm{id}$.

Frage. Ist die Invariantenalgebra

$$\mathcal{O}_X(X)^G = \{f \in \mathcal{O}_X(X) \mid g\cdot g = f \forall g \in G\}$$

endlich erzeugte k-Algebra, falls $\mathcal{O}_X(X)$ eine solche ist?

Dies ist eine Variante des 14. Hilbertschen Problems von 1900.

Erinnerung. Sei G eine Gruppe, V ein k-Vektorraum, $\theta : G \times V \to V$ **lineare Wirkung** von G auf V (d.h. die $\lambda_g : \begin{smallmatrix} V \to V \\ x \mapsto g\cdot x\end{smallmatrix}$ sind lineare Automorphismen für allle $g \in G$).

θ heißt **lokal-endliche Wirkung**, falls für alle $v \in V$ ein G-invarianter Unterraum $W \subseteq V$ existiert (d.h. $G \cdot W = W$) mit $\dim_k(W) < \infty$ und $v \in W$.

Dann heißt die Gruppendarstellung $\rho_\theta : \begin{smallmatrix} G \to \mathrm{GL}_k(V) \\ g \mapsto \lambda_g\end{smallmatrix}$ **lokal-endliche Gruppendarstellung**.

> SATZ 7.1.10. Sei G affine algebraische Gruppe, $X \cong \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_X(X))$ affine Varietät, $\varphi : G \times X \to X$ rationale Wirkung von G auf X (d.h. Morphismus in $\underline{\mathrm{Var}}_k$).
> Dann ist die induzierte Wirkung $\hat{\varphi} : G \times \mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_X(X)$ lokal endlich.

Beweis. Wir müssen für $f \in \mathcal{O}_X(X)$ einen passenden G-invarianten k-Unterraum W konstruieren. Wir haben G und X als affine Varietäten, $\varphi : G \times X \to X$, also $\varphi^\# : \mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_{X\times X}(G \times X) = \mathcal{O}_G(G) \otimes_k \mathcal{O}_X(X)$, es ist also $\varphi^\#(f) = \sum_{i=1}^r \gamma_i \otimes h_i$ mit

$r \in \mathbb{N}$, $\gamma_i \in \mathcal{O}_G(G)$, $h_i \in \mathcal{O}_X(X)$. Andererseits ist

$$\begin{aligned}(g \cdot f)(x) &= \hat{\varphi}(g, f)(x) \\ &= f(g^{-1} \cdot x) \\ &= f(\varphi(g^{-1}, x)) \\ &= \varphi^{\#}(f)(g, x) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{r} \gamma_i \otimes h_i\right)(g^{-1}, x) \\ &= \sum_{i=1}^{r} \gamma_i(g^{-1}) \cdot h_i(x),\end{aligned}$$

für alle $g \in G$ und $x \in X$. Das heißt, wir haben

$$\begin{aligned}g \cdot f &= \hat{\varphi}(g, f) \\ &= \sum_{i=1}^{r} \underbrace{\gamma_i(g^{-1})}_{\in k} \cdot h_i,\end{aligned}$$

und damit ist für $g \in G$

$$g \cdot f \in \operatorname{span}_k \{h_1, \cdots, h_r\},$$

was ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum ist ($\dim(\dots) \leq r$). Es ist also auch $W_f := \operatorname{span}_k(\{g \cdot f \mid g \in G\})$ (ein Unterraum davon) endlich-dimensional. W_f enthält $f = e \cdot f$ und ist G-invariant, und damit ist die induzierte Wirkung $\hat{\varphi}$ lokal-endlich. □

> KOROLLAR. Seien G affine Gruppe, X affine Varietät, $\varphi : G \times X \to X$ rationale Wirkung, $\hat{\varphi}$ die induzierte Wirkung auf $\mathcal{O}_X(X)$.
> Dann ist $\mathcal{O}_X(X) = k[\theta_1, \cdots, \theta_s]$ mit $\operatorname{span}_k(\{\theta_1, \cdots, \theta_s\})$ G-invariant und $\dim_k(\operatorname{span}_k(\{\theta_1, \cdots, \theta_s\})) = s$.

Beweis. Sei $\mathcal{O}_X(X) = k[\eta_1, \cdots, \eta_t]$ beliebige Darstellung von $\mathcal{O}_X(X)$ als endlich erzeugte k-Algebra. Nach Satz 7.1.10 gibt es für jedes der η_i einen G-invarianten k-Untervektorraum W_{η_i} von $\mathcal{O}_X(X)$ mit $\dim_k(W_{\eta_i}) < \infty$. Es ist damit

$$\operatorname{span}_k(\eta_1, \cdots, \eta_t) \subseteq \sum_{i=1}^{t} W_{\eta_i} = \operatorname{span}_k(\theta_1, \cdots, \theta_s),$$

letzteres via Basiswahl. Dies ist als Summe G-invarianter Räume immer noch G-invariant, und es ist

$$\mathcal{O}_X(X) = k[\eta_1, \cdots, \eta_t] \subseteq k[\theta_1, \cdots, \theta_s] \subseteq k[\eta_1, \cdots, \eta_t],$$

also insgesamt

$$\mathcal{O}_X(X) = k[\theta_1, \cdots, \theta_s],$$

wobei die θ_i linear unabhängig sind und einen G-invarianten k-Unterraum aufspannen. □

Erinnerung. Sei G eine algebraische lineare Gruppe (d.h. $G \subseteq \mathrm{GL}(n,k)$ abgeschlossene Untergruppe). G heißt **reduktive Gruppe**, falls für jede endlich-dimensionale Darstellung $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ mit $\dim_k(V) < \infty$ mit induzierter Wirkung

$$\begin{aligned} \varphi_\rho : G \times V &\longrightarrow V \\ (g,x) &\longmapsto \rho(g)(x) \end{aligned}$$

gilt:

Ist $W \subseteq V$ ein G-invarianter Unterraum, so existiert ein G-invarianter Unterraum $W' \subseteq V$ derart, dass $V = W \oplus W'$.

Aus der Algebraischen Geometrie I kennen wir folgende

FAKTEN ÜBER LINEARE REDUKTIVE GRUPPEN. Sei G reduktive lineare Gruppe (also insbesondere affin).

(a) Ist $G \times V \xrightarrow{\varphi} V$ lokal endliche Wirkung auf einem k-Vektorraum V und ist $V^G := \{v \in V \mid g \cdot v = v\}$ der Unterraum der g-invarianten Elemente von V, so existiert *genau ein* G-invarianter Unterraum V_G mit $V_G \oplus V^G = V$.

(b) Die eindeutige k-lineare Projektionsabbildung (Vektorraumepimorphismus) $R_V := R_\varphi : V \twoheadrightarrow V^G$ heißt der **Reynoldsoperator** (auf V bzgl. der Wirkung φ der Gruppe G).

(c) Ist $G \times A \xrightarrow{\varphi} A$ lokal-endliche Wirkung von G auf einer endlich erzeugten k-Algebra A, so ist für $f \in A^G$ und $h \in A$ immer $R_A(f \cdot h) = f \cdot (R_A(h))$.

SATZ 7.1.11. *(Endlichkeitssatz von Hilbert-Nagata-Mumford)*
Sei G affine reduktive algebraische Gruppe, $X \cong \mathrm{Specm}(\mathcal{O}_X(X))$ eine affine Varietät, $\varphi : G \times X \to X$ eine rationale Wirkung von G auf X, $\hat{\varphi} : G \times \mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_X(X)$ die induzierte Wirkung.
Dann ist

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X(X)^G &= \{f \in \mathcal{O}_X(X) \mid g \cdot f = f \forall g \in G\} \\ &= \{f \in \mathcal{O}_X(X) \mid f(g \cdot x) = f(x) \forall (g,x) \in G \times X\} \end{aligned}$$

eine *endlich erzeugte* k-Algebra.

Beweis. $\hat{\varphi}$ ist nach Satz 7.1.10 lokal endliche Wirkung, und nach dem folgenden Korollar haben wir also $\mathcal{O}_X(X) = k[\theta_1, \cdots, \theta_s]$ mit G-invariantem $W = \mathrm{span}_k(\theta_1, \cdots, \theta_s)$, $\dim_k W = s$. G operiert auf W lokal endlich (da W endlich-dimensional),

$$\hat{\varphi}|_{G \times W} : G \times W \longrightarrow W$$

Damit operiert G auch auf dem Dualraum W^*:

$$\begin{aligned} G \times W^* &\longrightarrow W^* \\ (g,h) &\longmapsto g \cdot h : W \to k \\ &\qquad\qquad\qquad v \mapsto h(g^{-1} \cdot v) = h(v(g \cdot \Box)) \end{aligned}$$

und damit auch auf

$$\mathrm{Sym}^d(W^*,k) = \left\{ \psi : \underbrace{W^* \times \ldots \times W^*}_{d \text{ mal}} \to k \,\middle|\, \psi \text{ ist } d\text{-linear und symmetrisch} \right\}$$

mittels

$$\begin{aligned} G \times \mathrm{Sym}^d(W^*,k) &\longrightarrow \mathrm{Sym}^d(W^*,k) \\ (g,\psi) &\longmapsto g \cdot \psi : (W^*)^d \to k \\ &\qquad\qquad (h_1,\cdots,h_d) \longmapsto \psi(g^{-1} \cdot h_1, \cdots, g^{-1} \cdot h_d) \end{aligned}$$

(Aus der Linearen Algebra wissen wir, dass $\mathrm{Sym}^d(W^*,k)$ ebenfalls endlich-dimensional ist, mit $\dim_k(\mathrm{Sym}^d(W^*,k)) = \binom{s+d-1}{d}$, eine Basis ist $\{\psi_{i_1\ldots i_d} \mid 1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_d \leq s\}$, mit $\psi_{i_1\ldots i_s}(\theta_{k_1},\cdots,\theta_{k_d}) = \delta_{i_1k_1} \cdot \ldots \cdot \delta_{i_dk_d}$.) G operiert damit (summandenweise) auch auf dem k-Vektorraum

$$\begin{aligned} \mathrm{Sym}(W^*) &= \bigoplus_{d \geq 0} \mathrm{Sym}^d(W,k) \\ &= k \oplus W \oplus \mathrm{Sym}^2(W^*,k) \oplus \ldots, \end{aligned}$$

Diese Wirkung bleibt ebenfalls lokal-endlich. Analog dazu gibt es nun den Polynomring $k[X_1,\cdots,X_s]$ und darin die Mengen (k-Untervektorräume) $S_d = \{f \in k[X_1,\cdots,X_s] \mid f \text{ homogen}, \deg f = d\}$ der homogenen Polynome. Es ist

$$k[X_1,\cdots,X_s] = \sum_{d \geq 0} S_d$$

und $\dim_k(S_d) = \binom{s+d-1}{d}$, mit Basis $\{X_1^{\mu_1} \cdot \ldots X_S^{\mu_s} \mid \mu_1 + \ldots \mu_s = d\}$. Diese Betrachtung führt natürlich zum den k-Vektorraumisomorphismen

$$\begin{aligned} \Theta_d : \mathrm{Sym}^d(W^*,k) &\xrightarrow{\sim} S_d \\ \psi_{i_1\ldots i_d} &\longmapsto X_{i_1} \cdot \ldots \cdot X_{i_d}, \end{aligned}$$

welche sich zusammensetzen zu einem k-Vektorraum-Isomorphismus

$$\Theta : \mathrm{Sym}(W^*) \xrightarrow{\sim} k[X_1,\cdots,X_s].$$

Dadurch erhält auch $\mathrm{Sym}(W^*)$ eine k-Algebra-Struktur, und Sym_W ist als k-Algebra isomorph zu $k[X_1, \cdots, X_s]$ (nicht kanonisch, sondern abhängig von der Basiswahl $\{\theta_1, \cdots, \theta_s\}$ von W.) G operiert auf $\mathrm{Sym}(W^*)$ lokal endlich und graderhaltend, und damit wird

$$\Theta : \mathrm{Sym}(W^*) \xrightarrow{\sim} k[X_1, \cdots, X_s]$$

ein G-äquivarianter Isomorphismus der k-Algebren. Dieser induziert (durch Verkettung mit $X_i \mapsto \theta_i$) einen surjektiven k-Algebra-Homomorphismus

$$\begin{aligned} \vartheta : \mathrm{Sym}(W^*) &\twoheadrightarrow k[\theta_1, \cdots, \theta_s] = \mathcal{O}_X(X) \\ \psi_{i_1 \ldots i_d} &\longmapsto \theta_{i_1} \cdot \ldots \cdot \theta_{i_d}, \end{aligned}$$

welcher wohldefiniert und ebenfalls G-äquivariant ist. Insgesamt haben wir folgendes Diagramm G-äquivarianter k-Algebra-Homomorphismen:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sym}(W^*) \arrow[r, two heads, "\vartheta"] \arrow[d, "\Theta"', "\wr"] & k[\theta_1, \cdots, \theta_s] \\ k[X_1, \cdots, X_s] \arrow[ur, two heads, "\rho"'] & \end{tikzcd}$$

Da G immer noch reduktiv ist und ρ surjektiv und äquivariant, ist

$$\rho|_{\ldots} : k[X_1, \cdots, X_s]^G \to k[\theta_1, \cdots, \theta_s]^G$$

ebenfalls surjektiv. Es genügt also, das folgende Lemma zu zeigen, dann ist unser Satz bewiesen. $\square$

> $\boxed{\text{Lemma.}}$ Operiert eine reduktive Gruppe G auf dem Polynomring $k[X_1, \cdots, X_s]$ (lokal endlich und) *graderhaltend*, so ist $k[X_1, \cdots, X_s]^G$ endlich erzeugte k-Unteralgebra.

Beweis des Lemmas. Sei also $G \times k[X_1, \cdots, X_s] \to k[X_1, \cdots, X_s]$ graderhaltende Wirkung und G reduktiv. Dann betrachten wir das Ideal

$$\begin{aligned} I &:= \mathrm{Ideal}_{k[X_1, \cdots, X_n]} \left(\left\{ f \in k[X_1, \cdots, X_s] \;\middle|\; \begin{array}{c} \deg f \geq 1, \\ f \text{ homogen}, \\ f \ G\text{-invariant} \end{array} \right\} \right) \\ &= \mathrm{Ideal}_{k[X_1, \cdots, X_n]} \left(\bigcup_{g \geq 0} S_d^G \right) \end{aligned}$$

Da $k[X_1, \cdots, X_s]$ noethersch ist[3], ist I endlich erzeugtes Ideal, also etwa

$$I = (h_1, \cdots, h_r), \qquad h_i \in S_{d_i}^G, \deg(h_i) = d_i \geq 1$$

[3]Hilberts Basissatz, übrigens für diesen Beweis 1890 gefunden

$\boxed{\text{Behauptung.}}$ Es ist $S_d^G \subseteq k[h_1, \cdots, h_r]$ für alle $d \geq 0$.

Dies zeigen wir per Induktion über d:

Induktionsanfang: Für $d = 0$ ist offenbar $S_0 = S_0^G = k \subseteq k[h_1, \cdots, h_r]$.

Induktionsschluss: Sei $f \in S_d^G$. Dann ist $f \in I$, also $f = \sum_{i=1}^r g_i \cdot h_i$, wobei h_i homogen vom Grad d_i ist, also muss g_i (falls nicht 0) homogen vom Grad $d - d_i$ sein, also $g_i \in S_{d-d_i}$, mit $d - d_i < d$.

Weil G reduktiv ist, gibt es den zugehörigen (ebenfalls graderhaltenden) Reynolds-operator $R : k[X_1, \cdots, X_s] \twoheadrightarrow k[X_1, \cdots, X_s]^G$, und es ist

$$\begin{aligned} f &= R(f) \\ &= R\left(\sum_{i=1}^r g_i \cdot h_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^r R(g_i \cdot h_i) \end{aligned}$$

(h_i ist G-invariant)

$$= \sum_{i=1}^r R(g_i) \cdot h_i$$

Nun ist $R(g_i) \in S_{d-d_i}^G$, und nach Induktionsvorraussetzung $R(g_i) \in k[h_1, \cdots, h_r]$. Also

$$f \in k[h_1, \cdots, h_r]$$

für alle $f \in S_d^G$.

Damit ist

$$\begin{aligned} k[X_1, \cdots, X_s]^G &= \bigoplus S_d^G \\ &\subseteq k[h_1, \cdots, h_r] \\ &\subseteq k[X_1, \cdots, X_s]^G, \end{aligned}$$

also

$$k[X_1, \cdots, X_s]^G = k[h_1, \cdots, h_r],$$

also endlich erzeugte Unteralgebra. $\square$

Korollar. *(Fortsetzungssatz)*
Sei X affine k-Varietät, G affine reduktive Gruppe, $\varphi : G \times X \to X$ rationale Wirkung von G auf X.
Dann gibt es ein $s \in \mathbb{N}$ sowie eine rationale Wirkung von G auf $\mathbb{A}_k^s$ derart, dass dazu eine G-äquivariante abgeschlossene Einbettung $X \hookrightarrow \mathbb{A}_k^s$ existiert.

Beweis. Konstruiere $\theta_1, \cdots, \theta_s$ wie im Endlichkeitssatz, mit $\mathcal{O}_X(X) = k[\theta_1, \cdots, \theta_s]$, $\{\theta_i\}$ k-frei und $\mathrm{span}_k(\{\theta_i\}_i)$ G-invariant.

Dann folgt die Existenz des G-äquivarianten k-Algebra-Homomorphismus

$$\rho : k[X_1, \cdots, X_s] \twoheadrightarrow \mathcal{O}_X(X),$$

so dass es den assoziierten Morphismus gibt,

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Specm}(\mathcal{O}_X(X)) \arrow[r, "f'"] & \mathrm{Specm}(k[X_1, \cdots, X_s]) \\ X \arrow[u, equal, "\wr"'] \arrow[r, dotted, "f"] & \mathbb{A}_k^s \arrow[u, equal, "\wr"] \end{tikzcd}$$

mit $(f')^\# = f^\# = \rho$ (surjektiv), also ist f abgeschlossene Einbettung und G-äquivariant.
$\square$

Korollar. Seien G, X, φ wie bisher. Dann gilt:

(1) Es gibt eine k-Prävarietät $X/\!\!/G$ (kategorieller Quotient von X bzgl. der Wirkung von G) mit einem surjektiven Morphismus $q : X \to X/\!\!/G$, welcher G-äquivariant ist, wobei die Wirkung von G auf $X/\!\!/G$ die triviale Wirkung ist, d.h. q ist auf G-Orbits konstant.

(2) Es existiert ein kommutatives Diagramm mit dem topologischen Quotienten X/G (= Orbitmenge):

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[rr, mapsto] & & q(x) & \\ x \arrow[d, mapsto] & X \arrow[rr, two heads, "q"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}"] & & X/\!\!/G & q(x) \\ G \cdot x & & X/G \arrow[ur, "\hat{q}"'] & & G \cdot x \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}$$

Hierbei sind die Fasern von q Vereinigungen von Orbits:

$$\forall y \in X/\!\!/G : \; q^{-1}(y) = \bigcup_{\substack{x \\ q(x)=y}} G \cdot x$$

Beweis. Es ist $\mathcal{O}_X(X)^G$ eine endlich erzeugte k-Algebra, reduziert sowieso. Damit existiert $X/\!\!/G := \mathrm{Specm}(\mathcal{O}_X(X)^G)$ und die Inklusion $\mathcal{O}_X(X)^G \hookrightarrow \mathcal{O}_X(X)$ induziert den dominanten Morphismus $q : X \to X/\!\!/G$, welcher sogar surjektiv ist, wegen $(\mathfrak{a} \cdot \mathcal{O}_X(X)) \cap \mathcal{O}_X(X)^G = \mathfrak{a}$ für alle Ideale $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_X(X)$. □

Frage. Wie ist die (stetige) Abbildung $\hat{q} : X/G \to X/\!\!/G$ beschaffen, d.h. wie sehen die Fasern von $\hat{q}$ aus?

Insbesondere: Wann ist $\hat{q}$ bijektiv (oder Homöomorphismus), so dass X/G doch die Struktur einer (eventuell gar affinen?) Varietät erhält, mit $\mathrm{pr} \in \mathrm{Mor}_{\underline{\mathrm{PreVar}_k}}$?

Dazu ein universell wichtiges Lemma der algebraischen Geometrie:

> $\boxed{\text{Lemma.}}$ Seien $k = \overline{k}$, $(X, Y) \in \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{PreVar}_k})$, $f : X \to Y$ Morphismus in $\underline{\mathrm{PreVar}_k}$, f dominant (d.h. mit dichtem Bild). Dann existiert $U \in \mathrm{Off}(Y)$ mit $U \subseteq f(X) \subseteq Y$.

Beweis.

Fall 1: Seien zunächst X und Y affin sowie X irreduzibel (d.h. $f(X)$ irreduzibel, und damit $\overline{f(X)}^Y = Y$ irreduzibel), mit $\mathrm{Specm}(\mathcal{O}_X(X)) = X$ und $\mathrm{Specm}(\mathcal{O}_Y(Y)) = Y$. Wir haben dann

$$f^\# : \mathcal{O}_Y(Y) \hookrightarrow \mathcal{O}_X(Y)$$

als Monomorphismus der k-Algebren, da f dominant ist, und

$$A := f^\#(\mathcal{O}_Y(Y)) \subseteq \mathcal{O}_X(X) =: B = k[\eta_1, \cdots, \eta_n]$$

als Erweiterung von k-Integritäts-Algebren, mit $\eta_i \in B$. Mit $A \subseteq B$ haben wir auch $Q(A) \subseteq Q(B)$, mit $Q(A) \subseteq Q(A) \cdot B \subseteq Q(B)$. Dabei ist $Q(A) \cdot B = Q(A)[\eta_1, \cdots, \eta_n]$, also endlich erzeugte $Q(A)$-Algebra.

Nach dem Noetherschen Normalisierungslemma (Satz 6.4.2) gibt es eine Zwischenalgebra $C = Q(A)[\theta_1, \cdots, \theta_s] \cong Q(A)[T_1, \cdots, T_s]$ ($\theta_i \in Q(A)[\eta_1, \cdots, \eta_n]$), d.h. C transzendent über $Q(A)$, mit endlicher Erweiterung $C \overset{j}{\hookrightarrow} Q(A)[\eta_1, \cdots, \eta_n]$.

Insbesondere existiert ein $\rho \in A$, so dass $\rho \cdot \theta_i \in A[\eta_1, \cdots, \eta_n]$ (etwa ein Hauptnenner für alle θ_i). Wegen der Endlichkeit der Inklusion j ist j insbesondere auch eine ganze Erweiterung, das heißt, die η_i sind Nullstellen ganzer Polynome:

Es gibt (für $i \in \{1, \cdots, s\}$) $q_i \in \mathbb{N}$ und $(p_{ij})_{j=0}^{q_i - 1} \in Q(A)[T_1, \cdots, T_n]^{q_i}$, so dass

$$\eta_i^{q_i} + \sum_{j=0}^{q_i - 1} p_{ij}(\theta_1, \cdots, \theta_s) \cdot \eta_i^j = 0.$$

Auch für die p_{ij} gibt es wieder einen Hauptnenner $\tau \in A$, so dass

$$\hat{p}_{ij} := \tau \cdot p_{ij} \in A[T_1, \cdots, T_s] \quad \text{bzw.} \quad \tau \cdot o_{ij}(\theta_1, \cdots, \theta_s) \in A[\theta_1, \cdots, \theta_s]$$

ist, für alle i und j. Damit haben wir

$$0 = \tau \cdot \eta_i^{q_i} + \sum_{j=0}^{q_i-1} \hat{p}_{ij}(\theta_1, \dots \theta_s) \cdot \eta_i^j$$

$$0 = (t \cdot \eta_i)^{q_i} + \sum_{j=0}^{q_i-1} t^{q_i-1-j} \cdot \hat{p}_{ij}(\theta_1, \cdots, \theta_s) \cdot (t \cdot \eta_i)^j$$

$$(*) \qquad = (t \cdot \eta_i)^{q_i} + \sum_{j=0}^{q_i-1} \hat{\hat{p}}_i j(\theta_1, \cdots, \theta_s) \cdot (t \cdot \eta_i)^j,$$

mit $\hat{\hat{p}} \in A[T_1, \cdots, T_s] = f^{\#}(\mathcal{O}_Y(Y))[T_1, \cdots, T_s]$. Zunächst ist (*) eine Ganzheitsgleichung für $t \cdot \eta_i$ über $A[\theta_1, \cdots, \theta_s]$, und weil $\eta_i \in (B)_t = \frac{1}{t} \cdot B$, wird das äquivalente

$$\left(\frac{eta_i}{1}\right)_i^q + \sum_{j=1}^{q_i-1} \frac{\hat{\hat{p}}_j(\theta_1, \cdots, \theta_s)}{t^{q_i-1-j}} \cdot \left(\frac{\eta_i}{1}\right)^j$$

zu einer Ganzheitsgleichung für η_i über $A_t[\theta_1, \cdots, \theta_s]$, und $\theta_1, \cdots, \theta_s$ ist offenbar auch transzendent über $A_t \subseteq Q(A)$.

Fazit.

(1) B_t ist ganz über $A_t[\theta_1, \cdots, \theta_s]$, und wir haben

$$A_t \underbrace{\subseteq}_{\text{transzendente Erweiterung}} A_t[\theta_1, \cdots, \theta_s] \overbrace{\subseteq}^{\text{ganze Erweiterung}} B_t$$

(2) Rückübersetzung in die geometrische Situation:
Mit $\omega \in (f^{\#})^{-1}(t) \subseteq \mathcal{O}_Y(Y)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} f^{\#}(\mathcal{O}_Y(Y)_\omega) &= f^{\#}(\mathcal{O}_Y(Y))_{f^{\#}(\omega)} \\ &\subseteq f^{\#}(\mathcal{O}_Y(Y))_{f^{\#}(\omega)}[\theta_1, \cdots, \theta_s] \\ &\subseteq \mathcal{O}_X(X)_{f^{\#}(\omega)}. \end{aligned}$$

(3) Insgesamt haben wir das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_Y(Y) \arrow[rr, tail, "f^{\#}"] \arrow[d, tail, "\cap"'] & & \mathcal{O}_X(X) \arrow[d, tail, "\cap"] \\ \mathcal{O}_Y(Y)_\omega \arrow[r, tail, "\subseteq"] \arrow[d, tail, "\cap"'] & \mathcal{O}_Y(Y)_\omega[\theta_1, \cdots, \theta_s] \arrow[r, tail, "f^{\#}_\omega"] & \mathcal{O}_X(X)_{f^{\#}(\omega)} \arrow[d, tail, "\cap"] \\ Q(\mathcal{O}_Y(Y)) \arrow[rr, tail, "Q(f^{\#})"] & & Q(\mathcal{O}_X(X)) \end{tikzcd}$$

Dabei ist

$$\mathcal{O}_Y(Y)_\omega[\theta_1, \cdots, \theta_s] = \mathcal{O}_Y(Y) \otimes k[\theta_1, \cdots, \theta_s] = A[D(\omega) \times \mathbb{A}_k^s].$$

(4) Auf die Varietätenebene übertragen ergibt dies:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] & & Y \\
D(f^{\#}(\omega)) \arrow[u, "\cup\!\!\mid"'] \arrow[rr, "f|_{D(f^{\#}(\omega))}"] \arrow[dr, "\substack{\text{endlich,}\\ \text{dominant}\\ \Rightarrow \text{surjektiv}}"'] & & D(\omega) \arrow[u, "\cup\!\!\mid"'] \\
& D(\omega) \times \mathbb{A}_k^s \arrow[ur, "\mathrm{pr}_1"'] &
\end{tikzcd}$$

(5) Damit ist

$$f|_{D(f^{\#}(\omega))} : D(f^{\#}(\omega)) = f^{-1}(D(\omega)) \longrightarrow D(\omega)$$

selbst surjektiv, also leistet die offene Menge $D(\omega) = f(f^{-1}(D(\omega))) \subseteq f(X)$ das gewünschte.

Fall 2: Sei nun X beliebige irreduzible Prävarietät, Y affin und $f : X \to Y$ dominant. (Es ist dann $Y = \overline{f(X)}^Y$ auch irreduzibel.) X lässt sich bekanntlich überdecken durch affine offene Mengen, etwa $X = \bigcup_{i=1}^r U_i$, $U_i \in \mathrm{Off}^{\mathrm{aff}}(X)$. Da $f(X)$ dicht ist in Y, ist

$$\begin{aligned}
Y &= \overline{f(X)}^Y \\
&= \overline{f\left(\bigcup_{i=1}^r U_i\right)}^Y \\
&= \overline{\bigcup_{i=1}^r f(U_i)}^Y \\
&= \bigcup_{i=1}^r \overline{f(U_i)}^Y,
\end{aligned}$$

als Überdeckung durch irreduzible (abgeschlossene) Mengen. Aufgrund der Irreduzibilitätseigenschaft von Y gibt es dann ein $i_0 \in \{1, \cdots, r\}$ mit

$$Y = \overline{f(U_i)}^Y$$

Das heißt, es ist schon

$$f_{i_0} := f|_{U_{i_0}} : U_{i_0} \longrightarrow cl[Y]f(U_i) = Y$$

dominant, und U_{i_0} ist affin. Wir können Fall 1 anwenden und erhalten, dass es eine offene Menge $W \subseteq f(U_{i_0}) \subseteq f(X)$ gibt, womit wir fertig sind.

Fall 3: Seien X und Y nun beliebige Prävarietäten, X weiterhin irreduzibel, $f : X \to Y$ dominant. Sei $Y = \bigcup_{j=1}^s V_j$ affine offene Überdeckung von Y. Da f dominant ist, ist $f(X)$ dicht in Y, also ist

$$f(X) \cap V_j \neq \varnothing \; \forall j \in \{1, \cdots, s\},$$

also $f^{-1}(V_j) \neq \varnothing$ offen in X (und damit irreduzibel, weil X irreduzibel) mit

$$f_j = f|_{f^{-1}(V_j)} : f^{-1}(V_j) \longrightarrow V_j,$$

wobei V_j affin ist. Wir können also auf f_j Fall 2 anwenden und erhalten

$$\forall j \in \{1, \cdots, s\} : \ \exists W_j \in \mathrm{Off}(V_j) \subseteq \mathrm{Off}(Y) : W_j \subseteq f(f^{-1}(V_j)).$$

Für die Vereinigung $W := \bigcup_{j=1}^{s} W_j$ gilt nun

$$W \subseteq \bigcup_{j=1}^{s} f(f^{-1}(V_j)) = f\left(\bigcup_j f^{-1}(V_j)\right) \subseteq f(X),$$

wir haben also auch in Fall 3 die Existenz einer passenden offenen Menge gezeigt.

Fall 4: Seien nun X, Y wirklich beliebig und $f : X \to Y$ dominant. X und Y seien in irreduzible Komponenten zerlegt via

$$X = \bigcup_{i=1}^{r} Z_i$$
$$Y = \bigcup_{j=1}^{s} S_j$$

Da f dominant ist, ist außerdem

$$\begin{aligned} Y &= \overline{f(X)}^{Y} \\ &= \bigcup_{i=1}^{r} \overline{f(Z_i)}^{Y} \end{aligned}$$

eine weitere Zerlegung in irreduzible Komponenten. Da diese Komponenten eindeutig sind, ist $s \leq r$ und

$$S_j = \overline{f(Z_{i_j})}^{Y}$$

für passende i_j (für jedes j – nicht unbedingt eindeutig, es können ja mehrere Z_i auf die selbe Komponente S_j abgebildet werden). Betrachten wir nun die (dominanten) Morphismen

$$f_i : Z_{i_j} \to S_j = \overline{f(Z_{i_j})}^{Y}$$

Fall 3 liefert uns für alle $j \in \{1, \cdots, s\}$:

$$\exists W_j \in \mathrm{Off}(S_j) : \quad W_j \subseteq f(Z_{i_j}) \subseteq S_j$$

Betrachten wir nun die Mengen

$$\begin{aligned}\tilde{W}_j &:= W_j \setminus \bigcup_{i\neq i_j} S_i \\ &\in \operatorname{Off}\big(S_{i_j} \setminus \bigcup_{i \neq i_j} S_i\big)\end{aligned}$$

und wegen $Y = \bigcup S_i$ ist das

$$\begin{aligned}&= \operatorname{Off}\Big(\underbrace{Y \setminus \underbrace{\bigcup_{i\neq i_j} \underbrace{S_i}_{\substack{\text{abgeschlossen}\\ \text{in } Y}}}_{\text{abgeschlossen in } Y}}_{\text{offen in } Y}\Big) \\ &\subseteq \operatorname{Off}(Y)\end{aligned}$$

Wir haben also die in Y offenen Mengen

$$W_j \subseteq f(Z_j) \subseteq f(X) \subseteq Y,$$

und mindestens eine davon ist nicht leer. Damit ist auch Fall 4 (der allgemeine Fall) erledigt, und das Lemma bewiesen. $\square$

Anwendungen auf Gruppenwirkungen und Quotienten

Kommen wir also zurück zum Fall $X \in \underline{\mathrm{Var}}_k^{\mathrm{aff}}$, G affine Gruppe über k, $\varphi : G\times X \to X$ rationale Wirkung von G auf X. Wir wissen (Hilbert/Nagata/Mumford, Satz 7.1.11): Ist G reduktiv, so ist $\mathcal{O}_X(X)^G$ endlich erzeugt, und damit existiert $X/\!\!/G := \operatorname{Specm}(\mathcal{O}_X(X)^G)$ als affine Varietät. Wir haben also

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, two heads, "q"] \arrow[d, "\mathrm{pr}=G\cdot\square"'] & X/\!\!/G \\ X/G \arrow[ur, "\tilde{q}"'] & \end{tikzcd}$$

wie üblich, mit

$$q^{-1}(y) = \bigcup_{\substack{x\in X\\ q(x)=y}} G\cdot x.$$

Mit dem vorherigen Lemma kommen wir nun zu folgendem Satz:

$\boxed{\text{SATZ 7.1.12.}}$ Sei G reduktive affine algebraische Gruppe, die auf der affinen Varietät X rational operiert und

$$\begin{tikzcd}
 & x \arrow[rr, mapsto] & & q(x) & \\
x \arrow[d, mapsto] & X \arrow[rr, two heads, "q"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}"'] & & X/\!\!/G & q(x) \\
G \cdot x & & X/G \arrow[ur, "\hat{q}"'] & G \cdot x \arrow[ur, mapsto] &
\end{tikzcd}$$

das kommutative Standarddiagramm von Epimorphismen. Dann gilt:

(1) Für alle $x \in X$ ist $G \cdot x \in \mathrm{Off}(\overline{G \cdot X}^{Y})$, d.h. jeder Orbit ist offen in deinem Abschluss (d.h. der Faser von q, in der er liegt), also lokal abgeschlossen, und damit selbst eine Prävarietät. (*Dies gilt immer, auch ohne die Reduktivität der Gruppe und ohne Affinität von X.*)

(2) Für $y \in X/\!\!/G$ enthält die Faser $q^{-1}(y) = \bigcup_{\substack{x \in X \\ q(x)=y}} G \cdot x$ *genau einen* abgeschlossenen Orbit. (*Dies benutzt die Reduktivität von G entscheidend.*)

(3) Der kategoriale Quotient $X/\!\!/G$ ist ein geometrischer Quotient (d.h. $\hat{q} : G/X \to G/\!\!/X$ ist sogar bijektiv) genau dann, wenn alle Orbits von G abgeschlossen sind (d.h. G *operiert mit abgeschlossenen Orbits*).

Beweis.

(1) Wir haben für jedes $x \in X$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\sim", "(\mathrm{id},\mathrm{const}_x)"'] \arrow[rr, bend left, two heads, "\varphi_x = \varphi(\square, x)"] & G \times \{x\} \arrow[r, two heads, "\varphi|\ldots"'] \arrow[d, "\subseteq"'] & G \cdot x \arrow[d, "\subseteq"'] \\
 & G \times X \arrow[r, two heads, "\varphi"'] & X
\end{tikzcd}$$

Damit ist offenbar

$$\begin{aligned}
\varphi_x : G &\longrightarrow \overline{G \cdot x}^{X} \\
g &\longmapsto g \cdot x
\end{aligned}$$

ein dominanter Morphismus. Das Lemma liefert uns die Existenz einer offenen Menge $U \in \mathrm{Off}(\overline{G \cdot x}^{X})$, so dass $U \subseteq G \cdot x \subseteq \overline{G \cdot x}^{X}$. Für $u \in U$ ist dann $u = g \cdot x$ bzw.

$x = g^{-1} \cdot u$ für ein $g \in G$, also ist $G \cdot x \subseteq G \cdot U \subseteq G \cdot x$, d.h. es ist sogar

$$G \cdot x = G \cdot U = \underbrace{\bigcup_{g \in G} g \cdot \underbrace{U}_{\substack{\text{offen in} \\ \overline{G \cdot x}^X}}}_{\text{offen in } \overline{G \cdot x}^X} \in \operatorname{Off}\left(\overline{G \cdot x}^X\right).$$

Offenbar wurde weder die Affinität noch die Reduktivität verwendet, nur die Rationalität von φ und das vorherige Lemma.

(2) Sei $y \in X /\!\!/ G$, etwa $y = q(x)$ für ein $x \in X$, so dass

$$\begin{aligned} q^{-1}(y) &= q^{-1}(q(x)) \\ &= \bigcup_{\substack{z \in X \\ q(z)=y}} G \cdot z \\ &= \bigcup_{\substack{z \in X \\ q(z)=y}} \overline{G \cdot z}^X \end{aligned}$$

Betrachten wir nun die Menge

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_y &= \left\{ \overline{G \cdot z}^X \mid G \cdot z \subseteq q^{-1}(y) \right\} \\ &= \left\{ \overline{G \cdot z}^X \mid z \in X, q(z) = y \right\} \\ &\subseteq \operatorname{Abg}(X) \end{aligned}$$

Da X als Varietät insbesondere auch noethersch ist, hat $\mathfrak{M}_y$ (als Menge abgeschlossener Mengen in X) ein minimales Element, etwa $\overline{G \cdot x_0}^X$.

BEHAUPTUNG. Es ist $G \cdot x_0 = \overline{G \cdot x_0}^X$, d.h. $G \cdot x_0$ ist abgeschlossener Orbit.

Beweis. Andernfalls hätten wir $\overline{G \cdot x_0}^X \setminus G \cdot x_0 \neq \varnothing$, also existiert ein Element z darin, d.h. $z \in \overline{G \cdot x_0}^X$ und $G \cdot z \cap G \cdot x_0 = \varnothing$. Damit ist $G \cdot z \subseteq \overline{G \cdot x_0}^X \setminus G \cdot x_0$, also $\overline{G \cdot z}^X \subsetneqq \overline{G \cdot x_0}^X$, im Wiederspruch zur Minimalität von $\overline{G \cdot x_0}^X$ in Y. ☐

BEHAUPTUNG. Es ist $G \cdot x_0$ sogar der *einzige* abgeschlossene Orbit in $q^{-1}(y)$.

Beweis. Sei $G \cdot z = \overline{G \cdot z}^X$ ein (weiterer) abgeschlossener Orbit in $q^{-1}(y)$. Dann ist $q(G \cdot x_0) = \{y\} = q(G \cdot z)$, also $q(G \cdot x_0) \cap q(G \cdot z) = \{y\} \neq \varnothing$. Da G reduktiv ist und q die G-Trennungseigenschaft hat (Satz 6.8.3), ist $q(Gx_0 \cap Gz) = q(Gx_0) \cap q(Gz) \neq \varnothing$, also $Gx_0 \cap Gz \neq \varnothing$, also sind die beiden Orbits gleich: $Gx_0 = Gz$. ☐

(3) Ist $\hat{q}$ bijektiv, so ist jede Faser ein Orbit, und da Fasern abgeschlossen sind, ist auch jeder Orbit abgeschlossen.

Umgekehrt: Ist jeder Orbit abgeschlossen, so kann nach (2) in jeder Faser nur ein Orbit liegen, also ist jede Faser ein Orbit, also ist $\hat{q}$ bijektiv. $\square$

Bemerkung. (Seien die Bezeichnungen wie im Beweis verwendet.)

In $q^{-1}(y)$ hat der einzige abgeschlossene Orbit $\overline{Gx_0}^X = Gx_0$ eine ganz merkwürdige Lage:

(1) Ist $G \cdot z \subseteq q^{-1}(y)$, dann ist

$$Gx_0 \subseteq \partial(Gz) = \overline{Gz}^X \setminus Gz, \quad \text{falls } z \notin Gx_0.$$

(2) Der Rand von Gz hat die Form

$$\partial(Gz) = \overline{Gz}^X \setminus Gz = \bigcup_{i \in I} \overline{Gy_i}^Y, \quad \text{mit } Gy_i \subseteq q^{-1}(y)$$

(3) Gx_0 ist der einzige Orbit in der Faser $q^{-1}(y)$, der im Abschluss jedes anderen Orbits der Faser liegt.

Bemerkung.

(1) Ist G *reduktiv*, so gilt die Äquivalenz:

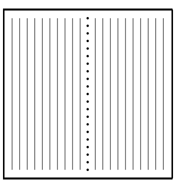
$X /\!\!/ G$ ist geometrischer Quotient (d.h. $\hat{q}$ ist bijektiv) $\Longleftrightarrow$ G operiert mit abgeschlossenen Orbits.

(2) Ist G nicht reduktiv, so kann G mit abgeschlossenen Orbits operieren, ohne dass jeder Orbit eine Faser ist.

Beispiel 7.1.8. Betrachte die Gruppe $\mathbb{G}_+ := (k, +)$ (die additive Gruppe des Körpers) und ihre Operation auf $\mathbb{A}_k^2$ durch

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{G}_+ \times \mathbb{A}_k^2 &\longrightarrow \mathbb{A}_k^2 \\ (\lambda, (\alpha, b)) &\longmapsto (\alpha, b + \lambda \cdot \alpha) \end{aligned}$$

(die Gruppe der Scherungen entlang der y-Achse). Diese Wirkung ist offenbar rational (da polynomial gegeben). Die induzierten Operation auf $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^2} = k[X, Y]$ ist



Orbits

$$\begin{aligned} \hat{\varphi} : \mathbb{G}_+ \times k[X, Y] &\longrightarrow k[X, Y] \\ (\lambda, f(X, Y)) &\longmapsto f(X, Y - \lambda X). \end{aligned}$$

Der Orbitraum (topologische Quotient) ist

$$\mathbb{A}_k^2 / \mathbb{G}_+ = \left\{ \{\alpha\} \times \mathbb{A}_k^1 \mid \alpha \in \mathbb{A}_k^1 \setminus \{0\} \right\} \cup \left\{ \{(0, b)\} \mid b \in \mathbb{A}_k^1 \right\}$$

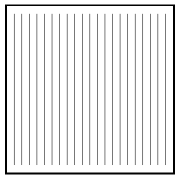
Offenbar sind alle Orbits abgeschlossen (entweder einelementig oder isomorph zum $\mathbb{A}_k^1$). Die Invariantenalgebra ist

$$\begin{aligned} k[X,Y]^{\mathbb{G}_+} &= \{f \in k[X,Y] \mid \hat{\varphi}(\lambda, f) = f \forall \lambda \in \mathbb{G}_+\} \\ &= \{f \in k[X,Y] \mid f(X,Y) = f(X, Y - \lambda X) \forall \lambda \in \mathbb{G}_+ = k\} \\ &= \{f \in k[X,Y] \mid f(X,Y) = g(X), g \in k[X]\} \\ &= k[X] \subseteq k[X,Y] \end{aligned}$$

Damit ergibt sich der kategorielle Quotient zu

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_k^2 /\!\!/ \mathbb{G}_+ &= \mathrm{Specm}(k[X,Y]^{\mathbb{G}_+}) \\ &= \mathrm{Specm}(k[X]) \\ &= \mathbb{A}_k^1, \end{aligned}$$

und q wird die kanonische Projektion $\underset{(x,y) \longmapsto x}{\mathbb{A}_k^2 \longrightarrow \mathbb{A}_k^1}$ mit dem Faserraum



Fasern

$$\left\{\{\alpha\} \times \mathbb{A}_k^1 \mid \alpha \in \mathbb{A}_k^1\right\}$$

Die Fasern von q stimmen also jeweils mit den Orbits überein, bis auf die Faser $q^{-1}((0,0)) = \{0\} \times \mathbb{A}_k^1$, welche Vereinigung von vielen (einpunktigen) Orbits ist – damit ist $\tilde{q}$ nicht bijektiv.

Wir haben also wirklich eine (nicht reduktive) Gruppe mit rationaler Wirkung auf einer affinen Varietät, bei der kategorieller und topologischer Quotient nicht homöomorph sind.

Randglossen zum Lemma

(A) Als Verallgemeinerung (ohne die Dominanzvoraussetzung): Sind X und $Y \in \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{PreVar}_k})$ beliebige Prävarietäten und $f : X \to Y$ beliebiger Morphismus (nicht dominant), so existiert eine offene Menge $U \in \mathrm{Off}(Y)$ mit

$$\varnothing \neq \underbrace{U \cap \overline{f(Y)}^Y}_{\in \mathrm{Off}'(\overline{f(X)}^Y)} \subseteq f(X).$$

(Dies erhält man mit der Zerlegung $X \xrightarrow{\hat{f}} \overline{f(X)}^Y \xhookrightarrow{\text{incl}} Y$ von f und der Anwendung des Lemmas auf den dominanten Morphismus $\hat{f}$.)

(B) Wir haben ja im Beweis des Lemmas im Fall 1 (X, Y affin, f dominant) das Diagramm:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] & & Y \\ D(f^{\#}(s)) \arrow[u, "\cup\!\shortmid"'] \arrow[rr, "f|_{D(f^{\#}(\omega))}"] \arrow[dr, "\text{endlich}"'] & & D(s) \arrow[u, "\cup\!\shortmid"'] \\ & D(s) \times \mathbb{A}_k^r \arrow[ur, "\pi_1"'] & \end{tikzcd}$$

Dabei ist $D(s) \times \mathbb{A}_k^r$ interpretierbar als triviales k-Vektorraumbündel vom Rang r über $D(s)$, d.h.:

Fazit. Mit einer geeigneten offenen Menge U ist $f : f^{-1}(U) \to U$ eine endliche Überlagerung eines k-Vektorbündels.

Bemerkung. Sei G affine reduktive Gruppe, X affine Varietät, $\varphi : G \times X \to X$ rationale Wirkung und

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, two heads, "q"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}"'] & & X/\!\!/G \\ & X/G \arrow[ur, "\tilde{q}"'] & \end{tikzcd}$$

das Standarddiagramm.

(1) X/G parametrisiert die Orbits Gx (für $x \in X$) und ist im allgemeinen keine Varietät.

(2) $X/\!\!/G$ parametrisiert die *abgeschlossenen* Orbits und ist (affine) *Varietät.*

Wir können also das Diagramm erweitern zu:

$$\begin{tikzcd} \left\{x \in X \,\middle|\, Gx = \overline{Gx}^Y\right\} =: T' \subseteq X \arrow[r, two heads, "q"] \arrow[d, "\mathrm{pr}"] \arrow[dd, bend right] & X/\!\!/G \\ X/G \arrow[ur, "\tilde{q}"'] \arrow[d, phantom, "\cup\!\shortmid"] & \\ T := \left\{Gx \,\middle|\, x \in X, Gx = \overline{Gx}^Y\right\} \arrow[uur, bend right, "\tilde{q}|_T", "\sim"'] & \end{tikzcd}$$

Es ist also $X/\!\!/G \cong T'/G$ eine Varietät.

Komplette Varietäten

Erinnerung.

(a) In $\underline{\mathrm{Top}}$ gilt ja bekanntlich (für Hausdorffräume, d.h. T_2):

Ist X kompakt, so ist für alle $Y \in \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{Top}})$ die kanonische Projektionsabbildung

$$\pi_Y : \underbrace{X \times Y}_{\text{Produkttopologie}} \longrightarrow Y$$

eine *abgeschlossene* (stetige) Abbildung (d.h. abgeschlossene Mengen in $X \times Y$ werden auf abgeschlossene Mengen in Y abgebildet).

(b) Ist X ein T_4-Raum[4] mit abzählbarer Topologie-Basis (wie etwa $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Topologie und seine Unterräume), so gilt sogar die Äquivalenz:

X ist genau dann kompakt, wenn für alle $Y \in \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{Top}})$ die Projektionsabbildung $\pi_Y : X \times Y \to Y$ abgeschlossen ist.

[4] d.h. disjunkte abgeschlossene Mengen lassen sich durch offene Umgebungen trennen

Varietäten sind ja (außer im endlichen Fall) keine Hausdorffräume, erfüllen aber wenigstens das kategorielle Hausdorff-Axiom für $\underline{\mathrm{PreVar}}_k$ (Separiertheitsbedingung). Analog dazu wollen wir jetzt vorgehen, um Kompaktheit zu übertragen.

Definition 7.11. *Sei $X \in \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{Var}}_k)$, also separiert. X heißt **komplette** algebraische Varietät, falls für alle $Y \in \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{Var}}_k)$ der Projektionsmorphismus*

$$\pi_Y : \underbrace{X \times Y}_{\textit{Zariski-Topologie}} \longrightarrow Y$$

ein abgeschlossener *Morphismus ist.*

Beispiel 7.1.9. $\mathbb{A}_k^n$ ist (für unendliche k, und wir betrachten nur solche) nicht komplett.

Beweis. Betrachte den Morphismus $\pi_2 : \mathbb{A}_k^n \times \mathbb{A}_k^1 \to \mathbb{A}_k^1$, und die abgeschlossene Menge

$$A = V(X_1 \cdot \ldots \cdot X_n \cdot X_{n+1} - 1) = \{((a_1, \cdots, a_n), a_{n+1}) \mid a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot a_{n+1} = 1\}.$$

Es ist $\pi_2(A) = \mathbb{A}_k^1 \setminus \{0\} = D(X) \notin \mathrm{Abg}(\mathbb{A}_k^1)$. □

$\boxed{\text{SATZ 7.1.13.}}$ *(Äquivalente Charakterisierungen der Komplettheit)*
Sei $X \in \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{Var}}_k)$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) X ist komplett, d.h.
$\forall Y \in \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{Var}}_k)$ ist $X \times Y \xrightarrow{\pi_Y} Y$ abgeschlossen.

(2) $\forall Y \in \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{Var}}_k^{\mathrm{aff}})$ ist $X \times Y \xrightarrow{\pi_Y} Y$ abgeschlossen.

(3) $\forall Y \in \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{Var}}_k^{\mathrm{irr}})$ ist $X \times Y \xrightarrow{\pi_Y} Y$ abgeschlossen.

(4) $\forall n \geq 0$ ist $X \times \mathbb{A}_k^n \xrightarrow{\pi_{(\mathbb{A}_k^n)}} \mathbb{A}_k^n$ abgeschlossen.

Beweis. Die Folgerungen (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (4) und (1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) sind klar (es handelt sich jeweils um Spezialfälle).

(2) $\Rightarrow$ (1): Sei Y beliebige Varietät, etwa $Y = \bigcup_{i=1}^r U_i$ mit $U_i \in \mathrm{Off}^{\mathrm{aff}}(Y)$. Dann ist

$$X \times Y = \bigcup_{i=1}^r X \times U_i.$$

Sei $Z \in \mathrm{Abg}(X \times Y)$. Dann ist (lokal) auch $Z \cap (X \times Y) \in \mathrm{Abg}(X \times U_i)$, mit affinem U_i. Nach (2) ist damit

$$\pi_Y(Z) \cap U_i = \pi_Y(Z \cap (X \times U_i))$$

abgeschlossen in U_i für alle i, also $\pi_A(Z)$ abgeschlossen in Z.

(4) ⇒ (2): Sei $Y \in \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{Var}}_k^{\mathrm{aff}})$ affine Varietät, ohne Beschränkung der Allgemeinheit $Y \subseteq \mathbb{A}_k^n$, $Y = V(\mathfrak{a})$, und $Z \in \mathrm{Abg}(X \times Y)$. Dann haben wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} Z \overset{\text{abg.}}{\subseteq} X \times Y \arrow[d, "\pi_Y"'] \arrow[r, phantom, "\overset{\text{abg.}}{\subseteq}"] & X \times \mathbb{A}_k^n \arrow[d, "\pi_2"] \\ Y \arrow[r, phantom, "\overset{\text{abg.}}{\subseteq}"] & \mathbb{A}_k^n \end{tikzcd}$$

und damit ist $\pi_Y(Z) = \pi_2(Z) \cap Y$, und da $\pi_2(Z)$ abgeschlossen ist, ist auch $\pi_Y(Z)$ abgeschlossen in Z. $\square$

Frage. Bisher wissen wir nur, dass $\mathbb{A}_k^n$ nicht komplett ist. Gibt es überhaupt komplette Varietäten?

Um Kandidaten zu finden, hilft uns der folgende Satz:

$\boxed{\text{SATZ 7.1.14.}}$ *(Eigenschaften kompletter Varietäten)*
Sei $X \in \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{Var}}_k)$ eine ***komplette*** algebraische Varietät. Dann gilt:

(1) Ist $Z \in \mathrm{Abg}(X)$, so ist Z (als Untervarietät) ebenfalls komplett.

(2) Ist Y auch komplett, so ist auch $X \times Y$ komplett.

(3) Ist $Y \in \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{Var}}_k)$, $f : X \to Y$ ein Morphismus, $Z \in \mathrm{Abg}(X)$, so ist $f(Z)$ ebenfalls abgeschlossen (in Y) und komplett.

Eine andere Formulierung für (3) ist:

- Morphismen, die von kompletten Varietäten ausgehen, sind abgeschlossen.
- Bilder kompletter Varietäten sind stets wieder komplett.

Beweis.

(1) Sei also X komplett, $Z \in \mathrm{Abg}(X)$, $Y \in \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{Var}}_k)$ beliebig. Dann induziert die abgeschlossene Einbettung $Z \hookrightarrow X$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} Z \times Y \arrow[rr, tail, "\subseteq", "(\text{abg.})"'] \arrow[dr, "\pi_Y"'] & & X \times Y \arrow[dl, "\mathrm{pr}_Y"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

mit $\pi_Y = \mathrm{pr}_Y|_{Z \times Y}$. Für $A \in \mathrm{Abg}(Z \times Y)$ ist dann auch $A \in \mathrm{Abg}(X \times Y)$, also (da X komplett ist) ist $\mathrm{pr}_Y(A) = \mathrm{pr}_Y(A) \in \mathrm{Abg}(Y)$.

(2) Seien also nun X und Y komplette Varietäten, W beliebige Varietät, $Z \in \mathrm{Abg}((X \times Y) \times W)$. (Wir müssen die Abgeschlossenheit von $\pi_W(Z) \subseteq W$ zeigen.) Dazu be-

trachten wir das (kommutative) Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, tail, "\subseteq", "\text{(abg.)}"'] \arrow[d, dash, "\wr"'] & (X \times Y) \times W \arrow[r, two heads, "\pi_W"] \arrow[d, dash, "\wr"'] & W \\
Z' \arrow[r, tail, "\subseteq", "\text{(abg.)}"'] & X \times (Y \times W) \arrow[r, two heads, "\mathrm{pr}_{Y\times W}"'] & Y \times W \arrow[u, "\mathrm{pr}_Y"']
\end{tikzcd}$$

Es ist $Z' \in \mathrm{Abg}(X \times (Y \times W))$, also (da X komplett ist) $\mathrm{pr}_{Y\times W}(Z) \in \mathrm{Abg}(Y \times W)$. Da auch Y komplett ist, ist auch $\pi_W(Z) = \mathrm{pr}_W(\mathrm{pr}_{Y\times W}(Z') \in \mathrm{Abg}(W)$.

(3) Sei Y wieder beliebige Varietät, X weiter komplett. Dann haben wir die Morphismenfolge

$$X \xrightarrow{\gamma_f} X \times Y \xrightarrow{\pi_Y} Y$$

mit der Graphen-Abbildung $\gamma_f = (\mathrm{id}, f)$, wodurch offenbar $f = \pi_Y \circ \gamma_f$ wird. Da Y separiert ist, ist $\Gamma_f = \gamma_f(X) \in \mathrm{Abg}(X \times Y)$, und da X komplett ist, ist $f(X) = \pi_Y(\Gamma_f) \in \mathrm{Abg}(Y)$.

Sei nun weiterhin $Z \in \mathrm{Abg}(X)$, damit $f|_Z : Z \to Y$ Morphismus mit Z komplett (wegen (1)). Aufgrund der eben gemachten Betrachtung ist auch $f|_Z(Z) = f(Z) \in \mathrm{Abg}(Y)$, also f ein abgeschlossener Morphismus.

(Es bleibt zu zeigen, dass $f(Z)$ auch komplett ist.)

Sei $W \in \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{Var}_k})$, $F \in \mathrm{Abg}(f(Z)\times W)$. (Wir müssen zeigen, dass $\pi_W(F) \in \mathrm{Abg}(W)$ ist.) Wir haben dann das (etwas größere) Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, tail, "\subseteq", "\text{(abg.)}"'] & f(Z) \times W \arrow[r, tail, "\subseteq", "\text{(abg.)}"'] \arrow[rr, bend left, "\pi_W"] & Y \times W \arrow[r, two heads, "\mathrm{pr}_2"'] & W \\
\mathrm{pr}_{23}^{-1}(F) \arrow[u, "\mathrm{pr}_{23}|_{\mathrm{pr}_{23}^{-1}(F)}"'] \arrow[rr, tail, "\subseteq", "\text{(abg.)}"'] & & X \times Y \times W \arrow[u, "\mathrm{pr}_{23}"'] \arrow[r, two heads, "\mathrm{pr}_{13}"] & X \times W \arrow[u, "\pi_2"'] \arrow[dl, shift right, "\gamma_f \times \mathrm{id}_W"', "\sim"] \\
F' := \mathrm{pr}_{23}^{-1}(F) \cap (\Gamma_f \times W) \arrow[u, "\cup|"] \arrow[uu, bend left=60, "\varphi"] \arrow[rr, tail, "\subseteq", "\text{(abg.)}"'] & & \Gamma_f \times W \arrow[u, "\cup|"'] \arrow[ur, shift right, "\mathrm{pr}_{13}|_{\Gamma_f\times W}"'] &
\end{tikzcd}$$

Dieses Diagramm ist offenbar kommutativ, und für $(f(z), w) \in F$ ist $(z, f(z), w) \in \Gamma_f \times W$, mit $(f(z), w) = \mathrm{pr}_{23}(z, f(z), w)$, also $(z, f(z), w) \in \mathrm{pr}_{23}^{-1}(F) \cap (\Gamma_f \times W)$ – es ist also φ surjektiv. Damit ist

$$\pi_W(F) = (\pi_W \circ \varphi)(F') = \pi_W \circ \mathrm{pr}_{23}(F') = \pi_2(\mathrm{pr}_{13}(F')),$$

und da F' abgeschlossen in $\Gamma_f \times W$ ist, ist $\mathrm{pr}_{13}(F') \in \mathrm{Abg}(X \times W)$, und da X komplett ist, ist $\pi_W(F) = \pi_2(\mathrm{pr}_{13}(F')) \in \mathrm{Abg}(W)$.

Das heißt, $\pi_W : f(Z) \times W \to W$ ist abgeschlossener Morphismus, also auch $f(Z)$ komplett. $\square$

KOROLLAR. Sei X komplette Varietät, Y affine Varietät, $f : X \to Y$ Morphismus in $\underline{\mathrm{Var}}_k$. Dann:

(1) $f(X)$ ist eine *endliche* Menge und $\mathcal{O}_X(X) \cong \bigoplus_{\alpha=1}^s k$, wobei s die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von X ist (und $s \geq |f(X)|$).

(2) Ist X zusätzlich irreduzibel, so ist $f(X) = \{y_0\}$, d.h. f ist konstant, und $\mathcal{O}_X(X) \cong k$.

(3) Allgemeiner: Ist X zusammenhängend (und komplett), so ist f konstant und $\mathcal{O}_X(X) \cong k$.

Beweis.

(1) Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $Y = V(\mathfrak{a}) \in \mathrm{Abg}(\mathbb{A}_k^n)$, wobei wir die Projektionen $\pi_i : \mathbb{A}_k^n \twoheadrightarrow \mathbb{A}_k^1$ haben, und $f : X \to Y$. Da X komplett ist, sind (nach dem eben bewiesenen Satz 7.1.14) für alle i die Verkettungen $\pi_i \circ f : X \to \mathbb{A}_k^1$ abgeschlossen mit abgeschlossenem und komplettem Bild $\mathrm{im}(\pi_i \circ f)$. Da $\mathbb{A}_k^1$ bekanntermaßen nicht komplett ist, ist also $\mathrm{im}(\pi_i \circ f) = (\pi_i \circ f)(X)$ jeweils endlich (andere abgeschlossene Mengen gibt es in $\mathbb{A}_k^1$ ja nicht).

Damit gilt für das Bild von f:

$$\mathrm{im}(f) = f(X) \subseteq \underbrace{(\pi_1 \circ f)(X) \times \ldots \times (\pi_n \circ f)(X)}_{\text{endlich}}$$

$f(X)$ ist also ebenfalls endlich.

(2) folgt aus (3), weil irreduzible Mengen insbesondere zusammenhängend sind.)

(3) Ist X zusammenhängend und komplett, so ist $f(X)$ endlich (nach (1)) und zusammenhängend (weil f als Morphismus insbesondere stetig ist). Damit ist $f(X) = \{y_0\}$, also f konstant.

Schließlich: Sei $\varphi \in \mathcal{O}_X(X) = \mathrm{Mor}(X, \mathbb{A}_k^1)$ für zusammenhängendes X. Dann ist φ konstant, also haben wir $\mathcal{O}_X(X) = k$.

Ist $X = \dot{\bigcup}_{\alpha=1}^r X_\alpha$ Zerlegung in Zusammenhangskomponenten, so ist ein $\varphi \in \mathcal{O}_X(X)$ auf jedem X_α konstant. Damit ist

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X(X) &\xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\alpha=1}^r \mathcal{O}_X(X_\alpha) \cong \bigoplus_{\alpha=1}^r k \\ \varphi &\longmapsto (\varphi|_{X_1}, \cdots, \varphi|_{X_r}) \end{aligned}$$

bijektiv, sogar k-Algebra-Isomorphismus. $\square$

KOROLLAR. Sei X affine Varietät ($X \in \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{Var}}_k^{\mathrm{aff}})$). Dann gilt die Äquivalenz:
X ist komplett $\Longleftrightarrow X$ ist endlich.

Beweis. Vorhergehender Korollar. □

Stille Hoffnung:
Da $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(\mathbb{P}_k^n) = k$ ist, käme $\mathbb{P}_k^n$ als komplette Varietät in Betracht (und damit dann alle projektiven Varietäten).

7.2 Spezielle komplette Varietäten: projektive und abelsche Varietäten

Die Komplettheit projektiver Varietäten

Erinnerung.

(1) Ein Polynom $f \in k[X_0, \cdots, X_n]$ heißt **homogen** vom Grad d, falls es sich schreiben lässt als

$$f(X_0, \cdots, X_n) = \sum_{\substack{(\nu_0, \cdots, \nu_n) \\ \nu_0 + \ldots + \nu_n = d}} a_{\nu_0 \ldots \nu_n} \cdot X_0^{\nu_0} \cdot \ldots \cdot X_n^{\nu_n}, \qquad \text{mit } a_{\nu_0 \ldots \nu_n} \in k$$

(d.h. als Summe von Monomen gleichen Grades).

(2) Wir bezeichnen die Mengen (k-Untervektorräume) der homogenen Polynome gleichen Grades in $k[X_0, \cdots, X_n]$ mit $\boxed{S_d}$

$$S_d := \{ f \in k[X_0, \cdots, X_n] \mid f \text{ homogen}, \deg f = d \}.$$

(3) Ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq k[X_0, \cdots, X_n]$ heißt **homogen**, falls für jedes $f \in \mathfrak{a}$ auch für deren homogene Komponenten $f_i \in S_i$ (nach folgender direkter Zerlegung) $f_i \in \mathfrak{a}$ ist.

Bemerkung. Es ist

$$k[X_0, \cdots, X_n] = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$$

als (unendliche) direkte Summe von k-Untervektorräumen.

$\boxed{\text{SATZ 7.2.1.}}$ *(Projektiver Hilbertsche Nullstellensatz)*
Betrachte $k[X_0, \cdots, X_n]$ für $n \geq 1$ und $\mathbb{P}_k^n$, ein homogenes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq k[X_0, \cdots, X_n]$, etwa $\mathfrak{a} = (f_1, \cdots, f_s)$ mit jeweils $f_i \in S_{d_i}$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) $V_+(\mathfrak{a}) = \varnothing$

(2) $(X_0, \cdots, X_n) \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$

(3) Es gibt $r_0 \in \mathbb{N}$, so dass $X_i^r \in \mathfrak{a}$ für $i \in \{0, \cdots, n\}$, $t \geq r_0$.

(4) Es gibt ein $d_0 \in \mathbb{N}$, so dass $S_d \subseteq \mathfrak{a}$ für alle $d \geq d_0$.

(5) Es gibt ein $t_0 \in \mathbb{N}$, so dass $(X_0, \cdots, X_n)^t \subseteq \mathfrak{a}$ für alle $t \geq t_0$.

Definition 7.12. *Das Maximalideal* $(X_0, \cdots, X_n) \in \operatorname{Specm}(k[X_0, \cdots, X_n])$ *heißt auch das* ***projektiv irrelevante Ideal****.*

Beweis.

(1) ⇔ (2): Es ist

$$\begin{aligned} & V_+(\mathfrak{a}) = \varnothing \\ \Leftrightarrow \quad & V(\mathfrak{a}) \subseteq \{0\} \subseteq \mathbb{A}_k^{n+1} \\ \overset{\text{HNS}}{\Longleftrightarrow} \quad & \sqrt{\mathfrak{a}} \supseteq I(\{0\}) = (X_0, \cdots, X_n) \end{aligned}$$

(2) ⇒ (3): Ist $(X_0, \cdots, X_n) \in \sqrt{\mathfrak{a}}$, so ist insbesondere $X_i^{r_i} \in \mathfrak{a}$ (mit $r_i \in \mathbb{N}$ passend gewählt). Mit $r := \max\{r_i \mid i \in \{0, \cdots, n\}\}$ erhalten wir $X_i^r \in \mathfrak{a}$, und daraus folgend (3).

(3) ⇒ (4): Sei $X_i^r \in \mathfrak{a}$ für alle i, $d_0 := r \cdot (n+1)$. Für $i_0 + \ldots + i_n \geq d_0$ ist dann $X_0^{i_0} \cdot \ldots \cdot X_n^{i_n} \in \mathfrak{a}$, da es dann immer ein k gibt mit $i_k \geq r$, also $X_k^{i_k} \in \mathfrak{r}$. Damit ist $S_d \subseteq \mathfrak{a}$ für alle $d \geq d_0$.

(4) ⇒ (5): Sei $S_d \subseteq \mathfrak{a}$ für alle $d \geq d_0$. Die Idealpotenz ist gegeben durch

$$\begin{aligned} (X_0, \cdots, X_n)^t &= \operatorname{Ideal}\left(\left\{X_0^{i_0} \cdot \ldots \cdot X_n^{i_n} \mid i_0 + \ldots + i_n = t\right\}\right) \\ &= \operatorname{Ideal}(S_t) \end{aligned}$$

Mit $t_0 := d_0$ wird also

$$(X_0, \cdots, X_n)^t = \operatorname{Ideal}(S_t) \subseteq \mathfrak{a}$$

für alle $t \geq t_0$, weil $S_t \subseteq \mathfrak{a}$.

(5) ⇒ (2): Sei $(X_0, \cdots, X_n)^t \subseteq \mathfrak{a}$, dann ist $X_i^t \in \mathfrak{a}$ für alle i, also $X_i \in \sqrt{\mathfrak{a}}$. Das heißt, $(X_0, \cdots, X_n) \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$. ☐

KOROLLAR. Seien die Vorraussetzungen wie im letzten Satz ($\mathfrak{a} = (f_1, \cdots, f_s)$ homogenes Ideal, $f_i \in S_{d_i}$). Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) $V_+(\mathfrak{a}) = \varnothing$

(2) Für $t \geq t_1 := \max\{d_1, \cdots, d_s, d_0\}$, das d_0 aus (4) in Satz 7.2.1, ist der k-Algebra-Homomorphismus

$$\beta_t : \bigoplus_{i=1}^{s} S_{t-d_i} \longrightarrow S_t$$
$$(g_1, \cdots, g_s) \longmapsto \sum_{i=1}^{s} g_i \cdot f_i$$

surjektiv.

Beweis.

(1) ⇒ (2): Es ist offenbar $\operatorname{im}(\beta_t) = S_t \cap \mathfrak{a}$. Aus (1) folgt ja (nach Satz 7.2.1), dass $S_t \subseteq \mathfrak{a}$ ist für $t \geq d_0$, also erst recht für $t \geq t_1$ – es ist also $\operatorname{im}(\beta_t) = S_t \subseteq \mathfrak{a}$, β_t ist also wirklich surjektiv.

(2) ⇒ (1): Sei β_t surjektiv für $t \geq t_1$, dann ist für jedes (normierte) Monom M vom Grad t

$$M = X_0^{j_0} \cdot \ldots X_n^{j_n} \in \operatorname{im}(\beta) \cap \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a},$$

also auch $S_t \subseteq \mathfrak{a}$ (weil S_t von den (normierten) Monomen erzeugt ist). Damit haben wir Punkt (4) aus Satz 7.2.1, also auch (1). □

Hieraus folgern wir nun die Komplettheit von $\mathbb{P}_k^n$.

SATZ 7.2.2. Für $k = \overline{k}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{P}_k^n$ eine komplette Varietät.

Beweis. Wir haben zu zeigen:

$$\pi_Y : \mathbb{P}_k^n \times Y \twoheadrightarrow Y$$

ist (für alle Varietäten Y) ein abgeschlossener Morphismus, d.h. überführt Zariski-abgeschlossene Mengen in solche.

Nach Satz 7.1.13 reicht es aus, $Y = \mathbb{A}_k^n$ zu betrachten (also affin und irreduzibel), also mit $\mathcal{O}_Y(Y)$ als Integritätsalgebra, $Y \cong \operatorname{Specm}(\mathcal{O}_Y(Y))$. Sei $Z \in \operatorname{Abg}(\mathbb{P}_k^n \times Y)$. Wir müssen zeigen, dass $\pi_Y(Z) \in \operatorname{Abg}(Y)$ ist.

Sei weiter $\operatorname{pr}_{\mathbb{P}} : \mathbb{A}_k^{n+1} \to \mathbb{P}_k^n$ die kanonische Projektion auf den projektiven Raum, $\operatorname{pr}_2 : \mathbb{A}^{n+1} \times Y \to Y$ die kanonische Projektion auf die zweite Komponente. Dann bezeichne $Z' := (\operatorname{pr}_{\mathbb{P}} \times \operatorname{id})^{-1}(Z)$, und $C(Z) := \overline{Z'}^{\mathbb{A}_k^{n+1} \times Y}$ den dazugehörigen „Kegel". Dabei ist $Z' = \overline{Z'}^{(\mathbb{A}_k^{n+1} \setminus \{0\}) \times Y} = C(Z) \setminus (\{0\} \times Y)$.

Betrachte dazu das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, tail, "\subseteq", "\text{(abg)}"'] & \mathbb{P}^n_k \times Y \arrow[r, two heads, "\pi_Y"] & Y \arrow[d, equal] \\
(\mathrm{pr}\times\mathrm{id})^{-1}(Z) =: Z' \arrow[u, dotted, two heads] \arrow[d, dotted, "\cap" sloped] \arrow[r, tail, "\subseteq", "\text{(abg)}"'] & (\mathbb{A}^{n+1}_k \setminus \{0\}) \times Y \arrow[u, two heads, "\mathrm{pr}_{\mathbb{P}} \times \mathrm{id}"'] \arrow[d, "\cap" sloped] \arrow[r, two heads, "\mathrm{pr}_2"] & Y \arrow[d, equal] \\
C(Z) \arrow[r, tail, "\subseteq", "\text{(abg)}"'] & \mathbb{A}^{n+1}_k \times Y \arrow[r, two heads] & Y
\end{tikzcd}$$

Es ist nun $C(Z) \in \mathrm{Abg}(\mathbb{A}^{n+1}_k \times Y)$, also von der Form $C(Z) = V(f_1, \cdots, f_s)$, mit

$$f_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+1}\times Y}(\mathbb{A}^{n+1} \times Y) = k[X_0, \cdots, X_n] \otimes_k \mathcal{O}_Y(Y) = \mathcal{O}_Y(Y)[X_0, \cdots, X_n],$$

und f_i homogen in $X_0 \dots X_n$, weil $C(Z)$ Kegel ist. Daher gilt für alle $y \in Y$:

$$\begin{aligned}
y \in \pi_Y(Z) &\iff \exists \underline{a} \in \mathbb{A}^{n+1}_k \setminus \{0\} : (\underline{a}, y) \in C(Z) \\
&\iff \exists \underline{a} \in \mathbb{A}^{n+1}_k \setminus \{0\} : \forall i : f_i(\underline{a}, y) = 0 \\
&\iff \exists \underline{a} \in \mathbb{A}^{n+1}_k \setminus \{0\} : \underline{a} \in V(f_1(\square, y), \cdots, f_s(\square, y)).
\end{aligned}$$

Umgekehrt heißt das für alle $y \in Y$:

$$y \notin \pi_Y(Y) \iff V(f_1(\square, y), \cdots, f_s(\square, y)) \subseteq \{0\} \subseteq \mathbb{A}^{n+1}_k.$$

Nach Satz 7.2.1 und dem Korollar daraus gibt es dann ein t_0 (ausreichend groß), so dass für $t > t_0$

$$\begin{aligned}
\beta_y : \bigoplus_{i=1}^{s} S_{t-d_i} &\longrightarrow S_t \\
(g_1, \cdots, g_s) &\longmapsto \sum_{i=1}^{s} g_i \cdot f_i(\square, y)
\end{aligned}$$

ein k-Algebra-Epimorphismus ist. Das heißt,

$$y \in \pi_Y(Z) \iff \forall t \gg 0 : \ \beta_y : \bigoplus_{i=1}^{s} S_{t-d_i} \to S_t \text{ ist nicht surjektiv.}$$

Global hat man aber nun:

$$\begin{aligned}
\beta : \bigoplus_{i=1}^{s} (S_{t-d_i} \otimes \mathcal{O}_Y(Y)) &\longrightarrow S_t \otimes \mathcal{O}_Y(Y) \subseteq \mathcal{O}_Y(Y)[X_0, \cdots, X_n] \\
(\varphi_1, \cdots, \varphi_s) &\longmapsto \sum_i \varphi_i \cdot f_i
\end{aligned}$$

β ist offenbar Homomorphismus der freien $\mathcal{O}_Y(Y)$-Moduln vom Rang $\sum_{i=1}^{s}\binom{n+t-d_i}{n}$ bzw. $\binom{n+t}{n}$, wird also beschrieben durch eine Matrix $B \in M_{\mathcal{O}_Y(Y)}\left(\binom{n+t}{n}, \sum_{i=1}^{s}\binom{n+t-d_i}{n}\right)$ für hinreichend große t. Es ist daher

$$y \in \pi_Y(Z) \Longleftrightarrow \forall t \gg 0 : \mathrm{Rg}_k(B(y)) < \binom{n+t}{n}$$

Wir können für $t \in N$ betrachten

$$\begin{aligned} E_t &:= \{y \in Y \mid B(y) \text{ ist keine Surjektion}\} \\ &= \left\{ y \in Y \,\middle|\, \mathrm{Rg}_k(B(y)) < \binom{n+t}{t} \right\} \\ &= \left\{ y \in Y \,\middle|\, \begin{array}{c} \text{Alle } \binom{n+t}{t}\text{-Minoren} \\ \text{von } B(y) \text{ verschwinden} \end{array} \right\} \qquad = V(\cdots, M_\alpha^B, \dots), \end{aligned}$$

wobei $\{M_\alpha \mid \alpha \in I\}$ die $\binom{n+t}{n}$-Minoren von B bezeichne. E_t ist also eine Determinantenuntervarietät von Y (was affin und irreduzibel ist), also insbesondere $E_t \in \mathrm{Abg}(Y)$.

Fazit.

(1) $y \in \pi_Y(Z) \Leftrightarrow y \in \bigcap_{t\gg 0} E_t$, d.h.

$$\pi_Y(Z) = \bigcap_{t \gg 0} E_t.$$

(2) $\pi_Y(Z) \in \mathrm{Abg}(Y)$.

(3) $\mathbb{P}_n^k$ ist komplett. $\square$

KOROLLAR.

(1) Ist X projektive Varietät (also $X \cong V_+(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{P}_k^n$), so ist X komplett.

(2) $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(\mathbb{P}_k^n) \cong k$, da $\mathbb{P}_k^n$ irreduzibel und komplett ist.[5]

(3) Ist X eine projektive irreduzible Varietät, so ist $\mathcal{O}_X(X) \cong k$.

Eine wichtige Folgerung daraus ist:

[5] Uns ist diese Tatsache aber schon längst bekannt, von Satz 6.7.5 in Algebraischer Geometrie I.

$\boxed{\text{SATZ 7.2.3.}}$ *(Hauptsatz der Eliminationstheorie)*
Sei $R = k[X_0, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_m] = k[Y_1, \cdots, Y_m][X_0, \cdots, X_n]$ Polynomring (mit $k = \overline{k}$) in $n + m + 1$ Variablen, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $f_1, \cdots, f_s \in R$ Polynome, die homogen in $X_0, \cdots, X_n$ sind (d.h. $f_i(r \cdot \underline{b}, \underline{a}) = r^{n+1} \cdot f_i(\underline{b}, \underline{a})$ für alle $\underline{b} \in \mathbb{A}_k^{n+1}$, $\underline{a} \in \mathbb{A}_k^m$.)
Dann existieren $g_1(Y_1, \cdots, Y_m), \cdots, g_s(Y_1, \cdots, Y_m) \in k[Y_1, \cdots, Y_m]$, so dass für $\underline{a} \in \mathbb{A}_k^m$ gilt:

$$\begin{aligned} &g_1(\underline{a}) = \ldots = g_s(\underline{a}) = 0 \Longleftrightarrow \\ &\qquad \Longleftrightarrow \exists \underline{b} \in \mathbb{A}_k^{n+1} \setminus \{0\} : \ f_1(\underline{b}, \underline{a}) = \ldots = f_s(\underline{b}, \underline{a}) = 0 \end{aligned}$$

In unserer Schreibweise:

$$\begin{aligned} &\underline{a} \in V(g_1, \cdots, g_s) \Longleftrightarrow \exists \underline{b} \in \mathbb{A}_k^{n+1} \setminus \{0\} : \\ &\qquad \underline{b} \in V(f_1(\square, \underline{a}), \cdots, f_s(\square, \underline{a})) \quad \text{bzw.} \quad (\underline{b}, \underline{a}) \in V(f_1, \cdots, f_s) \end{aligned}$$

oder noch einfacher:

$$V(g_1, \cdots, g_s) = \pi_{\mathbb{A}_k^m}(V(f_1, \cdots, f_s))$$

Beweis. Satz 7.2.2 (Komplettheit von $\mathbb{P}_k^n$) mit $Y := \mathbb{A}_k^m$ (und Verarbeitung der Minorengleichungen unter Elimination algebraisch überflüssiger Minorengleichungen). □

Bemerkung.

(1) Wir haben gesehen, dass projektive Varietäten stets komplett sind. Die Umkehrung gilt nicht.[6]

(2) Damit zeigt man ganz leicht, dass $D_+(F) \subseteq \mathbb{P}_k^n$, mit $F \in S_d \subseteq k[X_0, \cdots, X_n]$, $d \geq 1$, stets *affin* ist.

Beweis. Betrachte den Morphismus

$$\begin{aligned} f : \mathbb{P}_k^n &\longrightarrow \mathbb{P}_k^{\binom{n+d}{n}} \\ [a_0 : \ldots : a_n] = [\underline{a}] &\longmapsto [v_d(\underline{a}) : F(\underline{a})], \end{aligned}$$

mit dem Veronese-Morphismus $v_d : \mathbb{P}_k^n \rightarrow \mathbb{P}_k^{\binom{n+d}{n}-1}$. Da $\mathbb{P}_k^n$ komplett ist, ist $f(\mathbb{P}_k^n) \in \text{Abg}(\mathbb{P}_k^{\binom{n+d}{n}})$ und es ist sogar

$$f : P_k^n \xrightarrow{\sim} f(\mathbb{P}_k^n) \subseteq \mathbb{P}_k^{\binom{n+d}{n}}$$

[6] Ein Beispiel dafür fand Heisuke Hionaka 1966.

ein Isomorphismus. Entsprechendes gilt für die Einschränkung auf $D_+(F)$:

$$f|_{D_+(F)} : D_+(F) \xrightarrow{\sim} f(\mathbb{P}^n_k) \cap D_+(Z_{\binom{n+d}{n}})$$

$D_+(Z_{\binom{n+d}{n}})$ ist offen und affin, $f(\mathbb{P}^n_k)$ ist abgeschlossen, die Schnittmenge ist damit abgeschlossen in $D_+(Z_{\binom{n+d}{n}})$ und als solche ebenfalls affin.

Damit ist auch $D_+(f)$ affin. □

Abelsche Varietäten

Wir betrachten weiterhin $k = \overline{k}$ und $\underline{\mathrm{Var}}_k$ (die Kategorie der k-Varietäten). Sei $(G, +, \mathrm{inv}_G)$ eine algebraische Gruppe (über k), (also $(G, +, \mathrm{inv}_G)$ Gruppe, G Varietät, $+$ und inv_G Morphismen in $\underline{\mathrm{Var}}_k$).

Definition 7.13. *Eine algebraische Gruppe G heißt* ***abelsche Varietät****, falls G als Varietät irreduzibel und komplett ist.*

Beispiel 7.2.1. Sei G endliche Gruppe, dann ist G auch affin, und (weil endlich) komplett, aber nur für $G \neq (0)$ irreduzibel (bzw. zusammenhängend).

(0) ist die einzige *endliche* abelsche Varietät.

Beispiel 7.2.2. $k^* = \mathbb{A}^1_k \setminus \{0\}$ (mit $\cdot$) ist irreduzible algebraische Gruppe, auch quasiaffin und unendlich, damit nicht komplett, also keine abelsche Varietät.

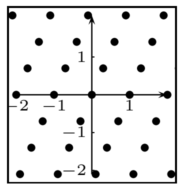
Beispiel 7.2.3. $\mathrm{GL}_k(n)$ und $SL_k(n)$ (für $n \geq 2$) sind unendliche, quasiaffine Varietäten, auch irreduzibel, aber nicht komplett, also keine abelschen Varietäten.

Aber es gibt auch nichttriviale abelsche Varietäten!

Beispiel 7.2.4.

Definition 7.14. *Wir bezeichnen die obere komplexe Halbebene mit* $\boxed{\mathcal{H}}$

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$$



$\Lambda_{(0.3,0.7)}$

und nennen sie auch ***Siegelsche Halbebene****.*

Betrachte $k = \mathbb{C}$, $\tau \in \mathcal{H}$. Dann haben wir $\Lambda_\tau := \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ als **Gitter** in $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, also diskrete Untergruppe mit $\dim_{\mathbb{R}}(\Lambda_\tau) = 2$. Betrachte nun $(\mathbb{C}/\Lambda_\tau, +)$. Dies ist eine abstrakte Gruppe, auch komplexe Mannigfaltigkeit der $\mathbb{C}$-Dimension 1, wobei Addition und Inversenbildung sogar holomorph sind.

Topologisch (mit euklidischer Quotienten-Topologie) ist C/Λ_τ homöomorph zu $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong_{\text{homöo}} S^{-1} \times S^1 = T^2$, dem Torus.

Für offene Mengen $U \in \mathrm{Off}_{\text{eukl}}(\mathbb{C}/\Lambda_\tau)$ ist ja $\pi^{-1}(U) \in \mathrm{Off}_{\text{eukl}}(\mathbb{C})$, und wir haben einen Ring holomorpher Funktionen auf U mit

$$\mathcal{O}^{\mathcal{H}ol}_{\mathbb{C}/\Lambda_\tau} = \left\{ f : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{c} f \text{ holomorph,} \\ \forall z \in U: \; f(z) = f(z+1) = f(z+\tau) \end{array} \right\}$$

Es bildet damit $(\mathbb{C}/\Lambda_\tau, \mathcal{O}^{\mathcal{H}ol}_{\mathbb{C}/\Lambda_\tau})$ einen Cartanschen Raum von Algebren $\mathbb{C}$-wertiger Funktionen, sogar eine komplexe Mannigfaltigkeit.

Definition 7.15. ${}^{\mathbb{C}}\!/\!_{\Lambda_\tau}$ *heißt* **1-*dimensionaler komplexer Torus zum Modul*** $\tau \in \mathcal{H}$.

$\boxed{\wp_\tau}$

Nun weiß man aus der elementaren Funktionentheorie (zu elliptischen und doppeltperiodischen Funktionen), dass $\tau \in \mathcal{H}$ eine meromorphe Funktion $\wp_\tau$ definiert:

$$\begin{aligned} \wp_\tau : \mathbb{C} &\dashrightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{1}{z^2} + \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{(z-m-n\tau)^2} - \frac{1}{(m+n\tau)^2} \right) \end{aligned}$$

$\wp_\tau$ ist wohldefiniert (und sogar holomorph) auf $\mathbb{C} \setminus \Lambda_\tau$, Λ_τ-periodisch und wird **Weierstraßsche $\wp$-Funktion für** $\tau \in \mathcal{H}$ genannt.

$\boxed{g_2(\tau)}$ $\boxed{g_3(\tau)}$

$\boxed{\text{Bemerkung 1.}}$ $\wp_\tau$ erfüllt die folgende *Funktionalgleichung*:

$$(\wp_\tau')^2 = 4\wp_\tau^3 + g_2(\tau) \cdot \wp_\tau + g_3(\tau),$$

mit den Eisenstein-Reihen

$$g_2(\tau) = 60 \cdot \sum_{(m,n)\neq 0} \frac{1}{(m+n\tau)^4} \quad \text{und} \quad g_3(\tau) = 140 \cdot \sum_{(m,n)\neq 0} \frac{1}{(m+n\tau)^6},$$

wobei $\Delta(g_2, g_3) = 4g_2^3 + 12g_3^2 \neq 0$ ist.

Damit induziert $\wp_\tau$ eine holomorphe Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi_\tau : \mathbb{C} \setminus \Lambda_\tau &\longrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \\ z &\longmapsto (\wp_\tau(z) : \wp_\tau'(z) : 1) \end{aligned}$$

mit meromorpher Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_\tau : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \\ m + n\tau &\longmapsto (0 : 1 : 0) \end{aligned}$$

Aufgrund obiger Bemerkung ist

$$\operatorname{im}(\hat{\varphi}_\tau) \subseteq V_+ \left(Y^2 \cdot Z - 4 \cdot X^3 - g_2 \cdot X \cdot Z^2 - g_3 \cdot Z^3 \right)$$

Man kann zeigen, dass hier sogar Gleichheit besteht, und stärker:

$\boxed{V_\tau}$

$\boxed{\text{Bemerkung 2.}}$ $\hat{\varphi}_\tau$ induziert einen analytischen Isomorphismus

$$\hat{\hat{\varphi}}_\tau : {}^{\mathbb{C}}\!/\!_{\Lambda_\tau} \xrightarrow{\sim} V_\tau := V_+ \left(Y^2 \cdot Z - 4 \cdot X^3 - g_2 \cdot X \cdot Z^2 - g_3 \cdot Z^3 \right) \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$$

V_τ ist auch Zariski-abgeschlossen in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, also auch projektive (d.h. komplette) Varietät.

$\boxed{\text{FAZIT.}}$ $\mathbb{C}/\Lambda_\tau$ ist vermöge $\hat{\hat{\varphi}}_\tau$ auch als eine komplette irreduzible algebraische Gruppe auffassbar und als solche eine abelsche Varietät.

Bemerkung. Sei $L = \omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}$ ein Gitter in $\mathbb{C}$ (nicht unbedingt der Form $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \tau$). Dann gibt es die meromorphe Funktion $\boxed{\wp_L}$

$$\begin{aligned}\wp_L : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{1}{\mathbb{Z}} + \sum_{\omega \in L\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right),\end{aligned}$$

$\boxed{g_3(L)}$

$\boxed{g_3(L)}$

die wie oben mit den Eisensteinreihen

$$g_2(L) = 60 \cdot \sum_{\omega \in L\setminus\{0\}} \frac{1}{\omega^4}$$

und

$$g_3(L) = 140 \cdot \sum_{\omega \in L\setminus\{0\}} \frac{1}{\omega^6}$$

die Funktionalgleichung

$$(\wp_L')^2(z) = 4\wp_L^3(z) + g_2(L)\wp_L(z) + g_3(L)$$

erfüllt, mit einem entsprechenden $V_L \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Für $L = L_\tau$ ergibt sich genau das oben genannte.

Kommen wir zurück zu den abelschen Varietäten $(A, +, \mathrm{inv}_A)$. Wir wollen einige Eigenschaften abelscher Varietäten aufspüren.

$\boxed{\text{SATZ 7.2.4.}}$ *(Rigidity-Lemma (Starrheitslemma))*
Sei $k = \overline{k}$, X, Y, Z k-Varietäten mit

(a) X, Y irreduzibel,

(b) X komplett

(c) $f : X \times Y \to Z$ Morphismus in $\underline{\mathrm{Var}}_k$, so dass

$$\exists (x_0, y_0, z_0) \in X \times Y \times Z : f(\{x_0\} \times Y = f(X \times \{y_0\}) = \{z_0\}$$

Dann ist f insgesamt konstant, d.h. $f(X \times Y) = \{z_0\}$.

Beweis.

Fall 1: Sei zunächst Z eine endliche Varietät. Da $X \times Y$ irreduzibel ist, ist auch $f(X \times Y)$ irreduzibel, also einelementig, d.h. f konstant.

Fall 2: Sei Z nicht endlich. Wir wählen dann eine offene affine Umgebung $U_0 \in \mathrm{Off}^{\mathrm{aff}}(Z)$ mit $z_0 \in U_0 \neq Z$ (das geht, weil Z unendlich ist). Dann ist $Z \setminus U_0 \in \mathrm{Abg}'(Z)$, und $B := f^{-1}(Z \setminus U_0) \in \mathrm{Abg}(X \times Y)$. Da X komplett ist, ist auch $W := \pi_Y(B) \in \mathrm{Abg}(Y)$. Daher gilt für $y \in Y$:

$$y \in W \iff \exists x \in X : f(x,y) \notin U_0$$

und umgekehrt

$$\begin{aligned} y \notin W &\iff \forall x \in X : f(x,y) \in U_0 \\ &\iff f(X \times \{y\}) \subseteq U_0 \end{aligned}$$

Nun ist $X \times \{y\} \cong X$, also ebenfalls komplett und irreduzibel, und U_0 affin, und damit (nach dem Korollar auf Seite 402)

$$y \notin W \Longrightarrow f(X \times \{y\}) = \{f(x_0, y)\} = \{z_0\}\,.$$

Wir haben also

$$f(\underbrace{X \times (\underbrace{Y \setminus W}_{\text{offen, irred. in } Y})}_{\text{offen, irred. in } X \times Y}) = \{z_0\}\,.$$

f stimmt also auf einer offenen (und daher dichten) Teilmenge von $X \times Y$ mit const_{z_0} überein, also (weil die Übereinstimmungsmenge stetiger Funktionen ja abgeschlossen ist) auf ganz $X \times Y$. □

Bemerkung. Der Beweis benötigte gar nicht $f(X \times \{y_0\}) = \{z_0\}$, also können wir statt (c) auch die Bedingung

(ĉ) $f : X \times Y \to Z$ Morphismus in $\underline{\mathrm{Var}}_k$ mit

$$\exists (x_0, z_0) \in X \times Z :\ f(\{x_0\} \times Y) = \{z_0\}$$

verwenden.

$\boxed{\underline{\mathrm{AV}}_k}$ **Definition 7.16.** *Die Kategorie der abelschen Varieteäten bezeichnen wir mit $\underline{\mathrm{AV}}_k$, wobei*

$$\begin{aligned} \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{AV}}_k) &= \{\textit{abelsche Varietäten}\} \\ \mathrm{Mor}_{\underline{\mathrm{AV}}_k}(A,B) &= \mathrm{Mor}_{\underline{\mathrm{Var}}_k}(A,B) \cap \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Groups}}}(A,B). \end{aligned}$$

$\boxed{\text{SATZ 7.2.5.}}$ *(Struktur der Morphismen zwischen abelschen Varietäten)*
Seien $A, B \in \text{obj}(\underline{\text{AV}_k})$, mit den jeweiligen neutralen Elementen e_A und e_B. Dann:

(1) Sei $f \in \text{Mor}_{\underline{\text{Var}_k}}(A, B)$. Dann ist

$$f \in \text{Hom}_{\underline{\text{AV}_k}}(A, B) \iff f(e_A) = e_B.$$

(2) Die kanonische Abbildung

$$\begin{aligned} \Theta : B \times \text{Hom}_{\underline{\text{AV}_k}}(A, B) &\longrightarrow \text{Mor}_{\underline{\text{Var}_k}}(A, B) \\ (b, g) &\longmapsto \lambda_b \circ g \end{aligned}$$

ist eine Bijektion. (Dabei bezeichnet $\lambda_b : \underset{b' \mapsto b+b'}{B \to B}$ die Linkstranslation in B).

Beweis. Zunächst ist für $b \in B$ die Linkstranslation

$$\begin{aligned} \lambda_b : B &\to B \\ b' &\mapsto b + b' \end{aligned}$$

als Komposition der Morphismen

$$B \xrightarrow{\sim} \{b\} \times B \xrightarrow{\subseteq} B \times B \xrightarrow{+} B$$

tatsächlich Morphismus von Varietäten, sogar (Varietäten-)Isomorphismus von B (mit Inverser $\lambda_b^{-1} = \lambda_{-b}$).

(1) $\Rightarrow$: Ist f ein Gruppenhomomorphismus, so gilt $f(e_A) = e_B$ trivialerweise.
$\Leftarrow$: Sei also $f(e_A) = e_B$. Betrachte

$$\begin{aligned} \varphi_f : A \times A &\longrightarrow B \\ (a, a') &\longmapsto f(a + a') - f(a') - f(a). \end{aligned}$$

Dies ist offenbar (weil zusammengesetzt aus Morphismen) wieder ein Morphismus. Außerdem ist für $a, a' \in A$:

$$\begin{aligned} \varphi_f(e_A, a') &= f(e_A + a') - f(a') - f(e_A) \\ &= f(a') - f(a') - e_B \\ &= e_B \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \varphi_f(a, e_A) &= f(a + e_A) - f(a) - f(e_A) \\ &= f(a) - f(a) - e_B \\ &= e_B, \end{aligned}$$

also $\varphi_f(\{e_A\} \times A) = \varphi_f(A \times \{e_A\} = \{e_B\}$. Damit ist (mit A als abelscher, also kompletter, Varietät) die Voraussetzung für das Starrheitslemma gegeben, also ist $\varphi_f(A \times A) = \{e_B\}$, d.h. $f(a+a') = f(a) + f(a')$. Es ist also auch $f \in \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Groups}}}(A,B)$, d.h. $f \in \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{AV}_k}}(A,B)$.

(2) **Injektivität von Θ:** Ist für $(b,c) \in B \times B$ und $(g,h) \in \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{AV}_k}}(A,B)^2$

$$\lambda_b \circ g = \Theta(b,g) = \Theta(c,h) = \lambda_c \circ h,$$

so ergibt eine Auswertung auf e_A, dass $b = c$ ist, also $\lambda_b = \lambda_c$. Da die λs injektiv sind, ist auch $g = h$, also $(b,g) = (c,h)$.

Surjektivität: Sei $f \in \mathrm{Mor}_{\underline{\mathrm{Var}_k}}(A,B)$. Sei $b := f(e_A) \in B$. Definiere dann $\hat{f} := \lambda_{-b} \circ f$. Dabei ist

$$\hat{f}(e_A) = f(e_A) - b = b - b = e_B,$$

also ist (weil $\hat{f}$ auch ein Morphismus ist), nach (1) schon $\hat{f} \in \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{AV}_k}}$, also $f = \Theta(f(e_A), \hat{f})$. Damit ist Θ auch surjektiv, also bijektiv.

□

<table><tr><td>KOROLLAR. Jede abelsche Varietät ist eine kommutative Gruppe (d.h. der Name abelsch wurde zu Recht verliehen).</td></tr></table>

Beweis. Sei also $(A, \cdot, \mathrm{inv})$ abelsche Varietät, mit $\mathrm{inv} \in \mathrm{Mor}_{\underline{\mathrm{Var}_k}}(A,A)$. Wegen $\mathrm{inv}(e_A) = e_A$ ist dann nach Satz 7.2.5 sogar $\mathrm{inv} \in \mathrm{Mor}_{\underline{\mathrm{AV}_k}}(A,A) \subseteq \mathrm{End}_{\underline{\mathrm{Groups}}}(A)$. Für $b, a \in A$ ist dann

$$b \cdot a = \mathrm{inv}(\mathrm{inv}(a) \cdot \mathrm{inv}(b)) \underset{\mathrm{End}}{=\!=} \mathrm{inv}(\mathrm{inv}(a)) \cdot \mathrm{inv}(\mathrm{inv}(b)) = a \cdot b,$$

d.h. $\cdot$ ist kommutative Operation, A eine kommutative Gruppe. □

Abelsche Varietäten über $\mathbb{C}$

Betrachten wir wieder $k = \mathbb{C}$, und sei A abelsche Varietät über $\mathbb{C}$.

Bemerkung.

(1) Wir wissen bereits:
   (a) Projektive Varietäten sind komplett, aber umgekehrt nicht unbedingt (Hironaka, 1966).
   (b) Abelsche Varietäten sind *per definitionem* komplett, aber nicht *a priori* projektiv. (Unser Beispiel war dies aber schon.)

(2) André Weil stellte (gegen 1946) diese Probleme auf:
   (a) Sind komplette Varietäten stets projektiv?

(b) Falls nicht, sind wenigstens abelsche Varietäten immer projektiv?

(3) 1953 lieferten (unabhängig voneinander) Jacobo Bersotti (Italien) und T. Matsuaka Beweise, dass Abelsche Varietäten stets projektiv sind.

(4) 1957 fand A. Weil einen schönen Beweis dafür.

Hier noch einmal als Satz:

SATZ 7.2.6. Sei $A \in \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{AV}_k})$ abelsche Varietät. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ und $f_1, \cdots, f_s \in k[X_0, \cdots, X_n]$, f_i homogen, so dass $A \cong V_+(f_1, \cdots, f_s) \subsetneq \mathbb{P}_k^N$ ist.

Beweis. (nicht hier.) □

Sei $A/_{\mathbb{C}}$ komplexe abelsche Varietät (d.h. $A \in \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{AV}_{\mathbb{C}}})$. Dann haben wir ja (nach Satz 7.2.6) eine abgeschlossene Einbettung

$$\varphi : A \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^N.$$

Dabei ist $A \cong \varphi(A)$, und nach Identifizierung ist A als algebraische Varietät in $\mathbb{P}_k^N$ auch bezüglich der euklidischen Topologie eine abgeschlossene *kompakte*, *zusammenhängende* komplexe Untermannigfaltigkeit, mit Gruppenstruktur, sogar kommutativ.

Fazit. Komplexe abelsche Varietäten sind spezielle komplexe Lie-Gruppen, nämlich kompakt, zusammenhängend, kommutativ.

Frage. Kann man alle solchen (d.h. kompakten zusammenhängenden kommutativen) komplexen Lie-Gruppen beschreiben?

Antwort. Sei X eine solche Lie-Gruppe. Man hat dann die (holomorphe) Abbildung

$$\exp : Lie(X) = T_e(X) \longrightarrow X$$

vom Tangentialraum des neutralen Elementes e (welcher als Vektorraum auch eine Lie-Algebra gleicher Dimension ist) nach X. exp hat folgende Eigenschaften:

(a) $\exp(0) = e$

(b) $(d\exp)_0 : T_0(T_e(X)) \longrightarrow T_e(X)$ ist (nach kanonischer Identifizierung) die Identität.

(c) $\exp : T_e(X) \longrightarrow X$ ist lokal holomorph umkehrbar, d.h. analytischer Isomorphismus.

(d) $\exp : T_e(X) \to X$ ist Gruppen-Homomorphismus, falls X kommutativ ist, d.h. im Fall abelscher Varietäten.

Fazit. In unserem Fall ($X = A$, abelsche Varietät) ist $\exp : T_eA \to A$ ein analytischer Homomorphismus, außerdem lokal analytischer Isomorphismus.

$\boxed{\text{SATZ 7.2.7.}}$ Sei A komplexe abelsche Varietät.

(1) $\exp : T_e(A) \to A$ ist surjektiv und $\ker(\exp) \subseteq T_e(A)$ ist (euklidisch) diskrete abgeschlossene Untergruppe von $(T_e(A), +)$.

(2) Als komplexe Lie-Gruppe (im klassischen Sinne) ist A isomorph zu

$$T_e(A) / \ker(\exp) \cong \mathbb{C}^{\dim(A)} / \Lambda,$$

wobei $\Lambda \subseteq \mathbb{C}^{\dim(A)}$ ein Gitter ist (d.h. $\dim \mathbb{R}(\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}) = 2 \dim_{\mathbb{C}}(A)$).

Mit anderen Worten: Eine abelsche Varietät ist (analytisch) ein komplexer Torus, d.h. komplexe Mannigfaltigkeit der Gestalt $\mathbb{C}^g / L$, $L \subset \mathbb{C}^G$ Gitter, $\dim_{\mathbb{R}}(L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}) = 2g$.

Topologisch ist sogar

$$A \cong \mathbb{C}^g / L \cong C^g / \mathbb{Z}^{2g} \cong \left(\mathbb{C} / \mathbb{Z}^2\right)^g \cong \left(\mathbb{R} / \mathbb{Z}\right)^{2g} = (S^1)^{2g}$$

Beweis.

(1) Wir wissen: $\exp(0) = e \in A$ (e ist das neutrale Element). Da exp (lokal) biholomorph ist, existiert $U \in \mathrm{Off}(T_e(A))$ mit $0 \in U$ und

$$\begin{aligned} U &\xrightarrow[\exp]{\sim} \exp(U) =: V \in \mathrm{Off}(A) \\ 0 &\longmapsto e \end{aligned}$$

Wir haben also $V \in \mathrm{Off}(A)$ mit $e \in V$ und $V \subseteq \mathrm{im}(\exp) =: H$. H ist (als Bild einer Gruppe unter einem Homomorphismus) Untergruppe von A, d.h. wir haben für $h \in H$ die Linkstranslation λ_h (Homöomorphismen von H und A), und für diese gilt $h \in \lambda_h(V) \subseteq H$. Insgesamt erhalten wir

$$\bigcup_{h \in H} \lambda_h(V) = H,$$

d.h. H ist in A eine *offene* Untergruppe. Andererseits ist

$$A = H \,\dot{\cup} \left(\bigcup_{i \in I} \lambda_{g_i}(H) \right)$$

(Zerlegung in Nebenklassen bezüglich H), und alle diese sind offen. H ist also auch abgeschlossen, außerdem bekanntlich nicht leer ($e \in H$), und A ist zusammenhängend. Damit muss $A = H$ sein, d.h. $\exp : T_e(A) \twoheadrightarrow A$ ist surjektiv.

Betrachte nun $\ker(\exp)$.

(a) $\ker(\exp) = \exp^{-1}(e)$ ist abgeschlossen, weil $\{e\}$ abgeschlossen ist und exp stetig.

(b) Sei $v \in \ker(\exp)$ und $v \in U_v \in \mathrm{Off}(T_e(A))$, so dass

$$\begin{aligned} U_v &\xrightarrow[\exp]{\sim} \exp(U_V) \\ v &\longmapsto \exp(v) = e \end{aligned}$$

(das geht, weil ja exp lokaler Isomorphismus ist). Für $w \in U_v \setminus \{v\}$ ist dann $\exp(w) \neq e$, also $w \notin \ker(\exp)$. Damit haben wir $U_v \cap \ker(\exp) = \{v\}$, also ist $\ker(\exp)$ auch diskrete Untergruppe von $T_e(A)$.

(2) Wir haben also $\ker(\exp) \subseteq T_eA \cong C^s$ als diskrete Untergruppe.

$$\begin{aligned} \ker(\exp) \times T_eA &\xrightarrow{+} T_eA \\ (v, w) &\longmapsto v + w \end{aligned}$$

ist Gruppenoperation, die fixpunktfrei ist (d.h. $v + w \neq w \forall v \neq 0$) Damit ist ${T_eA}/{\ker(\exp)}$ (mit der Quotiententopologie und induzierten Operationen und Mannigfaltigkeitsstruktur) wieder komplexe Lie-Gruppe, und

$$\widetilde{\exp} : {T_eA}/{\ker(\exp)} \xrightarrow{\sim} A$$

ist analytischer Isomorphismus. □

> $\boxed{\text{Satz 7.2.8.}}$ *(Charakterisierung der diskreten Untergruppen von $(\mathbb{R}^n, +)$)*
> Sei $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ eine diskrete (additive) Untergruppe. Dann gilt:
>
> (1) Γ ist *freie* Untergruppe vom Rang
>
> $$r := \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{span}_{\mathbb{R}}(\Gamma)) = \dim_{\mathbb{R}}(\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}) \leq n$$
>
> (2) $\Gamma = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\varepsilon_i$, und ${\mathbb{R}^n}/{\Gamma}$ ist kompakt genau dann, wenn $r = n$.

Beweis. $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ sei diskret, d.h. $\Gamma \cap K$ endlich für jedes Kompaktum K. Sei $\{e_1, \cdots, e_r\}$ eine maximale $\mathbb{R}$-freie Teilmenge von Γ. (Offensichtlich ist $r \leq n$.) Für $x \in \Gamma$ ist dann $x = \sum_i \lambda_i \cdot e_i$, mit eindeutigen $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Betrachte das Parallelepiped

$$K = \left\{ \sum_{i=1}^r \lambda_i \cdot e_i \mid \lambda_i \in [0, 1] \right\}.$$

K ist kompakt, $\Gamma \cap K$ endlich, etwa $\Gamma \cap K = \{y_1, \cdots, y_s\}$.

Sei $x \in \Gamma$ wieder dargestellt als $x = \sum_i \lambda_i \cdot e_i$. Dann sei für $k \in \mathbb{Z}$ definiert:

$$\begin{aligned} x_k &:= \underbrace{k \cdot x}_{\in \Gamma} - \underbrace{\sum_{i=1}^{r} \underbrace{[k \cdot \lambda_i]}_{\in \mathbb{Z}} \cdot e_i}_{\in \Gamma} \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^{r} \underbrace{(k \cdot \lambda_i - [k \cdot \lambda_i])}_{\in [0,1)} \cdot e_i}_{\in K} \\ &\in \Gamma \cap K \end{aligned}$$

Da $\Gamma \cap K$ endlich ist, gibt es also nur endlich viele verschiedene x_k, also gibt es $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$ mit $k \neq l$ und $x_k = x_l$, also

$$\begin{aligned} k \cdot \lambda_i - [k \cdot \lambda_i] &= l \cdot \lambda_i - [l \cdot \lambda_i] \quad \forall i \\ \Rightarrow \quad \lambda_i &= \frac{[k\lambda_i] - [l\lambda_i]}{k - l} \in \mathbb{Q} \quad \forall i, \end{aligned}$$

d.h.

$$\Gamma \subseteq \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Q} \cdot e_i$$

Für $k = 1$ ergibt sich

$$\begin{aligned} x_1 &= x - \sum_{i=1}^{r} [\lambda_i] \cdot e_i \\ x &= x_1 + \sum_{i=1}^{r} [\lambda_i] \cdot e_i, \end{aligned}$$

wobei $x_1 = y_j$ für ein j ist. Wir erhalten also

$$x \in \operatorname{span}_{\mathbb{Z}}(\Gamma \cap K) = \operatorname{span}_{\mathbb{Z}}(\{y_1, \cdots, y_s\}),$$

und da das für alle $x \in \Gamma$ galt, haben wir

$$\begin{aligned} \Gamma &= \operatorname{span}_{\mathbb{Z}}(\Gamma \cap K) \\ &= \sum_{j=1}^{s} \mathbb{Z} \cdot y_j, \end{aligned}$$

als *endlich erzeugte* abelsche Gruppe. Außerdem haben wir ja für alle $j \in \{1, \cdots, s\}$:

$$
\begin{aligned}
y_j &= \sum_{i=1}^{r} q_{ij} \cdot e_i, \quad q_{ij} \in \mathbb{Q}. \\
\Rightarrow \quad \exists d \in \mathbb{N} : \ d \cdot y_j &\in \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z} e_i, \\
\Rightarrow \quad d \cdot \Gamma &\subseteq \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z} e_i \subseteq \Gamma
\end{aligned}
$$

Damit ist $d \cdot \Gamma$ frei, also auch $\Gamma \cong d \cdot \Gamma$ frei, und

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Rg}_{\mathbb{Z}}(\Gamma) = \mathrm{Rg}_{\mathbb{Z}}(d \cdot \Gamma) \leq \underbrace{\mathrm{Rg}_{\mathbb{Z}}(\bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z} e_i)}_{r} \leq \mathrm{Rg}_{\mathbb{Z}}(\Gamma) \\
\Rightarrow \quad &\mathrm{Rg}_{\mathbb{Z}}(\Gamma) = r
\end{aligned}
$$

Es ist also Γ frei vom Rang $r = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{span}_{\mathbb{R}}(\Gamma))$, also

$$
\Gamma = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z} \cdot \varepsilon_i,
$$

mit einem $\mathbb{R}$-freiem System $\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r\}$. Basisergänzung ergibt

$$
\begin{aligned}
\mathbb{R}^n &= \left(\bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{R} \cdot \varepsilon_i \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=r+1}^{n} \mathbb{R} \cdot \delta_j \right), \\
\Rightarrow \quad \mathbb{R}^n / \Gamma &\cong \left(\mathbb{R} / \mathbb{Z} \right)^r \times \mathbb{R}^{n-r}
\end{aligned}
$$

und zwar sowohl algebraisch als auch topologisch. Topologisch ergibt sich weiter:

$$
\mathbb{R}^n / \Gamma \cong (S^1)^r \times \mathbb{R}^{n-r},
$$

und der zweite Faktor ist nur für $n = r$ kompakt, der erste immer. Es ist also $\mathbb{R}^n / \Gamma$ kompakt genau dann, wenn $n = r$ ist, und dann ist $\mathbb{R}^n / \Gamma \cong (S^1)^n$. □

Definition 7.17. *Eine diskrete Untergruppe $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt* ***Gitter****, falls Γ* ***vollen Rang*** *hat, d.h.*

$$
\dim_{\mathbb{R}}(\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}) = \mathrm{Rg}(\Gamma) = n = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)
$$

(Nur das mittlere Gleichheitszeichen ist hier wesentlich, der Rest gilt sowieso.)

$\boxed{\text{Bemerkung 1.}}$ Für diskrete Untergruppen $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt also:

$$\Gamma \text{ ist Gitter} \iff \mathbb{R}^n/\Gamma \text{ ist kompakt}$$

Definition 7.18. *Sei $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ diskrete Untergruppe (also automatisch abgeschlossen), $\varnothing \neq F \subseteq \mathbb{R}^n$ Menge. F heißt **Fundamentalbereich** für Γ, falls:*

(1) F ist beschränkt.

(2) $\mathbb{R}^n = F + \Gamma$

(3) F ist zusammenhängend.

$\boxed{\text{Satz 7.2.9.}}$ *(Charakterisierung der Gitter)*
Sei $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ diskrete Untergruppe (additiv). Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) Γ ist ein Gitter, d.h. $\dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{span}_{\mathbb{R}}(\Gamma)) = n$.

(2) $\mathbb{R}^n/\Gamma$ ist kompakt.

(3) $\mathbb{R}^n/\Gamma \cong_{\mathrm{T}} (S^1)^n$

(4) Γ besitzt einen Fundamentalbereich F.

Beweis.

(1) ⇔ (2) ⇔ (3): ist schon gezeigt.

(1) ⇒ (4): ist klar: Ist $\Gamma = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\varepsilon_i$, so ist $F := \bigoplus_{i=1}^n [0,1] \cdot \varepsilon_i$ ein Fundamentalbereich.

(4) ⇒ (2): Sei F ein Fundamentalbereich für Γ, also F kompakt und $\pi_\Gamma(F) = \mathbb{R}^n/\Gamma$. Da $\pi_\Gamma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\Gamma$ stetig ist, ist $\mathbb{R}^n/\Gamma$ auch kompakt. □

Definition 7.19. *Ein **komplexer Torus** ist eine komplexe g-dimensionale Mannigfaltigkeit X mit $X \cong_{analyt.} V/L$, wobei V ein (g-dimensionaler) $\mathbb{C}$-Vektorraum und L ein $\mathbb{R}$-Gitter in $(V,+)$ ist, bzw. $X \cong \mathbb{C}^g/\Lambda$, und $\Lambda \subseteq \mathbb{C}^g$ Gitter.*

$\boxed{\text{Bemerkung 2.}}$

(1) Jeder komplexe Torus ist (mit +) zusammenhängende kompakte kommutative Lie-Gruppe.

(2) Abelsche $\mathbb{C}$-Varietäten sind komplexe Tori.

Satz ohne Nummer. *(Theorem von Chow)*
Sei X kompakte *analytische* Untervarietät des projektiven Raumes $\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$, d.h. $X = V_+(f_1, \cdots, f_s)$, $f_i \in \mathcal{O}^{\text{anal.}}_{\mathbb{A}^{N+1}_{\mathbb{C}} \setminus \{0\}}(\mathbb{A}^{N+1}_{\mathbb{C}} \setminus \{0\})^{\mathbb{C}^*}$.
Dann ist X schon algebraische Untervarietät, d.h. $X = V_+(F_1, \cdots, F_t)$, F_i homogene Polynome.
Ist $f : X \to X'$ analytischer Morphismus zwischen zwei analytischen projektiven Varietäten, so ist schon $f \in \mathrm{Mor}_{\underline{\mathrm{Var}_{\mathbb{C}}}}(X, X')$.

Beweis. Nicht hier. $\square$

Daraus folgt:

Bemerkung 3. Zwei abelsche Varietäten A und B über $\mathbb{C}$ sind algebraisch isomorph genau dann, wenn A und B analytisch isomorph sind.

Das heißt, die algebraische Klassifikationstheorie komplexer abelscher Varietäten stimmt überein mit der analytischen Klassifikationstheorie komplexer abelscher Varietäten. Das führt zu:

Frage. Seien V/L und V'/L' zwei komplexe Tori (d.h. L und L' Gitter in V bzw. V').
Wann sind V/L und V'/L' analytisch isomorph?

Satz 7.2.10. *(Analytische Charakterisierung der Isomorphie komplexer Tori)*
Seien V/L und V'/L' komplexe Tori, $\dim_{\mathbb{C}} V = g$, $\dim_{\mathbb{C}} V' = g'$, $L \subset V$ und $L' \subset V'$ Gitter. Dann

(1) Jede holomorphe Abbildung $f : V/L \to V'/L'$ wird induziert durch eine *affine* Abbildung $\Phi : V \to V'$ mit $\Phi(L) \subseteq L' + \Phi(0)$.

(2) V/L und V'/L' sind analytisch isomorph genau dann, wenn es einen $\mathbb{C}$-Vektorraumisomorphismus $\psi : V \to V'$ gibt mit $\psi(L) = L'$.

Beweis.

(1) Betrachte eine holomorphe Abbildung $f : V/L \to V'/L'$ und das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, dotted, "F"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "f\circ\pi"] & V' \arrow[d, "\pi'"] \\ V/L \arrow[r, "f"'] & V'/L' \end{tikzcd}$$

Die Projektionen π und π' sind dabei holomorph und offen.

Sei $f([0]) =: [b] \in {V'}/{L'}$, mit $b \in V'$. Da V und V' einfach zusammenhängend, also die (topologisch) universellen Überlagerungen von V/L bzw. V'/L' sind, gibt es genau eine topologische (stetige) Liftung $F : V \to V'$ mit $F(0) = b$, wobei $\pi' \circ F = f \circ \pi$.

Da π und π' lokale biholomorph sind, ist F ebenfalls holomorph. Wir müssen noch zeigen, dass F sogar eine affine Abbildung ist.

Für $z \in V$ gilt ja (aufgrund der Kommutativität des erweiterten Diagrammes)

$$[F(z)]_{L'} = \pi'(F(z)) = f(\pi(z)) = f([z])$$

Für $\lambda \in L$ ist daher

$$\pi'(F(z+\lambda)) = f(\pi(z+\lambda)) = f(\pi(z)) = \pi'(F(z)),$$

d.h.

$$[F(z+\lambda)]_{L'} = [F(z)]_{L'}$$

bzw.

$$F(z+\lambda) - F(z) \in L'.$$

Für $\lambda \in L$ betrachten wir nun die holomorphen Funktionen

$$\begin{aligned} F_\lambda : V &\longrightarrow V' \\ z &\longmapsto F(z+\lambda) - F(z). \end{aligned}$$

Die F_λ sind holomorph mit diskret liegenden Werten in L'. Da V zusammenhängend ist, sind die F_λ also konstant, d.h.

$$\frac{\partial F}{\partial z_i}(z+\lambda) - \frac{\partial F}{\partial z_i} = 0 \quad \forall i \in \{1, \cdots, g\}, \forall z \in V, \forall \lambda \in L.$$

Das heißt, alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial z_i}$ von F sind L-periodisch, also vollständig bestimmt durch die Werte auf $\overline{F}$, mit einem Fundamentalbereich F von L.

Das heißt, die $\frac{\partial F}{\partial z_i}$ sind holomorph (als Ableitungen einer holomorphen Funktion) und beschränkt (weil $\left|\frac{\partial F}{\partial z_i}\right|$ sein Maximum schon auf dem Kompaktum $\overline{F}$ annimmt). Der Satz von Liouville liefert uns, dass $\frac{\partial F}{\partial z_i}$ schon konstant auf V sein muss. Damit können wir eine Taylor-Entwicklung von F (in 0) durchführen:

$$F(z) = F(0) + \underbrace{\left(\frac{\partial F(0)}{\partial z_i}\right)_{i=1}^{g}}_{\text{Jacobi-Matrix}} \cdot z + 0$$

Das heißt, es ist wirklich F eine affine Funktion, wobei (für $\lambda \in L$) wegen $F(z+\lambda) - F(z) \in L'$ insbesondere $F(\lambda) - F(0) \in L'$ ist, d.h.

$$F(L) \subseteq L' + F(0).$$

Damit haben wir Teil (1) gezeigt.

Eine Folgerung daraus: Ist $f : V/L \to V'/L'$ holomorph, $F : V \to V'$ die eindeutige Liftung von F mit $F(0) = b$, so ist auch

$$\lambda_{[-b]} \circ f =: \hat{f} : V/L \to V'/L'$$

holomorph, mit $\hat{f}([0]) = [0]$, und $\hat{f}$ hat genau eine holomorphe Liftung $\hat{F} : V \to V'$ mit $\hat{F}(0) = 0$. Das heißt, es ist $\hat{F}(z) = A \cdot z$, mit $A \in M_{\mathbb{C}}(g, g)$, d.h. $\hat{F}$ ist eine lineare Abbildung, und damit ist $\hat{f}$ sogar ein Liegruppenhomomorphismus.

> FAZIT. Es lässt sich ein holomorphes $f : V/L \to V'/L'$ eindeutig darstellen als
> $$f = \lambda_{[b]} \circ \hat{f}$$
> mit einer (Links-)Translation $\lambda_{[b]} : V'/L' \to V'/L'$ (die auch analytischer Isomorphismus ist) und einem Liegruppenhomomorphismus $\hat{f} : VL \to V'/L'$ (auch analytischer Homomorphismus)

(2) Seien nun VL und V'/L' auch analytisch isomorph, etwa via f, mit der Zerlegung

$$\begin{tikzcd} V/L \arrow[r, "f", "\sim"'] \arrow[d, "\hat{f}"', "\wr"] & V'/L' \\ V'/L' \arrow[ur, "\sim", "\lambda_{[b]}"'] & \end{tikzcd}$$

Es sind also V/L und V'/L' schon als komplexe Lie-Gruppen isomomorph, und man hat das Liftungsdiagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\hat{F}", "\sim"'] \arrow[d, "\pi"', "\wr"] & V' \arrow[d, "\wr"', "\pi'"] \\ V/L \arrow[r, "\sim", "\hat{f}"'] & V'/L' \end{tikzcd}$$

Dabei ist $\hat{F}(0) = 0$ und $\hat{F}^{-1}(\{0\}) = \{0\}$, also $\hat{F}(L) \subseteq L'$ und $\hat{F}^{-1}(L') \subseteq L$, d.h. $\hat{F}(L) = L'$. $\square$

$\boxed{\text{KOROLLAR.}}$ Sei $V\!\big/_{L}$ komplexer Torus, etwa mit

$$V = \bigoplus_{i=1}^{g} \mathbb{C} \cdot v_i.$$

Dann haben wir ja den Isomorphismus

$$\begin{aligned} \beta : V &\longrightarrow \mathbb{C}^g \\ v_i &\mapsto e_i = (0, \cdots, \underset{i}{1}, \cdots, 0), \end{aligned}$$

welcher (mit $\Lambda := \beta(L)$) einen Isomorphismus

$$V\!\big/_{L} \cong \mathbb{C}^g\!\big/_{\Lambda}$$

induziert.
Wir können uns also bei unseren Überlegungen auf $\mathbb{C}^n$ (mit der Standardbasis) beschränken.

Periodenmatrizen

Wir betrachten wieder komplexe Tori der Form $\mathbb{C}^g\!\big/_{L}$ mit einem Gitter $L \subseteq \mathbb{C}^g$.

Dabei ist $L = \bigoplus_{i=1}^{2g} \mathbb{Z} \cdot \omega_i$ mit $\omega_i \in \mathbb{C}^g$, $\omega_i =: (\omega_{i1}, \cdots, \omega_{ig})$ mit $\omega_{ij} \in \mathbb{C}$. Dabei bilden $\omega_1, \cdots, \omega_{2g}$ eine $\mathbb{R}$-Basis von $\mathbb{C}^g$.

Die Matrix

$$\Omega := (\omega_{ij})_{i,j} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_{2g} \end{pmatrix} \in M_{\mathbb{C}}(2g, g) \cong M_{\mathbb{R}}(2g, 2g)$$

mit $\operatorname{rank}_{\mathbb{R}}(\Omega) = 2g$ heißt dann eine **Periodenmatrix** von L bzw. $\mathbb{C}^g\!\big/_{L}$.

Bemerkung. Ω bestimmt L eindeutig (als $\mathbb{Z}$-Zeilenraum), aber L bestimmt nicht Ω eindeutig, da es verschiedene $\mathbb{Z}$-Basen von L gibt.

Allgemeiner:

Definition 7.20. *Sei $g \in \mathbb{N}$. Eine Matrix $\Omega \in M_{\mathbb{C}}(2g, g)$ heißt eine **Periodenmatrix**, falls* $\operatorname{rank}_{\mathbb{R}}(\Omega) = \dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Zeil}(\Omega)) = 2g$.

Frage. Inwieweit sind die analytischen Isomorphieklassen von $\mathbb{C}$-g-Tori $\mathbb{C}^g\!\big/_{L}$ durch Periodenmatrizen beschreibbar?

$\boxed{\text{SATZ 7.2.11.}}$ *(Charakterisierung von Periodenmatrizen)*
Sei $\Omega = (\omega_{ij}) \in M_{\mathbb{C}}(2g, g)$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) Ω ist Periodenmatrix, d.h. $\operatorname{rank}_{\mathbb{R}}(\Omega) = 2g$.

(2) $(\Omega, \overline{\Omega}) \in \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(2g, 2g)$.

(3) $(\mathrm{Re}(\Omega), \mathrm{Im}(\Omega)) \in \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(2g, 2g)$.

Beweis. Wir haben ja folgende Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow \operatorname{rank}_{\mathbb{R}}(\Omega) = 2g \\ &\Leftrightarrow \operatorname{rank}_{\mathbb{R}}(\mathrm{Re}(\Omega), \mathrm{Im}(\Omega)) = 2g \\ &\Leftrightarrow (3) \\ &\Leftrightarrow \det(\mathrm{Re}(\Omega), \mathrm{Im}(\Omega)) \neq 0\end{aligned}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned}\det(\Omega, \overline{\Omega}) &= \det(\mathrm{Re}(\Omega) + i \cdot \mathrm{Im}(\Omega), \mathrm{Re}(\Omega) - i \cdot \mathrm{Im}(\Omega)) \\ &= \det\left((\mathrm{Re}(\Omega), \mathrm{Im}(\Omega)) \cdot \begin{pmatrix} I_g & I_g \\ iI_g & -iI_g \end{pmatrix}\right) \\ &= \det(\mathrm{Re}(\Omega), \mathrm{Im}(\Omega)) \cdot \det \begin{pmatrix} I_g & I_g \\ iI_g & -iI_g \end{pmatrix} \\ &= \det(\mathrm{Re}(\Omega), \mathrm{Im}(\Omega)) \cdot \det \begin{pmatrix} I_g & 0 \\ iI_g & -2iI_g \end{pmatrix} \\ &= \det(\mathrm{Re}(\Omega), \mathrm{Im}(\Omega)) \cdot \underbrace{(-2i)^g}_{\neq 0}\end{aligned}$$

Das heißt, wir haben auch

$$\begin{aligned}(3) &\Leftrightarrow \det(\mathrm{Re}(\Omega), \mathrm{Im}(\Omega)) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \det(\Omega, \overline{\Omega}) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow (2),\end{aligned}$$

und die drei Aussagen sind also äquivalent. □

Definition 7.21. *Die Menge der Periodenmatrizen bezeichnen wir mit* $\boxed{\mathrm{Per}_{\mathbb{C}}(g)}$

$$\mathrm{Per}_{\mathbb{C}}(g) := \{\Omega \in M_{\mathbb{C}}(2g, g) \mid \Omega \textit{ ist Periodenmatrix}\}$$

Definition 7.22. *Seien* $\Omega, \Omega' \in \mathrm{Per}_{\mathbb{C}}(g)$ *zwei Periodenmatrizen. Wir nennen* Ω *und* Ω' ***äquivalent*** *(*$\Omega \sim \Omega'$*), falls* $\boxed{\sim}$

$$\mathbb{C}^g / \mathrm{Zeil}_{\mathbb{Z}}(\Omega) \cong_{\text{anal.}} \mathbb{C}^g / \mathrm{Zeil}_{\mathbb{Z}}(\Omega').$$

Offenbar ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{Per}_{\mathbb{C}}(g)$, denn $\cong_{\text{anal.}}$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Kategorie der $\mathbb{C}$-Mannigfaltigkeiten.

$\boxed{\text{SATZ 7.2.12.}}$ *(Charakterisierung der Äquivalenz von Periodenmatrizen)*
Seien $\Omega, \Omega' \in \mathrm{Per}_{\mathbb{C}}(g)$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) $\Omega \sim \Omega'$.

(2) $\exists M \in \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(g)$, $\exists N \in \mathrm{GL}_{\mathbb{Z}}(2g)$, so dass $\Omega = N \cdot \Omega' \cdot M$.

Beweis. Wir haben diese Folge von Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow \mathbb{C}^g/\mathrm{Zeil}(\Omega) \cong_{\text{Lie}} \mathbb{C}^g/\mathrm{Zeil}(\Omega') \\
&\Leftrightarrow \exists \tilde{M} \in \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(g) : \ \mathrm{Zeil}_{\mathbb{Z}}(\Omega \cdot \tilde{M}) = (\mathrm{Zeil}_{\mathbb{Z}}(\Omega)) \cdot \tilde{M} = \mathrm{Zeil}_{\mathbb{Z}}(\Omega') \\
&\Leftrightarrow \exists \tilde{M} \in \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(g), \exists N \in \mathrm{GL}_{\mathbb{Z}}(2g) : \ \Omega \cdot \tilde{M} = N \cdot \Omega' \\
&\Leftrightarrow \exists M \in \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(g), \exists N \in \mathrm{GL}_{\mathbb{Z}}(2g) : \ \Omega = N \cdot \Omega' \cdot M \\
&\Leftrightarrow (2)
\end{aligned}$$

□

$\boxed{\text{KOROLLAR.}}$ Damit haben wir (für $g \in \mathbb{N}$) folgende Entsprechungen der Faktorräume:

$$\begin{aligned}
\left\{\mathbb{C}^g/L \mid L \text{ Gitter}\right\}/\cong_{\text{anal.}} &\leftrightarrow \left\{\mathbb{C}^g/L \mid L \text{ Gitter}\right\}/\cong_{\text{Lie-Gruppen}} \\
&\leftrightarrow \mathrm{Per}_{\mathbb{C}}(g)/\sim \\
&\leftrightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{Z}}(2g)\backslash \mathrm{Per}_{\mathbb{C}}(g)/\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(g)
\end{aligned}$$

Ziel.

- Finde besonders einfache Periodenmatrizen (durch Basiswechsel)
- Klassifikation dieser „einfachen“ Periodenmatrizen nach $\sim$.

Frage. Welche topologische, analytische und algebraische Struktur trägt dieser Doppelquotient $\mathrm{GL}_{\mathbb{Z}}(2g)\backslash \mathrm{Per}_{\mathbb{C}}(g)/\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(g)$?

Sei wieder $\mathbb{C}^g/L$ ein Torus, $L = \mathrm{Zeil}(\Omega)$, $\Omega \in \mathrm{Per}_{\mathbb{C}}(g)$. Dann ist $\mathrm{rank}_{\mathbb{R}}(\Omega) = 2g$, $\mathrm{rank}_{\mathbb{C}}(\Omega) = g$, d.h. es existiert in Ω ein g-Minor $\neq 0$.

Dann kann man durch Permutationen die Matrix Ω in eine Form bringen, bei der dieser Minor (bzw. seine Teilmatrix) „oben“ steht, d.h. es gibt eine Permutationsmatrix $N \in \mathrm{Perm}_{\mathbb{Z}}(2g) \subseteq \mathrm{GL}_{\mathbb{Z}}(2g)$ mit

$$N \cdot \Omega = \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{pmatrix}$$

mit $\Omega_1 \in \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(G)$ und $\Omega_2 \in M_{\mathbb{C}}(g,g)$. Dann haben wir auch

$$N \cdot \Omega \cdot \Omega_1^{-1} = \begin{pmatrix} I_g \\ \Omega_2 \cdot \Omega_1^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_g \\ Z \end{pmatrix},$$

mit $Z = \Omega_2 \cdot \Omega_1^{-1} \in M_{\mathbb{C}}(g,g)$. Dabei ist

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^g/_L &= \mathbb{C}^g/_{\mathrm{Zeil}_{\mathbb{Z}}(\Omega)} \\ &\cong_{\text{anal.}} \mathbb{C}^g/_{\mathrm{Zeil}_{\mathbb{Z}}\begin{pmatrix} I_g \\ Z \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

und daher $\binom{I_g}{Z} \in \mathrm{Per}_{\mathbb{C}}(g)$. Dabei haben wir

$$\begin{pmatrix} I_g & 0 \\ Re(Z) & \mathrm{Im}(Z) \end{pmatrix} = \left(\mathrm{Re} \begin{pmatrix} I_g \\ Z \end{pmatrix}, \mathrm{Im} \begin{pmatrix} I_g \\ Z \end{pmatrix} \right) \in \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(2g),$$

also $\det(\mathrm{Im}(Z)) \neq 0$.

FAZIT. Jeder komplexe Torus hat eine Periodenmatrix der Form $\binom{I_g}{Z} \in M_{\mathbb{C}}(2g, g)$ mit $\det(\mathrm{Im}(Z)) \neq 0$, und ist auch analytisch isomorph zum Torus der Form

$$\mathbb{C}^g/_{\mathrm{Zeil}\begin{pmatrix} I_g \\ Z \end{pmatrix}}, \quad \det(\mathrm{Im}(Z)) \neq 0$$

Das heißt, zur Klassifikation der komplexen Tori genügt es, Tori dieser Form zu klassifizieren.

Definition 7.23. *Wir bezeichnen die Menge unserer „zulässigen unteren Hälften“ mit* $\boxed{\mathcal{T}_g}$

$$\mathcal{T}_g := \{ Z \in M_{\mathbb{C}}(g,g) \mid \det(\mathrm{Im}(Z)) \neq 0 \}.$$

Dies ist eine offene Untermannigfaltigkeit von $M_{\mathbb{C}}(g,g) \cong \mathbb{C}^{g^2} \cong \mathbb{R}^{2g^2}$.

Definition 7.24. *Für $Z, Z' \in \mathcal{T}_g$ schreiben wir* $\boxed{\approx}$

$$Z \approx Z' \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} I_g \\ Z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} I_g \\ Z' \end{pmatrix},$$

falls die assoziierten Tori analytisch isomorph sind.

Es ist nun

$$\begin{pmatrix} I_g \\ Z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} I_g \\ Z' \end{pmatrix}$$

äquivalent dazu, dass es ein $M \in \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(g)$ und $N = \begin{pmatrix} D & C \\ B & A \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{\mathbb{Z}}(2g)$ gibt, so dass

$$N \cdot \begin{pmatrix} I_g \\ Z \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} I_g \\ Z' \end{pmatrix},$$

d.h.

$$\begin{pmatrix} D & C \\ B & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M \\ Z \cdot M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_g \\ Z' \end{pmatrix},$$

„zeilenweise“ geschrieben:

$$(D + C\cdot Z)\cdot M = I_g$$
$$(B + A\cdot Z)\cdot M = Z'$$

Insgesamt haben wir also (durch Umstellen der ersten Zeile nach M und Einsetzen in die zweite):

$$Z \approx Z' \iff \begin{pmatrix} I_g \\ Z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} I_g \\ Z' \end{pmatrix} \iff$$
$$\exists \begin{pmatrix} D & C \\ B & A \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{\mathbb{Z}}(2g):\ (C\cdot Z + D) \in \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(g) \quad \text{und}$$
$$Z' = (A\cdot Z + B)\cdot (C\cdot Z + D)^{-1}$$

Dabei ist also

$$\left\{ {}^{V}\!/_{L} \mid \dim_{\mathbb{C}} V = g, L \subseteq V \text{ Gitter} \right\}/_{\cong} \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \mathfrak{T}_g/_{\approx}$$

Achtung. Dieser „Faktorraum“ ist kein Gruppenquotient, denn $\mathrm{GL}_{\mathbb{Z}}(2g)$ operiert *nicht* durch

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \circ Z := (A\cdot Z + B)\cdot (C\cdot Z + D)^{-1}$$

auf $\mathfrak{T}_g$, da für $\det(\mathrm{Im}(Z)) \neq 0$ nicht immer $C\cdot Z + D \in \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(g)$ gelten muss (und auch in diesem Fall $\det(\mathrm{Im}((A\cdot Z + B)\cdot (C\cdot Z + D)^{-1})) \neq 0$ keineswegs gesichert ist).

Betrachten wir aber erst einmal $\mathfrak{T}_g$ und ${}^{\mathrm{Per}_{\mathbb{C}}(g)}\!/_{\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(g)}$. Wir haben das Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, mapsto] & \begin{pmatrix} I_g \\ Z \end{pmatrix} & \\
\mathfrak{T}_g \arrow[r, tail, "\rho"] \arrow[dr, "\theta:=\pi\circ\rho"'] & \mathrm{Per}_{\mathbb{C}}(g) \arrow[d, two heads, "\pi"] & \Omega \arrow[d, mapsto] \\
Z \arrow[dr, mapsto] & \mathrm{Per}_{\mathbb{C}}(g)/\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(g) & {[\Omega]} \\
 & \left[\begin{pmatrix} I_g \\ Z \end{pmatrix}\right] &
\end{tikzcd}$$

Dabei gilt:

(i) π ist surjektiv, stetig (klar) und offen, denn es ist ja für eine offene Menge $\pi(U) \in \mathrm{Off}\left({}^{\mathrm{Per}(g)}\!/_{\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(g)}\right)$:

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \{\Omega \in \mathrm{Per}_{\mathbb{C}}(g) \mid \exists M \in \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(g):\ \Omega \in M\cdot U\}$$
$$= \bigcup_{M\in \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(g)} \underbrace{U\cdot M}_{\text{offen}},$$

also als Vereinigung offener Mengen offen.

(ii) ρ ist injektiv (klar), und θ auch (ist $\binom{I_g}{Z_1} = \binom{I_g}{Z_2} \cdot M$, so muss $M = I_g$ sein, also $Z_1 = Z_2$).

(iii) In dem Teildiagramm aus bijektiven Abbildungen

$$\begin{tikzcd} \mathcal{T}_g \arrow[r, "\rho", "\sim"'] \arrow[dr, "\theta"', "\sim"] & \mathrm{im}(\rho) \arrow[d, "\pi", "\wr"'] \\ & \mathrm{im}(\theta) \end{tikzcd}$$

(mit den Relativtopologien) ist π ein Homöomorphismus.

(iv) Es ist $\mathrm{im}(\theta) \in \mathrm{Off}\left({}^{\mathrm{Per}(g)}\!/\!_{\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(g)}\right)$, weil

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(\mathrm{im}(\theta)) &= \left\{ \Omega = \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Per}_{\mathbb{C}}(g) \,\middle|\, [\Omega] = \left[\begin{pmatrix} I_g \\ Z \end{pmatrix} \right], Z \in \mathcal{T}_g \right\} \\ &= \left\{ \Omega = \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Per}_{\mathbb{C}}(g) \,\middle|\, \exists M \in \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(g) : \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} I_g \\ Z \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \Omega = \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Per}_{\mathbb{C}}(g) \,\middle|\, \det(\Omega_1) \neq 0 \right\} \\ &\in \mathrm{Off}(\mathrm{Per}_{\mathbb{C}}(g)) \end{aligned}$$

(v) Für alle $[\Omega] \in {}^{\mathrm{Per}(g)}\!/\!_{\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(g)}$ gibt es ein $N_0 \in \mathrm{GL}_{\mathbb{Z}}(2g)$ und $M_0 \in \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(g)$, so dass $N_0 \cdot \Omega \cdot M_0 = \binom{I_g}{Z_0}$. Das heißt, es ist

$$N_0 \cdot [\Omega] = [N_0 \cdot \Omega] = \left[\begin{pmatrix} I_g \\ Z_0 \end{pmatrix} \right] \in \mathrm{im}(\theta)$$

Dass heißt, es ist ${}^{\mathrm{Per}(g)}\!/\!_{\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(g)} = \bigcup_{N \in \mathrm{GL}_{\mathbb{Z}}(2g)} N \cdot \mathrm{im}(\theta)$, als offene Überdeckung, mit $N \cdot \mathrm{im}(\theta) \cong_{\text{homöo}} \mathrm{im}(\theta)$.

(vi) Wir zeigen nun, dass $\rho : T \xrightarrow[\text{bij.}]{\sim} \mathrm{im}(\rho)$ nicht nur bijektiv, sondern sogar Homöomorphismus ist, also offen und stetig.

Offenheit: Betrachten wir eine eine offene Menge U in $\mathcal{T}_g$, ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$\begin{aligned} U &= U_\varepsilon(Z_0) \\ &= \{ Z \in \mathcal{T}_g \mid \|Z - Z_0\| < \varepsilon \} \subset \mathcal{T}_g \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\rho(U) &= \left\{ \begin{pmatrix} I_g \\ Z \end{pmatrix} \;\middle|\; \left\| \begin{pmatrix} I_g \\ Z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} I_g \\ Z_0 \end{pmatrix} \right\| < \varepsilon \right\} \\ &= \operatorname{im}(\rho) \cap U_\varepsilon \left(\begin{pmatrix} I_g \\ Z_0 \end{pmatrix} \right),\end{aligned}$$

und als solches offen. Damit ist ρ offene Abbildung.

Stetigkeit: Sei nun $U = U_\varepsilon\left(\left(\begin{smallmatrix} I_g \\ Z_0 \end{smallmatrix}\right)\right)$ offene Menge in $\mathrm{Per}_{\mathbb{C}}(g)$. Wir haben dann

$$\begin{aligned}\rho^{-1}\left(U_\varepsilon \begin{pmatrix} I_g \\ Z_0 \end{pmatrix}\right) &= \rho^{-1}\left(\operatorname{im}(\rho) \cap U_\varepsilon \begin{pmatrix} I_g \\ Z_0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \left\{ Z \in \mathfrak{T}_g \;\middle|\; \left\| \begin{pmatrix} I_g \\ Z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} I_g \\ Z_0 \end{pmatrix} \right\| < \varepsilon \right\} \\ &= \{ Z \in \mathfrak{T}_g \mid \|Z - Z_0\| < \varepsilon \} \\ &= U_\varepsilon(Z_0) \cap \mathfrak{T}_g,\end{aligned}$$

und das ist offen in $\mathfrak{T}_g$. Damit ist ρ auch stetig.

(vii) Damit ist $\theta : \mathfrak{T}_g \to \operatorname{im}(\theta) \subseteq {}^{\mathrm{Per}(g)}\!\big/_{\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(g)}$ ebenfalls Homöomorphismus, und

$$^{\mathrm{Per}(g)}\!\big/_{\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(g)} = \bigcup_{N \in \mathrm{GL}_{\mathbb{Z}}(2g)} N \cdot \operatorname{im}(\theta)$$

ist kartenüberdeckt, also komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension $\dim \mathfrak{T}_g = g^2$.

> $\boxed{\text{Fazit.}}$ ${}^{\mathrm{Per}_{\mathbb{C}}(g)}\!\big/_{\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(g)}$ ist komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension g^2.

Und nun operiert $\mathrm{GL}_{\mathbb{Z}}(2g)$ (von links) auf ${}^{\mathrm{Per}_{\mathbb{C}}(g)}\!\big/_{\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(g)}$, via

$$\begin{pmatrix} D & C \\ B & A \end{pmatrix} \cdot [\Omega] = \left[\begin{pmatrix} D & B \\ C & A \end{pmatrix} \cdot \Omega \right]$$

Aber leider operiert $\mathrm{GL}_{\mathbb{Z}}(2g)$ (für $g \geq 2$) in einigen Punkten mit unendlichen Stabilisatoren (siehe folgendes Beispiel), und damit ist der Faktorraum

$$_{\mathrm{GL}_{\mathbb{Z}}(2g)}\diagdown\left({}^{\mathrm{Per}_{\mathbb{C}}(g)}\!\big/_{\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(g)}\right)$$

kein Hausdorffraum mehr (denn Orbits können nicht durch offene Mengen getrennt werden). Wir haben also einen schlechten Quotienten, der keine Chance hat, analytischer Raum zu werden.

Beispiel 7.2.5. Betrachte $Z := -iI_g \in \mathfrak{T}_g$, $\Omega = \binom{I_g}{-iI_g}$, und $A \in \mathrm{GL}_{\mathbb{Z}}(g)$ beliebig. Dann ist

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}}_{\in \mathrm{GL}_{\mathbb{Z}}(2g)} \circ \left[\begin{pmatrix} I_g \\ -iI_g \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} A \cdot I + 0 \cdot (-iI) \\ 0 \cdot I + A \cdot (-iI) \end{pmatrix}\right]$$

$$= \left[\begin{pmatrix} A \\ -iA \end{pmatrix}\right]$$

$$= \left[\begin{pmatrix} I_g \\ -iI_g \end{pmatrix}\right]$$

und auch

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -A \\ A & 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathrm{GL}_{\mathbb{Z}}(2g)} \circ \left[\begin{pmatrix} I_g \\ -iI_g \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} I_g \\ -iI_g \end{pmatrix}\right]$$

Das heißt, $\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_{\mathbb{Z}}(2g)} \binom{I_g}{-iI_g}$ ist unendlich, weil es unendlich viele Matrizen $A \in \mathrm{GL}_{\mathbb{Z}}$ gibt.

FAZIT. Es ist unmöglich, alle komplexen Tori der Dimension $g \geq 2$ durch einen Hausdorffraum zu parametrisieren.

Ein Ausweg wird es sein, sich auf spezielle komplexe Tori mit Zusatzstruktur zu beschränken, so dass die Automorphismengruppen endlich werden.

Für den Fall $g = 1$ ist aber alles schön.

Beispiel 7.2.6. Im Fall $g = 1$ liefert die allgemeine Theorie

$$\left\{ \mathbb{C}/\Lambda \mid \Lambda \subset \mathbb{C} \text{ Gitter} \right\}/\cong$$
$$\cong \left\{ \mathbb{C}/\mathrm{Zeil}\tbinom{1}{\tau} = \mathbb{C}/\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z} \,\middle|\, \mathrm{Im}(\tau) \neq 0) \right\}/\cong$$
$$\cong \left\{ \mathbb{C}/\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z} \,\middle|\, \mathrm{Im}(\tau) > 0 \right\}/\cong.$$

Dabei ist

$$\mathbb{C}/\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z} \cong \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \tau'\mathbb{Z}$$

genau dann, wenn es eine Matrix $\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{\mathbb{Z}}(2)$ und $\alpha \in \mathbb{C}^* = \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(1)$ gibt mit

$$\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \tau \end{pmatrix} \cdot \alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ \tau' \end{pmatrix}.$$

Es ergibt sich, dass dann $\alpha = \frac{1}{c\tau+d}$ sein muss (es ist $c\tau + d \neq 0$ wegen $\mathrm{Im}(\tau) > 0$), also $\tau' = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$. Dabei ist

$$\mathrm{Im}(\tau') = \ldots = \frac{\det\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \mathrm{Im}(\tau)}{|c\tau + d|^2},$$

wir haben also (für $\mathrm{Im}(\tau) > 0$) die Äquivalenz $\mathrm{Im}(\tau') > 0 \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} > 0$.

Fazit. Insgesamt haben wir also[7]

$$\left\{ {}^{\mathbb{C}}\!\big/_{L} \,\middle|\, L \subset \mathbb{C} \text{ Gitter} \right\}\big/_{\cong} \cong {}^{\mathcal{H}}\!\big/_{\mathrm{SL}_{\mathbb{Z}}(2)},$$

wobei wir die folgende Operation von $\mathrm{SL}_{\mathbb{Z}}(2)$ auf der Siegelschen Halbebene betrachten:

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}_{\mathbb{Z}}(2) \times \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H} \\ \left(\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}, \tau \right) &\longmapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \end{aligned}$$

7.3 Elliptische Kurven als abelsche Varietäten

Wir betrachten wieder $k = \mathbb{C}$, $V \cong \mathbb{C}^g$ mit einem komplexen Torus ${}^{V}\!\big/_{L}$.

Als abstrakte Gruppe ($\mathbb{Z}$-Modul) haben wir ja die exakte Standardfolge

$$0 \to L \hookrightarrow V \twoheadrightarrow {}^{V}\!\big/_{L} \to 0,$$

wobei nur L (als Gruppe) endlich erzeugt ist, V und ${}^{V}\!\big/_{L}$ nicht.

$\boxed{\text{Satz 7.3.1.}}$ *(Torsionseigenschaften komplexer Tori)*

(1) Für $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ ist die m-**Torsionsuntergruppe**

$$\mathrm{Tors}_m\left({}^{V}\!\big/_{L}\right) := \left\{ [x] \in {}^{V}\!\big/_{L} \,\middle|\, m \cdot x = [0] \right\}$$

eine nichttriviale Gruppe der Ordnung m^{2g}. (Für $m = 1$ ist $\left|\mathrm{Tors}_m\left({}^{V}\!\big/_{L}\right)\right| = 1$, also die triviale Gruppe.)

(2) Für die **Torsionsuntergruppe** gilt:

$$\mathrm{Tors}\left({}^{V}\!\big/_{L}\right) := \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathrm{Tors}_m\left({}^{V}\!\big/_{L}\right) \cong \left({}^{\mathbb{Q}}\!\big/_{\mathbb{Z}}\right)^{2g},$$

sie ist also abzählbar unendlich.

(3) ${}^{V}\!\big/_{L}$ ist dividierbarer, also injektiver $\mathbb{Z}$-Modul.

[7] Hier fehlt noch etwas!

Beweis.

(1) Sei $F = \sum_{i=1}^{2} g[0,1] \cdot \varepsilon_i$ ein Fundamentalbereich für $L = \bigoplus_{i=1}^{2} g\mathbb{Z}\varepsilon_i$. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tors}_m\left(V/L\right) &= \{[x] \mid x \in V, m \cdot x \in L\} \\
&= \left\{ [x] \;\middle|\; x \in F, x = \sum_{i=1}^{2g} \lambda_i \cdot \varepsilon_i, \lambda_i \in [0,1], m \cdot x \in L \right\} \\
&= \left\{ [x] \;\middle|\; x \in F, x = \sum_{i=1}^{2g} \lambda_i \cdot \varepsilon_i, \forall i: \; \lambda_i \in [0,1], m \cdot \lambda_i \in \mathbb{Z} \right\} \\
&= \left\{ [x] \;\middle|\; \begin{array}{c} x \in F, x = \sum_{i=1}^{2g} \frac{r_i}{m} \cdot \varepsilon_i, \\ \forall i: \; r_i \in \mathbb{Z}, 0 \leq \frac{r_i}{m} < 1, \text{ d.h. } r_i \in \{0, \cdots, m-1\} \end{array} \right\} \\
&\cong \left(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\right)^{2g},
\end{aligned}$$

und es ist insbesondere $\left|\mathrm{Tors}_m\left(V/L\right)\right| = m^{2g}$.

(2) Wir haben ja

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tors}\left(V/L\right) &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Tors}_m\left(V/L\right) \\
&= \{[x] \mid \exists m \in \mathbb{N} : m \cdot x \in L\} \\
&= \left\{ [x] \mid x = \sum_{i=1}^{2g} q_i \cdot \varepsilon_i, q_i \in \mathbb{Q} \cap [0,1) \right\} \\
&\cong \left(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\right)^{2g} = \varinjlim_{m} \left(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\right)^{2g}
\end{aligned}$$

(3) Sei $[x] \in V/L$, $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, mit $x \in F$. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
x &= \sum_{i=1}^{2g} \lambda_i \cdot \varepsilon_i \\
&= m \cdot \sum_{i=1}^{2g} \frac{\lambda_i}{m} \cdot \varepsilon_i,
\end{aligned}$$

also

$$[x] = m \cdot \left[\sum_{i=1}^{2g} \frac{\lambda_i}{m} \cdot \varepsilon_i \right],$$

d.h. V/L ist $\mathbb{Z}$-dividierbar (bzw. dividierbare Gruppe). □

Sei nun wieder $k = \overline{k}$ beliebig, mit $\mathrm{char}(k) \notin \{2, 3\}$.

$\boxed{\Delta(a,b)}$ **Definition 7.25.** *Für $(a, b) \in k^2$ heißt*

$$\Delta(a, b) := 4a^3 + 27b^2 \in k$$

$\boxed{\mathrm{Discr}}$ *die* ***Diskriminante*** *von (a, b). Die Menge (Varietät)*

$$\mathrm{Discr}(\mathbb{A}^2_k) := \{(a, b) \mid \Delta(a, b) = 0\} = V(\Delta) \subseteq \mathbb{A}^2_k$$

heißt ***Diskriminantenort*** *in $\mathbb{A}^2_k = k^2$.*

$\boxed{W_{a,b}}$ **Definition 7.26.** *In $k[X, Y, Z]$ heißt für $(a, b) \in k$ das homogene Polynom*

$$W_{a,b} := Y^2 \cdot Z - X^3 - a \cdot X \cdot Z^2 - b \cdot Z^3$$

das normierte ***Weierstraß-Polynom*** *zu (a, b).*

Die Nullstellenmenge $V_+(W_{a,b}) \subset \mathbb{P}^2_k$ heißt die (normierte ebene) ***Weierstraß-Kubik*** *in $\mathbb{P}^2_k$.*

$\boxed{E(a,b)}$ *Falls $\Delta(a, b) \neq 0$, so nennt man*

$$E(a, b) := V_+(W_{a,b})$$

auch (projektive) ***elliptische Weierstraß-Kubik*** .

Ziel.

(1) Zeige: Die $E(a, b)$ mit $\Delta(a, b) \neq 0$ sind abelsche Varietäten.

(2) Klassifikation modulo Isomorphie, also Finden eines Modulraumes.

Bemerkung. $W_{a,b}$ ist als Polynom irreduzibel, daher ist $E(a, b)$ irreduzible (projektive) Varietät.

Definition 7.27. *Sei $F \in k[X_0, \cdots, X_n]$ homogenes Polynom, $\deg F = d \geq 1$. Dann heißt $V_+(F) \subset \mathbb{P}^n_k$ (projektive)* ***Hyperfläche*** *in $\mathbb{P}^n_k$.*

Sei $a = (a_0 : \ldots : a_n) \in V_+(F)$. a heißt ***singulärer Punkt***, *falls*

$$\forall i \in \{0, \cdots, n\} : \frac{\partial F}{\partial X_i}(a) = 0,$$

ansonsten ***regulärer/nicht-singulärer/glatter Punkt***.

Die Menge aller singulären Punkte

$$\mathrm{Sing}(V_+(F)) = \left\{a \in V_+(F) \,\middle|\, \forall i : \tfrac{\partial F}{\partial X_i}(a) = 0\right\}$$

heißt ***singulärer Ort***, *die Menge*

$$\mathrm{Reg}(V_+(F)) := V_+(F) \setminus \mathrm{Sing}(V_+(F))$$

entsprechend ***regulärer/nicht-singulärer/glatter Ort***.

> $\boxed{\text{SATZ 7.3.2.}}$ Sei $F \in S_d \subset k[X_0, \cdots, X_n]$, $d \geq 1$ und betrachten wir die Hyperfläche $V_+(F) \subset \mathbb{P}_k^n$. Ist F irreduzibel oder enthält zumindest keine mehrfachen (irreduziblen) Faktoren, so ist $\mathrm{Sing}(V_+(F)) \in \mathrm{Abg}(V_+(F))$ und $\mathrm{Reg}(V_+(F)) \in \mathrm{Off}'(V_+(F))$, also insbesondere dicht.

Die VL-Mitschrift vom 19. Dezember 2003, in der sich der Beweis und zwei weitere Sätze befinden, ist leider nicht aufzufinden.

Wir hatten betrachtet:

(1) Seien gegeben eine Hyperfläche $V_+(F) \subset \mathbb{P}_k^2$ mit F homogen, $\deg F = d \geq 1$, sowie eine projektive Gerade $l = V_+(Z + \alpha X - \beta Y)$ (mit $l \neq V_+(F)$). Dann ist

$$|l \cap V_+(F)| \leq d.$$

(2) Es ist $[\xi : \eta : \alpha\xi + \beta\eta] \in l \cap V_+(F)$ genau dann, wenn $\tilde{F}(\xi, \eta) = 0$, wobei

$$\tilde{F}(X, Y) := F(X, Y, \alpha X + \beta Y)$$

ist, und dass ist genau dann der Fall, wenn $(\eta X - \xi Y)$ ein Teiler von $\tilde{F}(X, Y)$ ist, also

$$(*) \qquad \tilde{F}(X, Y) = c \cdot (\eta X - \xi \cdot Y)^\nu \cdot \prod_{i=1}^{d-\nu} (a_i \cdot X + b_j \cdot Y),$$

mit $c \in k^*$ und $\nu \geq 1$.

Definition 7.28. *Die Zahl* $\boxed{i}$

$$i(V_+(F), l, [\xi, \eta, \zeta]) := \begin{cases} 0 & \textit{falls } [\xi, \eta, \zeta] \notin V_+(F) \cap l \\ \nu & \textit{falls } [\xi, \eta, \zeta] \in V_+(F) \cap l, \ \nu \textit{ maximal in (*)} \end{cases}$$

*heißt **Schnittmultiplizität** von* $[\xi, \eta, \zeta]$ *in* $l \cap V_+(F)$.

> $\boxed{\text{SATZ 7.3.3.}}$ Seien die Voraussetzungen wie oben. Dann ist
>
> $$\sum_{p \in V_+(F)} i(V_+(F), l, p) = d = \deg F,$$
>
> eine ebene Kurve vom Grad d hat also (bei Zählung der Multiplizitäten) d Schnittpunkte mit jeder projektiven Geraden.

Beweis. Dies ist einfach ein Korollar aus dem oben Untersuchten. $\square$

$\boxed{\text{KOROLLAR.}}$ Sei $k = \overline{k}$, $F \in k[X, Y, Z]$ homogen, $\deg F = d \geq 1$, $\mathrm{char}(k) = 0$ oder $\mathrm{char}(k) > d$, $\alpha, \beta \in k$.
Betrachte wieder die ebene Kurve $C := V_+(F)$ (nichtsingulär) und $l = V_+(Z - \alpha X - \beta Y)$ und $P := [\xi, \eta, \zeta] \in l \cap C$. Dann ist

$$i(C, l, P) \geq 2 \Longleftrightarrow l = T_P(C),$$

(l ist die Tangente an C in P).

Beweis. Wir haben ja

$$\begin{aligned}\tilde{F}(X, Y) &= F(X, Y, \alpha X + \beta Y)\\ &= c \cdot (\eta X - \xi Y)^\nu \cdot \Pi\end{aligned}$$

und damit wird

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{F}}{\partial X} &= \frac{\partial F}{\partial X} + \alpha \cdot \frac{\partial F}{\partial Z}\\ \frac{\partial \tilde{F}}{\partial Y} &= \frac{\partial F}{\partial Y} + \beta \cdot \frac{\partial F}{\partial Z}\end{aligned}$$

zu

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial X} = c \cdot \left(\nu \cdot (\eta X - \xi Y)^{\nu - 1} \cdot \Pi + (\eta X - \xi Y)^\nu \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial X}\right),$$

analog für $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial Y}$. Damit haben wir im Punkt P:

$$\begin{aligned}\nu \geq 2 &\Longleftrightarrow \frac{\partial \tilde{F}}{\partial X}(P) = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial Y}(P) = 0\\ &\Longleftrightarrow \frac{\partial F}{\partial X}(P) = -\alpha \frac{\partial F}{\partial Z}(P) \text{ und}\\ &\qquad \frac{\partial F}{\partial Y}(P) = -\beta \frac{\partial F}{\partial Z}(P)\\ &\Longleftrightarrow t = V_+\left(\frac{\partial F}{\partial X}(P) \cdot X + \frac{\partial F}{\partial Y}(P) \cdot Y + \frac{\partial F}{\partial Z}(P) \cdot Z\right)\\ &\qquad = V_+\left(\frac{\partial F}{\partial Z}(P) \cdot (-\alpha X - \beta Y + Z)\right)\end{aligned}$$

und weil in diesem Fall $\frac{\partial F}{\partial Z}(P) \neq 0$ ist (sonst ist sind auch die anderen partiellen Ableitungen 0, wir haben also einen singuläten Punkt), ist das

$$\begin{aligned}&= V_+(Z - \alpha X - \beta Y)\\ t &= l.\end{aligned}$$

□

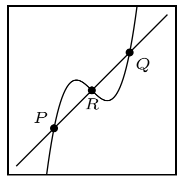
Bemerkung. In unseren Spezialfall $F = W_{(a,b)}$ (nicht-singuläre Weierstraßkurven in $\mathbb{P}^2_k$) erhalten wir für

$$\begin{aligned} E(a,b) &= V_+(W_{(a,b)} \\ &= \underbrace{V(\hat{Y}^2 - \hat{X}^2 - a\hat{X} - b)}_{\subseteq D_+(Z) \cong \mathbb{A}^2_k} \,\dot{\cup}\, \{[0:1:0]\} \end{aligned}$$

insbesondere:

(1) Für jede projektive Gerade l ist $\sum_P i(E(a,b), l, P) = 3$, d.h. jede projektive Gerade schneidet die Weierstraßkurve in 3 Punkten (gezählt mit Vielfachheiten).

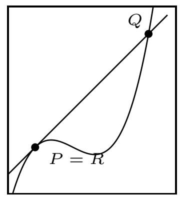
(2) $O := [0:1:0]$ liegt in jeder Weierstraß-Kubik, und es ist $T_O(E(a,b)) = V_+(Z)$, $i(E(a,b), V_+(Z), O) = 3$. $\boxed{O}$



Das Gruppengesetz auf einer ebenen, nichtsingulären Weierstraßkubik

Es sei wieder (damit $E(a,b)$ regulär bleibt) $\Delta(a,b) = 4a^3 + 27b^2 \neq 0$, $\mathrm{char}(k) \notin \{2,3\}$.

Definition 7.29. *Wir verwenden folgende (geometrische) Konstruktion:*



- *Für $P, Q \in E(a,b)$ konstruiere $l(P,Q) \subset \mathbb{P}^2_k$ als die (eindeutige!) projektive Gerade durch P und Q. (Falls $P = Q$, nimm die Tangente $l(P,P) := T_P(E(a,b))$.)*
- *Es ist dann $l(P,Q) \cap E(a,b) = \{P, Q, R\}$, R der* dritte Schnittpunkt *nach Bezout. Falls $l(P,Q)$ Tangente in P oder Q ist, ist $R = P$ bzw. $R = Q$.*
- *Wir definieren nun $\widehat{PQ} := R$.* $\boxed{\widehat{\square\square}}$
- *Betrachte nun $l(\widehat{PQ}, O) \cap E(a,b) = \left\{O, \widehat{PQ}, S\right\}$, S wieder der* dritte Schnittpunkt.
- *Diesen Schnittpunkt bezeichnen wir nun mit* $\boxed{\boxplus}$

$$P \boxplus Q := S = \widehat{O\widehat{PQ}}.$$

Dies ergibt eine Mengenabbildung

$$\boxplus : E(a,b) \times E(a,b) \to E(a,b).$$

$\boxed{\ominus}$

$\boxed{\text{Satz 7.3.4.}}$ *(Satz von der Gruppenstruktur auf $E(a,b)$)*
Sei $k = \overline{k}$ Körper mit $\operatorname{char}(k) \notin \{2,3\}$, $(a,b) \in k^2 \setminus \text{Discr}$, $E := E(a,b)$ die (nicht-singuläre) Weierstraß-Kubik dazu, $\boxplus : E \times E \to E$ wie eben geometrisch konstruiert. Dann gilt:

(1) $\boxplus : E \times E \to E$ ist kommutativ.

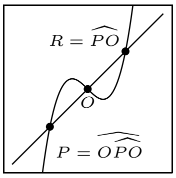
(2) $P \boxplus O = P$ für alle $P \in E$ (O ist $\boxplus$-neutral).

(3) Für alle $P \in E$ ist $P \boxplus \widehat{OP} = O$, d.h. $\ominus P := \widehat{OP}$ ist $\boxplus$-invers zu P.

(4) $\boxplus : E^2 \to E$ und $\ominus : E \to E$ sind Morphismen in $\underline{\text{Var}}_k$.

(5) $\boxplus : E \times E \to E$ ist assoziativ.

(6) $(E(a,b), \boxplus, \ominus)$ ist eine abelsche Varietät.



Beweis.

(1) Dies ist klar nach Konstruktion ($\widehat{\square\square}$ ist offenbar kommutativ).

(2) Es ist $P \boxplus O = \widehat{O\widehat{PO}} = P$.

(3) Wegen $O = \widehat{P\widehat{OP}}$ ist

$$P \boxplus \widehat{OP} = \widehat{O\widehat{P\widehat{OP}}} = \widehat{OO} = O$$

(4) Betrachte zunächst

$$\begin{aligned} \ominus : E &\longrightarrow E \\ P &\longmapsto \widehat{OP} \end{aligned}$$

Offenbar ist $\ominus O = O$. Sei nun $P = (\xi : \eta : 1) \in E \setminus \{O\}$. Dann ist

$$l(P,O) = V_+(\alpha X + \beta \cdot Y + \gamma \cdot Z),$$

mit $\alpha\xi + \beta\eta + \gamma = 0$ und $\beta \cdot 1 = 0$, also

$$\begin{aligned} l(P,O) &= V_+(\alpha X - \alpha \cdot \xi \cdot Z), \quad \alpha \neq 0 \\ &= V_+(X - \xi Z) \end{aligned}$$

Das zu $W_{a,b}$ und dieser Gerade $X = \xi Z$ gehörige (zweivariable) Polynom (deren Nullstellen ja die Schnittstellen markieren) ist

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{a,b}(Y,Z) &= Y^2 Z - \xi^3 Z^3 - a\xi Z^3 - bZ^3 \\ &= Z \cdot (Y^2 - (\xi^3 + a\xi + b) \cdot Z^2) \\ &= Z \cdot (Y^2 - \eta^2 Z^2) \\ &= Z \cdot (Y - \eta Z) \cdot (Y + \eta Z) \end{aligned}$$

Dies entspricht den drei Schnittpunkten $[0:1:0]$, $[\xi:\eta:1]$ und $[\xi:-\eta:1]$. Es ist also $\ominus[\xi:\eta:1]=[\xi:-\eta:1]$, $\ominus$ wird also durch die Matrix

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\in \mathrm{PGL}_k(3)$$

induziert, ist also sogar ein Isomorphismus.

Analog kann man zeigen (ÜA), dass $\boxplus : E\times E\to E$ ein Morphismus ist, da sich die Koordinaten von $P\boxplus Q$ als rationale Ausdrücke in den Koordinaten von P und Q ausdrücken lassen.

(5) Folgt aus (4) mittels der konkreten rationalen Ausdrücke (ÜA).

(6) Folgt aus (1) bis (5).

□

Bemerkung. Sind für $i\in\{1,\cdots,r\}$ $E(a_i,b_i)$ jeweils nichtsinguläre Weierstraßkubiken, so ist

$$E(a_1,b_1)\times\ldots\times E(a_r,b_r)$$

zwar keine Weierstraß-Kubik (Dimension!), aber (mit der komponentenweisen Addition) ebenfalls eine abelsche Varietät.

Klassifikation der Weierstraß-Kubiken in $\mathbb{P}^2_k$ und deren Modulraum

Wir betrachten nun (für $k=\overline{k}$, $\operatorname{char} k\neq 2,3$)

$$\left\{E(a,b)\mid a,b\in k^2,\Delta(a,b)\neq 0\right\}.$$

Frage. Was ist $\left\{E(a,b)\mid a,b\in k^2,\Delta(a,b)\neq 0\right\}\big/\cong_{\underline{\mathrm{Var}}_k}$? Ist es etwa gar eine algebraische Varietät?

Zunächst ist klar (aus der Theorie der abelschen Varietäten und der festgelegten Gruppenstruktur), dass

$$\begin{aligned}&E(a,b)\cong_{\underline{\mathrm{Var}}_k}E(a',b')\\ \Longleftrightarrow\ &E(a,b)\cong_{\underline{\mathrm{AV}}_k}E(a',b'),\end{aligned}$$

es sind also alle $E(a,b)$ bis auf Isomorphie abelscher Varietäten zu klassifizieren. Es ist

$$\begin{aligned}&f\in\mathrm{Isom}_{\underline{\mathrm{AV}}_k}(E(a,b),E(a',b'))\\ \Longleftrightarrow\quad &f\in\mathrm{Isom}_{\underline{\mathrm{Var}}_k}(E(a,b),E(a',b'))\text{ und }f(O)=O).\end{aligned}$$

SATZ 7.3.5. Sei $k = \overline{k}$, $\mathrm{char}(k) \notin \{2,3\}$, und $E(a,b)$, $E(a',b')$ zwei nichtsinguläre Weierstraß-Kubiken in $\mathbb{P}^2_k$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) $E(a,b) \cong_{\underline{\mathrm{Var}}_k} E(a',b')$

(2) $E(a,b) \cong_{\underline{\mathrm{AV}}_k} E(a',b')$

(3) $\exists c \in k^* : a' = c^4 \cdot a, b' = c^6 \cdot b$

(4) $\frac{4a^3}{\Delta(a,b)} = \frac{4a'^3}{\Delta(a',b')}$.

$j(a,b)$ **Definition 7.30.** *Dabei heißt*

$$j(a,b) := \frac{4a^3}{4a^3 + 27b^2} = \frac{4a^3}{\Delta(a,b)} \in k = \mathbb{A}^1_k$$

die ***absolute Invariante*** *von (a,b) bzw. $E(a,b)$.*

KOROLLAR. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \tilde{j}\left\{E(a,b) \mid a,b \in k^2, \Delta(a,b) \neq 0\right\}\big/\cong &\longrightarrow \mathbb{A}^1_k \\ [E(a,b)] &\longmapsto j(a,b) \end{aligned}$$

ist wohldefiniert und injektiv.

Beweiszu Satz 7.3.5.

(1) ⇔ (2): Es ist ja bekanntlich $\mathrm{Isom}_{\underline{\mathrm{Var}}_k}(E,E') \cong E' \times \mathrm{Isom}_{\underline{\mathrm{AV}}_k}(E,E')$, d.h. beide Mengen sind gleichzeitig leer oder nicht leer.

(2) ⇒ (3): Seien $E(a,b)$ und $E(a',b')$ isomorph in $\underline{\mathrm{AV}}_k$, also $\exists f : E(a,b) \xrightarrow{\sim} E(a',b')$ mit $f([0:1:0]) = [0:1:0]$. Auf dem „affinen Teil" (d.h. jeweils der Schnitt mit $D_+(Z) \cong \mathbb{A}^2_k$) gilt

$$E(a,b) \setminus \{O\} \underset{f}{\xrightarrow{\sim}} E(a',b') \setminus \{O\}$$

(als affine kubische Kurven). Dabei haben wir ja die Isomorphie

$$\begin{aligned} D_+(Z) &\xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^2_k \\ [a:b:c] &\longmapsto \left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right) \end{aligned}$$

mit der Isomorphie der Koeffizientenringe

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3_k}(D_+(Z)) &\xrightarrow{\sim} k[X,Y] \\ \frac{X}{Z} &\longmapsto X \\ \frac{Y}{Z} &\longmapsto Y \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} E(a,b) \setminus \{O\} &= V(Y^2 - X^2 - a \cdot X - b) =: V(F) \subset D_+(Z), \\ E(a,b) \setminus \{O\} &= V(Y^2 - X^2 - a' \cdot X - b') =: V(G) \subset D_+(Z). \end{aligned}$$

F und G sind offenbar irreduzibel, und daher können wir das folgende Diagramm kommutativ ergänzen, mit einer Liftung $H^{\#}$ von $f^{\#}$:

$$\begin{tikzcd} k[X,Y]/(F) & k[X,Y]/G \arrow[l, "f^{\#}"', "\sim"] \\ k[X,Y] \arrow[u, "\pi_F"] & k[X,Y] \arrow[u, "\pi_G"'] \arrow[l, dashed, "H^{\#}"] \end{tikzcd}$$

Insbesondere gilt dabei

$$\begin{aligned} \pi_F(H^{\#}(X)) &= f^{\#}(\pi_G(X)) \\ \pi_F(H^{\#}(Y)) &= f^{\#}(\pi_G(Y)) \end{aligned}$$

Nun ist ja $k[X,Y]/(F) \cong k[X] \oplus k[X] \cdot Y$ (weil $\deg_Y F = 2$), analog für $k[X,Y]/(G)$. Wir haben damit

$$\begin{aligned} H^{\#}(X) &= r_0(X) + r_1(X) \cdot Y, \\ H^{\#}(Y) &= s_0(X) + s_1(X) \cdot Y. \end{aligned}$$

Geometrisch ergibt dass für die zugehörige Abbildung H:

$$\begin{aligned} H : \mathbb{A}^2_k &\longrightarrow \mathbb{A}^2_k \\ (a,b) &\longmapsto (r_0(a) + r_1(a) \cdot b, s_0(a) + s_1(a) \cdot b), \end{aligned}$$

und f ist eine Einschränkung von H, wird also durch einen Morphismus $\mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ induziert. Weil f auch Gruppenisomorphismus ist, also $f \circ \ominus = \ominus \circ f$, gilt für $(a,b) \in V(F)$:

$$\begin{aligned} (r_0(a) - r_1(a) \cdot b, s_0(a) - s_1(a) \cdot b) &= H(a, -b) \\ &= (H \circ \ominus)(a,b) \\ &= (\ominus \circ H)(a,b) \\ &= \ominus(r_0(a) + r_1(a) \cdot b, s_0(a) + s_1(a) \cdot b) \\ &= (r_0(a) + r_1(a) \cdot b, -s_0(a) - s_1(a) \cdot b) \end{aligned}$$

Wegen $\operatorname{char}(k) \neq 2$ ist damit immer $r_1(a) \cdot b = 0$ und $s_0(a) = 0$.

Dabei gibt es für $\alpha \in k$ immer ein $\beta \in k$ (nämlich $\beta = \sqrt{\alpha^3 + a\alpha + b}$), so dass $(\alpha, \beta) \in V(F)$ ist. (Für alle bis auf maximal 3 Werte von α ist dabei $\beta \in k^*$, weil $X^3 + aX + b$ höchstens drei Nullstellen hat.) Es ist also $\pi_2(V(F)) = \mathbb{A}^1_k = k$.

Das heißt, es ist sogar (auf ganz $\mathbb{A}^k_1$) $s_0(X) = 0$, $s_1(X) = 0$, und H hat allgemein die Form $H(\alpha, \beta) = (r_0(\alpha), s_1(\alpha) \cdot \beta)$. Nach Homogenisierung stiftet $H : \mathbb{A}^2_k \to \mathbb{A}^2_k$ also einen Morphismus

$$\begin{aligned} \tilde{H} : \mathbb{P}^2_k &\longrightarrow \mathbb{P}^2_k \\ [\alpha : \beta : \gamma] &\longmapsto [\tilde{r}_0(\alpha, \gamma) : \tilde{s}_1(\alpha, \gamma) \cdot \beta : \gamma^d], \end{aligned}$$

wobei $d = \max\{\deg(r_0(X)), \deg(s_1(X)) + 1\}$ ist. Dabei ist auch $d = \deg \tilde{r}_0 = \deg \tilde{s}_1 + 1$.

Dieses $\tilde{H}$ überführt $E(a, b)$ isomorph auf $E(a', b')$, da $\tilde{H}|_{E(a,b)} = f$. Weiterhin ist (wegen $\tilde{H}(O) = f(O) = O = [0 : 1 : 0]$) $\deg(s_1) = 0$ und $\deg(r_0) = 1$, also $d = 1$. Damit ist insgesamt

$$\begin{aligned} \tilde{H} : \mathbb{P}^2_k &\longrightarrow \mathbb{P}^2_k \\ [\alpha : \beta : \gamma] &\longmapsto [u \cdot \alpha + v \cdot \gamma : w \cdot \beta : \gamma], \end{aligned}$$

mit $w \in k^*$, $u \in k^*$ (sonst wäre $\deg(r_0) = 0$), $v \in k$. Es ist also $\tilde{H}$ ein linearer Isomorphismus von $\mathbb{P}^2_k$, vermittelt durch

$$\begin{pmatrix} u & 0 & v \\ 0 & w & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{PGL}_k(3)$$

Fazit. Jeder Isomorphismus $f : E(a, b) \to E(a', b')$ in $\underline{\mathrm{AV}}_k$ wird induziert durch einen linearen Isomorphismus des $\mathbb{P}^2_k$ der Gestalt $\left(\begin{smallmatrix} u & & v \\ & w & \\ & & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{PGL}_k(3)$.

Als Diagramm:

$$\begin{tikzcd} V(W_{a,b}) \arrow[rrr, "\sim"] \arrow[dddd] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subseteq"] & & & V(W_{a',b'}) \arrow[dddd] \arrow[dl, phantom, sloped, "\supseteq"] \\ & \mathbb{A}^3_k \arrow[r, "\hat{H}", "\sim"'] \arrow[dd] & \mathbb{A}^3_k \arrow[dd] & \\ & & & \\ & \mathbb{P}^2_k \arrow[r, "\tilde{H}", "\sim"'] & \mathbb{P}^2_k & \\ E(a,b) = V_+(W_{a,b}) \arrow[rrr, "\sim", "f"'] \arrow[ur, phantom, sloped, "\subseteq"] & & & V_+(W_{a',b'}) = E(a',b') \arrow[ul, phantom, sloped, "\supseteq"] \end{tikzcd}$$

Daher ist

$$(W_{a,b}) = \sqrt{(W_{a,b})} = \sqrt{\hat{H}^{\#}(W_{a',b'})} = (\hat{H}^{\#}(W_{a',b'})),$$

das heißt, es gibt ein $\lambda \in k^*$ mit $\lambda \cdot W_{a,b} = \hat{H}^{\#}(W_{a',b'})$. Ausführlich aufgeschrieben:

$$\lambda \cdot (Y^2 Z \cdot X^3 - aX - b) = (w \cdot Y)^2 Z - (uX + VZ)^3 - a'(uX + vZ)Z^2 - bZ^3$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt:

$$\begin{aligned}\lambda &= w^2 = u^3,\\ 0 &= 3u^2v = v.\end{aligned}$$

Setzen wir $c := \frac{w}{u} \in k^*$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}c^2 &= \frac{w^2}{u^2} = \frac{u^3}{u^2} = u\\ c^3 &= \frac{w^3}{u^3} = \frac{w^3}{w^2} = w\\ c^4 &= \frac{w^2}{u} = u^2\\ c^6 &= \frac{w^6}{u^6} = w^2 = \lambda\end{aligned}$$

Das heißt, wir haben

$$\tilde{H} \triangleq \begin{pmatrix} c^2 & 0 & 0 \\ 0 & c^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{PGL}_k(3)$$

für ein $c \in k^*$ und weiterhin

$$\begin{aligned}\lambda \cdot a &= a' \cdot u,\\ \Rightarrow \quad a' &= \frac{\lambda}{u} \cdot a = \frac{w^2}{u} \cdot a = c^4 a\\ \lambda \cdot b &= b'\\ \Rightarrow \quad b' &= c^6 a\end{aligned}$$

Fazit. Ist $E(a,b) \cong E(a',b')$ in $\underline{\mathrm{Var}}_k$, so gibt es ein $c \in k^*$ mit $a' = c^4 \cdot a$, $b' = c^6 \cdot b$.

(3) ⇒ (2): Ist $a' = c^4 a$, $b' = c^6 b$, so überführt der Isomorphismus von $\mathbb{P}_k^2$ zur Matrix $\begin{pmatrix} c^2 & & \\ & c^3 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{PGL}_k$ die Kurve $E(a,b)$ isomorph auf $E(a',b')$.

(3) ⇒ (4): $j(a,b) := \frac{4a^3}{4a^3 - 27b^2} \in k$ hieß die *absolute Invariante* von $E(a,b)$. Sind nun $E(a,b)$ und $E(a',b')$ zwei reguläre Weierstraßkurven mit $a' = c^4 \cdot a$ und $b' = c^6 \cdot b$, so ist

$$\begin{aligned}j(a',b') &= \frac{4a'^3}{4a'^3 - 27b'^2}\\ &= \frac{4 \cdot c^{12} \cdot a^3}{4 \cdot c^{12} \cdot a^3 - 27 \cdot c^{12} \cdot b^2}\\ &= \frac{c^{12}}{c^{12}} \cdot \frac{4a^3}{4a^3 - 27b^2}\\ &= 1 \cdot j(a,b) = j(a,b)\end{aligned}$$

(4) $\Rightarrow$ (3): Seien also $E(a,b)$ und $E(a',b')$ zwei reguläre Weierstraßkurven mit $j(a,b) = j(a',b')$.

Fall 1: Ist $j(a,b) = j(a',b') = 0$, so muss $a = a' = 0$ sowie $b \neq 0$, $b' \neq 0$ sein. Setze $c := \sqrt[6]{\frac{b'}{b}}$ (irgendeine der 6 Wurzeln). Dann ist $b' = c^6 \cdot b$ und $a \cdot c^4 = 0 = a'$.

Fall 2: Ist $j(a,b) = j(a',b') = 1$, so muss $b = b' = 0$, $a \neq 0$ und $a' \neq 0$ sein. Mit $c := \sqrt[4]{\frac{a'}{a}}$ ergibt sich wieder $a \cdot c^4 = a'$ und immer noch $b' = 0 = c^6 \cdot b$.

Fall 3: Ist $j := j(a,b) = j(a',b') \notin \{0,1\}$, so zunächst $a' \neq 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $b' \neq 0$. Weiterhin haben wir

$$\begin{aligned} j &= \frac{4a^3}{4a^3 - 27b^2} \\ \Rightarrow \quad (4a^3 - 27b^2) \cdot j &= 4a^3 \\ \Rightarrow \quad 27b^2 j &= 4a^3 j - 4a^3 \\ \Rightarrow \quad b^2 &= \frac{4a^3(j-1)}{27j} \end{aligned}$$

und analog

$$b'^2 = \frac{4a'^3(j-1)}{27j}$$

Damit ist der Quotient:

$$\begin{aligned} \frac{b'^2}{b^2} &= \frac{4a'^3(j-1) \cdot 27j}{27j} 4a^3(j-1) \\ &= \frac{a'^3}{a^3}. \end{aligned}$$

Mit $c := \sqrt[4]{\frac{a'}{a}}$ (wieder eine beliebige der Wurzeln) ergibt sich $a' = c^4 \cdot a$ und $b' = c^6 \cdot b$. $\square$

$\boxed{\text{Korollar.}}$ Die Abbildung

$$\begin{aligned} \tilde{\jmath} : \left\{ E(a,b) \mid a,b \in k^2, \Delta(a,b) \neq 0 \right\} \big/ \cong &\longrightarrow \mathbb{A}^1_k \\ [E(a,b)] &\longmapsto j(a,b) \end{aligned}$$

ist sogar eine Bijektion.

Beweis. Zu zeigen ist noch die Surjektivität.

Zunächst ist $0 = \tilde{\jmath}(E(0,1)) \in \operatorname{im}(\tilde{\jmath})$ und $1 = \tilde{\jmath}(E(1,0)) \in \operatorname{im}(\tilde{\jmath})$.

Sei nun $\mu \in k \setminus \{0,1\}$. Betrachte die Weierstraß-Kubik

$$E(a_\mu, b_\mu) := E\left(-\frac{27\mu}{4(\mu-1)}, -\frac{27\mu}{4(\mu-1)} \right)$$

Es ist

$$\begin{aligned}\Delta(a,b) &= -\frac{27^3}{4^2}\cdot\frac{\mu^3}{(\mu-2)^3}+\frac{27^3}{4^2}\cdot\frac{\mu^2}{(\mu-2)^2}\\ &= \frac{27^3}{4^2}\cdot\frac{\mu^2}{(\mu-1)^2}\cdot\frac{\mu-1-\mu}{\mu-1}\\ &\neq 0,\end{aligned}$$

die Kubik ist also regulär. Dabei ist

$$\begin{aligned}j(a,b) &= \frac{-\frac{27^3}{4^2}\cdot\frac{\mu^3}{(\mu-1)^3}}{-\frac{27^3}{4^2}\cdot\frac{\mu^3}{(\mu-1)^3}+\frac{27^3}{4^2}\cdot\frac{\mu^2}{(\mu-1)^2}}\\ &= \frac{\frac{\mu^3}{(\mu-1)^3}}{\frac{\mu^3}{(\mu-1)^3}-\frac{\mu^2}{(\mu-1)^2}}\\ &= \frac{\frac{\mu^3}{(\mu-1)^3}}{\frac{\mu^3-\mu^2(\mu-1)}{(\mu-1)^3}}\\ &= \frac{\mu^3}{\mu^3-\mu^3+\mu^2}\\ j(a,b) &= \mu.\end{aligned}$$

Es ist also $\mu \in \operatorname{im}(\tilde{\jmath})$, $\tilde{\jmath}$ ist also auch surjektiv, d.h. bijektiv. □

Fazit. Wir kennen also bis auf Isomorphie *alle* Weierstraß-Kubiken, und können deren „Normalformen“ explizit aufschreiben:

- $E(0,1) \cong E(0,b)$ für alle $b \in k^*$, gegeben durch $Y^2Z = X^3+Z^3$ bzw. $Y^2 = X^3+1$.
- $E(1,0) \cong E(a,0)$ für alle $a \neq 0$, gegeben durch $Y^2Z = X^3+XZ^2$ bzw. $Y^3 = X^3+X$.
- $E(\alpha,\alpha)$ für $\alpha \notin \left\{0,-\frac{27}{4}\right\}$, gegeben durch $Y^2Z = X^3+\alpha XZ^2+\alpha Z^3$ bzw. $Y^2 = X^3+\alpha X+\alpha$, ist isomorph zu allen $E(a,b)$ mit $j(a,b) = j(\alpha,\alpha) = \frac{4\alpha^3}{4\alpha^3+27\alpha^2}$.

Satz 7.3.6. *(Automorphismengruppen von Weierstraß-Kurven)*
Sei $k=\overline{k}$, $\operatorname{char}(k) \notin \{2,3\}$, $\alpha \in \mathbb{A}^1_k \setminus \left\{0,\frac{27}{4}\right\}$. Dann gilt:

(1) $\operatorname{Aut}_{\underline{\mathrm{AV}}_k}(E(0,1)) \cong \left\{c\in k \mid c^4\cdot 0 = 0, c^6\cdot 1 = 1\right\} \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$,

(2) $\operatorname{Aut}_{\underline{\mathrm{AV}}_k}(E(1,0)) \cong \left\{c\in k \mid c^4\cdot 1 = 1, c^6\cdot 0 = 0\right\} \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$,

(3) $\operatorname{Aut}_{\underline{\mathrm{AV}}_k}(E(\alpha,\alpha)) \cong \left\{c\in k \mid c^4\cdot \alpha = \alpha, c^6\cdot \alpha = \alpha\right\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Beweis. Es ist ja $\mathrm{Aut}_{\underline{\mathrm{AV}}_k}(E(a,b)) = \mathrm{Isom}_{\underline{\mathrm{AV}}_k}(E(a,b), E(a,b))$, und die wurden in Teil (2) $\Leftrightarrow$ (3) von Satz 7.3.5 ja bestimmt. $\square$

Die Legendre-Familie nichtsingulärer ebener Kurven und die *universelle elliptische Kurve*

Wir haben also (immer für $k = \overline{k}$, $\mathrm{char}(k) \notin \{2,3\}$) die bijektive Äquivalenz:

$$\left\{E(a,b) \mid 4a^3 + 27b^2 \neq 0\right\}\Big/\!\cong \;\xrightarrow{\sim}\; \mathbb{A}^1_k$$

$$[E(a,b)] \longmapsto j(a,b) = \frac{4a^3}{4a^3 + 27b}$$

$\boxed{\text{Bemerkung 1.}}$ Auf $E(A,B)$ gilt für $P, Q, R \in E(a,b)$:

$P \boxplus Q \boxplus R = 0 \iff$ P, Q, R sind die drei Schnittpunkte (evtl. mit Vielfachheiten) einer projektiven Geraden mit $E(a,b)$.

Beweis. Einfach ausrechnen:

$$\begin{aligned}
&P \boxplus Q \boxplus R = 0\\
&\quad\Leftrightarrow \quad R = \ominus(P \boxplus Q)\\
&\quad\Leftrightarrow \quad R = \widehat{O\widehat{O\widehat{PQ}}}\\
&\quad\Leftrightarrow \quad R = \widehat{PQ}
\end{aligned}$$

$\square$

Die 2-Torsionspunkte sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tors}_2(E(a,b)) &= \{P \in E(a,b) \mid P \boxplus P = O\}\\
&= \{P \in E(a,b) \mid P = -P\}\\
&= \{O\} \cup \{[\xi : \eta : e] \in E(a,b) \mid \eta = -\eta\}\\
&= \{O\} \cup \left\{[\xi : 0 : 1] \mid 0 = \xi^3 + a\xi + b\right\}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Behauptung.}}$ Das Polynom $X + ax + b$ hat mehrfache Nullstellen $\Leftrightarrow \Delta(a,b) = 4a^3 + 27b^2 = 0$.

Beweis. Sei ξ eine mehrfache Nullstelle, also $\xi^3 + a\xi + b = 0$ und $3\xi^2 + a = 0$. Dann ist entweder $\xi = 0$, also auch $a = b = 0$, oder

$$\begin{aligned} 2a\xi &= -3b \\ \Rightarrow \quad 4a^2\xi^2 &= 9b^2 \\ \Rightarrow \quad 4a^2 \cdot 3\xi^2 &= 27b^2 \\ \Rightarrow \quad -4a^3 &= 27b^2 \\ \Rightarrow \quad 4a^3 + 27b^2 &= 0 \end{aligned}$$

Umgekehrt: Ist $4a^3 = 27b^2$, so hat $X^3 + aX + b$ eine mehrfache Nullstelle bei $\frac{3b}{2a}$ (oder 0, falls $a = b = 0$). $\square$

Ist also $E(a,b)$ glatt, so hat $X^3 + aX + b$ nur einfache Nullstellen, es ist

$$X^3 + aX + b = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)(X - \lambda_3)$$

mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$, wobei

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0, \\ \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 &= a \\ -\lambda_1\lambda_2\lambda_3 &= b \end{aligned}$$

Dabei ist offenbar $W_{a,b} = Y^2Z - (X - \lambda_1 Z)(X - \lambda_2 Z)(X - \lambda_3 Z)$.

Betrachte nun die Matrix

$$M_{\lambda_1,\lambda_2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} & 0 & -\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ 0 & (\lambda_2 - \lambda_1)^{-\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{PGL}_2,$$

welche eine Koordinaten-Transformation in $\mathbb{P}^2_k$ beschreibt, nämlich $X' = \frac{X - \lambda_1 Z}{\lambda_2 - \lambda_1}$, $Y' = (\lambda_2 - \lambda_1)^{-\frac{3}{2}} \cdot Y$, $Z' = Z$. Setzen wir nun $\lambda := \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \in \mathbb{A}^1_k \setminus \{0,1\}$, so gilt offenbar

$$\begin{aligned} &(Y')^2 \cdot Z' - X'(X' - Z)(X' - \lambda Z') \\ &= \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)^3} \cdot Y^2 Z - \frac{X - \lambda_1 Z}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \frac{X - \lambda_2 Z}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \frac{X - \lambda_3 Z}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ &= \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)^3} \cdot \big(Y^2 Z - (X - \lambda_1 Z)(X - \lambda 2_Z)(X - \lambda_3 Z)\big) \qquad = \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)^3} \cdot W_{a,b} \end{aligned}$$

Das heißt, die zu M_{λ_1,λ_2} gehörende Koordinatentransformation überführt $E(a,b)$ in $V_+(Y^2Z - X(X-1)(X-\lambda))$, mit $\lambda \in \mathbb{A}^1_k \setminus \{0,1\}$.

Definition 7.31. *Für $\lambda \in \mathbb{A}^1_k \setminus \{0,1\}$ heißt die projektive Kurve*

$$L(\lambda) := V_+(Y^2 Z - X(X-1)(X-\lambda))$$

Legendre-Kubik *(zum Parameter λ) in Normalform.*

Achtung. Der Isomorphismus $E(a,b) \xrightarrow{\sim} L(\lambda)$ ist zwar wohlbestimmt, aber nicht kanonisch, denn er hängt von der gewählten Reihenfolge der Nullstellen λ_1, λ_2, λ_3 von $X^3 + aX + b$ ab. Es gibt genau 6 solche Reihenfolgen, und damit ist

$$\begin{aligned} E(a,b) &\cong L(\lambda) \\ &\cong L(\frac{1}{\lambda}) \\ &\cong L(1-\lambda) \\ &\cong L(\frac{1}{1-\lambda}) \\ &\cong L(\frac{\lambda}{\lambda-1}) = L(1+\frac{1}{\lambda-1}) \\ &\cong L(\frac{\lambda-1}{\lambda}) = L(1-\frac{1}{\lambda}) \end{aligned}$$

Diese Kurven (bzw. ihre Parameter) müssen nicht alle verschieden sein – für $\lambda = \frac{1}{2}$, $\lambda = -1$, $\lambda = \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$, $\lambda = 2$ fallen mehrere dieser Parameter (und damit auch die Kurven) zusammen

Fazit. Jede reguläre Weierstraßkurve $E(a,b)$ ist isomorph zu einigen Legendre-Kurven $L(\lambda)$.

Die Tschirnhaus-Abbildung[8]

Sei umgekehrt $L(\lambda) = V_+(Y^2 \cdot Z - X(X-yZ)(X-\lambda Z))$ als Legendre-Kubik gegeben, $\lambda \notin \{0,1\}$. Unter „Ausschaltung“ des unendlich fernen Punktes $O = [0:1:0]$ reduziert sich die projektive Gleichung zur affinen Gleichung

$$Y^2 = X(X-1)(X-\lambda) = X^3 - (\lambda+1)X^2 + \lambda X.$$

Nun können wir die Tschirnhaus-Transformation anwenden: $X' := X - \frac{\lambda+1}{3}$, $Y' := Y$ (bzw. im Projektiven wieder $X = X - \frac{\lambda+1}{3}Z, Y' = Y, Z' = Z$), und damit wird die (affine) Gleichung zu

$$\begin{aligned} 0 &= Y^2 - X^3 + (\lambda+1)X^2 - \lambda \cdot X \\ &= (Y')^2 - (X')^3 + \frac{\lambda^2-\lambda+1}{3} \cdot X' - \frac{(\lambda+1)(\lambda-2)(1-2\lambda)}{27}. \end{aligned}$$

Die Tschirnhaus-Abbildung $\mathbb{P}^2_k \to \mathbb{P}^2_k$ überführt $L(\lambda)$ also gerade in $E(-\frac{\lambda^2-\lambda+1}{3}, \frac{(\lambda+1)(\lambda-2)(1-2\lambda)}{27})$, wobei

$$\Delta\left(-\frac{\lambda^2-\lambda+1}{3}, \frac{(\lambda+1)(\lambda-2)(1-2\lambda)}{27}\right) = -27 \cdot \lambda^2(\lambda-1)$$

ist, und

$$j\left(-\frac{\lambda^2-\lambda+1}{3}, \frac{(\lambda+1)(\lambda-2)(1-2\lambda)}{27}\right) = \frac{4}{27} \cdot \frac{(\lambda^2-\lambda+1)^3}{\lambda^2(\lambda-1)^2}.$$

[8]Ehrenfried Walter von Tschirnhaus, 1651-1708, Alchemist unter August dem Starken

$\boxed{\text{Satz 7.3.7.}}$ *(Vergleichssatz Weierstraß-Legendre)*
Sei $k = \overline{k}$, $\operatorname{char}(k) \notin \{2, 3\}$.

(1) Dann ist das folgende Diagramm von Abbildungen kommutativ:

$$\begin{tikzcd}
& {[L(\lambda)]} \arrow[r, mapsto] & \left[E\left(-\frac{\lambda^2-\lambda+1}{3}, \frac{(\lambda+1)(\lambda-2)(1-2\lambda)}{27}\right)\right] & \\
{[L(\lambda)]} & \left\{L(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{A}^1_k \setminus \{0,1\}\right\}/_{\cong} \arrow[r, "\hat{T}"] & \{E(a,b) \mid \Delta(a,b) \neq 0\}/_{\cong} \arrow[d, "\wr\, j"] & {[E(a,b)]} \arrow[d, mapsto] \\
\lambda \arrow[u, mapsto] & \mathbb{A}^1_k \setminus \{0,1\} \arrow[u, two heads, "\mathcal{L}"] \arrow[r, "\mathcal{J}"'] & \mathbb{A}^1_k & \frac{4a^3}{4a^3+27b^2} \\
& \lambda \arrow[r, mapsto] & \frac{4}{27}\frac{(\lambda^2-\lambda-1)^3}{\lambda^2(\lambda-1)^2} &
\end{tikzcd}$$

(2) Dabei ist $\hat{T}$ bijektiv.

(3) $\mathcal{J}$ ist eine 6-blättrige algebraische Überlagerung, die genau über $\{0, 1\}$ in $\mathbb{A}^1_k$ verzweigt ist.

Beweis.

(1) folgt sofort aus der zuvor beschriebenen Tschirnhaus-Transformation, denn damit ist $\mathcal{J}$ gerade definiert.

(2) $\mathcal{J}$ ist surjektiv, denn für $c \in \mathbb{A}^1_k$ ist

$$(X^2 - X + 1)^3 = c \cdot X^2(X + 1)^2$$

eine algebraische Gleichung 6. Grades, hat also ($k = \overline{k}$) Nullstellen, 0 und 1 sind offensichtlich nicht dabei.

Damit muss auch $\hat{T}$ surjektiv, also bijektiv sein.

(3) Die Gleichung

$$4(X^2 - X + 1)^3 = 4 \cdot \frac{(\lambda^3 - \lambda^2 + 1)^3}{\lambda^2(\lambda - 1)^2} \cdot X^2(X - 1)^2$$

hat genau die Lösungen λ, $\frac{1}{\lambda}$, $1 - \lambda$, $\frac{1}{1-\lambda}$, $\frac{\lambda}{\lambda-1}$, und $\frac{\lambda-1}{\lambda}$, denn es ist

$$\begin{aligned}
&X^2 - X + 1)^3 - \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(\lambda - 1)^2} \cdot X^2(X - 1)^2 \\
&= (X - \lambda)(X - \tfrac{1}{\lambda})(X - (1 - \lambda))(X - \tfrac{1}{1-\lambda})(X - \tfrac{\lambda-1}{\lambda})(X - \tfrac{\lambda-1}{\lambda})(X - \tfrac{\lambda}{\lambda-1})
\end{aligned}$$

Daher hat $\mathcal{T}^{-1}(\mathcal{T}(\lambda))$ im allgemeinen die Kardinalität 6, sie ist nur dann geringer, falls
$$\#\left\{\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1-\lambda, \frac{1}{1-\lambda}, \frac{\lambda}{\lambda-1}, \frac{\lambda-1}{\lambda}\right\} < 6,$$
also für
$$\lambda \in \underbrace{\left\{-1, \frac{1}{2}, 2\right\}}_{\mathcal{J}(\lambda)=1} \cup \underbrace{\left\{V(X^2-X+1)\right\}}_{\mathcal{J}(\lambda)=0}.$$

Wir haben also $L(-1) \cong L(\frac{1}{2}) \cong L(2)$ und $L(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}) \cong L(\frac{1-\sqrt{-3}}{2})$, d.h. $|\mathcal{J}^{-1}(1)| = 3$, $|\mathcal{J}^{-1}(0)| = 2$ und $|\mathcal{J}^{-1}(\xi)| = 6$ für $\xi \in \mathbb{A}^1_k \setminus \{0,1\}$. $\square$

$\boxed{\text{Korollar.}}$ Auch die Abbildung
$$\begin{aligned}\mathcal{L} : \mathbb{A}^1_k \setminus \{0,1\} &\longrightarrow \{L(\lambda) \mid \lambda \notin \{0,1\}\}/_{\cong}\\ \lambda &\longmapsto [L(\lambda)]\end{aligned}$$
ist 6-blättrig, mit Verzweigungen über $[L(-1)]$ und $[L(\frac{1+\sqrt{-3}}{2})]$.

Bemerkung. Betrachte auf $\mathbb{A}^1_k \setminus \{0,1\}$ die Transformations-Gruppe:
$$\begin{aligned}G &= \{\mathrm{id}, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}\\ &\subseteq \mathrm{Bij}(\mathbb{A}^1_k \setminus \{0,1\}, \mathbb{A}^1_k \setminus \{0,1\}),\end{aligned}$$
mit
$$\begin{aligned}e_1(\lambda) &= \frac{1}{\lambda},\\ e_2(\lambda) &= 1-\lambda,\\ e_3(\lambda) &= \frac{1}{1-\lambda},\\ e_4(\lambda) &= \frac{\lambda}{\lambda-1},\\ e_5(\lambda) &= \frac{\lambda-1}{\lambda}.\end{aligned}$$

$\circ$	id	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
id	id	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_1	e_1	id	e_5	e_4	e_3	e_2
e_2	e_2	e_3	id	e_1	e_5	e_4
e_3	e_3	e_2	e_4	e_5	e_1	id
e_4	e_4	e_5	e_3	e_2	id	e_1
e_5	e_5	e_4	e_1	id	e_2	e_3

G ist also eine Gruppe der Ordnung 6 und nichtkommutativ, also $G \cong \mathfrak{S}_3$ (die bis auf Isomorphie einzige solche Gruppe – auch ein Blick auf die Verknüpfungstabelle bestätigt die Isomorphie).

Das heißt, $\mathfrak{S}_3$ operiert (als G) auf $\mathbb{A}^1_k \setminus \{0,1\}$, und wir haben das Diagramm
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}^1_k \setminus \{0,1\} \arrow[r, two heads, "\mathcal{J}"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{A}^1_k \\
\mathbb{A}^1_k \setminus \{0,1\} /\!\!/ \mathfrak{S}_3 \arrow[r, "\sim"] & \mathbb{A}^1_k \setminus \{0,1\} / \mathfrak{S}_3 \arrow[u, "\hat{\mathcal{J}}"']
\end{tikzcd}$$

Mit

$$\mathbb{A}_k^1 \setminus \{0,1\} = D(T \cdot (T-1)),$$

also

$$\mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^1 \setminus \{0,1\}}(\mathbb{A}_k^1 \setminus \{0,1\}) \cong (k[T])_{T \cdot (T-1)},$$

folgt ein Resultat aus der klassischen Invariantentheorie:

$$\left(k[T]_{T\cdot(T-1)}\right)^{\mathfrak{S}_3} \cong k\left[\frac{T^2-T+1}{T^2(T-1)^2}\right] \cong k[X]$$

$\boxed{\text{Satz 7.3.8.}}$ Es gibt eine Varietät $\mathfrak{X}$ und einen surjektiven Morphismus (in $\underline{\mathrm{Var}}_k$)

$$\pi : \mathfrak{X} \twoheadrightarrow \mathbb{A}_k^1 \setminus \{0,1\}$$

derart, dass die Fasern isomorph zu Legendre- bzw. Weierstraßkubiken sind, und diese (bis auf Isomorphie) auch alle einmal vorkommen.

Beweis. Betrachte die Varietät $\mathbb{P}_k^2 \times (\mathbb{A}_k^1 \setminus \{0,1\})$ mit der Projektion p auf den zweiten Faktor:

$$p : \mathbb{P}_k^2 \times (\mathbb{A}_k^1 \setminus \{0,1\}) \to \mathbb{A}_k^1 \setminus \{0,1\}$$

Darin betrachten wir die Teilmenge

$$\mathfrak{X} := \left\{([\xi:\eta:\zeta],\lambda) \in \mathbb{P}_k^2 \times (\mathbb{A}_k^1 \setminus \{0,1\}) \mid \eta^2 \cdot \zeta - \xi \cdot (\xi - \eta)(\xi - \lambda\cdot\zeta) = 0\right\}$$

Es ist dabei

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_k^2 \times (\mathbb{A}_k^1 \setminus \{0,1\}) = {} & \underbrace{D_+(X) \times (\mathbb{A}_k^1 \setminus \{0,1\})}_{\text{affin}} \cup \\ & \cup \underbrace{D_+(Y) \times (\mathbb{A}_k^1 \setminus \{0,1\})}_{\text{affin}} \cup \\ & \cup \underbrace{D_+(Z) \times (\mathbb{A}_k^1 \setminus \{0,1\})}_{\text{affin}},\end{aligned}$$

und es ist jeweils $\mathfrak{X} \cap D_+(\dots) \times (\mathbb{A}_k^1 \setminus \{0,1\})$ abgeschlossen in diesen Räumen, weil in affinen Variablen durch eine polynomiale Gleichung definiert.

Damit ist auch $\mathfrak{X} \in \mathrm{Abg}(\mathbb{P}_k^2 \times (\mathbb{A}_k^1 \setminus \{0,1\}))$, also $\mathfrak{X}$ eine (quasiprojektive) Varietät. Dabei ist

$$\pi := p|_{\mathfrak{X}} : \mathfrak{X} \twoheadrightarrow \mathbb{A}_k^1 \setminus \{0,1\}$$

ein surjektiver Morphismus mit $\pi^{-1}(\lambda) = L(\lambda) \times \{\lambda\} \cong L(\lambda)$. Es kommt also jede Legendre-Kurve einmal vor, jede Isomorphieklasse i. a. 6-mal (über Verzweigungspunkten nur 2 bzw. 3 mal, wie bekannt), und damit auch jede Isomorphieklasse von Weierstraß-Kubiken. □

Stellen wir eine vorläufige Bilanz des bisher Gefundenen auf:

Objekte	**Modulräume**	**Offene Fragen**
Eindimensionale komplexe Tori ${}^{\mathbb{C}}\!/\!_{L}$ mit $L = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$, bzw. $L = \mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$, $\tau \in \mathcal{H}$.	${}^{\mathcal{H}}\!/\!_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$, bezüglich der Gruppenoperation $$\begin{aligned} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathcal{H} &\to \mathcal{H} \\ \left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right), \tau\right) &\mapsto \tfrac{a\tau+b}{c\tau+d} \end{aligned}$$	Welche weiteren Strukturen hat der topologische Raum ${}^{\mathcal{H}}\!/\!_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$, etwa komplexe Mannigfaltigkeit oder algebraische Varietät, gar affin?
Weierstraß-Kubiken $E(a,b)$ (über einem Körper $k = \overline{k}$, $\mathrm{char}(k) \notin \{2,3\}$), $E(a,b) = V_+(Y^2Z - X^3 - aXZ^2 - bZ^3) \subseteq \mathbb{P}^2_k$ für $0 \neq \Delta(a,b) = 4a^3 + 27b$.	$\mathbb{A}^1_k$, via $$\begin{aligned} \{E(a,b)\}/_{\cong} &\xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^1_k \\ [E(a,b)] &\longmapsto j(a,b) \\ &= \tfrac{4a^3}{4a^3+27b^2} \end{aligned}$$	Gibt es einen Zusammenhang zwischen den Tori und Weierstraß-Kubiken (für $k = \mathbb{C}$)?
Legendre-Kubiken $L(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{A}^1_k \setminus \{0,1\}$, $L(\lambda) = V_+(Y^2Z - X(X-Z)(X-\lambda Z))$.	Ebenfalls $\mathbb{A}^1_k$, via $$\begin{aligned} \{L(\lambda)\}/_{\cong} &\xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^1_k \\ [L(\lambda)] &\longmapsto J([L(\lambda)]) \\ &= \tfrac{4(\lambda^1-\lambda+1)^3}{27\lambda^2(\lambda-1)^2} \end{aligned}$$	Man hat (für $k = \mathbb{C}$) die 6-blättrige Überlagerung $$\begin{aligned} \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \setminus \{0,1\} &\overset{\mathcal{J}}{\twoheadrightarrow} \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \\ \lambda &\longmapsto \tfrac{4(\lambda^1-\lambda+1)^3}{27\lambda^2(\lambda-1)^2} \end{aligned}$$ Welche Bedeutung hat $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ vom Modulstandpunkt? Ist $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \setminus \{0,1\}$ vielleicht selbst ein Modulraum von gewissen Objekten?

Für die zweite Frage können wir die folgende Abbildungen betrachten:

$$\begin{aligned} \Psi : \left\{{}^{\mathbb{C}}\!/\!_{\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}} \mid \tau \in \mathcal{H}\right\}/_{\cong} &\longrightarrow \{E(a,b) \mid \Delta(a,b) \neq 0\}/_{\cong} \\ \left[{}^{\mathbb{C}}\!/\!_{\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}}\right] &\longmapsto [V_\tau] \end{aligned}$$

sowie für $\tau \in \mathcal{H}$ jeweils die bekannte analytische Isomorphie

$$\begin{aligned} h_\tau : {}^{\mathbb{C}}\!/\!_{\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}} &\xrightarrow{\sim} V_\tau = V_+(Y^2Z - 4X^3 + g_2(\tau)XZ^2 + g_3(\tau)Z^3) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}, \\ [0] \neq [z] &\longmapsto (\wp_\tau(z) : \wp'_\tau(z) : 1) \\ [0] &\longmapsto (0 : 1 : 0), \end{aligned}$$

mit der bekannten Weierstraßschen $\wp$-Funktion und den zugehörigen Eisensteinreihen

$g_2(\tau)$ und $g_3(\tau)$:

$$\wp_\tau(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \left(\frac{1}{(z-(m+n\tau))^2} - \frac{1}{m+n\tau}\right)$$
$$g_2(\tau) = 60 \cdot \sum_{(n,m)\neq(0,0)} \frac{1}{(n+m\tau)^4}$$
$$g_3(\tau) = 140 \cdot \sum_{(n,m)\neq(0,0)} \frac{1}{(n+m\tau)^6}$$

Bekanntlich ist h_τ ein Isomorphismus der Varietäten. Außerdem haben wir ja auf $\mathbb{C}/_{\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}}$ die von $\mathbb{C}$ geerbte Gruppenoperation $+$, auf $V_\tau \cong_{X\mapsto\sqrt[3]{4}X} E(\frac{g_2}{\sqrt[3]{4}}, g_3)$ haben wir die Gruppenoperation $\boxplus$ der Weierstraß-Kurven (geometrisch definierte Addition).

Frage. Ist h_τ eventuell gar ein Gruppenhomomorphismus (d.h. -isomorphismus)?

Elliptische Funktionen

Sei $L = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter, $\operatorname{Im}(\frac{\omega_1}{\omega_2}) > 0$, mit Fundamentalbereich $\mathcal{F} := \{\lambda_1 \cdot \omega_1 + \lambda_2 \cdot \omega_2 \mid \lambda_i \in [0,1)\}$. Für $a \in \mathbb{C}$ ist dann $a + \mathcal{F} = \{a + \lambda_1 \cdot \omega_1 + \lambda_2 \cdot \omega_2 \mid \lambda_i \in [0,1)\}$ ebenfalls ein Fundamentalbereich.

Definition 7.32. *Die Menge* $\boxed{\mathrm{Ell}_L(\mathbb{C})}$

$$\mathrm{Ell}_L(\mathbb{C}) := \{f \in \mathcal{M}er(\mathbb{C}) \mid \forall z \in \mathbb{C}, \forall \omega \in L : f(z+\omega) = f(z)\}$$

heißt Menge der ***elliptischen Funktionen*** *zum Gitter L bzw. L-elliptische Funktionen auf* $\mathbb{C}$.

Es ist $\mathbb{C} \subsetneq \mathrm{Ell}_L(\mathbb{C}) \subsetneq \mathcal{M}er(\mathbb{C})$ als Körpererweiterung, und $\mathrm{Ell}_L(\mathbb{C}) \cong \mathcal{M}er(\mathbb{C}/_L)$ (Körperisomorphie via $\pi^\#$).

Sammeln wir einige Eigenschaften elliptischer Funktionen.

> $\boxed{\text{Bemerkung 1.}}$ $\mathrm{Ell}_L(\mathbb{C}) \cap \mathcal{H}ol(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$, d.h. nichtkonstante elliptische Funktionen haben Polstellen.

Beweis. Dies ist eine Folgerung aus dem bekannten Satz von Liouville über ganze Funktionen, denn holomorphe (= polstellenlose) elliptische Funktionen sind ganz und (weil sie alle Werte schon auf dem kompakten Fundamentalbereich annehmen) beschränkt. □

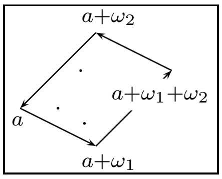
Erinnerung. Ist f in einer punktierten Umgebung von $a \in \mathbb{C}$ darstellbar als Laurentreihe $f(z) = \sum_{\nu=-m}^{\infty} b_i \cdot (z-a)^\nu$, mit $m \in \mathbb{N}$, so heißt der Koeffizient $\boxed{\mathrm{Res}_a(f)}$

$$\mathrm{Res}_a(f) := b_{-1}$$

das **Residuum** von f in a. (Für nicht-Polstellen a von f ist $\mathrm{Res}_a(f) = 0$).

$\boxed{\text{SATZ 7.3.9.}}$ Sei $f \in \mathrm{Ell}_L(\mathbb{C}) \setminus \mathbb{C}$ (d.h. f hat in jedem Fundamentalbereich nur endlich viele Polstellen). Sei $a \in \mathbb{C}$ derart, dass f mit $\mathcal{F}_a = a + \mathcal{F}$ auf dem Rand $\partial\mathcal{F}_a$ keine Polstellen hat, seien $a_1, \cdots, a_n$ die Polstellen von f in $\int(\mathcal{F}_a)$. Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}_{a_i}(f) = 0$$



Beweis. Der Residuensatz liefert (weil keine Polstellen auf ∂F liegen):

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}_{a_i}(f) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\mathcal{F}_a} f(z)dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \cdot \Bigg(\int_0^1 f(a + t\omega_1)dt + \int_0^1 f(a + \omega_1 + t\omega_2)dt + \\
&\qquad + \int_0^1 f(a + \omega_1 + \omega_2 - t\omega_1)dt + \int_0^1 f(a + \omega_2 - t\omega_2)dt \Bigg)
\end{aligned}$$

Aufgrund der Periodizität ist das:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi i} \cdot \Bigg(\int_0^1 f(a + t\omega_1)dt + \int_0^1 f(a + t\omega_2)dt + \\
&\qquad + \int_0^1 f(a + (1-t)\omega_1)dt + \int_0^1 f(a + (1-t)\omega_2)dt \Bigg) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \cdot \Bigg(\int_0^1 f(a + t\omega_1 dt) + \int_0^1 f(a + t\omega_2)dt + \\
&\qquad + \int_1^0 f(a + t\omega_1)dt + \int_1^0 f(a + t\omega_2)dt \Bigg) \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Erinnerung. Sei $a \in \mathbb{C}$. Dann kann man $f \in \mathcal{M}\mathrm{er}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ in einer (eventuell punktierten) Umgebung von a darstellen als Laurentreihe

$$f(z) = \sum_{\nu=m}^{\infty} a_\nu \cdot (z - a_i)^\nu$$

$\boxed{\mathrm{ord}_{a_i}(f)}$ mit $a_m \neq 0$. Dann definieren wir $\mathrm{ord}_{a_i}(f) := m$, und m heißt **Nullstellenordnung** (falls $m > 0$) bzw. $-m$ heißt **Polstellenordnung** (falls $m < 0$) von f an der Stelle a. (Es ist $m = 0$, falls a weder Pol- noch Nullstelle ist.)

$\boxed{\text{SATZ 7.3.10.}}$ Sei $f \in \mathrm{Ell}_L(\mathbb{C}) \setminus \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$ derart, dass auf $\partial\mathcal{F}_a$ keine Pol- oder Nullstellen von f liegen, seien $a_1, \cdots, a_n$ die Pol- und Nullstellen von f in $\mathrm{Int}(\mathcal{F}_A)$. Dann ist

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{ord}_{a_i}(f) = 0$$

Beweis. Ist für eine Null- oder Polstelle a_i die Laurententwicklung

$$f(z) = \sum_{\nu=m}^{\infty} a_\nu (z - a_i),$$

mit $a_m \neq 0$, also $\mathrm{ord}_{a_i}(f) = m$, so hat die Ableitung die Laurententwicklung

$$f'(z) = \sum_{\nu=m}^{\infty} \nu \cdot a_\nu (z - a_\nu)^{\nu-1}.$$

Division ergibt

$$\frac{f'}{f}(z) = m \cdot (z - a_i)^{-1} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \ldots \cdot (z - a_i)^\nu,$$

also ist

$$\mathrm{Res}_{a_i}\left(\frac{f'}{f}\right) = m = \mathrm{ord}_{a_i}(f).$$

Nun ist auch $\frac{f'}{f} \in \mathrm{Ell}_L(\mathbb{C})$ (und ohne Polstellen auf $\partial\mathcal{F}_a$), also gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{ord}_{a_i}(f) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}_{a_i}\left(\frac{f'}{f}\right) = 0$$

nach Satz 7.3.9. □

Satz 7.3.11. Sei wieder $L = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ Gitter mit $\mathrm{Im}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) > 0$, $f \in \mathrm{Ell}_L(\mathbb{C}) \setminus \mathbb{C}$, und $a \in \mathbb{C}$, so dass keine Pole oder Nullstellen auf $\partial\mathcal{F}_a$ liegen, und $a_1, \cdots, a_m$ die Pole und Nullstellen von f in $\mathrm{Int}(\mathcal{F}_a)$. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{m} \mathrm{ord}_{a_i} \cdot [a_i] = [0] \in \mathbb{C}/L$$

bzw.

$$\sum_{i=1}^{m} \mathrm{ord}_{a_i} \cdot a_i \in L$$

Beweis. Wie im letzten Beweis zeigt man, dass

$$\mathrm{Res}_{a_i}\left(z \mapsto z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}\right) = a_i \cdot \mathrm{ord}_{a_i}(f)$$

ist. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} R &:= \sum_{i=1}^{m} \mathrm{ord}_{a_i}(f) \cdot a_i \\ R &= \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Res}_{a_i}\left(z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}\right) \\ 2\pi i R &= \oint_{\partial\mathcal{F}_a} z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^{a+\omega_1} z\frac{f'(z)}{f(z)}dz + \int_{a+\omega_1}^{a+\omega_2+\omega_1} z\frac{f'(z)}{f(z)}dz + \\
&\quad + \int_{a+\omega_1+\omega_2}^{a+\omega_2} z\frac{f'(z)}{f(z)}dz + \int_{a+\omega_2}^{a} z\frac{f'(z)}{f(z)}dz \\
&= \int_a^{a+\omega_1} z\frac{f'(z)}{f(z)}dz - \int_{a+\omega_2}^{a+\omega_2+\omega_1} z\frac{f'(z)}{f(z)}dz + \\
&\quad + \int_{a+\omega_1}^{a+\omega_2+\omega_1} z\frac{f'(z)}{f(z)}dz - \int_a^{a+\omega_2} z\frac{f'(z)}{f(z)}dz \\
2\pi i R &= -\omega_2 \cdot \int_a^{a+\omega_1} \frac{f'(z)}{f(z)}dz + \omega_1 \cdot \int_a^{a+\omega_2} \frac{f'(z)}{f(z)}dz
\end{aligned}$$

Nun gibt es (weil $f(z) \neq \{0,\infty\}$ auf diesen Integrationswegen) eine Funktion h mit $f(z) = e^{h(z)}$, und h ist dann eine Stammfunktion von $\frac{f'}{f}$.

$$2\pi i R = -\omega_2 \cdot (h(a+\omega_1) - h(a)) + \omega_1 \cdot (h(a+\omega_2) - h(a))$$

Da $f = e^h$ eine $\omega_{1/2}$-periodische Funktion ist, ist $h(a+\omega_{1/2}) \in 2\pi i\mathbb{Z} + h(a)$, also gibt es $k, l \in \mathbb{Z}$ mit

$$\begin{aligned}
2\pi i R &= -\omega_2 \cdot 2\pi i \cdot k + \omega_1 \cdot 2\pi i \cdot l \\
R &= \omega_1 \cdot l - \omega_2 \cdot k,
\end{aligned}$$

also

$$R \in L. \qquad \square$$

Bemerkung. (Exkurs zu Divisoren)

$\boxed{\mathrm{Div}\left(\mathbb{C}/L\right)}$

Definition 7.33. Die (abelsche) Gruppe

$$\mathrm{Div}\left(\mathbb{C}/L\right) := F_{\mathbb{Z}}\left(\mathbb{C}/L\right) = \left\{ \sum_{[z]\in\mathbb{C}} n_z \cdot [z] \,\middle|\, n_z \in \mathbb{Z}, n_z = 0 \ p.p. \right\}$$

*(dabei handelt es sich um formale Summen, nicht um Addition in $\mathbb{C}/L$) heißt die **Divisorengruppe** des Torus $\mathbb{C}/L$, und ein Element*

$$D = \sum_{z\in\mathbb{C}} n_z \cdot [z] \qquad (n_z = 0 \ p.p.)$$

*heißt **Divisor** auf $\mathbb{C}/L$.*

$\boxed{\mathrm{div}(f)}$

Definition 7.34. Für $f \in \mathfrak{Mer}(\mathbb{C}/L) \setminus \{0\} = \mathrm{Ell}_{\mathbb{C}}(L) \setminus \{0\}$ heißt

$$\mathrm{div}(f) := \sum_{[a]\in\mathbb{C}/L} \mathrm{ord}_a(f) \cdot [a]$$

*der **Hauptdivisor** zu f auf $\mathbb{C}/_L$, und*

$$\mathrm{Div}_{\mathrm{Princ}}(\mathbb{C}/_L) := \{\mathrm{div}(f) \mid f \in \mathrm{Ell}_{\mathbb{C}}(L)\}$$

heißt Gruppe der Hauptdivisoren von $\mathbb{C}/_L$.

$\mathrm{Div}_{\mathrm{Princ}}$ ist wirklich eine Untergruppe, das Bild des Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{div} : \mathcal{M}\mathrm{er}(\mathbb{C}/_L)^* \twoheadrightarrow \mathrm{Div}_{\mathrm{Princ}}(\mathbb{C}/_L) \subseteq \mathrm{Div}(\mathbb{C}/_L).$$

Dabei ist $\ker(\mathrm{div}) = \mathbb{C}^*$ (die Funktionen ohne Null- und Polstellen sind genau die konstanten).

Definition 7.35. *Die Faktorgruppe* $\boxed{\mathrm{Cl}(C/_L)}$

$$\mathrm{Cl}(\mathbb{C}/_L) := {}^{\mathrm{Div}(\mathbb{C}/_L)}\big/_{\mathrm{Div}_{\mathrm{Princ}}(\mathbb{C}/_L)}$$

*heißt die **Divisorenklassengruppe** oder auch nur **Klassengruppe** des Torus $\mathbb{C}/_L$.*

Definition 7.36. *Sei $D = \sum_{[z]\in\mathbb{C}/_L} n_{[z]} \cdot [z] \in \mathrm{Div}(\mathbb{C}/_L)$ ein Divisor. Dann heißt* $\boxed{\deg(D)}$

$$\deg(D) := \sum_{[z]\in\mathbb{C}/_L} n_{[z]} \in \mathbb{Z}$$

***Grad** von D.*

Satz 7.3.10 sagt dann aus, dass auf einem Torus $\mathbb{C}/_L$ für Hauptdivisoren $\mathrm{div}(f)$ immer $\deg(\mathrm{div}(f)) = 0$ ist.

Wir wollen nun diese Sätze zu elliptischen Funktionen nutzen, um die Gruppenhomomorphismus-Eigenschaften von h_τ nachzuweisen.

$\boxed{\text{Satz 7.3.12.}}$ Der bekannte analytische Isomorphismus

$$\begin{aligned} h_L : (\mathbb{C}/_L, +) &\xrightarrow{\sim} (V_L = V_+(Y^2Z - 4X^3 + g_2(L)XZ^2 + g_3(L)Z^3), \boxplus) \\ [0] &\longmapsto (0:1:0) \\ [z] &\longmapsto (\wp_L(z), \wp'_L(z) : 1) \end{aligned}$$

ist auch ein Gruppenhomomorphismus.

Beweis. Sei im folgenden immer $L = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$.

Wir müssen zeigen, dass die durch h_L auf V_L induzierte *Addition* genau die geometrisch definierte Addition ist.

Die durch h_L induzierte Additiion auf V_τ sieht wie folgt aus:

$$\begin{aligned} h_L([z_1]) + h([z_2]) &:= h_L([z_1]) + h([z_2]) \\ &= h_L([z_1 + z_2]) \end{aligned}$$

Dabei ist bekanntlich $\wp_L \in \mathrm{Ell}_L(\mathbb{C})$, und zwar eine gerade Funktion ($\wp_L(-z) = \wp_L(z)$), und daher ist ihre Ableitung $\wp'_L \in \mathrm{Ell}_L(\mathbb{C})$ eine ungerade Funktion ($\wp'_L(-z) = -\wp'_L(z)$).

$\wp'_L$ hat im Fundamentalbereich $\mathcal{F} = \{\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 \mid \lambda_i \in [0,1)\}$ genau einen Pol dritter Ordnung (bei 0), also nach Satz 7.3.10 in $\mathcal{F}$ auch die Nullstellenordnung 3. Sei noch $\omega_3 := \omega_1 + \omega_2$ die *vierte Ecke* des Fundamentalbereiches, dann ist für $j \in \{1, \cdots, 3\}$: Es ist dabei

$$\wp'_L\left(\frac{\omega_j}{2}\right) = \wp'_L\left(\frac{\omega_j}{2} - \omega_j\right) = \wp'_L\left(-\frac{\omega_j}{2}\right) = -\wp'_L\left(\frac{\omega_j}{2}\right),$$

und da sich dort keine Polstelle befindet, muss $\wp'_L\left(\frac{\omega_j}{2}\right) = 0$ sein, und wir haben unsere drei Nullstellen $\frac{\omega_1}{2}$, $\frac{\omega_2}{2}$ und $\frac{\omega_3}{2}$ von $\wp'_1$ (die natürlich dann alle vom Grad 1 sein müssen) gefunden.

Definition 7.37. *Wir nennen* $e_i := \wp_L\left(\frac{w_i}{2}\right)$ *auch **Halbwerte** von* $\wp_L$ *auf* L.

LEMMA.

1. Es ist $\prod_{i<j} e_i - e_j \neq 0$, d.h. die Halbwerte sind paarweise verschieden.

2. Es gilt für die Diskriminante
$$g_2(L)^3 - 27g_3(L)^2 \neq 0,$$

3. $V_L = V_+(Y^2Z - 4X^3 + g_2(L)XZ^2 + g_3(L)Z^3)$ ist wirklich nichtsingulär und (sogar linear) isomorph zu einer Weierstraß-Kubik.

Beweis.

1. Sei für $i \in \{1, \cdots, 3\}$ jeweils $f_i := \wp_L(z) - e_i$, dann sind die f_i ebenfalls L-elliptisch mit Polen in $\omega \in L$, diese Pole sind zweiter Ordnung. Nach Satz 7.3.10 ist die Nullstellenordnung von f_i dann 2, wobei sich eine Nullstelle von f_i natürlich bei $\frac{\omega_i}{2}$ findet. Mit Satz 7.3.11 findet man sofort, dass sich die weitere Nullstelle auch bei $\frac{\omega_i}{2}$ befindet, dies ist also eine doppelte Nullstelle. (Dies sieht man natürlich auch an $f'_i\left(\frac{\omega_i}{2}\right) = \wp'_L\left(\frac{\omega_i}{2}\right) = 0$.) Das heißt, f_i hat keine weitere Nullstelle, insbesondere ist $f_i\left(\frac{\omega_j}{2}\right) \neq 0$ für $i \neq j$, also $e_i \neq e_j$.

2. Damit hat aufgrund der Funktionalgleichung $(\wp'_L(z))^2 = 4\wp_L(z)^3 + g_2(L)\wp_L(z) + g_3(L)$ das Polynom $4X^3 - g_2(L)X - g_3(L)$ genau drei Nullstellen, nämlich e_1, e_2 und e_3, also ist
$$4 \cdot \left(X^3 - \frac{g_2(L)}{4}X - \frac{g_3(L)}{4}\right) = 4 \cdot (X - e_1)(X - e_2)(X - e_3).$$
Ausmultiplizieren der rechten Seite und Koeffizientenvergleich liefert uns neben $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ auch … □

$\boxed{\text{LEMMA.}}$ Für $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus L$ gilt:

$$\wp_L(z_1) = \wp_L(z_2) \quad \Longleftrightarrow \quad z_1 + z_2 \in L \text{ oder } z_1 - z_2 \in L,$$

d.h. $\wp_L$ nimmt jeden seiner Werte (außer die e_i) in seinem Fundamentalbereich genau zweimal an.

Beweis. Wie im vorherigen Lemma: Fixiere $z_1 \in \mathbb{C}\setminus L$, betrachte $g(z) := \wp_L(z) - \wp_L(z_1)$. Dies ist L-elliptisch mit Polen in L (und sonst keinen), hat also im Fundamentalbereich $\mathcal{F}$ zwei Nullstellen (eventuell eine doppelte), etwa η_1 und η_2, mit $\eta_1 + \eta_2 + 0 \in L$ (wieder nach Satz 7.3.11), also $[\eta_1] = -[\eta_2]$.

Da z_1 eine Nullstelle ist, muss (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) $z_1 \in \eta_1 + L$ sein, und für alle weiteren Nullstelle z_2 gilt entweder $z_2 \in \eta_1 + L$ oder $z_2 \in \eta_2 + L$, womit entsprechend $z_1 - z_2 \in L$ oder $z_1 + z_2 \in L$ ist. $\square$

Damit beweisen wir nun unseren Satz 7.3.12.

Wir haben ja die bijektive holomorphe Abbildung:

$$h : \left(\mathbb{C}/L, +\right) \xrightarrow{\sim} (V_L, \boxplus)$$

Fall 1: Seien zunächst $z_1 \notin L$, $z_2 \notin L$, $z_1 + z_2 \notin L$ und $z_1 - z_2 \notin L$ (d.h. $[z_1] \neq [0]$, $[z_2] \neq [0]$, $[z_1] + [z_2] \neq [0]$ und $[z_1] \neq [z_2]$), und $P_1 := h_L(z_1)$, $P_2 := h_L(z_2)$.

Geometrisch sind also $P_1, P_2 \in V_L \setminus \{O\}$, $P_1 \neq P_2$ und außerdem $h_L(z_1 + z_2) \neq O$.

Betrachte nun die Verbindungsgerade $l(P_1, P_2) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Für $z \in \mathbb{C}$ ist

$$h(Z) =: Q \in l(P_1, P_2), \quad \text{falls} \quad 0 = \det \begin{pmatrix} h_L(z_1) \\ h_L(z_2) \\ h_L(z_3) \end{pmatrix}.$$

(Dann ist $Q \in \{P_1, P_2\}$ oder $Q = \widehat{P_1 P_2}$.)

$z \in L$, also $Q = 0$, kommt hier nicht in Frage, denn es ist ja

$$\det \begin{pmatrix} \wp_L(z_1) & \wp_L'(z_1) & 1 \\ \wp_L(z_2) & \wp_L'(z_2) & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \wp_L(z_1) - \wp_L(z_2) \neq 0.$$

Für $z \in \mathbb{C} \setminus L$ liegt nun Q in $l(P_1, P_2)$, falls

$$0 = \psi(z) := \det \begin{pmatrix} \wp_L(z_1) & \wp_L'(z_1) & 1 \\ \wp_L(z_2) & \wp_L'(z_2) & 1 \\ \wp_L(z) & \wp_L'(z) & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Determinante hat (Entwicklung nach der letzten Spalte) die Form

$$\psi(z) = \underbrace{(\wp_L(z_2) - \wp_L(z_1))}_{\neq 0} \cdot \wp_L'(z) + B \cdot \wp_L(z) + C,$$

ist also eine L-elliptische Funktion mit Polen dritter Ordnung in L. ψ hat also in $\mathcal{F}$ drei Nullstellen, wobei z_1 und z_2 bereits solche sind. Sei $\eta \in \mathcal{F}$ eine weitere Nullstelle von ψ, dann ist (wieder nach Satz 7.3.11)

$$\begin{aligned} & z_1 + z_2 + \eta \in L \\ & \quad \Rightarrow \quad [\eta] = [-(z_1 + z_2)] \\ \Rightarrow & \quad h_L([\eta]) = (\wp_L(z_1 + z_2) : -\wp_L'(z_1 + z_2) : 1), \end{aligned}$$

dies ist also der „dritte Schnittpunkt“ $Q = \widehat{P_1 P_2}$. Damit haben wir insgesamt

$$\begin{aligned} h_L(z_1) \boxplus h_L(z_2) &= P_1 \boxplus P_2 \\ &= \ominus \widehat{P_1 P_2} \\ &= \ominus(\wp_L(z_1 + z_2) : -\wp_L'(z_1 + z_2) : 1) \\ &= (\wp_L(z_1 + z_2) : \wp_L'(z_1 + z_2) : 1) \\ &= h_L([z_1 + z_2]) \\ &= h_L([z_1] + [z_2]). \end{aligned}$$

Fall 2: Sei wieder $z_1 \notin L$, $z_2 \notin L$, $z_1 - z_2 \notin L$, aber $z_1 + z_2 \in L$, P_1 und P_2 wie oben. Geometrisch ist also $P_1 \neq O$, $P_2 \neq O$, $P_1 \neq P_2$, und $P_1 = \ominus P_2$.

Das heißt, wir haben

$$\begin{aligned} h_L([z_1]) \boxplus h_L([z_2]) &= P_1 \boxplus P_2 \\ &= O \\ &= h_L([0]) \\ &= h([z_1 + z_2]) \\ &= h([z_1] + [z_2]). \end{aligned}$$

Fall 3: Sei diesmal $z_1 \in L$ ($[z_1] = [0]$), also $P_1 = O$. Dann ist

$$P_1 \boxplus P_2 = P_2 = h([z_2]) = h([z_1] + [z_2]).$$

Fall 4 Sei diesmal $z_2 \in L$ ($[z_2] = [0]$), also $P_2 = O$. Dann ist

$$P_1 \boxplus P_2 = P_1 = h([z_1]) = h([z_1] + [z_2]).$$

Fall 5: Es bleibt noch der Fall $z_1 - z_2 \in L$, also $P_1 = P_2$. Aufgrund der Stetigkeit von $\boxplus$ und $+$ und der Tatsache, dass die Fälle 1 bis 5 (eigentlich schon Fall 1 alleine) eine dichte Menge abdecken, ist auch hier die Identität gegeben. $\square$(Satz 7.3.12)

SATZ 7.3.13. *(Das Additionstheorem für $\wp_L$-Funktionen)*
Sei $\mathbb{C}/L$ ein Torus, $\wp_L$ die assoziierte Weierstraßsche $\wp$-Funktion, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $z_1 \notin L$, $z_2 \notin L$, $z_1 + z_2 \notin L$, $z_2 - z_2 \notin L$. Dann ist

$$\wp_L(z_1 + z_2) = -\wp_L(z_1) - \wp_L(z_2) + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\wp_L'(z_2) - \wp_L'(z_1)}{\wp_L(z_2) - \wp_L(z_1)}\right)^2$$

Beweis. Die (affine) Gerade durch $(\wp_L(z_1), \wp_L'(z_1))$ und $(\wp_L(z_2), \wp_L'(z_2))$ hat die Gestalt $Y = mX + n$ mit $m = \frac{\wp_L'(z_2) - \wp_L'(z_1)}{\wp_L(z_2) - \wp_L(z_1)}$. Auf dieser Gerade liegt auch der Punkt $(\wp_L(z_1 + z_2), \wp'(z_1 + z_2))$, also hat das Polynom

$$4X^3 - g_2(L) \cdot X - g_3(L) - (mX + n)^2$$

die drei Nullstellen $\wp_L(z_1)$, $\wp_L(z_2)$ und $\wp_L(z_1 + z_2)$. Das heißt, es ist

$$4X^3 - g_2(L) \cdot X - g_3(L) - (mX + n)^2 = 4 \cdot (X - \wp_L(z_1))(X - \wp_L(z_2))(X - \wp_L(z_1 + z_2)).$$

Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich ergibt

$$-\frac{m^2}{4} = -(\wp_L(z_1) + \wp_L(z_2) + \wp_L(z_1 + z_2)),$$

was umgestellt die Formel des Satzes ist. □

KOROLLAR. *(Verdopplungsformel für $\wp_L$)*
Sei $\mathbb{C}/L$ Torus, $L = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ das zugrundeliegende Gitter, $\wp_L$ die passende Weierstraßsche $\wp$-Funktion, und $z \in \mathbb{C} \setminus \frac{1}{2}L$. Dann ist

$$\wp_L(2 \cdot z) = -2\wp_L(z) + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\wp_L(z)}{\wp_L(z)}\right)$$

Beweis. Grenzübergang $z_1, z_2 \to z$ in Satz 7.3.13. □

Wir wollen nun die Modulräume $\mathcal{H}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ für komplexe Tori und $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ für Weierstraß-Kurven mit $k = \mathbb{C}$ vergleichen.

Wir haben bereits die wohldefinierte Weierstraß-Abbildung

$$\begin{aligned} \Psi : \left\{\mathbb{C}/L \mid L \subset \mathbb{C}\text{Gitter}\right\} &\longrightarrow \left\{\tilde{E}(a, b) \mid a^3 - 27b^2 \neq 0\right\} \\ \mathbb{C}/L &\longmapsto \tilde{E}(g_2(L), g_3(L)), \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}\tilde{E}(a,b) &= V_+(Y^2Z - 4X^3 + aXZ^2 + bZ^3)\\ &\cong E\left(\frac{-a}{\sqrt[3]{4}}, -b\right)\\ &= V_+\left(Y^2Z - X^3 + \frac{a}{\sqrt[3]{4}}XZ^2 + bZ^3\right).\end{aligned}$$

Sind dabei $\mathbb{C}/L$ und $\mathbb{C}/L'$ isomorph, so gibt es ein $\mu \in \mathbb{C}^*$, so dass $\mu \cdot L = L'$, und entsprechend das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "\square\cdot\mu", "\sim"'] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "\pi'"] \\ \mathbb{C}/L \arrow[r, "\tilde{\mu}"'] & \mathbb{C}/L' \end{tikzcd}$$

Dabei gilt für die g_i:

$$\begin{aligned}g_2(L') &= 60 \cdot \sum_{\omega' \in L'\setminus\{0\}} \frac{1}{(\omega')^4}\\ &= 60 \cdot \sum_{\omega \in L\setminus\{0\}} \frac{1}{(\mu\omega)^4}\\ &= \frac{1}{\mu^4} g_2(L)\end{aligned}$$

sowie entsprechend

$$g_3(L') = \frac{1}{\mu^6} g_3(L)$$

Die allgemeine Theorie liefert damit

$$\tilde{E}(g_2(L), g_3(L)) \cong \tilde{E}(g_2(L'), g_3(L')).$$

Das heißt, Ψ ist mit der jeweiligen Isomorphie verträglich, wir haben also

$$\begin{tikzcd} & \left\{\mathbb{C}/L\right\} \arrow[r, "\Psi"'] \arrow[d] & \left\{\tilde{E}(a,b)\right\} \arrow[d] & & \\ \mathcal{H}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \arrow[rrrr, dashed, bend right, "\hat{\jmath}"'] & \left\{\mathbb{C}/L\right\}/\cong_{\text{anal.}} \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, "\hat{\Psi}"] & \left\{\tilde{E}(a,b)\right\}/\cong_{\text{alg.}} \arrow[r, "\sim"] & \left\{E(a,b)\right\}/\cong_{\text{alg.}} \arrow[r, "j", "\sim"'] & \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \end{tikzcd}$$

Ziel. Wir wollen nun zunächst zeigen, dass $\hat{\Psi}$ bijektiv ist, und dann $\hat{\jmath}$ im obigen Diagramm untersuchen.

Dabei ist

$$\hat{\jmath}([\tau]) = \frac{g_2(\tau)^3}{g_2(\tau)^3 - 27g_3(\tau)^2}.$$

Bemerkung 2. $\hat{\Psi}$ ist wirklich bijektiv.

Beweis.

Injektivität: Seien $\mathbb{C}/L$ und $\mathbb{C}/L'$ zwei Tori mit $\tilde{E}(g_2(L), g_3(L)) \cong \tilde{E}(g_2(L'), g_3(L'))$. Dann haben wir

$$\underbrace{\mathbb{C}/L \xrightarrow[h_L]{\sim}}_{\text{anal.}} \tilde{E}(g_2(L), g_3(L)) \underbrace{\cong}_{\text{alg. + anal.}} \tilde{E}(g_2(L'), g_3(L')) \underbrace{\xrightarrow[h_{L'}^{-1}]{\sim}}_{\text{anal.}} \mathbb{C}/L',$$

es ist also auch $\mathbb{C}/L \cong \mathbb{C}/L'$, also ist $\hat{\Psi}$ injektiv.

Surjektivität: Sei $\tilde{E}(a,b)$ mit $a^3 - 27b^2 \neq 0$ gegeben, also $\tilde{E}(a,b) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ abelsche Varietät. Dann haben wir ja den Tangentialraum $T_O(\tilde{E}(a,b)) \cong \mathbb{C}$ (nicht kanonisch isomorph, sondern basisabhängig), mit der Exponentialabbildung

$$\exp : T_O(\tilde{E}(a,b)) \longrightarrow E(a,b),$$

und dabei ist

$$\tilde{E}(a,b) \cong T_O(\tilde{E}(a,b))/\ker(\exp) \cong \mathbb{C}/L,$$

mit $L \cong \ker(\exp)$. Wir haben umgekehrt dann natürlich

$$\begin{aligned} \mathbb{C}/L &\xrightarrow[h_L]{\sim} \tilde{E}(g_2(L), g_3(L)) \\ [z] &\longmapsto \begin{cases} (\wp'_L(z) : \wp'_L(z) : 1) & z \notin L \\ (0:1:0) & z \in L \end{cases}, \end{aligned}$$

also

$$\tilde{E}(a,b) \xrightarrow{\sim} \tilde{E}(g_2(L), g_3(L))$$

als analytischer Isomorphismus. Nach dem Theorem von Chow ist dies auch schon eine Isomorphie in $\underline{\mathrm{AV}}_{\mathbb{C}}$. Damit ist

$$\hat{\Psi}\left(\left[\mathbb{C}/L\right]\right) = \left[\tilde{E}(g_2(L), g_3(L))\right] = \left[\tilde{E}(a,b)\right],$$

also $\hat{\Psi}$ auch surjektiv. $\square$

Fazit. Damit haben wir folgendes Diagramm von Abbildungen mit den kommutativen

Vervollständigungen:

$$
\begin{tikzcd}
\left\{\mathbb{C}/L\right\}/\cong \arrow[r, "\hat{\Psi}", "\sim"'] \arrow[d, equal, "\wr"] \arrow[ddr, dotted, "\tilde{\mathcal{J}}", "\sim"'] & \left\{\tilde{E}(a,b)\right\}/\cong \arrow[d, equal, "\wr"] \\
\left\{\mathbb{C}/\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}\right\}/\cong & \{E(\alpha,\beta)\}/\cong \arrow[d, "j"', "\wr"] \\
\mathcal{H}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \arrow[u, "\wr"] \arrow[r, dotted, "\mathcal{J}", "\sim"'] & \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \\
\mathcal{H} \arrow[u, two heads] \arrow[ur, dashed, "\hat{\mathcal{J}}"']
\end{tikzcd}
$$

Dabei sind $\mathcal{J}$ und $\hat{\mathcal{J}}$ gegeben durch

$$\hat{\mathcal{J}}(\tau) = \mathcal{J}([\tau]) = \frac{g_2(\tau)^3}{g_2(\tau)^3 - 27 g_3(\tau)^2},$$

mit den üblichen Eisensteinreihen $g_2(\tau)$ und $g_3(\tau)$.

$\boxed{\text{Satz 7.3.14.}}$ Die Abbildung

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{J}} : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \\ \tau &\longmapsto \frac{g_2(\tau)^3}{g_2(\tau)^3 - 27 g_3(\tau)^2} \end{aligned}$$

ist surjektiv, die induzierte Abbildung

$$\mathcal{J} : \mathcal{H}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$$

ist sogar bijektiv.

$\boxed{\text{Bemerkung 3.}}$ Es ist also $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ ein Modulraum für $\mathcal{H}$ bzw. die damit gebildeten komplexen Tori in Standardform $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$.
Es kann aber auch $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ als Modulraum *aller* (eindimensionalen) komplexen Tori aufgefasst werden, mit $\tilde{\mathcal{J}}$ als klassifizierender Invarianten,

$$\tilde{\mathcal{J}}(\mathbb{C}/L) = \frac{g_2(L)^3}{g_2(L)^3 - 27 g_3(L)^2} \in \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}.$$

Fragen.

(1) Ist $\hat{\mathcal{J}} : \mathcal{H} \twoheadrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ analytisch?

(2) Ist $\mathcal{J} : {}^{\mathcal{H}}\!/\!_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ ein Homöomorphismus?

(3) Wie sieht ${}^{\mathcal{H}}\!/\!_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ überhaupt aus? Ist es eine komplexe Mannigfaltigkeit oder wenigstens Hausdorff-Raum?

(4) Falls (2) und (3) gelten, ist $\mathcal{J}$ gar biholomorph (und damit auch analytischer Isomorphismus)?

(5) Wie sehen diejenigen komplexen Tori ${}^{\mathbb{C}}\!/\!_{L}$ aus, für die $\left|\mathrm{Aut}_{\mathrm{Lie}_{\mathbb{C}}}({}^{\mathbb{C}}\!/\!_{L})\right| > 2$ gilt? (Wir wissen ja, dass die Zahl i.a. $= 2$ ist, nur in einigen Fällen 4 oder 6, siehe Satz 7.3.6 zusammen mit den später gezeigten Äquivalenzen von Weierstraß-Kurven zu Tori.)

(6) Gibt es eine *große Familie* komplexer Tori, d.h.

$$\mathfrak{X} \xrightarrow{\pi} S$$

als analytischer Epimorphismus komplexer Mannigfaltigkeiten derart, dass alle Fasern komplexe Tori sind und jeder (bis auf Isomorphie) auch einmal vorkommt?

Mit den Antworten auf diese Fragen beschäftigen sich die folgenden Sätze.

$\boxed{\text{SATZ 7.3.15.}}$ Es gibt eine holomorphe Abbildung komplexer Mannigfaltigkeiten

$$\mathcal{X} \xrightarrow{\pi} \mathcal{H}$$

derart, dass alle Fasern von π komplexe Tori sind und jeder komplexe Torus – bis auf Isomorphie – als Faser vorkommt.

Beweis. Betrachte zunächst die (zweidimensionale) komplexe Mannigfaltigkeit $\mathcal{H} \times \mathbb{C}$ mit der kanonischen Projektion:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} \times \mathbb{C} &\xrightarrow{p_1} \mathcal{H} \\ (\tau, z) &\longmapsto \tau \end{aligned}$$

Die Gruppe $(\mathbb{Z}^2, +)$ operiert auf $\mathcal{H} \times \mathbb{C}$ als analytische Automorphismengruppe mit der folgenden Operation $\cdot$:

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{Z}^2 \times (\mathcal{H} \times \mathbb{C}) &\longrightarrow \mathcal{H} \times \mathbb{C} \\ ((m,n),(\tau,z)) &\longmapsto (m,n)\cdot(\tau,z) := (\tau, z + m\tau + n). \end{aligned}$$

$(\mathbb{Z}^2, +)$ wirkt treu, das heißt wirklich als *Automorphismen*gruppe. Damit wird ${}^{\mathcal{H} \times \mathbb{C}}\!/\!_{\mathbb{Z}^2}$ (mit der kanonischen Projektion pr) eine komplexe Mannigfaltigkeit mit der Strukturgarbe (für $V \in \mathrm{Off}({}^{\mathcal{H} \times \mathbb{C}}\!/\!_{\mathbb{Z}^2})$)

$$\mathcal{O}^{\mathcal{H}ol}_{\mathcal{H}\times\mathbb{C}/\mathbb{Z}^2}(V) = \left\{ f : V \to \mathbb{C} \,\middle|\, f \circ \mathrm{pr} \in \mathcal{O}^{\mathcal{H}ol}_{\mathcal{H}\times\mathbb{C}}(\mathrm{pr}^{-1}(V))^{\mathbb{Z}^2} \right\}$$

Wir erhalten (mit $\pi([\tau, z]) := \tau$) das kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}\times {}^{\mathbb{C}}/_{\mathbb{Z}^2} \arrow[r, two heads, "\pi"] & \mathcal{H} \\ \mathcal{H}\times\mathbb{C} \arrow[u, "\mathrm{pr}"] \arrow[ur, "p_1"'] & \end{tikzcd}$$

Die Fasern von π haben dann die Gestalt

$$\begin{aligned}
\pi^{-1}(\tau) &= \{[(\tau, z)]_{\mathbb{Z}^2} \mid z \in \mathbb{C}\} \\
&= \Big\{\big\{(\tau, z') \mid z' = z + m\tau + n \mid (n, m) \in \mathbb{Z}^2\big\} \Big| \, z \in \mathbb{C}\Big\} \\
&= \{\{\tau\} \times [z]_{\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}} \,|\, z \in C\} \\
&= \{\tau\} \times {}^{\mathbb{C}}/_{\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}} \\
&\cong {}^{\mathbb{C}}/_{\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}}
\end{aligned}$$

Dies sind also alle (eindimensionalen) komplexen Tori in Standardform ${}^{\mathbb{C}}/_{\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}}$, bis auf Isomorphie also wirklich alle komplexen eindimensionalen Tori – leider mehr als einmal, denn es ist ja

$$\pi^{-1}(\tau) \cong \pi^{-1}(\tau') \quad \Longleftrightarrow \quad \tau \sim_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \tau'.$$

□

> $\boxed{\text{Satz 7.3.16.}}$ *(Tori mit* vielen *Automorphismen)*
> Bis auf ($\mathrm{Lie}_{\mathbb{C}}$-)Isomorphie sind die beiden Tori ${}^{\mathbb{C}}/_{\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}}$ und ${}^{\mathbb{C}}/_{\mathbb{Z}+\rho\mathbb{Z}}$, $\rho = \frac{i\sqrt{3}i-1}{2}$ primitive dritte Einheitswurzel, diejenigen (eindimensionalen) komplexen Tori mit mehr als 2 Automorphismen.

Beweis. Zunächst können wir uns auf Tori der Form ${}^{\mathbb{C}}/_{\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}}$ mit $\tau \in \mathcal{H}$ beschränken. Dann gilt

$$\begin{aligned}
& \left|\mathrm{Aut}_{\mathrm{Lie}_{\mathbb{C}}}\left({}^{\mathbb{C}}/_{\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}}\right)\right| > 2 \\
\Longleftrightarrow \quad & \left|\mathrm{Aut}_{\underline{\mathrm{AV}}_{\mathbb{C}}}(\tilde{E}(g_2(\tau), g_3(\tau)))\right| > 2 \\
\Longleftrightarrow \quad & \tilde{E}(g_2(\tau), g_3(\tau)) \cong \begin{cases} E(1, 0) \\ E(0, 1) \end{cases} \\
\Longleftrightarrow \quad & \hat{\jmath}(\tau) = 0 \text{ oder } \hat{\jmath}(\tau) = 1 \\
\Longleftrightarrow \quad & g_2(\tau) = 0 \text{ oder } g_3(\tau) = 0
\end{aligned}$$

Das Ausrechnen der Nullstellen dieser Reihen ist unangenehm, daher gehen wir einen anderen Weg: Wir untersuchen einfach die Automorphismengruppen von ${}^{\mathbb{C}}/_{\mathbb{Z}\oplus i\mathbb{Z}}$ und ${}^{\mathbb{C}}/_{\mathbb{Z}\oplus\rho\mathbb{Z}}$ und hoffen auf die Kardinalitäten 4 und 6.

(a) Für $\mathbb{C}/_{\mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z}}$ vermittelt ein $\mu \in \mathbb{C}^*$ genau dann einen Automorphismus φ_μ, falls $\mu(\mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z}$ ist (das Gitter bijektiv auf sich selbst abgebildet wird). Offenbar klappt das für i, und es ist

$$\begin{aligned} \langle \varphi_i \rangle &= \left\{ \varphi_i,\ \varphi_i^2 = \varphi_{-1} = -\operatorname{id},\ \varphi_i^3 = \varphi_{-i},\ \varphi_i^4 = \varphi_1 = \operatorname{id} \right\} \\ &\subseteq \operatorname{Aut}_{\mathrm{Lie}_\mathbb{C}}(\mathbb{C}/_{\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}}), \\ \Rightarrow \quad & |\langle \varphi_i \rangle| = 4, \end{aligned}$$

und weil für $\left| \operatorname{Aut}_{\mathrm{Lie}_\mathbb{C}}(\mathbb{C}/_{\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}}) \right|$ nur 2, 4 und 6 in Frage kommen, ist

$$\mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}} \cong \langle \varphi_i \rangle = \operatorname{Aut}_{\mathrm{Lie}_\mathbb{C}}(\mathbb{C}/_{\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}}).$$

Es muss also $g_3(i) = 0$ und $\hat{\jmath}(i) = 1$ sein.

(b) Für $\rho = \frac{i\sqrt{3}-1}{2}$ gilt wegen $1 + \rho + \rho^2 = 0$:

$$\begin{aligned} \rho \cdot (\mathbb{Z} \oplus \rho\mathbb{Z}) &= \rho\mathbb{Z} \oplus \rho^2\mathbb{Z} \\ &= \rho\mathbb{Z} \oplus (\rho + \rho^2)\mathbb{Z} \\ &= \rho\mathbb{Z} \oplus (-1)\mathbb{Z} \\ &= \mathbb{Z} \oplus \rho\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\langle \varphi_{-\rho} \rangle = \left\{ \begin{matrix} \varphi_{-\rho},\ \varphi_{-\rho}^2 = \varphi_{\rho^2},\ \varphi_{-\rho}^3 = \varphi_{-1} = -\operatorname{id}, \\ \varphi_{-\rho}^4 = \varphi_\rho,\ \varphi_{-\rho}^5 = \varphi_{-\rho^2},\ \varphi_{-\rho}^5 = \varphi_1 = \operatorname{id} \end{matrix} \right\}, \subseteq \operatorname{Aut}_{\mathrm{Lie}_\mathbb{C}})\mathbb{C}/_{\mathbb{Z}+\rho\mathbb{Z}}l,$$

also

$$\langle \varphi_{-\rho} \rangle = \operatorname{Aut}_{\mathrm{Lie}_\mathbb{C}})\mathbb{C}/_{\mathbb{Z}+\rho\mathbb{Z}}l,$$

und $\mathbb{C}/_{\mathbb{Z}+\rho\mathbb{Z}} \cong E(0,1)$, $g_2(\rho) = 0$, $\hat{\jmath}(\rho) = 0$.

Alle weiteren Tori mit mehr als zwei Automorphismen müssen isomorph zu $E(0,1)$ oder $E(1,0)$ sein, also auch isomorph zu $\mathbb{C}/_{\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}}$ oder $\mathbb{C}/_{\mathbb{Z}+\rho\mathbb{Z}}$ sein. $\square$

$\boxed{\Delta}$

Satz 7.3.17.

(a) $\mathcal{H}$ und die Einheitskreisscheibe

$$\Delta := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

sind biholomorph äquivalent.

(b) $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ operiert auf $\mathcal{H}$ mittels der Möbiustransformation:

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H} \\ \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tau\right) &\longmapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \end{aligned}$$

transitiv, d.h. mit genau einem Orbit. (Es ist etwa $\mathcal{H} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \cdot i$.)

(c) $\mathrm{Stab}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}(i) = \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ und $\mathcal{H} \underset{\text{bij.}}{\overset{\sim}{=\!=}} {}^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}\!\big/_{\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})}$.

Achtung. (1) Die Untergruppe

$$\begin{aligned} \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{\mathbb{R}}(2,2) \;\middle|\; \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \left|\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right| = 1 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \;\middle|\; \varphi \in [0, 2\pi) \right\} \end{aligned}$$

ist nur eine kompakte abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, aber kein Normalteiler.

(2) ${}^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}\!\big/_{\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})}$ ist damit keine (topologische) Gruppe, sondern nur ein *homogener Raum.*

Beweis.

(a) Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{H} &\longrightarrow \Delta \\ \tau &\longmapsto \frac{\tau - i}{\tau + i} \end{aligned}$$

Es ist $\tau + i \neq 0$ für $\tau \in \mathcal{H}$, und für $\tau = x + iy$ (mit $y > 0$, $x \in \mathbb{R}$) ist $\tau - i = x + i(y-1)$ und $\tau + i = x + i(y+1)$, also

$$|\mathrm{Im}(\tau - i)| = |y - 1| < \max(y, 1) < y + 1 = |y + 1| = |\mathrm{Im}(\tau + i)|$$

(mit gleichen Realteilen), also $|\tau + i| > |\tau - i|$. Damit ist φ wohldefiniert. φ ist offenbar auch analytisch und hat die (ebenfalls analytische) Umkehrabbildung

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : \Delta &\longrightarrow \mathcal{H} \\ z &\longmapsto i \cdot \frac{z+1}{1-z}. \end{aligned}$$

(b) Betrachte

$$\begin{aligned} \phi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{H} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot i = \frac{ai+b}{ci+d}, \end{aligned}$$

als Einschränkung der Gruppenwirkung auf $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \{i\}$, deren Bild also genau der Orbit von i ist. Sei nun $\tau = x + iy \in \mathcal{H}$ beliebig (also $y > 0$). Dann betrachten wir

$$A_\tau := \begin{pmatrix} \sqrt{y} & \frac{x}{\sqrt{y}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$$

Es ist dabei $\phi(A_\tau) = \frac{\sqrt{y}i + \frac{x}{\sqrt{y}}}{\frac{1}{\sqrt{y}}} = yi + x = \tau$. Das heißt, ϕ ist surjektiv, die Gruppenoperation hat also genau einen Orbit $\mathcal{H} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \cdot i$.

(c) Damit haben wir natürlich

$$\begin{aligned} \tilde{\phi} : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) / \mathrm{Stab}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}(i) &\xrightarrow[\text{bij.}]{\sim} \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \cdot i = \mathcal{H} \\ [M] &\longmapsto M \cdot i \end{aligned}$$

Wir müssen nun also noch $\mathrm{Stab}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}(i)$ bestimmen:

$$\begin{aligned} \mathrm{Stab}_{\mathrm{SL}_2(R)}(i) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, \frac{ai+b}{ci+d} = i \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, a = d, c = -b \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M_{\mathbb{R}}(2,2) \,\middle|\, a^2 + b^2 = 1 \right\} \\ &= \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Damit haben wir also wirklich

$$\mathcal{H} \overset{\sim}{\underset{\text{bij.}}{=\!=}} \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) / \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$$ □

Bemerkung. Für beliebige $\tau \in \mathcal{H}$ ist

$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}(\tau) = \{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \mid M\tau = \tau\}$$

Wählen wir jetzt ein $N \in \phi^{-1}(\tau)$, also mit $\tau = \phi(N) = Ni$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} &= \{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \mid MNi = Ni\} \\ &= \left\{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, N^{-1}MN \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})\right\} \\ &= N \cdot \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \cdot N^{-1} \end{aligned}$$

Diese Gruppe ist in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ zu $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ konjugiert, also insbesondere auch kompakt.

Fazit. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ operiert (durch Möbiustransformation) auf $\mathcal{H}$ mit *kompakten Stabilisatoren.*

Bemerkung. (Übungsaufgaben)

(1) $\phi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \twoheadrightarrow \mathcal{H}$ ist auch stetig (bezüglich der von $M_{\mathbb{R}}(2,2) \cong \mathbb{R}^4$ bzw. von $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ induzierten euklidischen Topologie), sogar reell differenzierbar.

(2) ϕ ist auch eine offene Abbildung.

FAZIT. Wir haben also das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathcal{H} \\ \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \arrow[ur, "\sim", "\tilde{\phi}"'] & \end{tikzcd}$$

mit den stetigen und offenen Abbildungen ϕ und π, wodurch dann natürlich $\tilde{\phi}$ stetig, offen und bijektiv wird. Wir haben also diese (kurze) Kette von Homöomorphismen:

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \xrightarrow[\tilde{\phi}]{\sim} \mathcal{H} \xrightarrow[\varphi]{\sim} \Delta$$

Uns interessiert ja vornehmlich der Quotient $\mathcal{H}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, wobei ja die Wirkungen ein kommutatives Diagramm bilden:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{H} \arrow[r, "\cdot"] & \mathcal{H}, \\ \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathcal{H} \arrow[u, "\cup\!\!\shortmid"] \arrow[ur, "\cdot"'] & \end{tikzcd}$$

und $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ diskrete Untergruppe von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ist.

$\boxed{\text{Satz 7.3.18.}}$ $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm I_2\}$ lässt sich (als Gruppe) kanonisch einbetten in $\mathrm{Aut}^{\mathcal{H}ol}(\mathcal{H})$.

Beweis. Betrachte den zur Gruppenwirkung gehörende Gruppenhomomorphismus:

$$\theta : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Aut}^{\mathcal{H}ol}(\mathcal{H})$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = M \longmapsto \begin{array}{l} \theta(M) : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \\ \qquad \tau \mapsto M \cdot \tau = \dfrac{a\tau + b}{c\tau + d} \end{array}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
\ker(\theta) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, \frac{a\tau + b}{c\tau + d} = \tau \ \forall \tau \in \mathcal{H} \right\} \\
&\subseteq \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, ai + b = di - c, 2ia + b = 2de - 4c \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, a = d, c = -b = 4c \right\} \\
&\subseteq \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \right\} \\
&\subseteq \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \,\middle|\, \det \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = 1 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \\
&\subseteq \ker(\theta),
\end{aligned}$$

also

$$\ker(\theta) = \{\pm I_2\}.$$

Daher ist $\tilde{\theta} : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm I_2\} \hookrightarrow \mathrm{Aut}^{\mathcal{H}ol}(\mathcal{H})$ wohldefiniert und injektiv. □

Definition 7.38. *Wir nennen die Gruppe* $\boxed{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})}$

$$\mathcal{S}_2 := \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\{\pm I_2\}$$ $\boxed{\mathcal{S}_2}$

*auch **Siegelsche Modulgruppe**.*

Bemerkung. Es kann also $\mathcal{S}_2 = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \subseteq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{Aut}^{\mathcal{H}ol}(\mathcal{H})$ aufgefasst werden als Gruppe von analytischen Automorphismen von $\mathcal{H}$.

Dabei ist

$$\mathcal{H}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cong \mathcal{H}/\mathcal{S}_2,$$

weil $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ trivial auf $\mathcal{H}$ wirkt.

Definition 7.39. *Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt* ***eigentliche Abbildung*** *(engl.* ***proper map****), falls alle Urbilder kompakter Mengen wieder kompakt sind.*

> $\boxed{\text{Satz 7.3.19.}}$ Die Abbildung $\phi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{H}$ (bekanntermaßen stetig, offen, bijektiv) ist auch eine eigentliche Abbildung.

Beweis. Sei $K \subseteq \mathcal{H}$ Kompaktum, dann betrachten wir $\phi^{-1}(\mathcal{H}) \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Es genügt zu zeigen, dass jede Folge in $\phi^{-1}(K)$ eine konvergente Teilfolge enthält.

Sei also $(M_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\phi^{-1}(K)$. Dann ist ja

$$\phi(M_\nu) = M_\nu \cdot i \in K,$$

etwa

$$\begin{aligned} M_\nu \cdot i &= x_\nu + i \cdot y_\nu \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{y_\nu} & \frac{x_\nu}{\sqrt{y_\nu}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y_\nu}} \end{pmatrix} \cdot i, \\ &= N_\nu \cdot i \end{aligned}$$

wie bereits vorher betrachtet. Außerdem enthält natürlich $(M_\nu \cdot i)_\nu$ (weil K kompakt ist) eine konvergente Teilfolge, etwa $M_{\nu_k} \xrightarrow[\nu \to \infty]{} x + iy \in K$, also $x_{\nu_k} \xrightarrow[\nu \to \infty]{} x$ und $x_{\nu_k} \xrightarrow[\nu \to \infty]{} y$.

Weiterhin ist $P_{\nu_k} := N_{\nu_k}^{-1} \cdot M_\nu \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ (nach Satz 7.3.17). Da $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ kompakt ist, hat $(P_{\nu_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine in M konvergente Teilfolge, etwa

$$P_{\nu_{k_m}} \xrightarrow[m \to \infty]{} P \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}).$$

Weil $(x_{\nu_k})_k$ und $(y_{\nu_k})_k$ konvergent waren, ist natürlich auch $(N_{\nu_{k_m}})_{m \in \mathbb{N}}$ konvergent, nämlich

$$N_{\nu_{k_m}} \xrightarrow[m \to \infty]{} \begin{pmatrix} \sqrt{y} & \frac{x}{\sqrt{y}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix} =: N$$

Damit ergibt sich

$$M_{\nu_{k_m}} \xrightarrow[m \to \infty]{} N \cdot P =: M,$$

und es ist $M \in \varphi^{-1}(K)$, weil

$$M \cdot i = N \cdot i = x + iy \in K.$$

Das heißt, auch $\varphi^{-1}(K)$ ist kompakt. $\square$

Definition 7.40. *Sei X topologischer Raum, G topologische Gruppe, $\psi : G \times X \to X$ Gruppenwirkung von G auf X. ψ heißt* ***eigentlich unstetige Wirkung*** *(engl.* ***properly discontinous action****) von G auf X, falls für je zwei Kompakta K_1 und K_2 die Menge*

$$G_{K_1,K_2} := \{\gamma \in G \mid \gamma \cdot K_1 \cap K_2 \neq \varnothing\}$$

relativ kompakt in G ist.

Bemerkung. Ist $G \subseteq \mathrm{Homöo}(X)$ eine diskrete Homöomorphismengruppe (etwa $G = \mathcal{S}_2 \subseteq \mathrm{Aut}^{\mathcal{H}ol}(\mathcal{H}) \subseteq \mathrm{Homöo}(\mathcal{H})$), so bedeutet die eigentliche Unstetigkeit der Wirkung gerade, dass G_{K_1,K_2} eine *endliche* Untergruppe der diskreten Gruppe G ist.

> $\boxed{\text{Satz 7.3.20.}}$ Die Wirkungen von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und $\mathcal{S}_2$ auf $\mathcal{H}$ sind eigentlich unstetig.

Beweis. Seien K_1 und K_2 zwei Kompakta in $\mathcal{H}$. Nach Satz 7.3.19 sind $\phi^{-1}(K_1)$ und $\phi^{-1}(K_2)$ kompakt in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, und aufgrund der Stetigkeit der Gruppenoperation (und ihrer Umkehrung) ist auch $\phi^{-1}(K_2) \cdot (\phi^{-1}(K_1))^{-1}$ kompakt. Nun ist

$$\begin{aligned}
(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))_{K_1,K_2} &= \{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid M \cdot K_1 \cap K_2 \neq \varnothing\} \\
&= \{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid \exists \tau_1 \in K_1, \exists \tau_2 \in K_2 : M \cdot \tau_1 = \tau_2\} \\
&\subseteq \left\{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \,\middle|\, \exists N_1 \in \phi^{-1}(K_1) : M \cdot N_1 \in \phi^{-1}(K_2)\right\} \\
&\subseteq \left\{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \,\middle|\, M \in \phi^{-1}(K_2) \cdot (\phi^{-1}(K_1))^{-1}\right\} \\
&= (\phi^{-1}(K_2) \cdot (\phi^{-1}(K_1))^{-1}) \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}),
\end{aligned}$$

und das ist als Schnittmenge einer kompakten mit einer diskreten Menge sogar endlich (jedenfalls kompakt). □

Bemerkung. Wir haben sogar gezeigt, dass $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ eigentlich unstetig auf $\mathcal{H}$ wirkt.

> $\boxed{\text{Lemma.}}$ Ist X lokal kompakt (also insbesondere Hausdorff-Raum), $G \subseteq \mathrm{Homöo}(X)$ diskrete Untergruppe und die natürliche Wirkung $G \times X \to X$ eine eigentlich unstetige Wirkung. Dann ist der Orbitraum X/G mit der induzierten Topologie wieder ein Hausdorffraum.

Beweis. Übungsaufgabe. □

> $\boxed{\text{Korollar.}}$ $\mathcal{H}/\mathcal{S}$ ist ein Hausdorff-Raum, und damit auch $\mathcal{H}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

$\boxed{\text{FAZIT.}}$ Wir haben jetzt also

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H} \arrow[r, two heads, "\hat{\jmath}"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \\ \mathcal{H}/\mathcal{S}_2 \arrow[ur, "\sim", "\jmath"'] & \end{tikzcd}$$

mit

$$\hat{\jmath}(\tau) = \jmath([\tau]) = \frac{g_2(\tau)^3}{g_2(\tau)^3 - 27 g_3(\tau)^2}$$

Fragen.

(1) Ist $\hat{\jmath}$ holomorph?

(2) Ist $\jmath$ Homöomorphismus, vielleicht sogar biholomorph, falls $\mathcal{H}/\mathcal{S}_2$ eine komplexe Mannigfaltigkeit wird?

Strategie zur Beantwortung:

(a) Überprüfe die Eisensteinreihen g_k auf Analysizität.

(b) Ist $\hat{\jmath}$ holomorph (und nicht lokal konstant), so auch offen, damit ist auch $\jmath$ offen.

(c) Bijektive stetige offene Abbildungen sind Homöomorphismen.

(d) Falls $\mathcal{H}/\mathcal{S}_2$ komplexe Mannigfaltigkeit ist und π holomorph, dann ist $\jmath : \mathcal{H}/\mathcal{S}_2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ sogar biholomorph.

Wir betrachten nun $\mathcal{H}/\mathcal{S}_2 \xrightarrow[\jmath]{\sim} \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$, mit $\mathcal{S}_2 = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\{\pm I_2\}$, als Modulraum der komplexen Tori.

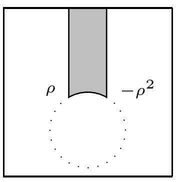
Frage. Gibt es auch *Normalformen* für komplexe Tori, wie es diese für die Weierstraß-Kurven gab?

Gibt es etwa ein $D \subseteq \mathcal{H}$, D offener Bereich, derart, dass im Diagramm

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d, "i_1"', "\cap"] & \mathcal{H} \arrow[d, two heads, "\hat{\jmath}"] \\ \overline{D}^{\mathbb{C}} \arrow[ur, "i_1"', "\overset{i_1}{\subseteq}"] & \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \end{tikzcd}$$

$\hat{\jmath} \circ i_1$ zumindest injektiv und $\hat{\jmath} \circ i_2$ surjektiv ist?

Bemerkung. (Übungsaufgaben)



$\overline{D}$

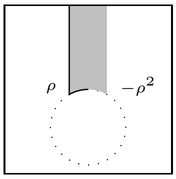
(1) (a) Die Menge

$$D := \left\{ z \in \mathcal{H} \mid -\frac{1}{2} < \mathrm{Re}(z) < \frac{1}{2}, |z| > 1 \right\}$$

ist ein solcher offener Bereich.

(b) Zwei Elemente $(\tau_1, \tau_2) \in \overline{D}^2$ mit $\tau_1 \neq \tau_2$ sind genau dann $\mathcal{S}_2$-äquivalent, falls
  (i) $\operatorname{Re}(\tau_i) = \pm\frac{1}{2}$ und $\tau_2 = \tau_1 \pm 1$, oder
  (ii) $|\tau_i| = 1$ und $\tau_2 = -\frac{1}{\tau_2}$.

  Das heißt, τ_i liegen auf dem Rand ∂D und $\operatorname{Re}(\tau_1) = -\operatorname{Re}(\tau_2)$.



(c) $D \cup \left\{z \in \mathcal{H} \mid \operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{2}, |z| \geq 1\right\} \cup \left\{z \in \mathcal{H} \mid |z| = 1, -\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re}(z) \leq 0\right\}$ bildet ein vollständiges Repräsentantensystem für die Isomorphie-Klassen komplexer Tori.

(2) Seien $T := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und $S := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Dann wird $\mathcal{S}_2$ von $\overline{T}$ und $\overline{S}$ erzeugt, mit den Relationen $\overline{T}^2 = (\overline{T} \cdot \overline{S})^3 = ein\mathcal{S}_2$.

7.4 (Titel fehlt)

Segre-Einbettungen

Wir wissen bisher:

- projektive Varietäten sind komplett, die Umkehrung gilt i.a. nicht.
- Produkte kompletter Varietäten sind komplett.

Frage. Sind Produkte projektiver Varietäten wieder projektiv, ist also etwa $\mathbb{P}^n_k \times \mathbb{P}^m_k$ eine projektive Varietät?

Dies führt uns zur Konstruktion der Segre-Abbildung[9].

Definition 7.41. *Wir schreiben im folgenden $[a_i]_i := (a_0 : \ldots : a_n)$ sowie $[b_j]_j := (b_0 : \ldots : b_m)$ für die Elemente des $\mathbb{P}^n_k$ bzw. $\mathbb{P}^m_k$. Die Abbildung* $\boxed{[a_i]_i}$ $\boxed{[b_i]_i}$ $\boxed{\Sigma}$

$$\begin{aligned} \Sigma : \mathbb{P}^n_k \times \mathbb{P}^m_k &\longrightarrow \mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1} = \mathbb{P}^{mn+m+n} \\ ([a_i]_i, [b_j]_j) &\longmapsto [a_i \cdot b_j]_{i,j} = (a_0b_0 : a_0b_1 : \ldots : a_0b_m : a_1 : b_0 : \ldots : a_nb_m) \end{aligned}$$

*heißt **Segre-Abbildung**.*

Bemerkung. Σ ist als Mengenabbildung wohldefiniert (repräsentantenunabhängig, da bilinear auf $\mathbb{A}^{n+1} \times \mathbb{A}^{m+1}$).

[9]Benannt nach **Corrado Segre**, 1863–1924, italienischer Geometer, vor allem in Turin tätig, benannt, nicht nach dem französisch-spanischen Fluss Segre, der südfranzösischen Stadt Segré, dem Technetium-Entdecker Emilio Segrè oder dem Diplomaten Vittorio Dan Segre.

Satz 7.4.1. *(Morphismuseigenschaften und Bild der Segre-Abbildung)* Sei $k = \overline{k}$, $n \geq 1$, $m \geq 1$, $\sigma : \mathbb{P}^n_k \times \mathbb{P}^m_k \to \mathbb{P}^{nm+m+n}_k$ die Segre-Abbildung.

(1) Bezeichnen wir die projektiven Koordinaten in $\mathbb{P}^{mn+n+m}_k$ mit $[Z_{ij}]_{ij} = (Z_{00} : \ldots : \mathbb{Z}_{nm})$, dann ist

$$\mathrm{im}(\Sigma) = V_+ \left(\left\{ Z_{ij} \cdot Z_{kl} - Z_{ij} \cdot Z_{kj} \;\middle|\; {}^{i,k \in \{1,\cdots,n\},}_{j,l \in \{1,\cdots,m\}} \right\} \right) =: V_+$$

(2) $\Sigma : \mathbb{P}^n_k \times \mathbb{P}^m_k \to V_+$ ist Morphismus der Varietäten und sogar Isomorphismus.

Korollar. $\Sigma : \mathbb{P}^n_k \times \mathbb{P}^m_k \to \mathbb{P}^{mn+m+m}$ ist eine abgeschlossene Einbettung.

Korollar.

(1) $\mathbb{P}^n_k \times \mathbb{P}^m_k$ ist eine projektive Varietät.

(2) Allgemeiner ist auch $\mathbb{P}^{m_1} \times \ldots \times \mathbb{P}^{m_s}$ projektive Varietät.

(3) Sind $X \subseteq \mathbb{P}^n_k$ und $Y \subseteq \mathbb{P}^m_k$ abgeschlossene Untervarietäten, so ist auch $X \times Y \cong \Sigma(X \times Y)$ projektive Varietät.

(4) Sind $X_1, \cdots, X_s$ projektive Varietäten, so auch $X_1 \times \ldots \times X_s$.

Beweis von Satz 7.4.1.

(1) Es ist ja offenbar $(a_j \cdot b_j) \cdot (a_k \cdot b_l) = (a_i \cdot b_l) \cdot (a_k \cdot b_j)$, und daher ist

$$\Sigma([a_i]_i, [b_j]_j) \in V_+(Z_{ij}Z_{kl} - Z_{il}Z_{kj}) \quad \text{für alle } i, j, k, l,$$

also auch

$$\Sigma([a_i]_i, [b_j]_j) \in V_+ = \bigcap_{i,j,k,l} V_+(Z_{ij}Z_{kl} - Z_{il}Z_{kj}),$$

d.h. $\mathrm{im}(\Sigma) \subseteq V_+$. Definieren wir nun eine Umkehrabbildung:

$$\begin{aligned} \sigma : V_+ &\longrightarrow \mathbb{P}^n_k \times \mathbb{P}^m_k \\ [z_{pq}]_{p,q} &\longmapsto ([z_{pj}]_p, [z_{iq}]_q) \\ (z_{i,j} \neq 0) & \end{aligned}$$

σ ist wohldefiniert (es ist ja immer $z_{ij} \neq 0$, und unabhängig von der Wahl von i, j mit $z_{ij} \neq 0$, da $z_{pj} \cdot z_{kl} = z_{pl} \cdot z_{kj}$ (für $z_{kl} \neq 0$), also $[z_{pj}]_p = [z_{pl}]_p$, analog für q). Nun ist

$$\begin{aligned}\Sigma\circ\sigma([z_{pq}]_{p,q}) &= \Sigma([z_{pj}]_p,[z_{iq}]_q)\\ &= [z_{pj}\cdot z_{iq}]_{p,q}\\ &= [z_{pq}\cdot z_{ij}]_{p,q}\\ &= [z_{pq}]_{p,q},\end{aligned}$$

und umgekehrt (mit $a_i \neq 0$, $b_j \neq 0$)

$$\begin{aligned}\sigma\circ\Sigma([a_p]_p,[b_q]_q) &= \sigma([a_p\cdot b_q]_{p,q})\\ &= ([a_p\cdot b_j]_p,[a_i\cdot b_q]_q)\\ &= ([a_p]_p,[b_q]_q),\end{aligned}$$

es ist also $\Sigma\circ\sigma = \mathrm{id}_{V_+}$ und $\sigma\circ\Sigma = \mathrm{id}_{\mathbb{P}^n_k\times\mathbb{P}^m_k}$. Σ und σ sind also mengentheoretisch zueinander inverse Bijektionen zwischen V_+ und $\mathbb{P}^n_k\times\mathbb{P}^m_k$, insbesondere ist $\mathrm{im}(\Sigma) = V_+$.

(2) Es bleibt zu zeigen, dass Σ und σ Varietäten-Morphismen sind. Dazu reicht es, diese Abbildungen jeweils lokal zu betrachten.

(a) Betrachte also

$$\Sigma : D_+(X_i)\times D_+(Y_i) \xrightarrow{\sim} D_+(Z_{ij})\cap V_+$$

und den Algebra-Morphismus (zwischen Polynomalgebren)

$$\rho : A := k\left[\frac{Z_{00}}{Z_{ij}},\dots,\underset{p,q}{\frac{Z_{pq}}{Z_{ij}}},\dots,\frac{Z_{nm}}{Z_{ij}}\right] \longrightarrow k\left[\frac{X_0}{X_i},\dots,\frac{X_n}{X_i}\right]\otimes k\left[\frac{Y_0}{Y_j},\dots,\frac{Y_m}{Y_j}\right] =: B$$

$$\frac{Z_{pq}}{Z_{ij}} \longmapsto \frac{X_p}{X_i}\otimes\frac{Y_q}{Y_j} \qquad \text{(und polynomiale Fortsetzung)}$$

Wir erhalten (wie üblich) das kommutative Diagramm aus $\underline{\mathrm{Var}}_k^{\mathrm{aff}}$-Morphismen:

$$\begin{tikzcd} D_+(X_i)\times D_+(X_j) \arrow[r, "\hat{\rho}"] \arrow[d, "\chi_B"', "\wr"] & D_+(Z_{ij}) \arrow[d, "\chi_A", "\wr"'] \\ \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(B,k) \arrow[r, "\mathrm{hom}(\rho)"'] & \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(A,k) \end{tikzcd}$$

Dabei ist $\hat{\rho} = \Sigma$, also Σ (lokal und damit auch global) Morphismus.

(b) Geht analog.

Es sind also σ und Σ zueinander inverse Varietäten-Morphismen, damit ist Σ ein Varietäten-Isomorphismus.

□

Bemerkung. Es ist ja

$$Z_{ij}Z_{kl} - Z_{il}Z_{kj} = \det\begin{pmatrix} Z_{ij} & Z_{il} \\ Z_{kj} & Z_{kl} \end{pmatrix} = M^{i,k}_{j,l}((Z_{pq})_{p,q}),$$

also ein 2-Minor der Koordinatenmatrix $(Z_{pq})_{p,q}$ des $\mathbb{P}_k^{(m+1)(n+1)-1}$. Daher:

(1) V_+ ist die gemeinsame Nullstellenmenge aller 2-Minoren von $(Z_{pq})_{p,q}$.

(2) V_+ ist eine Determinantenvarietät, d.h. $\mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m$ ist isomorph zu einer Determinantenvarietät.

(3) $\mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m$ ist isomorph zu einem Durchschnitt von Quadriken in $\mathbb{P}^{nm+m+n}$.

Beispiel 7.4.1. Betrachten wir den Fall $m = n = 1$, also die Segre-Fläche $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$. Wir haben dann

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1 &\longrightarrow \mathbb{P}_k^3 \\ ((a_0 : a_1), (b_0 : b_1)) &\longmapsto (a_0b_0 : a_0b_1 : a_1b_0 : a_1b_1) \end{aligned}$$

und die Gleichungen für $V_+ \subset \mathbb{P}_k^{2\cdot 2-1}$ sind:

$$\begin{array}{llll} Z_{00}Z_{00} = Z_{00}Z_{00} & Z_{10}Z_{00} = Z_{10}Z_{00} & Z_{01}Z_{00} = Z_{00}Z_{01} & Z_{11}Z_{00} = Z_{10}Z_{01} \\ Z_{00}Z_{01} = Z_{01}Z_{00} & Z_{10}Z_{01} = Z_{11}Z_{00} & Z_{01}Z_{01} = Z_{01}Z_{01} & Z_{11}Z_{01} = Z_{11}Z_{01} \\ Z_{00}Z_{10} = Z_{00}Z_{10} & Z_{10}Z_{10} = Z_{10}Z_{10} & Z_{01}Z_{10} = Z_{00}Z_{11} & Z_{11}Z_{10} = Z_{10}Z_{11} \\ Z_{00}Z_{11} = Z_{01}Z_{10} & Z_{10}Z_{11} = Z_{11}Z_{10} & Z_{01}Z_{11} = Z_{01}Z_{11} & Z_{11}Z_{11} = Z_{11}Z_{11} \end{array}$$

Die Mehrzahl dieser Gleichungen sind trivial (d.h. das entsprechende Polynom ist das Nullpolynom), übrig bleibt nur (4 mal auftauchend) $Z_{00}Z_{11} = Z_{01}Z_{10}$. Wir haben also

$$\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1 \cong V_+(Z_{00}Z_{11} - Z_{01}Z_{10}) = V_+(W_0W_4 - W_2W_3) \subset \mathbb{P}_k^3.$$

Dies ist eine Quadrik vom Rang 4, mit der Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} & & & -\frac{1}{2} \\ & & -\frac{1}{2} & \\ & -\frac{1}{2} & & \\ -\frac{1}{2} & & & \end{pmatrix}.$$

Grassmann-Varietäten und Plücker-Einbettungen

$\boxed{\mathcal{G}(r, \mathfrak{V})}$ **Definition 7.42.** *Seien $k = \overline{k}$, $\vec{V}$ ein k-Vektorraum mit $\dim_k \mathfrak{V} = n \in \mathbb{N}$, sowie $r \in \{0, \cdots, n\}$. Dann heißt die Menge*

$$\mathcal{G}(r, \mathfrak{V}) := \{\mathfrak{W} \in \mathfrak{P}(\mathfrak{V}) \mid \mathfrak{W} \textit{ ist } k\textit{-UVR}, \dim_k(\mathfrak{W}) = r\}$$

*die r-**Grassmann-Menge von** $\mathfrak{V}$.*

Definition 7.43. *Für $0 \le r \le n \in \mathbb{N}$ und $k = \overline{k}$ bezeichne* $\boxed{\mathcal{G}(r,n)}$

$$\mathcal{G}(r,n) := \mathcal{G}(r,k^n).$$

Beispiel 7.4.2.

$r = n$: Es ist $\mathcal{G}(n,\mathfrak{V}) = \{\mathfrak{V}\}$ einelementig (uninteressant).

$r = 0$: $\mathcal{G}(0,\mathfrak{V}) = \{(0)\}$, ebenso einelementig.

$r = 1$: $\mathcal{G}(1,\mathfrak{V}) = \mathbb{P}_k(\mathfrak{V}) = {}^{\mathfrak{V}\setminus\{0\}}\!/_{k^*} \cong \mathbb{P}_k^{n-1}$

$r = n-1$: Es gibt die kanonische Bijektion

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(n-1,\mathfrak{V}) &\xrightarrow{\sim} \mathcal{G}(1,V^*) \\ \mathfrak{W} &\longmapsto \mathfrak{W}^0 = \{f \in \mathfrak{V}^* \mid f|_{\mathfrak{W}} = 0\}, \end{aligned}$$

die Annullator-Abbildung.

Ziel. $\mathcal{G}(r,\mathfrak{V})$ ist (auch für $r \in \{2,\cdots,n-2\}$) bijektiv äquivalent zu einer abgeschlossenen Teilmenge von $\mathbb{P}_k^{\binom{n}{r}-1}$, kann also als (irreduzible) projektive Varietät angesehen werden, mit Dimension $r(n-r)$.

Um dieses Ziel zu erreichen, verwenden wir die folgende Konstruktion.

Sei $U = (\mathfrak{a}_1,\cdots,\mathfrak{a}_n)$ eine (fixierte) Basis von $\mathfrak{V}$. Sei $\mathfrak{W} \in \mathcal{G}(r,\mathfrak{V})$ und $V = (\mathfrak{b}_1,\cdots,\mathfrak{b}_r)$ eine Basis von $\mathfrak{W}$. Dann hat man (für $i \in \{1,\cdots,r\}$)

$$\mathfrak{b}_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\mathfrak{a}_i,$$

mit einer Matrix $B = B_{U,V} = (\alpha_{ij})_{i,j} \in M_k(r,n)$, also $B = B_V^U(\mathrm{incl}_{\mathfrak{W}}^{\mathfrak{V}})^t$.

Dabei ist $\mathrm{Rg}_k(B) = r$, d.h. $B \in M_k^r(r,n) = \{A \in M_k(r,n) \mid \mathrm{Rg}_k\, A = r\}$. Das heißt, es existiert mindestens ein nicht verschwindender r-Minor von B, d.h. es gibt $i_1,\cdots,i_r \in \{1,\cdots,n\}$ mit $M^{i_1,\cdots,i_r}_{1,\cdots,r}(B) \neq 0$. Dies motiviert uns zu folgender Definition. $\boxed{M_k^r(s,n)}$

Definition 7.44. *Für $\mathfrak{W} \in \mathcal{G}(r,\mathfrak{V})$ mit basisdarstellender Matrix B wie oben sei* $\boxed{\gamma_U}$

$$\gamma_U(\mathfrak{W}) := \Big(M^{1,\cdots,r}_{1,\cdots,r}(B) : \ldots : \underbrace{M^{i_1,\cdots,i_r}_{1,\cdots,r}(B)}_{i_1,\cdots,i_r} : \ldots : M^{n-r+1,\cdots,n}_{1,\cdots,r}(B)\Big) \in \mathbb{P}_k^{\binom{n}{r}-1}.$$

$\boxed{\text{RECHTFERTIGUNG.}}$ $\gamma_U(\mathfrak{W})$ hängt nur von $\mathfrak{W}$ und der Wahl der Basis U von $\mathfrak{V}$ ab, nicht von der Wahl der Basis V von $\mathfrak{W}$.

Beweis. Sei $V' = (\mathfrak{b}'_1, \cdots, \mathfrak{b}'_r)$ andere Basis von $\mathfrak{W}$, B' die entsprechende (transponierte) Darstellungsmatrix, also

$$B' = (B^U_{V'}(\mathfrak{W} \underset{\text{incl}}{\hookrightarrow} V))^t.$$

Dabei hat man

$$B^U_{V'}(\text{incl}) = B^U_V(\text{incl}) \circ B'^V_V(\text{id}_{\mathfrak{W}}),$$

also

$$B' = (B^V_{V'})^t \circ B$$

Damit ist dann für $i_1, \cdots, i_r \in \{1, \cdots, n\}$:

$$M^{j_1,\cdots,j_r}_{1,\cdots,r}(B') = \det(B^V_{V'}) \cdot M^{j_1,\cdots,j_r}_{1,\cdots,r}(B),$$

und dieser gemeinsame Faktor $\det(B^V_{V'}) \in k^*$ verschwindet beim Übergang in den projektiven Raum:

$$(\ldots : M^{i_1,\cdots,i_r}_{1,\cdots,r}(B') : \ldots) = (\ldots : M^{i_1,\cdots,i_r}_{1,\cdots,r}(B) : \ldots)$$

$\square$

$\boxed{\gamma}$ **Definition 7.45.** *Für $\mathfrak{W} \in \mathcal{G}(r, \mathfrak{V})$ mit Basis $(\mathfrak{b}_1, \cdots, \mathfrak{b}_r)$ gibt es ja immer $\mathfrak{b}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{b}_r \in \bigwedge^r \mathfrak{V}$. Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \gamma : \mathcal{G}(r, \mathfrak{V}) &\longrightarrow \mathbb{P}_k(\bigwedge^r \mathfrak{V}) \\ \mathfrak{W} &\longmapsto [\mathfrak{b}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{b}_r]_{k^*} \end{aligned}$$

*heißt dann die **Grassmann-Abbildung** von $\mathfrak{V}$ für r.*

Bemerkung. Für eine Basis $U = (\mathfrak{a}_1, \ldots \mathfrak{a}_n)$ von $\mathfrak{V}$ haben wir dann die *Basiswahlabbildung*

$$\begin{aligned} \chi_U : \mathbb{P}_k^{\binom{n}{r}-1} &\xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_k(\bigwedge^r \mathfrak{V}), \\ (\ldots : m_{i_1,\cdots,i_r} : \ldots) &\longmapsto \left[\sum_{(i_1<\ldots<i_r)} m_{i_1,\cdots,i_r} \mathfrak{a}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_{i_r} \right]_{k^*} \end{aligned}$$

und dabei ist $\chi_U \circ \gamma_U = \gamma$.

> $\boxed{\text{Lemma.}}$ Die Grassmann-Abbildung $\gamma : \mathcal{G}(r, V) \to \mathbb{P}_k(\bigwedge^r \mathfrak{V})$ ist injektiv.

Beweis. Sei $\gamma(\mathfrak{W}_1) = \gamma(\mathfrak{W}_2)$ für $\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2 \in \mathcal{G}(r, \mathfrak{V})$, mit Basen $V_1 = (\mathfrak{b}_1, \cdots, \mathfrak{b}_r)$ und $V_2 = (\mathfrak{b}'_1, \cdots, \mathfrak{b}'_r)$. Das heißt, wir haben

$$[\mathfrak{b}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{b}_r]_{k^*} = [\mathfrak{b}'_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{b}'_r]_{k^*},$$

also existiert ein $\lambda \in k^*$, so dass

$$\mathfrak{b}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{b}_r = \lambda \cdot \mathfrak{b}'_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{b}'_r.$$

Damit gilt dann für $i \in \{1, \cdots, r\}$:

$$\mathfrak{b}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{b}_r \wedge \mathfrak{b}'_i = \lambda \cdot \mathfrak{b}'_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{b}'_r \wedge b'_i = 0,$$

d.h. $\{\mathfrak{b}_1, \cdots, \mathfrak{b}_r, \mathfrak{b}'_i\}$ ist linear abhängiges System, bei dem die ersten r Vektoren linear unabhängig sind. Damit ist

$$\mathfrak{b}'_i \in \operatorname{span}(\mathfrak{b}_1, \cdots, \mathfrak{b}_r) = \mathfrak{W}.$$

Da dies für alle i gilt, ist $\mathfrak{W}' \subseteq \mathfrak{W}$, und aus Dimensionsgründen (oder weil man dies auch mit verdrehten Rollen spielen kann) dann $\mathfrak{W}' = \mathfrak{W}$. ☐

Definition 7.46. *Seien $n \in \mathbb{N}$ und $r \in \{1, \cdots, n\}$. Dann bezeichne* $\boxed{\Xi_r^n}$

$$\Xi_r^n := \{(i_1, \cdots, i_n) \in \mathbb{N}^n \mid 1 \le i_1 < \ldots < i_r \le n\}.$$

Ξ_r^n diene uns (mit der lexikographischen Sortierung) als Indizierung für die Koordinaten des $\mathbb{A}_k^{\binom{n}{r}}$ sowie $\mathbb{P}_k^{\binom{n}{r}-1}$.

(Offenbar ist $|\Xi_r^n| = \binom{n}{r}$.)

Definition 7.47. *Sei $r \in \{2, \cdots, n-1\}$, $n = \dim \mathfrak{V} \in \mathbb{N}$. Seien $I \in \Xi_{r-1}^n$, $K \in \Xi_{r+1}^n$. (Es gibt $\binom{n}{r-1} \cdot \binom{n}{r+1}$ viele Paare solcher Tupel.) Dann heißt das Polynom*

$$R_{IK} := \sum_{\nu=1}^{r+1} (-1)^\nu \cdot Z_{i_1 \ldots i_{r-1} k_\nu} \cdot Z_{k_1 \ldots \cancel{k_\nu} \ldots k_{r+1}} \in k[\cdots, Z_{j_1, \cdots, j_r}, \ldots]$$

*die **Plücker-Relation** zu I und K. (Dabei bezeichne*

$$Z_{i_1 \ldots i_{r-1} k_\nu} := \begin{cases} (-1)^{r-1-\mu} Z_{i_1, \cdots, i_\mu, k_\nu, i_\mu+1, \cdots, i_{r-1}} & i_\mu < k_\nu < i_{\mu+1} \\ (-1)^{r-1} Z_{k_\nu, i_1, \cdots, i_n} & k_\nu < i_1 \\ 0 & k_\nu \in \{i_1, \cdots, i_{r-1}\} \end{cases}$$

falls nicht $i_1 < \ldots < i_{r-1} < k_\nu$.)

Die Menge aller Plücker-Relationen (zu vorgegebenen n und r) bezeichnen wir mit $\mathrm{PR} \subset k[\cdots, Z_{j_1, \cdots, j_r}, \ldots]$ *, mit der entsprechenden projektiven Varietät* $\boxed{\mathrm{PR}}$

$$V_+(\mathrm{PR}) = V_+(\{R_{IK} \mid I \in \Xi_{r-1}^n, K \in \Xi_{r+1}^n\}) \in \operatorname{Abg}(\mathbb{P}_k^{\binom{n}{r}-1})$$

> $\boxed{\text{Lemma.}}$ Für eine Basis U von $\mathfrak{V}$ und die (in Koordinaten geschriebene) Grassmann-Abbildung
>
> $$\begin{aligned}\gamma_U : \mathcal{G}(r, \mathfrak{V}) &\hookrightarrow \mathbb{P}_k^{\binom{n}{r}-1} \\ \mathrm{Zeil}_k^U(B) &\longmapsto (\ldots : M_{1,\cdots,r}^{i_1,\cdots,i_r}(B) : \ldots)\end{aligned}$$
>
> gilt $\mathrm{im}(\gamma_U) \subseteq V_+(\mathrm{PR})$.

Beweis. Sei $\mathfrak{W} \in \mathcal{G}(r, \mathfrak{V})$, mit der assozierten Matrix $B \in M_k(r, n)$ (nach Basiswahl), $B = (a_{ij})_{i,j}$. Für (I, K) haben wir dann

$$R_{IK}(B) = \sum_{\nu=1}^{r+1} (-1)^\nu M_{1,\cdots,r}^{i_1,\cdots,i_{r-1},k_\nu}(B) \cdot M_{i,\cdots,r}^{k_1,\cdots,\cancel{k_\nu},\cdots,k_{r+1}}(B)$$

Wir wollen zeigen, dass jeweils $R_{IK} = 0$ ist. Dazu betrachten wir zunächst

$$M_{1,\cdots,r}^{i_1,\cdots,i_{r-1},k_\nu} = \det \begin{pmatrix} a_{1i_1} & \ldots & a_{1i_{r-1}} & a_{1k_\nu} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{ri_1} & \ldots & a_{ri_{r-1}} & a_{rk_\nu} \end{pmatrix}$$

Eine Laplace-Entwicklung nach der letzten Spalte ergibt

$$M_{1,\cdots,r}^{i_1,\cdots,i_{r-1},k_\nu} = \sum_{j=1}^{r} (-1)^{j+r} a_{jk_\nu} \cdot M_{1,\cdots,\cancel{j},\cdots,r}^{i_1,\cdots,i_{r-1}}(B)$$

Insgesamt haben wir dann

$$\begin{aligned}
R_{IK}(B) &= \sum_{\nu=1}^{r+1} (-1)^\nu \left(\sum_{j=1}^{r} (-1)^{j+r} a_{jk_\nu} \cdot M_{1,\cdots,\cancel{j},\cdots,r}^{i_1,\cdots,i_{r-1}}(B) \right) \cdot M_{i,\cdots,r}^{k_1,\cdots,\cancel{k_\nu},\cdots,k_{r+1}}(B) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \left((-1)^j \cdot M_{i,\cdots,\cancel{j},\cdots,r}^{i_1,\cdots,i_{r-1}}(B) \cdot \left(\sum_{\nu=0}^{r+1} (-1)^{\nu+r} \cdot a_{jk_\nu} \cdot M_{1,\cdots,r}^{k_1\cdots,\cancel{k_\nu},\cdots,k_{r+1}}(B) \right) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \left((-1)^j \cdot M_{i,\cdots,\cancel{j},\cdots,r}^{i_1,\cdots,i_{r-1}}(B) \cdot M_{1,\cdots,r,r+1}^{k_1,\cdots,k_{r+1}} \left(B \left| \begin{matrix} a_{1k_\nu} \\ \vdots \\ a_{rk_\nu} \end{matrix} \right. \right) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \left((-1)^j \cdot M_{i,\cdots,\cancel{j},\cdots,r}^{i_1,\cdots,i_{r-1}}(B) \cdot 0 \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Bemerkung. Wir haben eigentlich gezeigt: Ist $B \in M_k(r, n)$ mit $r \leq n - 1$, so ist $R_{IK}(B) = 0$ für alle (I, K).

$\boxed{\text{Satz 7.4.2.}}$ *(Satz von der Existenz der Plücker-Einbettung)*
Die (koordinatenbehaftete) Grassman-Abbildung

$$\gamma_U : \mathcal{G}(r, \mathfrak{V}) \hookrightarrow V_+(\mathrm{PR})$$

ist auch surjektiv, also eine Bijektion. Über diese Bijektion erhält $\mathcal{G}(r, \mathfrak{V})$ die Struktur einer projektiven Varietät.

Beweis. Betrachte das Diagramm

$$\begin{tikzcd} M_k^r(r,n) \arrow[r, "\hat{\gamma}"] \arrow[d, "\mathrm{Zeil}_k^U"'] & V_+(\mathrm{PR}), \\ \mathcal{G}(r, \mathfrak{V}) \arrow[ur, "\gamma_U"'] & \end{tikzcd}$$

nach Konstruktion kommutativ. Es genügt zu zeigen, dass

$$\begin{aligned} \hat{\gamma} : M_k^r(r,n) &\longrightarrow V_+(\mathrm{PR}) \\ B &\longmapsto (\ldots : M_{1,\cdots,r}^{i_1,\cdots,i_r}(B) : \ldots) \end{aligned}$$

surjektiv ist, dann ist auch γ_U surjektiv.

Sei also $[P_{i_1,\cdots,i_r}] := (\ldots : P_{i_1,\cdots,i_r} : \ldots) \in V_+(\mathrm{PR})$, d.h. $P_{IK}([P_{i_1,\cdots,i_r}]) = 0$ für alle (I,K). Wir müssen eine Matrix $A \in M_k^r(r,n)$ konstruieren mit $\hat{\gamma}(A) = [P_{i_1,\cdots,i_r}]$, also

$$(\ldots : M_{1,\cdots,r}^{i_1,\cdots,r}(A) : \ldots) = (\ldots : p_{i_1 \ldots i_r} : \ldots),$$

d.h. es gibt ein $\mu \in k^*$ mit $M_{1,\cdots,r}^{i_1,\cdots,i_r} = \mu p_{i_1,\cdots,i_r}$ für alle $i_1 < \ldots < i_r$. (Wir werden zeigen, dass dies auch mit $\mu = 1$ geht.)

Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $p_{1,\cdots,r} = 1$. Unser Ansatz ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1(r+1)} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{r(r+1)} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix}$$

und $M_{1,\cdots,r}^{i_1,\cdots,i_r}(A) = p_{i_1 \ldots i_r}$ (für alle $i_1, \cdots, i_r$). Für $i \in \{1, \cdots, r\}$ und $j \in \{r+1, \cdots, n\}$ ist dann

$$\begin{aligned} p_{1,\cdots,r}^{1,\cdots,\cancel{i},\cdots,r,j} &= M_{1,\cdots,r}^{1,\cdots,\cancel{i},\cdots,r,j} \\ &= \det\left(e_1^t, \cdots, \cancel{e_i^t}, \cdots, e_r^t, \sum_{\nu=1}^{r} a_{\nu j} \cdot e_\nu^t\right) \\ &= a_{ij} \cdot \det(e_1^t, \cdots, \cancel{e_i^t}, \cdots, e_r^t, e_i^t) \\ &= a_{ij} \cdot (-1)^{r-i} \end{aligned}$$

Dadurch sind also schon alle Matrixeinträge festgelegt, und die so erhaltene Matrix A erfüllt zumindest

$$M_{1,\cdots,r}^{j_1\cdots,j_r}(A) = p_{j_1,\cdots,j_r}$$

für alle $(j_1,\cdots,j_r)$ mit $|\{j_1,\cdots,j_r\}\cap\{1,\cdots,r\}| \leq r-1$.

Wir führen nun eine Induktion über m durch:

Induktionsbehauptung: Ist $(j_1,\cdots,j_r) \in \Xi_r^n$ mit $|\{j_1,\cdots,j_r\}\cap\{1,\cdots,r\}| \leq r-m$, so ist $M_{1,\cdots,r}^{j_1,\cdots,j_r}(A) = p_{j_1\cdots j_r}$.

Induktionsanfang: ... ist mit $m=1$ offenbar gegeben.

Induktionsschritt: Sei $m \geq 2$, und $(j_1,\cdots,j_r) \in \Xi_r^n$ mit $|\{j_1,\cdots,j_r\}\cap\{1,\cdots,r\}| = r-m$. Dann wählen wir ein $\nu \in \{1,\cdots,r\}$, so dass $j_\nu \notin \{1,\cdots,r\}$. Betrachte nun die Tupel $I := (j_1,\cdots,\cancel{j_\nu},\cdots,j_r)$ und $K = (1,\cdots,r,j_\nu)$. Dann ist (weil $[p_{i_1,\cdots,i_r}]$ die Plücker-Relationen erfüllt)

$$\begin{aligned} 0 &= R_{IK}([p_{i_1,\cdots,i_r}]) \\ &= \sum_{\mu=1}^{r} (-1)^\mu \cdot p_{j_1\cdots\cancel{j_\nu}\cdots j_r \mu} \cdot p_{1\cdots\cancel{\mu}\cdots r j_\nu} + (-1)^{\nu+1} \cdot p_{j_1\cdots\cancel{j_\nu}\cdots j_r j_\nu} \cdot \underbrace{p_{1\cdots r}}_{=1} \end{aligned}$$

Damit ist

$$p_{j_1\cdots\cancel{j_\nu}\cdots j_r j_\nu} = (-1)^\nu \cdot \sum_{\mu=1}^{r} (-1)^\mu \cdot p_{j_1\cdots\cancel{j_\nu}\cdots j_r\mu} \cdot p_{1\cdots\cancel{\mu}\cdots r j_\nu}$$

und mit der Induktionsvoraussetzung

$$= (-1)^\nu \cdot \sum_{\mu=1}^{r} (-1)^\mu M_{1,\cdots,r}^{j_1,\cdots\cancel{j_\nu}\cdots j_r\mu}(A) \cdot M_{1,\cdots,r}^{1,\cdots,\cancel{\mu},\cdots,r,j_\nu}(A)$$

und weil A ja (nach Lemma) die Plücker-Relationen erfüllt:

$$\begin{aligned} &= M_{1,\cdots,r}^{j_1,\cdots,j_r}(A) \cdot \underbrace{M_{1,\cdots,r}^{1,\cdots,r}}_{=1} \\ &= M_{1,\cdots,r}^{j_1,\cdots,j_r}(A) \end{aligned}$$

Damit gilt also für alle $(j_1,\cdots,j_r)$ die Identität $M_{1,\cdots,r}^{j_1,\cdots r}(A) = p_{j_1\cdots j_r}$, es ist also wirklich $\hat{\gamma}(A) = [p_{j_1\cdots j_r}]$, und damit ist γ_U auch surjektiv, sogar bijektiv. $\square$

> $\boxed{\text{Fazit.}}$ Die Plücker-Einbettung γ (bzw. γ_U bei Wahl einer Basis U von $\mathfrak{V}$) stiftet auf $\mathcal{G}(r,\mathfrak{V})$ die Struktur einer projektiven Varietät.

Ziel. Wir wollen nun $U_{i_1,\cdots,i_r}$ beschreiben und zeigen, dass $U_{i_1\cdots,i_r} \cong_{\underline{\mathrm{Var}}_k} \mathbb{A}_k^{r(n-r)}$.

$\boxed{\text{SATZ 7.4.3.}}$

(1) $\mathcal{G}(r, \mathfrak{V})$ ist (via der Plücker-Einbettung γ_U) eine irreduzible projektive Varietät, die von affinen offenen Mengen überdeckt ist, die jeweils isomorph zu $\mathbb{A}_k^{r(n-r)}$ sind. Daher ist

$$\dim_{\mathrm{Noeth}}(\mathcal{G}(r, \mathfrak{V})) = r(n-r).$$

(2) Im Fall $k = \mathbb{C}$ ist $\mathcal{G}(r, \mathfrak{V})$ auch eine zusammenhängende, kompakte komplexe Mannigfaltigkeit der ($\mathbb{C}$-)Dimension $r(n-r)$.

Beweis.

(1) Wir geben zunächst eine affine offene Überdeckung von $\mathcal{G}(r, \mathfrak{V})$ an. Betrachte das Diagramm der Morphismen

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}(r, \mathfrak{V}) \arrow[r, "\gamma_U", "\sim"'] & V_+(\mathrm{PR}) \arrow[r, tail, "\subseteq"] & \mathbb{P}_k^{\binom{n}{r}-1}, \\
M_k^r(r,n) \arrow[u, two heads, "\mathrm{Zeil}_k^U"] \arrow[ur, "\hat{\gamma}"'] & &
\end{tikzcd}$$

$V_+(\mathrm{PR})$ wird affin-offen überdeckt von $V_+(\mathrm{PR}) \cap D_+(Z_{i_1 \ldots i_r})$ (mit $1 \le i_1 < \ldots < i_r \le n$). Das heißt, $\mathcal{G}(r, \mathfrak{V})$ wird überdeckt von

$$U_{(i_1, \cdots, i_r)} := \gamma_U^{-1}(V_+(\mathrm{PR}) \cap D_+(Z_{i_1, \cdots, i_r})) \qquad \text{für } 1 \le i_1 < \ldots < i_r \le n.$$

Außerdem wird ja $M_k^r(r,n) \subset M_k(r,n) \cong \mathbb{A}_k^{r \cdot n}$ affin-offen überdeckt von

$$\begin{aligned} M_k^{(i_1, \cdots, i_r)}(r,n) &:= \left\{ X \in M_k(r,n) \mid M_{i, \cdots, r}^{i_1, \cdots, i_r}(X) \neq 0 \right\} \\ &= \hat{\gamma}^{-1}(V_+(\mathrm{PR}) \cap D_+(Z_{i_1, \cdots, i_r})) \end{aligned}$$

und damit haben wir

$$U_{(i_1, \cdots, i_r)} = \mathrm{Zeil}_k^U(M^{(i_1, \cdots, i_r)}(r,n))$$

Wie im Beweis zum Satz 7.4.2 gezeigt wurde, werden die Elemente von $V_+(\mathrm{PR})$ schon durch solche Matrizen erzeugt, die eine Einheitsmatrix enthalten, also in einem der

$$\check{M}_k^{(i_1, \cdots, i_r)}(r,n) = \left\{ X \in M_k(r,n) \mid X_{1, \cdots, r}^{i_1, \cdots, i_r} = I_r \right\}$$

liegen. Das heißt, es ist auch

$$\mathrm{Zeil}_k^U(\check{M}_k^{(i_1, \cdots, i_r)}(r,n)) = U_{(i_1, \cdots, i_r)}$$

Die $U_{(i_1,\cdots,i_r)}$ sind affin-offen in $\mathcal{G}(r,\mathfrak{V})$. Wir haben also jetzt das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
U_{(i_1,\cdots,i_r)} \arrow[dr, "\gamma_U", "\sim"'] & \\
M_k^{(i_1,\cdots,i_r)}(r,n) \arrow[u, "\mathrm{Zeil}_k^U"] \arrow[r, "\hat{\gamma}"'] & V_+(\mathrm{PR}) \cap D_+(Z_{i_1\cdots i_r}) \\
\check{M}_k^{(i_1,\cdots,i_r)}(r,n) \arrow[u, "\cup|"'] \arrow[ur, "\hat{\hat{\gamma}}=\hat{\gamma}|\ldots"'] \arrow[uu, bend left, "\mathrm{Zeil}_k^U|\ldots"] &
\end{tikzcd}$$

$\hat{\hat{\gamma}}$ ist immer noch surjektiv, aufgrund des Beweises von Satz 7.4.2. $\hat{\hat{\gamma}}$ ist nun auch injektiv (denn die Matrix war ja, wenn man den I_r-Anteil vorgibt, ansonsten eindeutig), und diese Inverse $\hat{\hat{\gamma}}$ ist dabei sogar ein Morphismus.

Es ist also $\hat{\hat{\gamma}}$ sogar ein Isomorphismus. Offenbar ist dann $\mathrm{Zeil}_k^U|_{\ldots}$ ebenfalls ein Isomorphismus.

Weiterhin ist offenbar (sogar kanonisch) $\check{M}_k^{(i_1,\cdots,i_n)}(r,n) \cong \mathbb{A}_k^{rn-r^2} = \mathbb{A}_k^{r(n-r)}$, was dann insgesamt den ersten Teil unserer Behauptung ergibt:

$$U_{(i_1,\cdots,i_r)} \cong_{\underline{\mathrm{Var}}_k} \mathbb{A}_k^{r(n-r)},$$

womit auch die Dimension klar ist.

Wir haben nun

$$\mathcal{G}(r,\mathfrak{V}) = \bigcup_{I\in\Xi_r^n} U_I,$$

also eine Überdeckung durch irreduzible offene Teilmengen. Für die Irreduzibilität von $\mathcal{G}(r,\mathfrak{V})$ ist nun noch zu zeigen, dass es zusammenhängend ist, etwa durch

$$\forall (i_1,\cdots,i_r) \in \Xi_r^n, (k_1,\cdots,k_r) \in \Xi_r^n : \quad U_{(i_1,\cdots,i_r)} \cap U_{(k_1,\cdots,k_r)} \neq \varnothing.$$

In Matrixschreibweise ist das äquivalent zu

$$\exists A \in M_k^{(i_1,\cdots,i_r)}(r,n) \cap M_k^{(k_1,\cdots,k_r)}(r,n)$$

Basteln wir uns nun so eine Matrix…Ist

$$\{i_1,\cdots,\cap i_r\} \cap \{k_1 \cap k_r\} = \{j_1,\cdots,j_s\},$$

also etwa

$$\{i_1,\cdots,i_r\} = \{j_1,\cdots,j_s,h_1,\ldots h_{r-s}\}$$

und

$$\{k_1,\cdots,k_r\} = \{j_1,\cdots,j_s,l_1,\cdots,l_{r-s}\},$$

so sei

$$A := \begin{pmatrix} e_{j_1} \\ \vdots \\ e_{j_s} \\ e_{l_1} + e_{h_1} \\ \vdots \\ e_{l_{r-s}} + e_{h_{r-s}} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt für die Minoren

$$M_{1,\cdots,r}^{i_1,\cdots,i_r}(A) = \det \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & I_{r-s} \end{pmatrix} = 1$$

und

$$M_{1,\cdots,r}^{k_1,\cdots,k_r}(A) = \det \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & I_{r-s} \end{pmatrix} = 1,$$

es ist also wirklich $A \in M_k^{(i_1,\cdots,i_r)}(r,n) \cap M_k^{(k_1,\cdots,k_r)}(r,n)$.

(2) Sei nun $k = \mathbb{C}$. Punkt (1) liefert für die klassische Topologie: $\mathcal{G}(r,\mathfrak{V})$ wird offen überdeckt von $U_{i_1,\cdots,i_r} \cong_{\text{anal.}} \mathbb{C}^{r(n-r)}$.

Das heißt, $\mathcal{G}(r,\mathfrak{V})$ ist komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension $r(n-r)$.

Weiterhin haben wir die abgeschlossenen Einbettung $\gamma_U : \mathcal{G}(r,\mathfrak{V}) \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{\binom{n}{r}-1}$, und $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{\binom{n}{r}-1}$ ist kompakt, also ist auch $\mathcal{G}(r,\mathfrak{V})$ kompakt.

Schließlich sind die $U_{(i_1,\cdots,i_r)}$ zusammenhängend und paarweise überlappend, also ist auch $\mathcal{G}(r,\mathfrak{V})$ zusammenhängend. □

Fragen.

(1) Welche topologischen Eigenschaften hat $\mathcal{G}(r,\mathfrak{V})$ noch?

(2) Wie sieht $H_*(\mathcal{G}(r,\mathfrak{V}),\mathbb{Z})$ aus?

(3) Wie sieht $H^*(\mathcal{G}(r,\mathfrak{V}),\mathbb{Z})$ aus?

Beispiel 7.4.3. Betrachte $\mathcal{G}(2,4) = \mathcal{G}(2,k^4) \xhookrightarrow{\gamma_{E_4}} \mathbb{P}_k^{\binom{4}{2}-1} = \mathbb{P}_k^5$. Die Plücker-Relationen (mit projektiven Koordinaten $(P_{12} : P_{13} : P_{14} : P_{23} : P_{24} : P_{34})$) dafür sind in Tabelle 7.4 aufgelistet. Offenbar sind fast alle P_{IK} trivial, es bleiben nur $R_{(1)(2,3,4)} = -P_{12}P_{34} + P_{13}P_{24} - P_{14}P_{23}$ und $-R_{(1)(2,3,4)}$ übrig. Das heißt,

$$\gamma_{E_4}(\mathcal{G}(2,4)) = V_+(-P_{12}P_{34} + P_{13}P_{24} - P_{14}P_{23}) \cong V_+(W_0W_5 - W_1W_4 + W_2W_3)$$

ist Hyperfläche zweiten Grades (Quadrik) in $\mathbb{P}_k^5$, und in der Tat ist auch $\dim_{\text{Noeth}}(\mathcal{G}(2,4)) = 2(4-2) = 4 = 4 - 1$.

Für $k = \mathbb{C}$ heißt $\gamma_{E_4}(\mathcal{G}(2,4)) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^5$ auch **Kleinsche Quadrik**[10].

[10] nach Felix Klein, 1849–1925, deutscher Geometer (Bonn, Berlin, Göttingen, Erlangen, München, Leipzig, Göttingen)

I	K	R_{IK}
(1)	$(2,3,4)$	$-P_{12}P_{34} + P_{13}P_{24} - P_{14}P_{23}$
(2)	$(2,3,4)$	$-P_{22}P_{34} + P_{23}P_{24} - P_{24}P_{23} = 0 + P_{23}P_{24} - P_{23}P_{24} = 0$
(3)	$(2,3,4)$	$-P_{32}P_{34} + P_{33}P_{24} - P_{34}P_{23} = P_{23}P_{34} + 0 - P_{23}P_{34} = 0$
(4)	$(2,3,4)$	$-P_{42}P_{34} + P_{43}P_{24} - P_{44}P_{23} = P_{24}P_{34} - P_{24}P_{34} - 0 = 0$
(1)	$(1,3,4)$	$-P_{11}P_{34} + P_{13}P_{14} - P_{14}P_{13} = 0 + P_{13}P_{14} - P_{13}P_{14} = 0$
(2)	$(1,3,4)$	$-P_{21}P_{34} + P_{23}P_{14} - P_{24}P_{13} = -R_{(1)(2,3,4)}$
(3)	$(1,3,4)$	$-P_{31}P_{34} + P_{33}P_{14} - P_{34}P_{13} = P_{13}P_{34} + 0 - P_{13}P_{34} = 0$
(4)	$(1,3,4)$	$-P_{41}P_{34} + P_{43}P_{14} - P_{13}P_{44} = P_{14}P_{34} - P_{14}P_{34} - 0 = 0$
(1)	$(1,2,4)$	$-P_{11}P_{24} + P_{12}P_{14} - P_{14}P_{12} = 0 + P_{12}P_{14} - P_{12}P_{14} = 0$
(2)	$(1,2,4)$	$-P_{21}P_{24} + P_{22}P_{14} - P_{24}P_{12} = P_{12}P_{24} + 0 - P_{12}P_{24} = 0$
(3)	$(1,2,4)$	$-P_{31}P_{24} + P_{32}P_{14} - P_{34}P_{12} = R_{(1)(2,3,4)}$
(4)	$(1,2,4)$	$-P_{41}P_{24} + P_{42}P_{14} - P_{44}P_{12} = P_{14}P_{24} - P_{14}P_{24} - 0 = 0$
(1)	$(1,2,3)$	$-P_{11}P_{23} + P_{12}P_{13} - P_{13}P_{12} = 0 + P_{12}P_{13} - P_{12}P_{13} = 0$
(2)	$(1,2,3)$	$-P_{21}P_{23} + P_{22}P_{13} - P_{23}P_{12} = P_{12}P_{23} + 0 - P_{12}P_{23} = 0$
(3)	$(1,2,3)$	$-P_{31}P_{23} + P_{32}P_{13} - P_{33}P_{12} = P_{12}P_{23} - P_{13}P_{23} - 0 = 0$
(4)	$(1,2,3)$	$-P_{41}P_{23} + P_{42}P_{13} - P_{43}P_{12} = -R_{(I)(2,3,4)}$

Tabelle 7.1: Plücker-Relationen für $\mathcal{G}(2,4)$, siehe Beispiel 7.4.3

Beispiel 7.4.4.

- $\mathcal{G}(2,5) \hookrightarrow \mathbb{P}^9$, mit $\dim \mathcal{G}(2,5) = 2 \cdot (5-2) = 6$, also werden wohl 3 relevante Plücker-Relationen (nicht triviale, nicht Duplikate) übrigbleiben.
- $\mathcal{G}(3,7) \hookrightarrow \mathbb{P}^{34}$, mit $\dim \mathcal{G}(3,7) = 12$, also 22 relevante Plücker-Relationen.

$\boxed{\mathbb{F}_k(r_1,\cdots,r_s;\mathfrak{V})}$ **Definition 7.48.** *Seien $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{V}$ ein k-Vektorraum mit $\dim_k \mathfrak{V} = n$ und $(r_1,\cdots,r_s) \in \Xi^n_s$. Dann heißt*

$$\mathbb{F}_k(r_1,\cdots,r_s;\mathfrak{V}) := \left\{ (\mathfrak{W}_1,\cdots,\mathfrak{W}_s) \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall i : \mathfrak{W}_i \subseteq \mathfrak{V} \text{ ist } k\text{-UVR}, \\ \dim \mathfrak{W}_i = r_i, \mathfrak{W}_i \subset \mathfrak{W}_{i+1} \end{array} \right\}$$

Fahnenmenge *vom Typ $(r_1,\cdots,r_s)$ in $\mathfrak{V}$.*

$\boxed{\mathbb{F}_k(r_1,\cdots,r_s;n)}$ *Für $\mathfrak{V} = k^n$ definieren wir auch:*

$$\mathbb{F}_k(r_1,\cdots,r_s;n) := \mathbb{F}_k(r_1,\cdots,r_s;k^n)$$

Bemerkung. Wir haben hier offenbar (bei Wahl einer Basis U von $\mathfrak{V}$)

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{F}_k(r_1,\cdots,r_s;\mathfrak{V}) & \overset{\subseteq}{\rightarrowtail} & \mathcal{G}(r_1,\mathfrak{V})\times\ldots\times\mathcal{G}(r_s,\mathfrak{V}) \\
 & & \Big\downarrow {\scriptstyle \gamma_U^{(r_1)}\times\ldots\times\gamma_U^{(r_s)}} \\
 & & \mathbb{P}_k^{\binom{n}{r_1}-1}\times\ldots\times\mathbb{P}_k^{\binom{n}{r_s}-1} \\
 & & \Big\downarrow {\scriptstyle \Sigma\text{ (iterierte Segre-Abbildung)}} \\
 & & \mathbb{P}_k^N
\end{array}$$

mit einem ziemlich großen $N \in \mathbb{N}$ (je nach Reihenfolge der iterierten Segre-Einbettungen).

Frage. Ist $\mathbb{F}_k(r_1,\cdots,r_s;\mathfrak{V})$ abgeschlossen in $\mathcal{G}(r_1,\mathfrak{V}) \times \ldots \times \mathcal{G}(r,\mathfrak{V})$, d.h. ist $\mathbb{F}_k(r_1,\cdots,r_s;\mathfrak{V})$ selbst eine projektive Varietät (eine sogenannte **Fahnenvarietät** (bzw. für $k = \mathbb{C}$ auch **Fahnenmannigfaltigkeit**), (*flag variety*, *variété des drapeaux*)?

Klassik vs. Moderne – Plücker/Grassman vs. Grothendiek, Dieudonné & Co: Koordinatenfreie Beschreibung der $\mathcal{G}(r,\mathfrak{V})$

Sammeln wir ein paar Fakten.

BEMERKUNG 1. Es gibt die kanonische Einbettung

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(r,\mathfrak{V}) &\overset{\gamma}{\hookrightarrow} \mathbb{P}_k(\bigwedge^r \mathfrak{V}) \\
\operatorname{span}(\mathfrak{b}_0,\cdots,\mathfrak{b}_r) &\longmapsto [\mathfrak{b}_1\wedge\ldots\wedge\mathfrak{b}_r]_{k^*}.
\end{aligned}$$

Beweis. Dies ist bereits bekannt. □

BEMERKUNG 2. Es gibt einen kanonischen Isomorphismus

$$\bigwedge^r(\mathfrak{V}^*) \overset{\sim}{\longrightarrow} \Big(\bigwedge^r \mathfrak{V}\Big)^*,$$

ebenso wie es (bekanntermaßen) einen Isomorphismus

$$\bigotimes^r(\mathfrak{V}^*) \overset{\sim}{\longrightarrow} \Big(\bigotimes^r \mathfrak{V}\Big)^*$$

gibt.

Beweis. Jedes Tupel $(f_1,\cdots,f_r) \in \times^r \mathfrak{V}^*$ stiftet eine Abbildung

$$\begin{aligned}
\theta_{(f_1,\cdots,f_r)} : \bigtimes^r \mathfrak{V} &\longrightarrow k \\
(\mathfrak{c}_1,\cdots,\mathfrak{c}_r) &\longmapsto \det\left((f_i(\mathfrak{c}_j))_{i,j}\right)
\end{aligned}$$

$\theta_{(f_1,\cdots,f_r)}$ ist r-linear und alternierend (geerbt von der Determinante), stiftet daher (Universaleigenschaft von $\wedge$) eine lineare Abbildung

$$\hat{\theta}_{(f_1,\cdots,f_r)} : \bigwedge^r \mathfrak{V} \longrightarrow k,$$

es ist also $\hat{\theta}_{(f_1,\cdots,f_r)} \in (\bigwedge^r \mathfrak{V})^*$. Wir erhalten damit insgesamt die Abbildung

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_\square : \bigtimes^r (\mathfrak{V}^*) &\longrightarrow \Big(\bigwedge^r \mathfrak{V}\Big)^* \\ (f_1,\cdots,f_r) &\longmapsto \hat{\theta}_{(f_1,\cdots,f_r)} \end{aligned}$$

$\hat{\theta}_\square$ ist offenbar wieder r-linear und alternierend, stiftet also die lineare Abbildung

$$\widehat{\hat{\theta}_\square} =: \vartheta : \bigwedge^r (\mathfrak{V}^*) \longrightarrow \Big(\bigwedge^r \mathfrak{V}\Big)^* .$$

Dabei hat $\bigwedge^r(\mathfrak{V}^*)$ die Dimension $\binom{n}{r}$ (falls $1 \le r \le n$), und eine Basis $\mathfrak{a}_1,\cdots,\mathfrak{a}_n$ von $\mathfrak{V}$ (mit Dualbasis $(\mathfrak{a}_1^*,\cdots,\mathfrak{a}_n^*)$) liefert eine Basis $(\mathfrak{a}_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge a_{i_r}^*)_{(i_1,\cdots,i_r)\in\Xi_r^n}$ von $\bigwedge^r(\mathfrak{V}^*)$ sowie eine Basis $((\mathfrak{a}_{i_1} \wedge \ldots \wedge a_{i_r})^*)_{(i_1,\cdots,i_r)\in\Xi_r^n}$ von $(\bigwedge^r \mathfrak{V})^*$.

Man sieht sofort:

$$\vartheta(\mathfrak{a}_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge a_{i_r}^*) = (\mathfrak{a}_{i_1} \wedge \ldots \wedge a_{i_r})^*$$

für alle $(i_1,\cdots,i_r) \in \Xi_r^n$. Das heißt, ϑ überführt Basen in Basen und ist damit k-Vektorraumisomorphismus. □

Bemerkung 3. Es ist

$$\begin{aligned} \mathrm{Alt}_k^r(\mathfrak{V}) &\cong \mathrm{Hom}_k\Big(\bigwedge^r \mathfrak{V}, k\Big) \\ &= \Big(\bigwedge^r \mathfrak{V}\Big)^* \\ &\cong \bigwedge^r \mathfrak{V}^* \end{aligned}$$

Bemerkung. Für $r \in \{1,\cdots,n\}$ existiert eine kanonische k-lineare Abbildung:

$$\begin{aligned} \delta : \bigwedge^{r-1} \mathfrak{V}^* &\longrightarrow \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{V}^*, \bigwedge^r \mathfrak{V}^*) \\ \mathfrak{t} &\longmapsto \delta(\mathfrak{t}) : \mathfrak{V}^* \to \bigwedge^r \mathfrak{V}^* \\ &\qquad\qquad f \mapsto \mathfrak{t} \wedge f \\ \mathfrak{a}_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_{i_r}^* &\longmapsto \big(f \mapsto \mathfrak{a}_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_{i_r}^* \wedge f\big) \end{aligned}$$

δ stiftet das folgende Diagramm von kanonischen k-Homomorphismen mit der (neuen) kanonischen Abbildung ∂: $\boxed{\partial}$

$$\begin{tikzcd}
\bigwedge^{r-1}\mathfrak{V}^* \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, dotted, "\varphi"] \arrow[ddr, dotted, "\psi"'] \arrow[dddr, bend right, "\partial"'] & \mathrm{Hom}_k\big(\mathfrak{V}^*, \bigwedge^r \mathfrak{V}^*\big) \arrow[d, "\square^*"', "\text{(kanonisch)}"] \\
& \mathrm{Hom}_k\big((\bigwedge^r \mathfrak{V}^*)^*, \mathfrak{V}^{**}\big) \arrow[d, "\mathrm{hom}(\vartheta^*)"', "\wr\ \text{(kanonisch, nach Bemerkung 2)}"] \\
& \mathrm{Hom}_k\big((\bigwedge^r \mathfrak{V})^{**}, \mathfrak{V}^{**}\big) \arrow[d, "\varkappa_{\mathfrak{V}}^{-1}\circ\square\circ\varkappa_{(\bigwedge^r \mathfrak{V})}"', "\wr\ \text{(mit dem kanonischen } \varkappa_{\mathfrak{V}} : \begin{smallmatrix} \mathfrak{V} & \xrightarrow{\sim} & \mathfrak{V}^{**} \\ x & \longmapsto & (f \mapsto f(x)) \end{smallmatrix} \text{ und analog } \varkappa_{(\bigwedge^r \mathfrak{V})}\text{)}"] \\
& \mathrm{Hom}_k\big(\bigwedge^r \mathfrak{V}, \mathfrak{V}\big)
\end{tikzcd}$$

Wir haben also

$$\partial(u) = \varkappa_{\mathfrak{V}}^{-1} \circ \left(\mathrm{hom}(\vartheta^*) \circ \square^* \circ \delta\right)(u) \circ \varkappa_{(\bigwedge^r \mathfrak{V})}$$

D.h., $\partial \in \mathrm{Hom}_k(\bigwedge^{r-1} \mathfrak{V}^*, \mathrm{Hom}_k(\bigwedge^r \mathfrak{V}, \mathfrak{V}))$.

Definition 7.49. *Seien $n \in \mathbb{N}$, $r \in \{1, \cdots, n\}$, $\mathfrak{V}$ ein k-Vektorraum der Dimension n mit (fixierter) Basis $(\mathfrak{a}_1, \cdots, \mathfrak{a}_n)$.*

Für $H = (h_1, \cdots, h_r) \in \Xi_r^n$ und $I = (i_1, \cdots, i_{r-1}) \in \Xi_{r-1}^n$ schreiben wir dann $\boxed{\mathfrak{a}_H}$ $\boxed{\mathfrak{a}_I^*}$

$$\mathfrak{a}_H := \mathfrak{a}_{h_1} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_{h_r} \in \bigwedge^r \mathfrak{V}$$

sowie

$$\mathfrak{a}_I^* := \mathfrak{a}_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_{i_{r-1}}^* \in \bigwedge^{r-1} \mathfrak{V}^*$$

für die entsprechenden Basiselemente von $\bigwedge^r \mathfrak{V}$ sowie $\bigwedge^{r-1} \mathfrak{V}^*$.

Für $k = h_\nu \in H$ schreiben wir auch: $\boxed{H \setminus k}$ $\boxed{H \setminus I}$ $\boxed{\rho(H,k)}$

$$H \setminus k := (h_1, \cdots, \cancel{h_\nu}, \cdots, h_r)$$

$$H \setminus (h_1, \cdots, \cancel{h_\nu}, \cdots, h_r) := h_\nu = k$$

$$\rho(H,k) := \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} h_1 & \ldots & h_\nu & \ldots & h_r \\ h_1 & \ldots & \cancel{h_\nu} & \ldots & h_r & h_\nu \end{pmatrix} = (-1)^{r-\nu}.$$

$\boxed{\text{Lemma.}}$ Sei nun $\mathfrak{u} \in \bigwedge^{r-1} \mathfrak{V}^*$, etwa

$$\mathfrak{u} = \sum_{(i_1,\cdots,i_{r-1})\in\Xi^n_{r-1}} \xi^{(i_1,\cdots,i_{r-1})} \cdot \mathfrak{a}^*_{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}^*_{i_{r-1}} = \sum_{I\in\Xi^n_{r-1}} \xi^I \cdot \mathfrak{a}^*_I$$

sowie $\mathfrak{t} \in \bigwedge^r \mathfrak{V}$, etwa

$$\mathfrak{t} = \sum_{(h_1,\cdots,h_r)\in\Xi^n_r} t^{(h_1,\cdots,h_r)} \cdot \mathfrak{a}_{h_1} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_{h_r} = \sum_{H\in\Xi^n_r} t^H \cdot \mathfrak{a}_H$$

Dann gilt für den oben definierten kanonischen Homomorphismus ∂:

$$\partial(\mathfrak{u})(\mathfrak{t}) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{\substack{H\in\Xi^n_r\\ k\in H}} \xi^{H\setminus k} \cdot t^H \cdot \rho(H,k) \right) \cdot \mathfrak{a}_k,$$

Beweis. Seien $\varphi = \Box^* \circ \delta$ und $\psi = \hom(\vartheta^*) \circ \psi$ (und damit $\partial = (\varkappa_{\mathfrak{V}}^{-1} \circ \Box \circ \varkappa_{(\bigwedge^r \mathfrak{V})}) \circ \psi$), wie in obigem Diagramm. Sei nun

$$\mathfrak{x} := \partial(\mathfrak{u})(\mathfrak{t})$$

also

$$\begin{aligned}
\mathfrak{x} &= \partial\left(\sum_I xi^I \mathfrak{a}^*_I\right)\left(\sum_H t^H \mathfrak{a}_H\right)\\
&= \sum_I \sum_H \xi^I t^H \cdot \partial(\mathfrak{a}^*_I)(\mathfrak{a}_H).
\end{aligned}$$

Sei nun $\mathfrak{y} := \partial(\mathfrak{a}^*_I)(\mathfrak{a}_H)$, also

$$\begin{aligned}
\varkappa_{\mathfrak{V}}(\mathfrak{y}) &= \psi(\mathfrak{a}^*_I)(\varkappa_{(\bigwedge^r \mathfrak{V})}(\mathfrak{a}_H))\\
&= \hom(\vartheta^*)(\varphi(\mathfrak{a}^*_I))(\varkappa_{(\bigwedge^r \mathfrak{V})}(\mathfrak{a}_H))\\
&= (\varphi(\mathfrak{a}^*_I) \circ \vartheta^*)(\varkappa_{(\bigwedge^r \mathfrak{V})}(\mathfrak{a}_H))\\
&= \varphi(\mathfrak{a}^*_I)(\varkappa_{(\bigwedge^r \mathfrak{V})}(\mathfrak{a}_H) \circ \vartheta)\\
&= (\Box^* \circ \delta)(\mathfrak{a}^*_I)(\varkappa_{(\bigwedge^r \mathfrak{V})}(\mathfrak{a}_H) \circ \vartheta)\\
&= (\delta(\mathfrak{a}^*_I))^*(\varkappa_{(\bigwedge^r \mathfrak{V})}(\mathfrak{a}_H) \circ \vartheta)\\
\varkappa_{\mathfrak{V}}(\mathfrak{y}) &= \varkappa_{(\bigwedge^r \mathfrak{V})}(\mathfrak{a}_H) \circ \vartheta \circ \delta(\mathfrak{A}^*_I)
\end{aligned}$$

Nun haben wir auf beiden Seiten Elemente von $\mathfrak{V}^{**}$ stehen, wenden wir sie also auf die Basiselemente von $\mathfrak{V}^*$, also auf $\mathfrak{a}_\lambda^*$ mit $\lambda \in \{1, \cdots, n\}$ an:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}_\lambda^*(\mathfrak{y}) = \varkappa_{\mathfrak{V}}(\mathfrak{y})(\mathfrak{a}_\lambda^*) &= (\varkappa_{(\bigwedge^r \mathfrak{V})}(\mathfrak{a}_H) \circ \vartheta \circ \delta(\mathfrak{A}_I^*))(\mathfrak{a}_\lambda^*) \\
&= \varkappa_{(\bigwedge^r \mathfrak{V})}(\mathfrak{a}_H)(\vartheta(\mathfrak{a}_I^* \wedge \mathfrak{a}_\lambda^*)) \\
&= \vartheta(\mathfrak{a}_I^* \wedge \mathfrak{a}_\lambda^*)(\mathfrak{a}_H) \\
&= \begin{cases} 0 & \lambda \in I \\ 0 & \lambda \notin H \\ 0 & I \not\subset H \\ \rho(H, \lambda) & I = H \setminus \lambda \end{cases} \\
&\in \{-1, 0, 1\}
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\partial(\mathfrak{a}_I^*)(\mathfrak{a}_H) = \mathfrak{y} &= \sum_{\lambda=1}^n \mathfrak{a}_\lambda^*(\mathfrak{y}) \cdot \mathfrak{a}_\lambda \\
&= \sum_{\lambda=1}^n \begin{cases} \rho(H, \lambda) \cdot \mathfrak{a} & \lambda = I \setminus H \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \rho(H, H \setminus I) \cdot \mathfrak{a}_{H \setminus I} & I \subseteq H \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

Setzen wir dies nun wieder in die Gleichung für $\mathfrak{x}$ ein:

$$\begin{aligned}
\partial(\mathfrak{u})(\mathfrak{t}) = \mathfrak{x} &= \sum_I \sum_H \xi^I \cdot t^H \cdot \begin{cases} \rho(H, H \setminus I) \cdot \mathfrak{a}_{H \setminus I} & I \subseteq H \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \sum_H \sum_{k \in H} \xi^{H \setminus k} \cdot t^H \cdot \rho(H, k) \cdot \mathfrak{a}_k \\
&= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{\substack{H \\ k \in H}} \xi^{H \setminus k} \cdot t^H \cdot \rho(H, k) \right) \cdot \mathfrak{a}_k
\end{aligned}$$

□

FAZIT. In Koordinaten gilt:

$$\partial \left(\sum_I \xi^I \mathfrak{a}_I^* \right) \left(\sum_H t^H \mathfrak{a}_H \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{H \ni k} \xi^{H \setminus k} t^H \cdot \rho(H \setminus k, H) \right) \cdot \mathfrak{a}_k$$

Definition 7.50. $\mathfrak{t} \in \bigwedge^r \mathfrak{V} \setminus \{0\}$ *heißt* ***zerfallend****, falls*

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{b}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{b}_r \qquad \textit{mit } \{\mathfrak{b}_1, \cdots, \mathfrak{b}_r\} \subseteq \mathfrak{V} \textit{ } k\textit{-linear unabhängig.}$$

Bemerkung. Das heißt, $\mathfrak{t}$ lässt sich nicht nur als Linearkombination einer von $\mathfrak{V}$ geerbten Basis von $\bigwedge^r \mathfrak{V}$ schreiben, sondern ist selbst ein Element einer solchen Basis von $\bigwedge^r \mathfrak{V}$.

Bemerkung. Es ist offenbar $\mathfrak{t} \in \bigwedge^r V$ zerfallend genau dann, wenn $[t] \in \mathbb{P}(\bigwedge^r \mathfrak{V})$ im Bild der Grassmann-Abbildung $\gamma : \mathcal{G}(r, \mathfrak{V}) \to \mathbb{P}(\bigwedge^r \mathfrak{V})$ liegt.

Ziel. Dies liefert uns eine alternative, koordinatenfreie Methode der Beschreibung von $\gamma(\mathcal{G}(r, \mathfrak{V})) \subseteq \mathbb{P}(\bigwedge^r \mathfrak{V})$: Wir müssen „nur" alle *zerfallenden* r-Vektoren $\mathfrak{t} \in \bigwedge^r \mathfrak{V}$ charakterisieren, möglichst koordinatenfrei.

> Lemma. Sei $\mathfrak{t} \in \bigwedge^r \mathfrak{V} \setminus \{0\}$, sei $\mathfrak{W} \subsetneqq \mathfrak{V}$ ein k-Untervektorraum. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:
>
> (1) $\mathfrak{t} \in \bigwedge^r \mathfrak{W}$
>
> (2) $\forall \mathfrak{u} \in \bigwedge^{r-1} \mathfrak{V}^* : \ \partial(\mathfrak{u})(\mathfrak{t}) \in \mathfrak{W}$.

Beweis. Bilde eine direkte Zerlegung

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{W} \oplus \mathfrak{H}$$

durch Basisergänzung: $(\mathfrak{a}_1, \cdots, \mathfrak{a}_s)$ Basis von $\mathfrak{W}$ ($s = \dim_k \mathfrak{W} \geq r$, da sonst $\bigwedge^r \mathfrak{W} = (0)$), $(\mathfrak{a}_1, \cdots, \mathfrak{a}_s, \mathfrak{a}_{s+1}, \cdots, \mathfrak{a}_n)$ Basis von $\mathfrak{V}$, $(\mathfrak{a}_{s+1}, \cdots, \mathfrak{a}_n)$ Basis von $\mathfrak{H}$. Sei $\mathfrak{t} = \sum_H t^H \mathfrak{a}_H$ (Koordinatendarstellung von $\mathfrak{t}$ in der dazu assoziierten Basis $(\mathfrak{a}_H)_{H \in \Xi_r^n}$).

(1) $\Rightarrow$ (2): Nun ist

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \mathfrak{t} \in \bigwedge^r \mathfrak{W} \\ &\Rightarrow \forall H \in \Xi_r^n : \big(H \not\subseteq \{1, \cdots, s\} \Rightarrow t^H = 0\big) \end{aligned}$$

und nach dem vorigen Lemma ist dann

$$\begin{aligned} \Rightarrow \forall \mathfrak{u} = \sum_{I \in \Xi_{r-1}^n} \xi^I \mathfrak{a}_I \in \bigwedge^{r-1} \mathfrak{V}^* : \\ \partial(\mathfrak{u})(\mathfrak{t}) = \sum_{k=1}^{s} (\ldots) \cdot \mathfrak{a}_k \in \mathfrak{W}. \end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$ (1): Dies beweisen wir indirekt. Angenommen, es wäre (2), aber nicht (1), also $\mathfrak{t} \notin \bigwedge^r \mathfrak{W}$. Dann

$$\begin{aligned} &\exists H_0 \in \Xi_r^n : H_0 \not\subseteq \{1, \cdots, s\} : \ t^{H_0} \neq 0. \\ &\Rightarrow \exists H_0 = (h_{i_1}, \cdots, h_{i_r}) \in \Xi_r^n : \ t^{H_0} \neq 0, h_{i_r} \not\in \{1, \cdots, s\}\,. \\ &\Rightarrow \partial(\mathfrak{a}_{H_0 \setminus h_{i_r}})(\mathfrak{t}) = t^{H_0} \cdot \mathfrak{a}_{h_{i_r}} \notin \mathfrak{W} \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zu (2), also ist unsere Annahme falsch. □

Definition 7.51. *Sei* $0 \neq \mathfrak{t} \in \bigwedge^r \mathfrak{V}$. *Dann heißt* $\boxed{\mathfrak{W}[\mathfrak{t}]}$

$$\mathfrak{W}[\mathfrak{t}] := \bigcap_{\substack{\mathfrak{W} \subseteq \mathfrak{V}\ UVR \\ \mathfrak{t} \in \bigwedge^r \mathfrak{W}}} \mathfrak{W} \subseteq \mathfrak{V}$$

der zu $\mathfrak{t}$ ***assoziierte Unterraum*** *von* $\mathfrak{V}$.

EIGENSCHAFTEN.

(1) Es ist

$$\mathfrak{W}[\mathfrak{t}] = \operatorname{span}\left\{ \partial(\mathfrak{u})(\mathfrak{t}) \,\middle|\, \mathfrak{u} \in \bigwedge^{r-1} \mathfrak{V}^* \right\}$$

der kleinste Untervektorraum $\mathfrak{W}$ von $\mathfrak{V}$ mit $\mathfrak{t} \in \bigwedge^r \mathfrak{W}$.

(2) $0 \neq \mathfrak{t}$, folgt aus $\mathfrak{t} \in \bigwedge^r \mathfrak{W}[\mathfrak{t}]$ ja $\bigwedge^r \mathfrak{W}[\mathfrak{t}] \neq (0)$, also insbesondere $r \leq \dim_k \mathfrak{W}[\mathfrak{t}]$.

SATZ 7.4.4. Sei $r \in \{1, \cdots, n\}$, $\dim_k \mathfrak{V} = n$, $0 \neq \mathfrak{t} \in \bigwedge^r \mathfrak{V}$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) $[\mathfrak{t}] \in \operatorname{im}(\gamma : \mathcal{G}(r, \mathfrak{V}) \hookrightarrow \mathbb{P}_k(\bigwedge^r(\mathfrak{V})))$.

(2) $\mathfrak{t} \in \bigwedge^r \mathfrak{V}$ ist zerfallend.

(3) $\dim_k \mathfrak{W}[\mathfrak{t}] = r$, d.h. $\mathfrak{W}[\mathfrak{t}]$ ist von minimaler Dimension.

(4) *(Koordinatenfreie Plücker-Relationen)*

$$\forall \mathfrak{u} \in \bigwedge^{r-1} \mathfrak{V}^* : \ \partial(\mathfrak{u})(\mathfrak{t}) \wedge \mathfrak{t} = 0 \in \bigwedge^{r+1} \mathfrak{V}$$

Beweis.

(1) ⇔ (2): Ist schon bekannt (Definition von γ).

(2) ⇒ (3): Sei $\mathfrak{t}$ zerfallend, also

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{b}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{b}_r \in \bigwedge^r \operatorname{span}\{\mathfrak{b}_1, \cdots, \mathfrak{b}_r\}$$

Das heißt, $\operatorname{span}\{\mathfrak{b}_1, \cdots, \mathfrak{b}_r\}$ ist einer der Vektorräume, die in der Definition von $\mathfrak{W}[\mathfrak{t}]$ für den Schnitt verwendet werden, also

$$\operatorname{span}\{\mathfrak{b}_1, \cdots, \mathfrak{b}_r\} \supseteq \mathfrak{W}[\mathfrak{t}]$$

Betrachten wir die Dimensionen, so erhalten wir

$$r = \dim_k \operatorname{span}\{\mathfrak{b}_1, \cdots, \mathfrak{b}_r\} \geq \dim_k \mathfrak{W}[\mathfrak{t}] \geq r,$$

also $\dim_k \mathfrak{W}[\mathfrak{t}] = r$.

(3) $\Rightarrow$ (4): Sei wieder $\mathfrak{V}$ direkt zerlegt in $\mathfrak{W}[\mathfrak{t}] \oplus \mathfrak{H}$, mit Basen $(Veka_1, \cdots, \mathfrak{a}_r)$, $(\mathfrak{a}_{r+1}, \cdots, \mathfrak{a}_n)$ bzw. $(\mathfrak{a}_1, \cdots, \mathfrak{a}_r, \mathfrak{a}_{r+1}, \cdots, \mathfrak{a}_n)$.

Dann haben wir für $\mathfrak{u} \in \bigwedge^{r-1} \mathfrak{V}^*$:

$$\partial(\mathfrak{u})(\mathfrak{t}) \in \mathfrak{W}[\mathfrak{t}] \quad \text{und} \quad \mathfrak{t} \in \bigwedge^{r} \mathfrak{W}[\mathfrak{t}],$$

also

$$\partial(\mathfrak{u})(\mathfrak{t}) \wedge \mathfrak{t} \in \bigwedge^{r+1} \mathfrak{W}[\mathfrak{t}]$$

und aus Dimensionsgründen ist dieser Raum $= (0)$, daher

$$\partial(\mathfrak{u})(\mathfrak{t}) \wedge \mathfrak{t} = 0.$$

(4) $\Rightarrow$ (3): Übungsaufgabe (indirekt).

(3) $\Rightarrow$ (2): Sei $\dim_k \mathfrak{W}[\mathfrak{t}] = r$, $(Veka_1, \cdots, \mathfrak{a}_r)$ Basis von $\mathfrak{W}[\mathfrak{t}]$ mit Ergänzungsbasis $(\mathfrak{a}_1, \ldots \mathfrak{a}_n)$ von $\mathfrak{V}$. Dann ist

$$\mathfrak{t} \in \bigwedge^{r} \mathfrak{W}[\mathfrak{t}] = k \cdot \mathfrak{a}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_r,$$

wir können also $\mathfrak{t}$ schreiben als

$$\begin{aligned} \mathfrak{t} &= \alpha \cdot \mathfrak{a}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{a}_r, \\ &= (\alpha \cdot \mathfrak{a}_1) \wedge \mathfrak{a}_2 \wedge \ldots \mathfrak{a}_r, \end{aligned}$$

also ist $\mathfrak{t}$ zerfallend. □

Fazit. Wir haben also die Korrespondenzen

$$\mathcal{G}(r, \mathfrak{V}) \cong \left\{ [\mathfrak{t}] \in \mathbb{P}\left[\bigwedge^{r} \mathfrak{V}\right] \,\middle|\, \forall \mathfrak{u} \in \bigwedge^{r-1} \mathfrak{V}^* : \ \partial(\mathfrak{u})(\mathfrak{t}) \wedge \mathfrak{t} = 0 \right\}$$

(bei Wahl einer Basis $(\mathfrak{a}_1, \cdots, \mathfrak{a}_r)$ von $\mathfrak{V}$):

$$= \left\{ \left[\sum_{H \in \Xi_r^n} t^H \mathfrak{a}_H\right] \in \mathbb{P}_k\left[\bigwedge^{r} \mathfrak{V}\right] \,\middle|\, \begin{array}{l} \forall I \in \Xi_{r-1}^n : \\ \quad \partial(\mathfrak{a}_I^*) \left(\sum_{H \in \Xi_r^n} t^H \mathfrak{a}_H\right) \wedge \left(\sum_{L \in \Xi_r^n} t^L \mathfrak{a}_L\right) = 0 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \left[\sum_{H \in \Xi_r^n} t^H \mathfrak{a}_H\right] \in \mathbb{P}_k\left[\bigwedge^{r} \mathfrak{V}\right] \,\middle|\, \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\substack{H \in \Xi_r^n \\ k \in H}} t^H \cdot \rho(H, k) \right) \cdot \mathfrak{a}_k \wedge \left(\sum_{L \in \Xi_r^n} t^L \mathfrak{a}_L\right) = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \left[\sum_{H \in \Xi_r^n} t^H \mathfrak{a}_H \right] \in \mathbb{P}_k \left[\bigwedge^r \mathfrak{V} \right] \middle| \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{H,L \in \Xi_r^n \\ k \in H}} t^H t^L \rho(H,k) \cdot \mathfrak{a}_k = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \left[\sum_{H \in \Xi_r^n} t^H \mathfrak{a}_H \right] \in \mathbb{P}_k \left[\bigwedge^r \mathfrak{V} \right] \middle| \forall k \in \{1, \cdots, n\} : \sum_{\substack{H,L \in \Xi_r^n \\ k \in H}} t^H t^L \rho(H,k) = 0 \right\}$$

Die Gleichungen $\sum_{\substack{H,L \in \Xi_r^n \\ k \in H}} t^H \cdot t^L \rho(H,k) = 0$ entsprechen offenbar genau den klassischen Plückerrelationen.

$\boxed{\text{Fazit.}}$ Die Gleichungen $\partial(\mathfrak{a}_I^*)(\mathfrak{t}) \wedge \mathfrak{t} = 0$ (für $I \in \Xi_r^n$) sind äquivalent zu den klassischen Plückerrelationen PR, aber kanonisch und koordinatenfrei.

Anwendungen der Grassmannschen

$\boxed{\text{Bemerkung 1.}}$ Unter der Plücker-Einbettung

$$\gamma : \mathcal{G}(r,n) \hookrightarrow \mathbb{P}_k^{\binom{n}{r}-1}$$

ist $\operatorname{im}(\gamma)$ in *allgemeiner Lage* in $\mathbb{P}_k^{\binom{n}{r}-1}$ gelegen, d.h. $\operatorname{im}(\gamma)$ liegt in keinem echten projektiv-linearen Unterraum, es ist

$$\operatorname{span}_{\mathbb{P}_k^{\binom{n}{r}-1}}(\gamma(\mathcal{G}(r,n))) = \mathbb{P}_k^{\binom{n}{r}-1}.$$

Beweis. Die projektiv linearen Hyperebenen in $\mathbb{P}_k^{\binom{n}{r}-1}$ sind die $V_+(l)$, mit $l \in k[\cdots, Z_{i_1,\cdots,i_r}, \dots]$, $\deg(l) = 1$ (homogen).

Angenommen, es gäbe ein solches l mit $\operatorname{im}(\gamma) \subseteq V_+(l)$, $l = \sum_{I \in \Xi_r^n} a_I \cdot Z_I$, mit mindestens einem $a_K \neq 0$, etwa für $K = (k_1, \cdots, k_r)$. Dann wäre $l|_{\operatorname{im}(\gamma)} = 0$, also

$$0 = \sum_{I \in \Xi_r^n} a_I \cdot M_{1,\cdots,r}^I(A) \quad \text{für alle } A \in M_k^r(r,n).$$

Wählen wir insbesondere

$$A_K := \begin{pmatrix} e_{k_1} \\ \vdots \\ e_{k_r} \end{pmatrix}.$$

Es ist offenbar $A_K \in M_k^r(r,n)$ und für $I \in \Xi_r^n$ ist

$$M^I_{1,\cdots,r}(A_K) = \begin{cases} 0 & I \neq K \\ 1 & I = K \end{cases},$$

also

$$\sum_{I \in \Xi_r^n} M^I_{1,\cdots,r}(A_K) = 1,$$

gleichzeitig sollte dies jedoch 0 sein. Dies ist ein Widerspruch, die Annahme $\mathrm{im}(\gamma) \subseteq V_+(l)$ ist also falsch, $\mathrm{im}(\gamma)$ liegt in keiner projektiven Hyperebene (und damit in überhaupt keinem projektiv-linearen Unterraum von $\mathbb{P}_k^{\binom{n}{r}-1}$). $\square$

$\boxed{U(r,\mathfrak{V})}$

Definition 7.52. *Sei $\mathfrak{V}$ ein k-Vektorraum, $n = \dim_k \mathfrak{V}$ und $r \in \{1, \cdots, n\}$. Dann heißt*

$$U(r,\mathfrak{V}) := \{(\mathfrak{W}, \mathfrak{x}) \in \mathcal{G}(r,\mathfrak{V}) \times \mathfrak{V} \,|\, \mathfrak{x} \in \mathfrak{W}\} \subseteq \mathcal{G}(r,\mathfrak{V}) \times \mathfrak{V}$$

*die **Inzidenzmenge** vom Typ $(r,\mathfrak{V})$.*

$\boxed{U(r,n)}$

Für $\mathfrak{V} = k^n$ schreiben wir auch $U(r,n) := U(r,k^n) \subseteq \mathcal{G}(r,n) \times k^n$.

Bemerkung. $\mathcal{G}(r,\mathfrak{V}) \times \mathfrak{V}$ ist eine quasi-projektive Varietät, via der folgenden lokalabgeschlossenen Einbettung:

$$\mathcal{G}(r,\mathfrak{V}) \times \mathfrak{V} \xhookrightarrow[\text{lok.-abg.}]{} \mathbb{P}(\textstyle\bigwedge^r \mathfrak{V}) \times \mathbb{P}(\mathfrak{V} \times k) \xrightarrow[\text{Basiswahl}]{\sim} \mathbb{P}_k^{\binom{n}{r}-1} \times \mathbb{P}_k^n \xhookrightarrow[\text{abg.}]{\Sigma} \mathbb{P}_k^{\binom{n}{r}\cdot(n+1)-1}$$

> $\boxed{\text{SATZ 7.4.5.}}$ Die Inzidenzmenge $U(r,\mathfrak{V})$ ist eine Zariski-abgeschlossene Teilmenge der quasi-projektiven Varietät $\mathcal{G}(r,\mathfrak{V}) \times \mathfrak{V}$, also selbst wieder quasi-projektiv.

Beweis. Wir betrachten ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\mathfrak{V} = k^n$, also $\mathcal{G}(r,n)$ und $U(r,n)$. Dann ist

$$M_k^r(r,n) \times k^n \xrightarrow{\text{Zeil} \times \text{id}} \mathcal{G}(r,n) \times k^n$$

surjektiv und offen, weil $\text{Zeil} : M_k^r(r,n) \twoheadrightarrow \mathcal{G}(r,n)$ dies war. Außerdem ist

$$\begin{aligned}(\mathcal{G}(r,n) \times k^n) \setminus U(r,n) &= \{(\text{Zeil}(A), \mathfrak{x}) \mid A \in M_k^r(r,n), \mathfrak{x} \in k^n \setminus \text{Zeil}(A)\} \\ &= \text{Zeil} \times \text{id}_{k^n}\Big(\underbrace{\Big\{(A,\mathfrak{x}) \in M_k(r,n) \times k^n \,\Big|\, \text{Rg}_k \tbinom{A}{\mathfrak{x}} = r+1\Big\}}_{\cong M_k^{r+1}(r+1,n),\ \text{offen in } M_k(r+1,n)}\Big),\end{aligned}$$

also ist dies eine offene Menge in $\mathcal{G}(r,n) \times k^n$). Damit ist $U(r,n) \in \text{Abg}(\mathcal{G}(r,n) \times k^n)$. $\square$

Fazit. Wir haben also:

$$\begin{tikzcd} U(r,n) \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[rr, bend right, "p"'] & \mathcal{G}(r,n) \times k^n \arrow[r, two heads, "\pi_1"] & \mathcal{G}(r,n) \end{tikzcd}$$

Hierbei ist p ein Morphismus von der quasi-projektiven Varietät $U(r,n)$ in die projektive Varietät $\mathcal{G}(r,n)$. p hat die Fasern

$$p^{-1}(\mathfrak{W}) = \{(\mathfrak{W}, \mathfrak{x}) \mid \mathfrak{x} \in \mathfrak{W}\} = \{\mathfrak{W}\} \times \mathfrak{W} \cong \mathfrak{W}.$$

Das heißt, die Faser über einem Punkt $\mathfrak{W} \in \mathcal{G}(\mathfrak{r}, n)$ ist $\mathfrak{W}$ selbst, jetzt als Vektorraum der Dimension r. (Und nebenbei ist damit p surjektiv.)

Definition 7.53. *Die Faserung $p : U(r,n) \twoheadrightarrow \mathcal{G}(r,n)$ heißt auch die* ***tautologische Faserung*** *über $\mathcal{G}(r,n)$.*

Definition 7.54. *Sei X eine algebraische Varietät ($X \in \underline{\mathrm{Var}}_k$). Ein* ***algebraisches Vektorbündel*** *über X vom Rang $r \in \mathbb{N}$ ist ein Tripel (E, π, X) mit folgenden Eigenschaften:*

(i) $E \in \underline{\mathrm{Var}}_k$, $\pi \in \mathrm{Mor}_{\underline{\mathrm{Var}}_k}$, $\pi : E \twoheadrightarrow X$ *surjektiv.*

(ii) Für alle $x \in X$ ist $\pi^{-1}(x)$ ein k-Vektorraum der Dimension r, $\pi^{-1}(x) \cong_k k^r$.

(iii) Es gibt eine offene Überdeckung $X = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ sowie $\underline{\mathrm{Var}}_k$-Isomorphismen

$$h_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\sim} U_\alpha \times k^r,$$

so dass für $x \in U_\alpha$ die Einschränkung $h_\alpha|_{\pi^{-1}(x)}$ jeweils k-linear ist und für alle $(\alpha, \beta) \in I^2$ mit $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ im Diagramm

$$\begin{tikzcd} & \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \arrow[dl, "h_\alpha"', "\sim"] \arrow[dr, "h_\beta", "\sim"'] & \\ (U_\alpha \cap U_\beta) \times k^r \arrow[rr, "\sim", "h_\beta \circ h_\alpha^{-1}"'] & & (U_\alpha \times U_\beta) \times k^r \end{tikzcd}$$

immer gilt

$$(h_\beta \circ h_\alpha^{-1})(x, t) = (x, g_{\beta,\alpha}(x)(t)),$$

mit $g_{\beta,\alpha}(x) \in \mathrm{Isom}_k(k^r) \cong \mathrm{GL}_k(r)$.

Definition 7.55. *Sei (E, π, X) ein algebraisches Vektorbündel.*

(1) Die Menge $\left\{h_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times k^r \mid \alpha \in I\right\}$ heißt ***System von lokalen Trivialisierungen*** *von $E \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} X$.*

(2) Für $(\alpha,\beta) \in I^2$ mit $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ haben wir ja

$$g_{\beta,\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathrm{GL}_k(r)$$

als Morphismus. Die Menge

$$\left\{ g_{\beta,\alpha} \mid (\alpha,\beta) \in I^2, U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing \right\}$$

*heißt dann **System der Transitionsfunktionen** des r-Vektorbündels $E \xrightarrow{\pi} X$.*

> $\boxed{\text{Satz 7.4.6.}}$ Für einen Vektorraum $\mathfrak{V}$, $\dim_k(\mathfrak{V}) = n$, $r \in \{1, \cdots, n\}$, ist das Inzidenz-Faserbündel $U(r,\mathfrak{V}) \xrightarrow{p} \mathcal{G}(r,\mathfrak{V})$ ein algebraisches Vektorbündel vom Rang r.

Definition 7.56. *$U(r,n)$ heißt daher auch **tautologisches (Vektor-)Bündel** auf $\mathcal{G}(r,\mathfrak{V})$ vom Rang r.*

Beweis. Wir beschränken uns beim Beweis wieder ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf $\mathfrak{V} = k^n$.

(i) Wir wissen bereits, dass $U(r,n) \xrightarrow{p} \mathcal{G}(r,n)$ surjektiv ist und in $\underline{\mathrm{Var}}_k$ lebt.

(ii) Die Fasern sind alle r-dimensionale k-Vektorräume, also isomorph zu k^r.

(iii) Wir müssen nun also noch lokale Trivialisierungen von p finden. Sei $\mathfrak{W} \in \mathcal{G}(r,n)$, also $\dim_k \mathfrak{W} = r$. Wir fixieren eine direkte Summandenzerlegung $k^n = \mathfrak{W} \oplus \mathfrak{H}$ (also $\dim_k \mathfrak{H} = n - r$, $\mathfrak{W} \cap \mathfrak{H} = (0)$). Dann sei

$$\begin{aligned} U := U(\mathfrak{W}) &:= \{\mathfrak{Z} \in \mathcal{G}(r,n) \mid \mathfrak{Z} \cap \mathfrak{H} = (0)\} \\ &= \{\mathfrak{Z} \in \mathcal{G}(r,n) \mid \mathfrak{Z} \oplus \mathfrak{H} = k^n\} \\ &= \{\mathfrak{Z} \in \mathcal{G}(r,n) \mid \mathfrak{Z} + \mathfrak{H} = k^n\} \\ &\subseteq \mathcal{G}(r,n). \end{aligned}$$

Offenbar ist $\mathfrak{W} \in U(\mathfrak{W})$. Außerdem ist für $H \in \mathrm{Zeil}^{-1}(\{\mathfrak{H}\}) \subseteq M_k^{n-r}(n-r,n)$:

$$\begin{aligned} U &= \left\{ \mathrm{Zeil}(X) \,\middle|\, X \in M_k^r(r,n) : \mathrm{Zeil}\begin{pmatrix} X \\ H \end{pmatrix} = k^n \right\} \\ &= \left\{ \mathrm{Zeil}(X) \,\middle|\, X \in M_k^r(r,n) : \det\begin{pmatrix} X \\ H \end{pmatrix} \neq 0 \right\}. \end{aligned}$$

Mittels Laplace-Entwicklung ergibt das:

$$\begin{aligned} &= \mathrm{Zeil}\left(\left\{ X \,\middle|\, \begin{array}{l} X \in M_k^r(r,n), \\ 0 \neq \displaystyle\sum_{\substack{(I,J) \in \Xi_r^n \times \Xi_{n-r}^n \\ I = \{1,\cdots,n\} \setminus J}} \mathrm{sgn}(I,J) \cdot M^I_{1,\cdots,r}(X) \cdot M^J_{1,\cdots,n-r}(H) \end{array} \right\} \right) \\ &= \mathrm{Zeil}\left(D\left(\sum_{(I,J)} \mathrm{sgn}(I,J) \cdot M^I_{1,\cdots,r}(X) \cdot M^J_{1,\cdots,n-r}(H) \right) \right) \end{aligned}$$

Da Zeil eine offene Abbildung ist, ist also U offen, d.h. eine Umgebung von $\mathfrak{W}$. Wir erhalten damit die eingeschränkte Faserung $p_U = p|_{p^{-1}(U)} : p^{-1}(U) \twoheadrightarrow U$, für die Umgebung $U = U(\mathfrak{W})$ von $\mathfrak{W}$.

Betrachte außerdem nun die Morphismenkette

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[r, "\subseteq", "\text{(offen)}"'] \arrow[rrrr, bend right, "r_U"'] & U(r,n) \arrow[r, "\subseteq", "\text{(abg.)}"'] & \mathcal{G}(r,n) \times k \arrow[r, two heads, "\pi_2"] & k^n \arrow[r, "\pi^{\mathfrak{H}}_{\mathfrak{W}}"] & \mathfrak{W} \end{tikzcd}$$

(dabei sei $\pi^{\mathfrak{H}}_{\mathfrak{W}} : k^n \to \mathfrak{W}$ die kanonische Projektion bezüglich der direkten Zerlegung $k^n = \mathfrak{W} \oplus \mathfrak{H}$). p_U und r_U liefern zusammen den Morphismus

$$(p_U, r_U) : p^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathfrak{W}.$$

Wir müssen noch zeigen, dass dies auch ein Isomorphismus ist.

Offenbar ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \vartheta_U : U = \{\mathfrak{Z} \in \mathcal{G}(r,n) \mid \mathfrak{Z} \cap \mathfrak{H} = (0)\} &\xrightarrow{\sim} \left\{\alpha \in \operatorname{Hom}_k(\mathfrak{W}, k^n) \mid \pi^{\mathfrak{H}}_{\mathfrak{W}} \circ \alpha = \mathrm{id}_{\mathfrak{W}}\right\} \\ \mathfrak{Z} &\longmapsto \pi^{\mathfrak{H}}_{\mathfrak{Z}}|_{\mathfrak{W}} \\ \operatorname{im}(\alpha) &\longleftarrow\!\shortmid \alpha \end{aligned}$$

bijektiv, und auch ein Morphismus in $\underline{\mathrm{Var}}_k$. Definiere damit nun den Morphismus

$$\begin{aligned} \theta_U : U \times \mathfrak{W} &\longrightarrow p^{-1}(U) \\ (\mathfrak{Z}, \mathfrak{w}) &\longmapsto (\mathfrak{Z}, \pi^{\mathfrak{H}}_{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{w})) = (\mathfrak{Z}, \vartheta_U(\mathfrak{Z})(\mathfrak{w})) \end{aligned}$$

Dabei ist für $\mathfrak{Z} \in U$ und $\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}$:

$$\begin{aligned} \theta_U \circ (p_n, r_n)(\mathfrak{Z}, \mathfrak{z}) &= \theta_U(\mathfrak{Z}, \pi^{\mathfrak{H}}_{\mathfrak{W}}(\mathfrak{z})) \\ &= (\mathfrak{Z}, \pi^{\mathfrak{H}}_{\mathfrak{Z}}(\pi^{\mathfrak{H}}_{\mathfrak{W}}(\mathfrak{z}))) \\ &= (\mathfrak{Z}, \mathfrak{z}), \end{aligned}$$

also $\theta_U \circ (p_U, r_U) = \mathrm{id}_{p^{-1}(U)}$ und analog umgekehrt $(p_U, r_U) \circ \theta_U = \mathrm{id}_{U \times \mathfrak{W}}$.

Fazit.

(1) $p^{-1}(U) \underset{\theta_U}{\overset{(p_U, r_U)}{\rightleftarrows}} U \times \mathfrak{W}$ ist eine lokale Trivialisierung von $p : U(r,n) \xrightarrow{\mathcal{G}} (r,n)$.

(2) $\mathcal{G}(r,n)$ ist lokal trivialisierbares algebraisches Faserbündel mit typischer Faser $\mathfrak{W} \cong k^r$.

Damit ergibt sich ganz leicht: $p : U(r,n) \twoheadrightarrow \mathcal{G}(r,n)$ ist ein algebraisches Vektorbündel über $\mathcal{G}(r,n)$ vom Rang r. $\square$

Frage. Ist $U(r,n) \xrightarrow{p} \mathcal{G}(r,n)$ vielleicht sogar **global trivial**, d.h. existiert ein $\underline{\mathrm{Var}}_k$-Isomorphismus Φ, so dass das folgende Diagramm kommutiert?

$$\begin{tikzcd} U(r,n) \arrow[rr, "\Phi", "\sim"'] \arrow[dr, "p"'] & & \mathcal{G}(r,n) \times k^r \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & \mathcal{G}(r,n) & \end{tikzcd}$$

Antwort. Nein (für $n \neq r$ und $r \neq 0$).

7.5 Konkrete Anwendungen: Modulräume algebraischer Vektorbündel und lineare Unterräume in projektiven Flächen

Eine genauere Betrachtung der algebraischen Vektorbündel liefert die beiden folgenden Beobachtungen.

BEMERKUNG 1. Ist (E, π, X) ein algebraisches Vektorbündel mit offener Überdeckung $\bigcup_{i\in I} U_i$ und dem System von Transitionsfunktionen $\{g_{ij} \mid i,j \in I, U_i \cap U_j \neq \varnothing\}$ (mit $g_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}_k(r)$), dann gelten die folgenden **Kozyklusbedingungen**:

(a) Ist $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, so ist für $x \in U_i \cap U_j$ $g_{ij}(x) \circ g_{ji}(x) = I_r$, bzw. $g_{ij}(x) = g_{ji}(x)^{-1}$.

(b) Ist $U_i \cap U_j \cap U_l \cap U_m \neq \varnothing$, so ist für $x \in U_i \cap U_j \cap U_l \cap U_m$ immer $g_{ij}(x) \circ g_{jl}(x) \circ g_{lm}(x) = g_{im}(x)$.

BEMERKUNG 2. Ist umgekehrt $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ eine offene Überdeckung von $X \in \underline{\mathrm{Var}}_k^{\mathrm{irr}}$, ist weiterhin $\{g_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}_k(r)\}$ ein System von Morphismen, welche die Kozyklusbedingungen erfüllen, so definiert dies ein algebraisches Vektorbündel mittels

$$E := \left(\coprod_{i\in I} U_i \times k^r \right) \Big/ \sim$$

(und der kanonischen Projektion), wobei für $(x_i, \xi_i) \in U_i \times k^r$ und $(y_j, \eta_j) \in U_j \times k^r$ gelte:

$$(x_i, \xi_i) \sim (y_i, \eta_j) :\Leftrightarrow x_i = y_i \text{ und } g_{ij}(x_i)(\xi_i) = \eta_j.$$

Beweis. Aufgrund der Kozyklusbedingungen ist $\sim$ wirklich eine Äquivalenzrelation, und offenbar wird damit E wirklich eine Varietät, mit offener Überdeckung

$$E = \bigcup_{i \in I} \underbrace{U_i \times k^r /\!\sim}_{\cong U_i \times k^r},$$

und die kanonische Projektion

$$\begin{aligned} \mathrm{pr} : E &\longrightarrow X \\ [x_i, \xi_i] &\longmapsto x_i \end{aligned}$$

ist Morphismus mit einer gegebenen lokalen Trivialisierung. $\square$

Bemerkung. Auch für nicht irreduzible Varietäten X gibt es natürlich solche Vektorbündel, allerdings kann es da etwas komplizierter werden.

Definition 7.57. *Sei (E, p, X) algebraisches Vektorbündel vom Rang r über $X \in \underline{\mathrm{Var}}_k^{\mathrm{irr}}$. Dann heißt* $\boxed{H^0(X,E)}$

$$H^0(X,E) := \Gamma(X,E) := \left\{ s \in \mathrm{Mor}_{\underline{\mathrm{Var}}_k}(X,E) \mid p \circ s = \mathrm{id}_X \right\}$$ $\boxed{\Gamma(X,E)}$

die Menge bzw. der Raum der ***globalen (algebraischen) Schnitte*** *von $p : E \twoheadrightarrow X$.*

Bemerkung. $\Gamma(X,E)$ ist via werteweiser Addition und Skalarmultiplikation offenbar ein k-Vektorraum.

Definition 7.58. *Für $U \in \mathrm{Off}'(X)$ ist entsprechend*

$$\Gamma(U,E) := \left\{ s \in \mathrm{Mor}_{\underline{\mathrm{Var}}_k}(U,E) \mid p \circ s = \mathrm{id}_U \right\}$$

der ***Raum der lokalen Schnitte*** *von $E \overset{p}{\twoheadrightarrow} X$ über U.*

Das tautologische Bündel $\mathrm{Taut}_{\mathbb{P}^n}$ auf $\mathbb{P}^n$

Es ist ja $\mathcal{G}(1, n+1) \xrightarrow[\gamma]{\sim} \mathbb{P}^n$, d.h. die Plücker-Einbettung γ ist hier ein Isomorphismus. Auf $\mathcal{G}(1, n+1)$ hat man das tautologische Bündel $U(1, n+1) \subseteq \mathcal{G}(1, n+1) \times k$.

> $\boxed{\text{SATZ 7.5.1.}}$ Das tautologische Bündel $\mathrm{Taut}_{\mathbb{P}^n_k} := U(1, n+1)$ ist ein Geradenbündel (*line bundle*) (d.h. Vektorbündel vom Rang 1), welches nicht trivial ist, und für welches gilt
>
> $$\dim_k \Gamma(\mathbb{P}^n_k, \mathrm{Taut}_{\mathbb{P}^n_k}) = n + 1.$$

Beweis. Betrachte für $i \in \{0, \cdots, n\}$ die Punkte

$$l_i := (0 : \ldots : \underset{(i)}{1} : \ldots : 0) \in D_+(X_i) \subseteq \mathbb{P}^n_k.$$

Es ist offenbar l_i in $\mathbb{A}_k^{n+1}$ die (punktierte) Gerade durch 0 und $e_i = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)$, mit

$$\bar{l}_i := l_i \cup \{0\} = k \cdot e_i = \operatorname{span}_k(e_i) \in \mathcal{G}(1, n+1).$$

Wir identifizieren $\mathcal{G}(1, n+1)$ mit $\mathbb{P}_k^n$ durch $l_i \leftrightarrow \bar{l}_i$ (und analog für sonstige Elemente, also jeweils durch Hinzunehmen/Weglassen des Nullpunktes).

Die Konstruktion einer Umgebung für l_i wie im Beweis von Satz 7.4.6 erfolgt dann über die Zerlegung

$$k^{n+1} = \bar{l}_i \oplus \left(\bigoplus_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq i}}^{n} k \cdot e_\nu \right)$$

Wir erhalten damit

$$\begin{aligned} U(l_i) &= \left\{ [a_j]_j \in \mathbb{P}_k^n \;\middle|\; k \cdot (a_j)_j \oplus \Big(\bigoplus_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq i}}^{n} k \cdot e_\nu \Big) = k^{n+1} \right\} \\ &= \{[a_j]_j \in \mathbb{P}_k^n \,|\, a_i \neq 0\} \\ &= D_+(X_i) \end{aligned}$$

Dann hat die Trivialisierung von $\mathrm{Taut}_{\mathbb{P}^n}$ auf U_i die folgende explizite Gestalt:

$$\begin{aligned} p^{-1}(D_+(X_i)) &\underset{\theta_i}{\overset{(p_i, r_i)}{\rightleftarrows}} D_+(X_i) \times k \\ ([a_j]_j, (b_j)_j) = ([a_j]_j, (\lambda \cdot a_j)_j) &\longmapsto ([a_j]_j, \lambda \cdot a_i) = ([a_j]_j, a_i) \\ \Big([a_j]_j, \tfrac{t}{a_i} \cdot (a_j)_j\Big) &\longleftarrow\!\!\shortmid ([a_j]_j, t) \end{aligned}$$

Damit ergeben sich für $i, j \in \{0, \cdots, n\}$ die folgenden Transitionsfunktionen für diese kanonische Trivialisierung von $\mathrm{Taut}_{\mathbb{P}^n}$:

$$\begin{tikzcd} & p^{-1}(U_i \cap U_j) = p^{-1}(D_+(X_i \cdot X_j)) \arrow[dl, shift left, "(p_j, r_j)"'] \arrow[dr, shift left, "(p_i, r_i)"] & \\ D_+(X_i \cdot X_j) \times k \arrow[ur, shift left, "\theta_j"] \arrow[rr, shift left, "\rho_{ij}"] & & D_+(X_i \cdot X_j) \times k \arrow[ul, shift left, "\theta_i"] \arrow[ll, shift left, "\rho_{ji}"] \end{tikzcd}$$

Dabei ist wie üblich $\rho_{ij} = (\square_1, g_{ij}(\square_1)(\square_2))$, also

$$\begin{aligned} ((p_j, r_j) \circ \theta_i)([a_l]_l, t) &= \rho_{ij}([a_l]_l, t) \\ &= ([a_l]_l, g_{ij}([a_j]_j)(t)) \\ &= ([a_l]_l, \frac{a_j}{a_i} \cdot t). \end{aligned}$$

Das heißt, es ist $g_{ji}([a_j]_j) = h_{\frac{a_j}{a_i}}$ als Homothetie ein Vektorraumisomorphismus von $p^{-1}([a_j]_j) = k \cdot (a_j)_j$.

Fazit. Die kanonische Trivialisierung $\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=0}^n D_+(X_i)$ von $\mathrm{Taut}_{\mathbb{P}^n}$ hat die Übergangsfunktionen

$$\begin{aligned} g_{ij} : D_+(X_i) \cap D_+(X_j) &\longrightarrow k^* \\ [a_l]_l &\longmapsto \frac{a_i}{a_j} \end{aligned}$$

Bestimmen wir nun den Schnittraum $\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathrm{Taut}_{\mathbb{P}^n})$. Sei $s \in \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathrm{Taut}_{\mathbb{P}^n})$, also

$$\mathbb{P}^n \xrightarrow{s} \mathrm{Taut}_{\mathbb{P}^n} \subseteq \mathbb{P}^n_k \times \mathbb{A}^{n+1}_k \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} \mathbb{A}^{n+1}_k \xrightarrow{p_i} k$$

s definiert also die lokalen Schnitte $s_i = s|_{D_+(X_i)}$, und diese ergeben durch Verkettung mit r_i (dem k-Anteil von (p_i, r_i)) eine reguläre Funktion $\hat{s}_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(D_+(X_i))$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}^n_k \arrow[r, shift left, "s"] & \mathrm{Taut}_{\mathbb{P}^n_k} \arrow[l, shift left, "p"] \arrow[r, "\subseteq"] & \mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^{n+1}_k \\
D_+(X_i) \arrow[u, "\cup\!\!\mid"] \arrow[r, shift left, "s_i"] \arrow[d, dotted, "\hat{s}_i"'] & \mathrm{Taut}_{\mathbb{P}^n_k}|_{D_+(X_i)} \arrow[l, shift left, "p_i"] \arrow[u, "\cup\!\!\mid"'] \arrow[d, "(p_i,r_i)", "\wr"'] \arrow[dl, "r_i"] & \\
k & D_+(X_i) \times k \arrow[l, two heads, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[ul, "\mathrm{pr}_1"'] &
\end{tikzcd}$$

Umgekehrt definiert ein solches $\hat{s}_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ einen lokalen Schnitt über $D_+(X_i)$.

Es gibt nun $n+1$ ausgezeichnete Schnitte aus $\Gamma(\mathbb{P}^n_k, \mathrm{Taut}_{\mathbb{P}^n_k})$, nämlich diejenigen, die lokal die Gestalt (für $\nu \in \{0, \cdots, n\}$)

$$\begin{aligned} s_i^{(\nu)} \circ (p_i, r_i) : D_+(X_i) &\longrightarrow D_+(X_i) \times k \\ [a_j]_j &\longmapsto \left([a_j]_j, \tfrac{a_\nu}{a_i}\right) \end{aligned}$$

haben. Diese lokalen Schnitte verkleben sich offenbar zu einem globalen Schnitt $s^{(\nu)}$, und das System $\left\{s^{(\nu)} \mid \nu \in \{0, \cdots, n\}\right\}$ ist offenbar k-linear unabhängig in $\Gamma(\mathbb{P}^n_k, \mathrm{Taut}_{\mathbb{P}^n_k})$. Damit muss

$$\dim_k \Gamma(\mathbb{P}^n_k, \mathrm{Taut}_{\mathbb{P}^n_k}) \geq n+1$$

sein, und Dimensionsüberlegungen führen zum Ergebnis, dass es sich sogar um Gleichheit handelt.

Fazit. Andererseits ist gilt für das entsprechende triviale Bündel $\dim_k \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n \times k) = 1$, denn $\mathbb{P}^n_k$ ist ja bekanntlich komplett. Damit ist $\mathrm{Taut}_{\mathbb{P}^n_k}$ nicht trivial.

□

Grassmannsche als Modulräume gewisser algebraischer Vektorbündel

Definition 7.59. *Sei X eine (irreduzible) Varietät über $k = \overline{k}$, $r, n \in \mathbb{N}$, $r \leq n$, $E_0 := X \times k^n$ das Produktbündel (triviale Vektorbündel) vom Rang n auf X. Dann sei* $\boxed{\mathscr{G}_{r,n}(X)}$

$$\mathscr{G}_{r,n}(X) := \{E \mid E \subseteq E_0, E \twoheadrightarrow X \textit{ Unterbündel vom Rang } r\}.$$

$\boxed{f^*E}$ *Für* $(X \xrightarrow{f} Y) \in \mathrm{Mor}_{\underline{\mathrm{Var}}_k}$ *und* $E \in \mathscr{G}_{r,n}(X)$ *sei weiterhin*

$$f^*E := \{(y,\xi) \in Y \times k^n \mid p(\xi) = \varphi(y)\} \subseteq Y \times k^n$$

das ***Pullback-Bündel*** *zu* E *über* Y.

Satz 7.5.2.

$$\begin{aligned} \mathscr{G}_{r,n} : \underline{\mathrm{Var}}_k &\longrightarrow \underline{\mathrm{Ens}} \\ X &\longmapsto \mathscr{G}_{r,n}(X) \\ (Y \xrightarrow{f} X) &\longmapsto \mathscr{G}_{r,n}(f) := \ f^*\square : \mathscr{G}_{r,n}(X) \to \mathscr{G}_{r,n}(Y) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad E \mapsto f^*E \end{aligned}$$

ist ein kontravarianter Funktor.

Beweis. Beginnen wir mit der Wohldefiniertheit des Morphismen-Anteils des Funktors.

Seien $X, Y \in \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{Var}}_k)$, $E \subseteq X \times k^n$ ein Rang-r-Untervektorbündel, also $(E \overset{p}{\twoheadrightarrow} X) \in \mathscr{G}_{r,n}(X)$, $(\varphi : Y \to X) \in \mathrm{Mor}(\underline{\mathrm{Var}}_k)$. Dann haben wir ja das Diagramm:

$$\begin{tikzcd} Y \times E \arrow[r, "\pi_E"] \arrow[d, "\pi_Y"'] & E \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d, "p"] & X \times k^n \\ Y \arrow[r, "\varphi"] & X & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} Y \underset{(\varphi,p)}{\times} E \arrow[rr, "\varphi'"] \arrow[dd, "p'"'] \arrow[dr, phantom, "\subseteq"] & & E \arrow[dd, "p"] \\ & Y \times E \arrow[ur, "\pi_E"] \arrow[dl, "\pi_Y"] & \\ Y \arrow[rr, "\varphi"'] & & X \end{tikzcd}$$

In dieser Situation haben wir ja das übliche Faserprodukt:

$$\begin{aligned} Y \underset{(\varphi,p)}{\times} E &= \{(y,(x,\xi)) \in Y \times E \mid \varphi(y) = x\} \\ &= \{(y,(\varphi(y),\xi)) \mid y \in Y, (\varphi(y),\xi) \in E\} \\ &= \left\{(y,(\varphi(y),\xi)) \mid y \in Y, \xi \in E_{\varphi(y)}\right\} \\ &= \widetilde{Y \times E}_{p\circ\pi_E,\varphi\circ\pi_Y} \end{aligned}$$

Weil nun X als Varietät separiert ist, ist dies abgeschlossene Untervarietät von $Y \times E$, also ein algebraischer Faserraum. Dabei gilt:

$$p'^{-1}((y,\varphi(y))) = \{y\} \times p^{-1}(\varphi(y)) = \{y\} \times (\{\varphi(y)\} \times E_{\varphi(y)}) \cong E_{\varphi(y)} \cong k^r$$

Es ist also $Y \underset{(\varphi,p)}{\times} E \overset{p'}{\twoheadrightarrow} \Gamma_\varphi$ ein algebraischer Faserraum, wobei die Fasern Vektorräume sind, also sogar Vektorbündel über Γ_φ. Außerdem haben wir ja $\varphi^*E \subseteq Y \times k^n$, welches nun über den Graphen-Isomorphismus $\gamma_\varphi : Y \to \Gamma_\varphi$ isomorph zu $Y \underset{(f,p)}{\times} E$ ist:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[d, equal] & Y \underset{(\varphi,p)}{\times} E \arrow[l, two heads, "p'"'] \arrow[r, "\subseteq"] & \Gamma_\varphi \times k^n \subseteq (Y \times X) \times k^n \\
Y & \varphi^* E \arrow[l, two heads, "p''"] \arrow[r, "\subseteq"'] \arrow[u, "\wr"', "\gamma_\varphi \times \mathrm{id}|\ldots"] & Y \times k^n \arrow[u, "\wr"', "\gamma_\varphi \times \mathrm{id}"]
\end{tikzcd}$$

Es ist also auch $\varphi^* E \overset{p''}{\twoheadrightarrow} Y$ ein algebraischer Faserraum, und dabei ist für $y \in Y$:

$$p''^{-1}(y) = \{y\} \times E_{\varphi(y)} \cong E_{\varphi(y)} \cong k^r$$

ein r-dimensionaler Vektorraum. $\varphi^* E$ ist auch lokal trivial (mit der von E geerbten Trivialisierung), also Untervektorbündel vom Rang r von $Y \times k^n$.

Es ist für $(Y \xrightarrow{f} X) \in \mathrm{Mor}(\underline{\mathrm{Var}_k})$ also $\mathscr{G}_{r,n}(\varphi) : \mathscr{G}_{r,n}(X) \to \mathscr{G}_{r,n}(Y)$ eine wohldefinierte Mengenabbildung. Prüfen wir nun die Funktoreigenschaft, also die Verträglichkeit mit Verkettung und Identität (letzteres ist klar: $(\mathrm{id}_X)^* E = E$).

Für Morphismen $Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$ muss dabei gelten $(f \circ g)^* E = g^*(f^* E)$.

Rechnen wir dies einfach aus:

$$\begin{aligned}
(f \circ g)^* E &= \{(z, \xi) \in Z \times k^n \mid ((f \circ g)(z), \xi) \in E\} \\
&= \{(z, \xi) \in Z \times k^n \mid (f(g(z)), \xi) \in E\} \\
&= \{(z, \xi) \in Z \times k^n \mid (g(z), \xi) \in f^* E\} \\
&= g^*(f^* E)
\end{aligned}$$

Fazit. Es ist $\mathscr{G}_{r,n} : \underline{\mathrm{Var}_k} \to \underline{\mathrm{Ens}}$ tatsächlich ein kontravarianter Funktor. $\square$

Definition 7.60. *Der Funktor* $\mathscr{G}_{r,n} : \underline{\mathrm{Var}_k} \longrightarrow \underline{\mathrm{Ens}}$ *heißt auch* ***Grassmann-Funktor*** *zu* (r,n).

Bemerkung. Man hat auch ein ganz spezielles Rang-r-Unterbündel eines trivialen Rang-n-Bündels auf einer speziellen Varietät, nämlich das tautologische Bündel

$$U(r,n) \overset{p}{\twoheadrightarrow} \mathcal{G}(r,n),$$

d.h. es ist $U(r,n) \in \mathscr{G}_{r,n}(\mathcal{G}(r,n))$.

> $\boxed{\text{Satz 7.5.3.}}$ Sei $(r,n) \in \mathbb{N}^2$ mit $r \leq n$. Dann ist der Grassmann-Funktor $\mathscr{G}_{r,n} : \underline{\mathrm{Var}_k} \longrightarrow \underline{\mathrm{Ens}}$ ein darstellbarer Funktor.
> Genauer: Es sind $\mathscr{G}_{r,n}$ und $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Var}_k}}(\square, \mathcal{G}(r,n))$ zueinander isomorphe Funktoren, via der Funktorisomorphismen ($\forall X \in \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{Var}_k})$):
>
> $$\begin{aligned}
> \mathscr{G}_{r,n}(X) &\longleftrightarrow \mathrm{Mor}_{\underline{\mathrm{Var}_k}}(X, \mathcal{G}(r,n)) \\
> (X \times k^n \supseteq E \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} X) &\longmapsto \nu_E : X \to \mathscr{G}(r,n) \\
> &\qquad\qquad x \mapsto E_x = \mathrm{pr}_2(\pi^{-1}(x)) \subseteq k^n \\
> f^* U(r,n) = X \underset{f,p}{\times} U(r,n) &\longleftarrow\!\shortmid (f : X \to \mathcal{G}(r,n))
> \end{aligned}$$

Bemerkung. Anders formuliert: Das Bündel $U(r,n) \xrightarrow{p} \mathcal{G}(r,n)$ induziert – via Morphismen nach $\mathscr{G}(r,n)$ – alle Rang-r-Untervektorbündel des trivialen Rang-n-Vektorbündels auf beliebigen Varietäten.

Definition 7.61. *Deswegen heißt $U(r,n) \xrightarrow{p} \mathcal{G}(r,n)$ auch das* ***universelle Bündel*** *auf $\mathcal{G}(r,n)$ oder auch* ***universelles Grassmann-Bündel*** *vom Rang r.*

Beweis von Satz 7.5.3. $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Var}}_k}(\square, \mathcal{G}(r,n)) = \mathrm{Mor}(\square, \mathcal{G}(r,n))$ ist offenbar ebenso ein kontravarianter Funktor von $\underline{\mathrm{Var}}_k$ nach $\underline{\mathrm{Ens}}$ wie $\mathscr{G}_{r,n}$.

Wir müssen also nun zeigen, dass die im Satz erwähnten Abbildungen (für alle X) jeweils $\underline{\mathrm{Ens}}$-Isomorphismen (also Bijektionen) sind, und zueinander invers, und die üblichen Kompatibilitätsbedingungen gelten.

Sei also $X \in \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{Var}}_k)$ eine Varietät und $(E \xrightarrow{p} X) \in \mathscr{G}_{r,n}(X)$. Für $x \in X$ ist ja dann $p^{-1}(x) = \{x\} \times E_x$, mit $E_x \subseteq k^n$, $\dim_k E_x = r$, also $E_x \in \mathcal{G}(r,n)$. Wir definieren damit

$$\begin{aligned} \Phi(X) : \mathscr{G}_{r,n}(X) &\longrightarrow \mathrm{Mor}(X, \mathcal{G}(r,n)) \\ E &\longmapsto f_E : X \to \mathcal{G}(r,n) \\ &\qquad\qquad x \mapsto E_x \end{aligned}$$

Wir müssen noch zeigen, dass die so definierten $f_E = \Phi(X)(E)$ wirklich Funktormorphismen sind. Sei etwa $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ (endliche) trivialisierende Überdeckung für E, mit $h_i : p^{-1}(U_i) \xrightarrow{\sim} U_i \times k^r$. Greifen wir uns ein $i \in I$ heraus mit $x \in U_i$, und sei

$$g : U_i \times k^r \xrightarrow{\sim} p^{-1}(U_i) \subseteq U_i \times k^n$$

der inverse Morphismus zu h_i. Dabei ist $g_i(x,\xi) = (x, w_i(x)(\xi))$, mit einem linearen Morphismus $w_i(x)$. $w_i(x)$ lässt sich dann als Matrix darstellen:

$$G_i(x) := B_{E_r}^{E_n}(w_i(x))^t = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1r}(x) & \dots & a_{rn}(x) \end{pmatrix} \in M_k(r,n)$$

mit $a_{\nu\mu} \in \mathcal{O}_X(U)$, also $G_i \in M_{\mathcal{O}_X}(r,n)$. (Hierbei ist $g_i(x,(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)) = (x,(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)G(x))$.) Offenbar ist $E_x = \mathrm{pr}_2(g_i(\{x\} \times k^r)) = \mathrm{Zeil}(G_i(x))$. Als Diagramm:

$$\begin{tikzcd} U_i \arrow[r, "G_i"] \arrow[dr, "f_E"'] & M_k^r(r,n) \arrow[d, "\mathrm{Zeil}"] \\ & \mathcal{G}(r,n) \end{tikzcd}$$

Es ist also $f_E = \mathrm{Zeil} \circ G_i$, also auch ein Morphismus, $\Phi(X)$ ist also wohldefiniert.

Es bleiben die Kompatibilitätsbedigungen für $\varphi \in \mathrm{Mor}(Y,X)$ zu überprüfen. Wir müssen zeigen, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathscr{G}_{r,n}(X) \arrow[r, "\Phi(X)"] \arrow[d, "\mathscr{G}_{r,n}(\varphi)"'] & \mathrm{Mor}_{\underline{\mathrm{Var}}_k}(X, \mathcal{G}(r,n)) \arrow[d, "\hom(\varphi)"] \\ \mathscr{G}_{r,n}(Y) \arrow[r, "\Phi(Y)"'] & \mathrm{Mor}_{\underline{\mathrm{Var}}_k}(Y, \mathcal{G}(r,n)) \end{tikzcd}$$

kommutiert. Für $E \in \mathscr{G}_{r,n}(X)$ und $y \in Y$ ist

$$\begin{aligned}(\hom(\varphi) \circ \Phi(X))(E)(y) &= \hom(\varphi)(f_E)(y)\\ &= (f_E \circ \varphi)(y)\\ &= f_E(\varphi(y))\\ &= E_{\varphi(y)}\\ &= (\varphi^* E)_y\\ &= f_{\varphi^* E}(y)\\ &= \Phi(Y)(\varphi^* E)(y)\\ &= (\Phi(Y) \circ \mathscr{G}_{r,n}(\varphi))(E)(y)\end{aligned}$$

Das heißt, es ist wirklich

$$\hom(\varphi) \circ \Phi(X) = \Phi(Y) \circ \mathscr{G}_{r,n}(\varphi),$$

d.h. $\Phi : \mathscr{G}_{r,n} \to \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Var}}_k}(\square, \mathcal{G}(r,n))$ ist Funktormorphismus.

Als Funktormorphismus in die andere Richtung nehmen wir

$$\begin{aligned}\Psi : \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Var}}_k}(\square, \mathcal{G}(r,n)) &\longrightarrow \mathscr{G}_{r,n}\\ \Psi(X) : \mathrm{Mor}(X, \mathcal{G}(r,n)) &\longrightarrow \mathscr{G}_{r,n}(X)\\ (X \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}(r,n)) &\longmapsto \varphi^* U(r,n)\end{aligned}$$

$\Psi(X)$ ist a priori wohldefiniert, denn das Pullback eines Vektorbündels aus $\mathscr{G}_{r,n}(\mathcal{G}(r,n))$ (des tautologischen Bündels $U(r,n) \subseteq \mathcal{G}(r,n) \times k^n$) ist natürlich ein Vektorbündel aus $\mathscr{G}_{r,n}(X)$.

Betrachten wir die Kompatibilitätsbedingungen:

$$f \longmapsto f^* U(r,n)$$

$$\begin{tikzcd} f \arrow[d, mapsto] & \mathrm{Mor}(X, \mathcal{G}(r,n)) \arrow[r, "\Psi(X)"'] \arrow[d, "\hom(\varphi)"] & \mathscr{G}_{r,n}(X) \arrow[d, "\mathscr{G}_{r,n}(\varphi)"] & E \arrow[d, mapsto] \\ f \circ \varphi & \mathrm{Mor}(Y, \mathcal{G}(r,n)) \arrow[r, "\Psi(Y)"] & \mathscr{G}_{r,n}(Y) & \varphi^* E \end{tikzcd}$$

$$g \longmapsto g^* U(r,n)$$

Für $f \in \mathrm{Mor}(X, \mathcal{G}(r,n))$ und $(Y \xrightarrow{\varphi} X)$ ist die Kommutativitätsbedingung gerade in der Form

$$\varphi^*(f^* U(r,n)) = (f \circ \varphi)^* U(r,n)$$

Das ist gerade die Funktorbedingung für $\mathscr{G}_{r,n}$ und wurde bereits bewiesen.

Ψ ist also wirklich ein Funktormorphismus. Untersuchen wir nun die objektweise Verkettung der Funktoren: Für $X \in \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{Var}}_k)$ und $E \in \mathscr{G}_{r,n}(X)$ ist

$$\begin{aligned}(\Psi(X) \circ \Phi(X))(E) &= \Psi(X)(f_E) \\ &= f_E^* U(r,n) \\ &= \bigcup_{x \in X} \{x\} \times U(r,n)_{E_x} \\ &= \bigcup_{x \in X} \{x\} \times E_x \\ &= E,\end{aligned}$$

also $\Psi(X) \circ \Phi(X) = \mathrm{id}_{\mathscr{G}_{r,n}(X)}$. Umgekehrt gilt für $X \in \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{Var}}_k)$, $g \in \mathrm{Mor}(X, \mathcal{G}(r,n))$, $x \in X$:

$$\begin{aligned}(\Phi(X) \circ \Psi(X))(h)(x) &= (\Psi(X)(h^* U(r,n)))(x) \\ &= f_{h^* U(r,n)}(x) \\ &= h^* U(r,n)_x \\ &= U(r,n)_{h(x)} \\ &= h(x),\end{aligned}$$

also $(\Phi(X) \circ \Psi(X))(h) = h$, $\Phi(X) \circ \Psi(X) = \mathrm{id}_{\mathrm{Mor}(X, \mathcal{G}(r,n))}$. Es sind also wirklich Ψ und Φ zueinander inverse Funktorisomorphismen, $\mathscr{G}_{r,n}$ ist wirklich ein darstellbarer Funktor. $\square$

Teil V

(Ko-)Homologietheorien und ihre Anwendung

Überblick der Vorlesung

§1 Auftakt: Prototyp einer (Ko-)Homologietheorie: Singuläre Homologie topologischer Räume

§2 Homologie und Kohomologie mit allgemeinen Koeffizienten, Homotopiekategorien

§3 Exakte Homologiesequenzen

§4 Homologische Algebra in abelschen Kategorien und (abstrakten) Garben

§5 *(Überschrift fehlt)*

- Geometrische oder konkrete Garben
- Prägarben,
- Limes-Funktoren
- Garben und ihre (Grothendiek-)Kohomologie

8 (Ko-)Homologietheorien und ihre Anwendung

8.1 Auftakt: Prototyp einer (Ko-)Homologietheorie: Singuläre Homologie topologischer Räume

Definition 8.1. *Seien $n, q \in \mathbb{N}_0$ mit $q \leq n$. Ein q-**Simplex** ist die konvexe Hülle von $q+1$ Punkten im $\mathbb{R}^n$ in allgemeiner Lage.*

Bemerkung. Das heißt, wir haben $\{p_0, \cdots, p_q\} \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\{p_1 - p_0, \cdots, p_q - p_0\}$ linear unabhängig sind. Dann ist $\boxed{\text{Aff}}$ $\boxed{\text{conv}}$

$$\begin{aligned}\text{Aff}(p_0, \cdots, p_q) &:= p_0 + \text{span}_{\mathbb{R}}(p_1 - p_0, \cdots, \cdots, p_q - p_0)\\ &= \left\{ p_0 + \sum_{i=1}^{q} t_i \cdot (p_i - p_0) \,\middle|\, t_i \in \mathbb{R} \right\}\\ &= \left\{ \sum_{i=0}^{q} t_i \cdot p_i \,\middle|\, t_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^{q} t_i = 1 \right\}\end{aligned}$$

ein q-dimensionaler affiner Unterraum des $\mathbb{R}^n$, und

$$\begin{aligned}\text{conv}(p_0, \cdots, p_q) &:= \text{conv}(p_0, \cdots, p_q)\\ &:= \left\{ \sum_{i=0}^{q} t_i \cdot p_i \,\middle|\, t_i \in \mathbb{R}^{\geq 0}, \sum_{i=0}^{q} = 1 \right\}\\ &= \bigcap_{\substack{C \subseteq \mathbb{R}^n \\ \{p_0, \cdots, p_q\} \subseteq C \\ C \text{ konvex}}} C\end{aligned}$$

ist die kleinste konvexe Menge, die $\{p_0, \cdots, p_q\}$ enthält. Es ist offenbar $\text{conv}(p_0, \cdots, p_q) \subsetneqq \text{Aff}(p_0, \cdots, p_q)$ auch q-dimensional, und ein q-Simplex. (Und alle q-Simplices haben diese Form.)

Definition 8.2. *Das Simplex* $\boxed{\Delta_q}$

$$\Delta_q := \left\{ (a_0, \cdots, a_q) \in \mathbb{R}^{q+1} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{q} a_i = 1, a_i \geq 0 \right\} = \text{conv}(e_0, \cdots, e_q)$$

*heißt das **Standard-q-Simplex** im $\mathbb{R}^{q+1}$.*

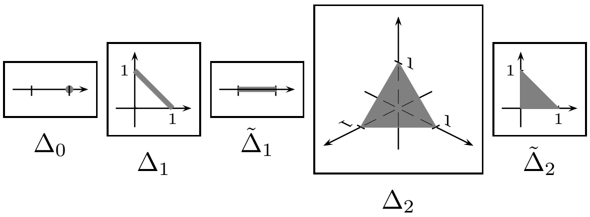


Abbildung 8.1: Die ersten paar Standard-Simplices $\Delta_q \subset \mathbb{R}^{q+1}$ und ihre Äquivalente im $\mathbb{R}^q$

Beispiel 8.1.1. Die ersten paar Standardsimplices sind (siehe Abbildung 8.1):

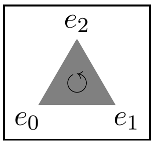
$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \{a \in \mathbb{R} \mid a = 1\} \\ &= \{1\} \\ \Delta_1 &= \{(a, 1-a) \in \mathbb{R}^r \mid a \in [0,1]\} \\ &\cong \tilde{\Delta}_1 = [0,1] \\ \Delta_2 &= \operatorname{conv}(e_0, e_1, e_2) \subseteq \mathbb{R}^{2+1} \\ &\cong \tilde{\Delta}_2 = \left\{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid s,t \geq 0, s+t \leq 1\right\} \end{aligned}$$

Bemerkung. Δ_q hängt nicht von der Reihenfolge der Eckpunkte $e_0, e_1, \cdots, e_q$ ab, denn es ist $\operatorname{conv}(e_1, \cdots, e_q) = \operatorname{conv}(e_{\sigma(1)}, \cdots, e_{\sigma(q)})$ für alle Permutationen $\sigma \in \mathfrak{S}_{q+1}$.

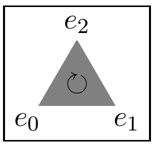
Definition 8.3. *Eine Wahl der Reihenfolge der Ecken $i_0, \cdots, i_q$ bzw. eine Wahl einer Permutation $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & \dots & q \\ i_0 & i_1 & \dots & i_q \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{S}_{q+1}$ heißt eine **Orientierung** von Δ_q.*

$\boxed{\sim}$ *Zwei Orientierungen $(i_0, \cdots, i_q)$ und $(j_0, \cdots, j_q)$ heißen **äquivalent** (geschrieben $(i_0, \cdots, i_q) \sim (j_0, \cdots, j_q)$), falls*

$$\operatorname{sgn}\left(\begin{smallmatrix} i_0 & i_1 & \dots & i_q \\ j_0 & j_1 & \dots & j_q \end{smallmatrix}\right) = 1.$$



Δ_2 positiv



Δ_2 negativ

*Man hat damit zwei Orientierungsklassen: Orientierungen in $[(0,1,\cdots,q)]_\sim$ heißen **positive Orientierung**, jede andere Orientierung (also $[(i_0,\cdots,i_q)]_\sim$ mit $\operatorname{sgn}\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & \dots & q \\ i_0 & i_1 & \dots & i_q \end{smallmatrix}\right) = -1$) heißt **negative Orientierung**.*

Beispiel 8.1.2. In Δ_2 ist also $(0,1,2)$ eine positive Orientierung, $(1,0,2)$ eine negative Orientierung.

Bemerkung. $\Delta_q \subset \mathbb{R}^{q+1}$ ist kompakt und hat einen Rand $\partial(\Delta_q) = \Delta_q \backslash \Delta_q^o$, der wiederum eine Vereinigung von $q-1$-Simiplices ist. $\partial(\Delta_q)$ setzt sich aus Komponenten zusammen:

$$\partial(\Delta_q) = \bigcup_{i=0}^{q} F_q^i(\Delta_q),$$

mit

$$\begin{aligned} F_q^i(\Delta_q) &= \{(a_0, \cdots, a_q) \in \Delta_q \mid a_i = 0\} \\ &= \operatorname{conv}(e_0, \cdots, \cancel{e_i}, \cdots, e_q) \end{aligned}$$

Jede Orientierung $(i_0, \cdots, i_q)$ von Δ_q induziert dabei eine Orientierung auf den $F_q^i(\Delta_q)$.

Exakte Konstruktion der singulären Homologie

Definition 8.4. *Sei X ein topologischer Raum. Für alle $q \in \mathbb{N}_0$ heißt* $\boxed{S_q(X)}$

$$S_q(X) := \{\sigma : \Delta_q \to X \mid \sigma \textit{stetig}\}$$

*die Menge der **singulären q-Simplices** in X.*

Definition 8.5. *Sei R ein Ring (z.B. $R = \mathbb{Z}$), X immer noch ein topologischer Raum. Dann heißt* $\boxed{C_q(X,R)}$

$$C_q(X,R) := F_R(S_q(X))$$

*der R-Modul der **singulären q-Ketten** in X mit Koeffizienten aus R.*

Erinnerung. Es war $F_R(S_q(X))$ der freie R-Modul mit Basis $S_q(X)$, also

$$\begin{aligned} C_q(X,R) &= \{\xi : S_q(X) \to \mathbb{R} \mid \xi(\sigma) = 0 \text{ p. p.}\} \\ &= \left\{ \sum_{\sigma \in S_q(X)} n_\sigma \cdot \sigma \,\middle|\, n_\sigma \in R, n_\sigma = 0 \text{ p. p.} \right\} \end{aligned}$$

In der letzteren Darstellung handelt es sich um formale Linearkombinationen der singulären Simplices (jeweils nur endlich vieler).

Beispiel 8.1.3. Für $q = 0$ haben wir

$$\begin{aligned} S_0(X) &= \{\sigma : \{1\} \to X \mid \sigma \text{ stetig}\} \\ &\cong X \\ C_q(X,R) &\cong F_R(X) = \bigoplus_{x \in X} R \cdot x. \end{aligned}$$

Für $q = 1$ ergibt sich $\boxed{\operatorname{arc}(X)}$

$$\begin{aligned} S_1(X) &= \{\sigma : \Delta_1 \to X \mid \sigma \text{ stetig}\} \\ &\cong \{\sigma : [0,1] \to X \mid \sigma \text{ stetig}\} \\ &=: \operatorname{arc}(X), \end{aligned}$$

die Menge der *Wege* in X. Damit ist

$$C_1(X,R) = \bigoplus_{\sigma \in \operatorname{arc}(X)} R \cdot \sigma$$

Diese Gruppen/Moduln sind i.a. riesig (und werden mit steigendem q noch größer), wir suchen aber endliche Invarianten.

Definition 8.6. *Für $q \in \mathbb{N}$ und $i \in \{0, \cdots, q\}$ hat man die Abbildungen* $\boxed{F_q^i}$

$$\begin{aligned} F_q^i : \Delta_{q-1} &\longrightarrow \Delta_q \\ (a_0, \cdots, a_{q-1}) &\longmapsto (a_0, \cdots, \underset{i}{0}, \cdots, a_{q-1}) \end{aligned}$$

Bemerkung. F_q^i ist auf die Art sogar definiert als affine Einbettung $\mathbb{R}^q \hookrightarrow \mathbb{R}^{q+1}$ (mit $F_i^q(\mathbb{R}^q) = \operatorname{Aff}(e_0, \cdots, \cancel{e_i}, \cdots, e_q)$) und ist stetig und auch auf Δ_{q-1} eine abgeschlossene Einbettung.

> $\boxed{\text{LEMMA.}}$ Betrachte $q \in \mathbb{N}$, $j \in \{0, \cdots, q+1\}$, $i \in \{0, \cdots, j\}$. Dann ist das folgende Diagramm kommutativ:
>
> $$\begin{tikzcd} \Delta_{q-1} \arrow[r, "F_q^i"] \arrow[d, "F_q^{j-1}"'] & \Delta_q \arrow[d, "F_{q+1}^j"] \\ \Delta_q \arrow[r, "F_{q+1}^i"'] & \Delta_{q+1} \end{tikzcd}$$
>
> In einer Zeile:
>
> $$F_{q+1}^j \circ F_q^i = F_{q+1}^i \circ F_q^{j-1}$$

Beweis-Skizze. Berechne $(F_{q+1}^j \circ F_q^i)(a_0, \cdots, a_q)$ und $(F_{q+1}^i \circ F_q^{j-1})(a_0, \cdots, a_q)$ für die einzelnen Komponenten, mit Fallunterscheidungen. (Übung.) $\square$

$$\begin{tikzcd} \Delta_q \arrow[r, "\sigma"] & X \\ \Delta_{q-1} \arrow[u, "F_q^i"] \arrow[ur, "(\sigma \circ F_q^i) \in S_{q-1}(X)"'] & \end{tikzcd}$$

Dieses elementare Lemma erlaubt uns nun die Konstruktion der R-Modul-Homomorphismen ∂_q.

Definition 8.7. *Sei $\sigma \in S_q(X)$, also $\sigma : \Delta_q \to X$ stetig. Dann heißt*

$$\partial_q(\sigma) := \sum_{i=0}^{i} (-1)^i \sigma \circ F_q^i$$

der ***formale Rand*** *von σ.*

Es ist offenbar $\partial_q(\sigma) \in C_{q-1}(X, R)$ (für jeden Ring R, mittels dem kanonischen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to R$).

$\boxed{\partial_q}$

Definition 8.8. *Für $\xi \in C_q(X, R)$, etwa $\xi = \sum_{\sigma \in S_q(X)} n_\sigma \cdot \sigma$, definiert man ∂_q durch lineare Fortsetzung:*

$$\partial_q(\xi) := \sum_{\sigma \in S_q(X)} n_\sigma \cdot \partial_q(\sigma) = \sum_{\sigma \in S_q(X)} n_\sigma \cdot \sum_{i=0}^{q} (-1)^i (\sigma \circ F_q^i)$$

Dadurch wird $\partial_q : C_q(X, R) \to C_q(X, R)$ zu einem wohldefinierten R-Modulhomomorphismus.

Definition 8.9. *Für $q \in \mathbb{Z}$ mit $q < 0$ definieren wir noch*

$$C_q(X, R) := (0)$$

und entsprechend

$$\partial_{q+1} := 0$$

$\boxed{C_\bullet(X, R)}$

Wir erhalten die (unendliche) Sequenz von Modulhomomorphismen:

$$C_\bullet(X, R) := \Big(\xrightarrow{\partial_{q-1}} C_q(X, R) \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1}(X, R) \xrightarrow{\partial_{q-1}} C_{q-2} \to \dots$$
$$\dots \xrightarrow{\partial_2} C_1(X, R) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X, R) \xrightarrow{\partial_0 = 0} C_{-1}(X, R) = (0) \to \dots \Big)$$

$\boxed{H_n(X,R)}$

$\boxed{\text{Satz 8.1.1.}}$ Für alle $q \in \mathbb{Z}$ gilt:

(1) $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$ (d.h. $C_\bullet(X,R)$ ist ein Komplex von R-Moduln.)

(2) $\mathrm{im}(\partial_{q+1}) \subseteq \ker(\partial_q)$, und damit sind die Faktormoduln

$$H_n(X,R) := \ker(\partial_q) / \mathrm{im}(\partial_{q+1})$$

wohldefinierte R-Moduln.

Beweis.

(1) Für $q \leq 1$ ist dies klar, denn hier ist $\partial_{q-1} = 0$. Sei also $q \geq 2$. Es genügt zu zeigen, dass für $\sigma \in S_q(X)$ immer $(\partial_{q-1} \circ \partial_q)(\sigma) = 0$ ist. Rechnen wir dies aus:

$$\begin{aligned}
(\partial_{q-1} \circ \partial_q)(\sigma) &= \partial_{q-1}\left(\sum_{i=0}^{q}(-1)^i(\sigma \circ F_q^i)\right) \\
&= \sum_{i=0}^{q}(-1)^i \partial_{q-1}\left(\sigma \circ F_q^i\right) \\
&= \sum_{i=0}^{q}(-1)^i \sum_{j=0}^{q-1}(-1)^j\left(\sigma \circ F_q^i \circ F_{q-1}^j\right) \\
&= \sum_{\substack{(i,j)\\ j<i}}(-1)^{i+j}\left(\sigma \circ F_q^i \circ F_{q-1}^j\right) + \sum_{\substack{(i,j)\\ j\geq i}}(-1)^{i+j}\left(\sigma \circ F_q^i \circ F_{q-1}^j\right)
\end{aligned}$$

Mit unserem Lemma wird das

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{(i,j)\\ j<i}}(-1)^{i+j}\left(\sigma \circ F_q^j \circ F_{q-1}^{i-1}\right) + \sum_{\substack{(i,j)\\ j\geq i}}(-1)^{i+j}\left(\sigma \circ F_q^i \circ F_{q-1}^j\right) \\
&= \sum_{\substack{(i',j')\\ j'\geq i'}}(-1)^{i'+j'+1}\left(\sigma \circ F_q^{i'} \circ F_{q-1}^{j'}\right) + \sum_{\substack{(i,j)\\ j\geq i}}(-1)^{i+j}\left(\sigma \circ F_q^i \circ F_{q-1}^j\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

(2) ist einfach eine Folgerung aus (1). □

Definition 8.10.

$\boxed{Z_q(X,R)}$ $\boxed{B_q(X,R)}$ $\boxed{H_q(X,R)}$

- $Z_q(X,R) := \ker(\partial_q)$ *heißt Untermodul der q-**Zyklen** von X bezüglich R.*
- $B_q(X,R) := \mathrm{im}(\partial_{q+1})$ *heißt Untermodul der q-**Ränder** von X.*
- *Die Faktorgruppe* $H_q(X,R) := Z_q(X,R) / B_q(X,R)$ *heißt die q-**te Homologiegruppe** bzw. q-**ter Homologiemodul** von X mit Koeffizienten aus R.*

$\boxed{H_\bullet(X,R)}$

- *Der Produktmodul*
$$H_\bullet(X,R) := \bigtimes_{q\in\mathbb{Z}} H_q(X,R)$$
heißt die ***Homologie*** *von X mit Koeffizienten in R.*

Bemerkung.

(a) $C_q(X,R)$ ist frei (oder 0-Modul), aber $Z_q(X,R)$ und $B_q(X,R)$ müssen i.a. nicht frei sein.

(b) $C_q(X,R)$ ist ein „Monstrum" (es ist etwa schon $C_0(X,R) = \bigoplus_{x\in X} R\cdot x$), auch $Z_q(X,R)$ und $B_q(X,R)$ können sehr groß sein. In den „guten Fällen" wird aber zumindest $H_q(X,R)$ handhabbar (oder gar „freundlich").

Fragen.

(1) Was leisten die Homologiegruppen $H_q(X,R)$ mit $q\geq 0$? Welche topologischen Eigenschaften von $X\in \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{Top}})$ reflektieren die diskreten Objekte $H_q(X,R)$?

(2) Wie gut sind die Gruppen/Moduln $H_q(X,R)$ berechenbar?

(3) Wie steht es mit der Funktorialität? Sind $H_q(\square,R)$ Funktoren zwischen $\underline{\mathrm{Top}}$ und $\underline{\mathrm{Mod}_R}$?

Wir beginnen mit der einfachsten Frage (3).

$\boxed{C_q(f)}$

Definition 8.11. *Seien X, Y topologische Räume, $f: X\to Y$ stetiger Abbildung (d.h. Morphismus in $\underline{\mathrm{Top}}$), R fester Ring, $q\in\mathbb{Z}$. Dann sei*
$$\begin{aligned} C_q(f): C_q(X,R) &\longrightarrow C_q(Y,R)\\ S_q(X)\ni(\sigma:\Delta_q\to X) &\longmapsto (f\circ\sigma:\Delta_q\to Y)\in S_q(Y)\end{aligned}$$
und mit linearer Fortsetzung:
$$\sum_{\sigma\in S_q(X)} n_\sigma\cdot\sigma \longmapsto \sum_{\sigma\in S_q(X)} n_\sigma\cdot(f\circ\sigma)$$

Durch die Definition wird offenbar $C_q(f)\in \mathrm{Hom}_R(C_q(X,R),C_q(Y,R))$.

$\boxed{\text{Satz 8.1.2.}}$ Seien X, Y, R wie oben. Dann gilt:

(a) Für $q \in \mathbb{Z}$ ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
C_{q+1}(X,R) \arrow[r, "C_{q+1}(f)"] \arrow[d, "\partial^X_{q+1}"'] & C_{q+1}(Y,R) \arrow[d, "\partial^Y_{q+1}"] \\
C_q(X,R) \arrow[r, "C_q(f)"'] & C_q(Y,R)
\end{tikzcd}$$

kommutativ.

(b) Die Folge $(C_q(f))_{q\in\mathbb{Z}}$ definiert einen Morphismus der Kettenkomplexe, d.h. ein System von kommutativen Diagrammen:

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r, "\partial_{q+2}"] \arrow[d] & C_{q+1}(X) \arrow[r, "\partial_{q+1}"] \arrow[d, "C_{q+1}(f)"] & C_q(X) \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d, "C_{q+1}(f)"] & C_{q-1}(X) \arrow[r, "\partial_{q-1}"] \arrow[d, "C_{q+1}(f)"] & \ldots \arrow[d] \\
\ldots \arrow[r, "\partial_{q+2}"] & C_{q+1}(Y) \arrow[r, "\partial_{q+1}"'] & C_q(Y) \arrow[r, "\partial_q"'] & C_{q-1}(Y) \arrow[r, "\partial_{q-1}"'] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Beweis. (b) ist offenbar eine Folgerung von (a).

Wir prüfen also, ob das gegebene Diagramm kommutativ ist. Sei $\xi \in C_{q+1}(X,R)$, etwa $\xi = \sum_\sigma n_\sigma \cdot \sigma$. Dann ist

$$\begin{aligned}
(C_q(f) \circ \partial^X_{q+1})(\xi) &= (C_q(f) \circ \partial^X_{q+1}) \left(\sum_\sigma n_\sigma \cdot \sigma \right) \\
&= \sum_\sigma n_\sigma \cdot (C_q(f) \circ \partial^X_{q+1})(\sigma)) \\
&= \sum_\sigma n_\sigma \cdot C_q(f) \left(\sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i \cdot (\sigma \circ F^i_{q+1}) \right) \\
&= \sum_\sigma n_\sigma \cdot \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i C_q(f) \left(\sigma \circ F^i_{q+1} \right) \\
&= \sum_\sigma n_\sigma \cdot \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i (f \circ \sigma \circ F^i_{q+1}) \\
&= \sum_\sigma n_\sigma \cdot \partial^Y_{q+1}(f \circ \sigma) \\
&= \sum_\sigma n_\sigma \cdot (\partial^Y_{q+1} \circ C_{q+1}(f))(\sigma) \\
&= (\partial^Y_{q+1} \circ C_{q+1}(f)) \left(\sum_\sigma n_\sigma \cdot \sigma \right) \\
&= (\partial^Y_{q+1} \circ C_{q+1}(f))(\xi)
\end{aligned}$$

Es ist also wirklich $C_q(f) \circ \partial^X_{q+1} = \partial^Y_{q+1} \circ C_{q+1}(f)$. $\square$

Frage. Verträgt sich $C_q(f)$ auch mit B_q bzw. Z_q?

$\boxed{\text{KOROLLAR.}}$ Für $f : X \to Y$ ist $C_q(f)(Z_q(X,R)) \subseteq Z_q(Y,R)$ und $C_q(f)(B_q(X,R)) \subseteq B_q(X,R)$, d.h. wir haben das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C_q(X,R) & \xrightarrow[C_q(f)]{} & C_q(Y,R) \\ \cup\!| & & \cup\!| \\ Z_q(X,R) & \longrightarrow & Z_q(Y,R) \\ \cup\!| & & \cup\!| \\ B_q(X,R) & \longrightarrow & B_q(Y,R) \end{array}$$

Beweis. Sei $\xi \in Z_q(X,R)$. Dann ist

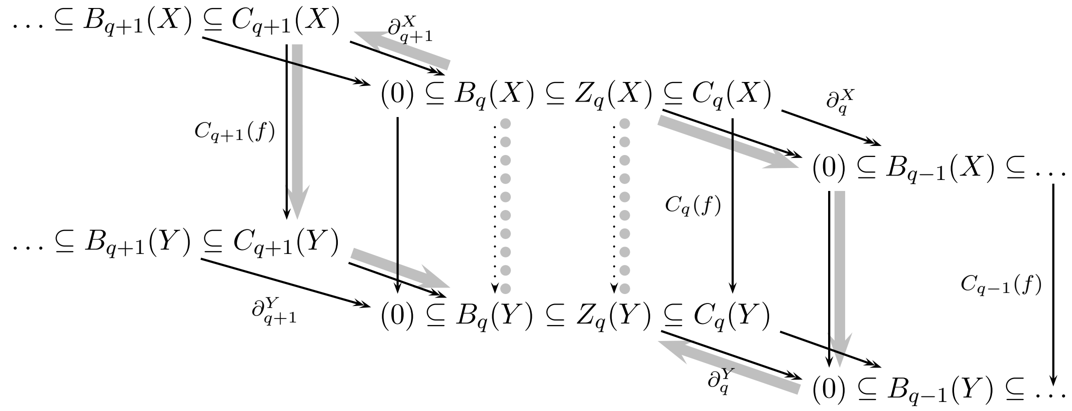
$$\begin{aligned} & \partial_q^X(\xi) = 0 \\ \Rightarrow \quad & (C_{q-1}(f) \circ \partial_q^X(f))(\xi) = 0 \\ \xRightarrow{\text{Lemma}} \quad & (\partial_q^Y \circ C_q(f))(\xi) = 0 \\ \Rightarrow \quad & C_q(f)(\xi) \in Z_q(Y,R). \end{aligned}$$

Ebenso sei $\eta \in B_q(X,R)$, etwa $\eta = \partial_{q+1}^X(\omega)$. Dann ist

$$\begin{aligned} C_q(f)(\eta) &= (C_q(f) \circ \partial_{q+1}^X)(\omega) \\ &\overset{\text{Lemma}}{=} (\partial_{q+1}^Y \circ C_{q+1}(f))(\omega) \\ &\in B_q(Y,R) \end{aligned}$$

□

Bemerkung. Sehen wir uns das ganze noch einmal als Diagramm an:



Die durch durchgezogene schwarze Pfeile gegebenen Homomorphismen sowie die $\subseteq$-Beziehungen und deren Kommutativität sind durch vorherige Ergebnisse gegeben, die gepunkteten Linien ergaben sich jetzt durch Durchlaufen der grau hervorgehobenen Parallelogramme. Dies ist also eigentlich ein Fall von Diagrammjagd.

Bemerkung. Damit induzieren die $C_q(f)$ (mit $q \in \mathbb{Z}$) auch Homomorphismen der Faktormoduln:

$$\begin{tikzcd} & Z_q(X,R) \arrow[r, "C_q(f)|\dots"] \arrow[d, "\pi"'] & Z_q(Y,R) \arrow[d, "\pi"] & \\ H_q(X,R) = & Z_q(X,R)/B_q(X,R) \arrow[r, dashed] & Z_q(Y,R)/B_q(Y,R) & = H_q(Y,R) \end{tikzcd}$$

Definition 8.12. *Diese induzierten Homomorphismen nennen wir* $\boxed{H_q(f)}$

$$\begin{aligned} H_q(f) : H_q(X,R) &\longrightarrow H_q(Y,R) \\ [\xi] &\longmapsto [C_q(f)(\xi)] \end{aligned}$$

$\boxed{\text{SATZ 8.1.3.}}$ Für $q \in \mathbb{Z}$ und einen Ring R ist

$$\begin{aligned} H_q(\square, R) : \underline{\mathrm{Top}} &\longrightarrow \underline{\mathrm{Mod}}_R \\ X &\longmapsto H_q(X,R) \\ (X \xrightarrow{f} Y) &\longmapsto (H_q(f) : H_q(X,R) \to H_q(Y,R)) \end{aligned}$$

ein kovarianter Funktor.

Beweis. Es bleiben die Funktorialitätseigenschaften zu zeigen, also $H_q(g \circ f) = H_q(g) \circ H_q(f)$ und $H_q(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{H_q(X,R)}$.

Seien also $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ Morphismen in $\underline{\mathrm{Top}}$ (d.h. stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen). Dann gilt für $\xi \in Z_q(X)$, etwa $\xi = \sum_{\sigma \in S_q(X)} n_\sigma \cdot \sigma$:

$$\begin{aligned} H_q(g \circ f)([\xi]_B) &= [C_q(g \circ f)(\xi)] \\ &= [C_q(g)(C_q(f)(\xi))] \\ &= H_q(g)([C_q(f)(\xi)]) \\ &= H_q(g)(H_q(f)([\xi])) \\ &= (H_q(g) \circ H_q(f))([\xi]). \end{aligned}$$

Analog geht dies mit id. $\square$

Die singuläre Kohomologie

Definition 8.13. *Sei X ein topologischer Raum, R fixierter Ring. Dann sei für $q \in \mathbb{Z}$* $\boxed{C^q(X,R)}$

$$C^q(X,R) := C_q(X,R)^* = \mathrm{Hom}_R(C_q(X,R), R)$$

der duale Kettenraum, was mit den dualen Abbildungen $\delta_q := \partial_q^*$ der Randoperatoren den dualen Kettenkomplex $\boxed{\delta_q}$ $\boxed{C^\bullet(X,R)}$

$$C^\bullet(X,R) := \left(\dots \leftarrow C^{q+1}(X,R) \xleftarrow{\delta_{q+1}} C^q(X,R) \xleftarrow{\delta_q} C^{q-1}(X) \leftarrow \dots\right)$$

$\boxed{H^q(X,R)}$ *ergibt. Die zu diesem Komplex gehörenen Homologiemoduln*

$$H^q(X,R) := H_{-q}(C^\bullet(X,R)) = {}^{\ker(\delta_q)}\!\big/_{\operatorname{im}(\delta_{q+1})}$$

*heißen die **singulären Kohomologiemoduln** von X mit Koeffizienten in R.*

Achtung. Es ist i.a. $H^q(X,R) \ncong (H_q(X,R))^*$.

$\boxed{\dot\cap}$ *Bemerkung.* Man hat auch (für $q \in \mathbb{Z}$) Paarungen

$$\begin{aligned} C^q(X,R) \times C_q(X,R) &\longrightarrow R \\ (\varphi,\sigma) &\longmapsto \varphi(\sigma) =: \varphi \,\dot\cap\, \sigma \end{aligned}$$

$\dot\cap$ induziert auch eine Paarung $\dot\cap : H^q(X,R) \times H_q(X,R) \to R$.
(Dies ist ein Beispiel einer der unzähligen (Ko)homologieoperationen.)

Fragen.

(1) Sei $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ Homöomorphismus. Gilt dann $H_q(X,R) \cong H_q(Y,R)$?

(2) Gilt auch die Umkehrung, also:

$$(\forall q : H_q(X,R) \cong H_q(Y,R)) \Rightarrow (X \cong Y)?$$

Antwort. Die erste Frage wird mit *Ja* beantwortet, weil $H_q(\Box,R)$ ein Funktor ist, und Funktoren Isomorphismen erhalten (Satz 5.3.1).
Die zweite Frage werden wir mit *Nein* beantworten müssen.

Beispiele und weitere Definitionen

$\boxed{\varepsilon_0}$ *Bemerkung.* Sei X wieder ein topologischer Raum, mit $x_0 \in X$. Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 : C_0(X,R) &\longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow R \\ \sum_{x\in X} n_x \cdot x &\longmapsto \sum_{x\in X} n_x \end{aligned}$$

ε_0 heißt auch **Augmentierung** des Kettenkomplexes $\mathbb{C}_\bullet(X,R)$.
Da R als R-Modul R-frei ist, gibt es Schnitte $s : R \to C(X,R)$ mit $\varepsilon_0 \circ s = \mathrm{id}_R$, etwa $s = s_{x_0}$, $s_{x_0}(r) = r \cdot x_0 \in C_0(X,R)$. Damit haben wir für alle $(n_x)_{x\in X}$:

$$\sum_{x\in X} n_x \cdot x = \left(\sum_{x\in X} n_x\right) \cdot x_0 + \sum_{x\in X} n_x \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{\in\ker(\varepsilon_0)}$$

Es ist also C_0 direkt zerlegbar:

$$C_0(X,R) = R \cdot x_0 \oplus \ker(\varepsilon_0)$$

Wir haben ja

$$\begin{aligned} C_0(X,R) &= Z_0(X,R) \\ &= \bigoplus_{x\in X} R\cdot x \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} B_0(X,R) &= \partial_1(C_1(X,R)) \\ &= \partial_1(F_R(\operatorname{arc}(X))) \\ &= \partial_1\left(\bigoplus_{\sigma\in\operatorname{arc}(X)} R\cdot\sigma\right) \\ &= \bigoplus_{\sigma\in\operatorname{arc}(X)} R\cdot\partial_1(\sigma). \end{aligned}$$

Elementweise aufgeschrieben:

$$\begin{aligned} B_0(X,R) &= \left\{\partial_1\left(\sum_{\sigma\in S_1(X)} n_\sigma\cdot\sigma\right)\middle|\, n_\sigma\in R, n_\sigma = 0 \text{ p. p.}\right\} \\ &= \left\{\sum_{\sigma\in S_1(x)} n_\sigma\cdot(\sigma(e_1)-\sigma(e_0))\,\middle|\, n_\sigma\in R, n_\sigma = 0 \text{ p. p.}\right\} \end{aligned}$$

Für $\xi\in B_0(X,R)$ haben wir damit

$$\begin{aligned} \xi &= \partial_1\left(\sum_{i=1}^t n_{\sigma_i}\cdot\sigma_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^t n_{\sigma_i}\cdot(\sigma_i(e_1)-\sigma_i(e_0)), \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(\xi) &= \varepsilon_0\left(\sum_{i=1}^t n_{\sigma_i}\cdot(\sigma_i(e_1)-\sigma_i(e_0))\right) \\ &= \sum_{i=1}^t n_{\sigma_i}\cdot\varepsilon_0\left(\sigma_i(e_1)-\sigma_i(e_0)\right) \\ &= \sum_{i=1}^t n_{\sigma_i}\cdot(\varepsilon_0(\sigma_i(e_1))-\varepsilon_0(\sigma_i(e_0))) \\ &= \sum_{i=1}^t n_{\sigma_i}\cdot(1-1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Wir haben also $B_0(X,R) \subseteq \ker(\varepsilon_0)$, insgesamt:

$$(0) \subseteq B_0(X,R) \subseteq \ker(\varepsilon_0) \subsetneqq C_0(X,R) = Z_0(X,R).$$

FAZIT.

(1) Es ist allgemein $H_0(X,R) \neq (0)$.

(2) Genauer gilt für $x_0 \in X$:

$$\begin{aligned} H_0(X,R) &= {R \cdot x_0 \oplus \ker(\varepsilon)}/{B_0(X,R)} \\ &\cong R \cdot x_0 \oplus {\ker(\varepsilon_0)}/{B_0(X,R)} \\ &\cong R \oplus {\ker(\varepsilon_0)}/{B_0(X,R)} \end{aligned}$$

$\boxed{\tilde{H}_0(X,R)}$

Definition 8.14. *Der Modul*

$$\tilde{H}_0(X,R) := {\ker(\varepsilon_0)}/{B_0(X,R)} \subsetneqq H_0(X,R)$$

*heißt **reduzierter** 0**-ter Homologiemodul** von X bezüglich R.*

Bemerkung. Das heißt, $H_0(X,R)$ enthält stets einen freien Untermodul vom Rang 1, und das sogar als direkten Summanden.

$\boxed{\tilde{C}_q}$ $\boxed{\tilde{\partial}_q}$

Definition 8.15. *Man kann einen leicht abgeänderten Kettenkomplex für (X,R) definieren:*

$$\tilde{C}_q(X,R) := \begin{cases} C_q(X,R) & q \neq -1 \\ R & q = -1 \end{cases}$$

$$\tilde{\partial}_q := \begin{cases} \partial_q & q \neq 0 \\ \varepsilon_0 & q = 0 \end{cases}$$

Die Homologiegruppen/-moduln dieses Komplexes sind dann

$$\begin{aligned} \tilde{H}_q(X,R) &:= H_q(\tilde{C}_\bullet(X,R)) \\ &= \begin{cases} H_q(X,R) & q \neq 0 \\ {\ker(\varepsilon_0)}/{B_0(X,R)} & q = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$\boxed{\tilde{H}_q(X,R)}$

*Diese Homologiemoduln heißen die **reduzierten Homologiemoduln** von X mit Koeffizienten in R.*

Bemerkung. Hier noch ein Diagramm dazu:

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r, "\partial_2"] & C_1 \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, equal] & C_0 \arrow[rr, "\partial_0=0"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, "\varepsilon_0"] & & C_{-1}=0 \arrow[r, "\partial_{-1}=0"] \arrow[d, equal] & C_{-2}=0 \arrow[r, "\partial_{-2}=0"] \arrow[d, equal] & \ldots \\
\ldots \arrow[r, "\tilde{\partial}_2"'] & \tilde{C}_1 \arrow[r, "\tilde{\partial}_1"'] & \tilde{C}_0 \arrow[r, "\tilde{\partial}_0"'] & \tilde{C}_{-1}=R \arrow[r, "\tilde{\partial}_{-1}"'] \arrow[ur, "0"] & \tilde{C}_{-2}=0 \arrow[r, "\tilde{\partial}_{-2}=0"'] & \tilde{C}_{-3}=0 \arrow[r, "\tilde{\partial}_{-3}=0"'] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Definition 8.16. *Ein topologischer Raum heißt **azyklisch**, falls*

$$H_q(X, \mathbb{Z}) \cong \delta_{0q} \cdot \mathbb{Z} = \begin{cases} (0) & q \neq 0 \\ \mathbb{Z} & q = 0 \end{cases}$$

Bemerkung. Algebraisch formuliert: ein topologischer Raum ist X ist azyklisch, wenn $C_\bullet(X, \mathbb{Z})$ ein exakter Komplex ist, mit Ausnahme der Stelle $q = 0$, bzw. wenn $\tilde{C}_\bullet(X, \mathbb{Z})$ ein exakter Komplex ist.

Definition 8.17. *Ein topologischer Raum X heißt **wegezusammenhängend**, falls für alle $(x_0, x_1) \in X^2$ eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to X$ existiert (d.h. $\gamma \in \operatorname{arc}(X)$), mit $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$.*

Beispiel 8.1.4.

- $\mathbb{R}^n$ und alle einpunktigen topologischen Räume sind natürlich wegezusammenhängend.
- jede konvexe Menge im $\mathbb{R}^n$ ist wegezusammenhängend.
- Alle Teilmengen des $\mathbb{Q}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ mit mehr als einem Element sind nicht wegezusammenhängend.
- Allgemeiner: Alle wegezusammenhängenden Mengen sind auch zusammenhängend.

  Die Umkehrung gilt nicht – ein Beispiel dafür gibt es meist in Analysis I (*Kamm und Floh*).

Definition 8.18. *Sei X beliebiger topologischer Raum, $x_1, x_2 \in X$. Wir nennen x_1 und x_2 **verbindbar** ($x_1 \underset{\text{arc}}{\sim} x_2$), falls* $\boxed{\underset{\text{arc}}{\sim}}$

$$\exists \gamma \in \operatorname{arc}(X), \gamma(0) = x_1, \gamma(1) = x_0.$$

Bemerkung. Dies ist offenbar eine Äquivalenz-Relation auf X, und damit zerfällt X in die Äquivalenzklassen von $\underset{\text{arc}}{\sim}$ (Wegekomponenten):

$$X = \dot{\bigcup_{\alpha \in I}} X_\alpha$$

SATZ 8.1.4. *(Die 0-te Homologie eines wegezusammenhängenden Raumes)*

Sei X topologischer Raum, wegezusammenhängend (d.h. $|I| = 1$ in der obigen Zerlegung). Dann ist

$$H_0(X, R) = R \cdot [x]_{B_0} \cong R$$

für alle $x \in X$.

Beweis. Mit obigem Fazit müssen wir nur noch zeigen, dass für wegezusammenhängende Räume $\tilde{H}_0(X,R) = (0)$ ist, also auch $\ker(\varepsilon_0) \subseteq B_0(X)$.

Wähle ein $x_0 \in X$. Für alle $x \in X$ existiert dann ein Weg $\gamma_x : x_0 \rightsquigarrow x$ (also $\boxed{\rightsquigarrow}$ $\gamma_x \in \operatorname{arc}(X)$, $\gamma_x(0) = x_0$, $\gamma_x(1) = x$), und mit dem Auswahlaxiom können wir auch wirklich für jedes x einen solchen Weg auswählen.

Sei also $\xi \in \ker(\varepsilon)$, etwa $\xi = \sum_{x\in X} n_x \cdot x$ mit $\sum_{x\in X} n_x = 0$ (und $n_x = 0$ p. p.). Dann haben wir:

$$\begin{aligned}
\xi &= \sum_{x\in X} n_x \cdot x \\
&= \sum_{x\in X} n_x \cdot x - \underbrace{\left(\sum_{x\in X} n_x\right)}_{=0} \cdot x_0 \\
&= \sum_{x\in X} n_x \cdot (x - x_0) \\
&= \sum_{x\in X} n_x \cdot \partial_1(\gamma_x) \\
&= \partial_1 \left(\sum_{x\in X n_x\cdot\gamma_x} \right) \\
&\in B_0(X,R)
\end{aligned}$$

Es ist also $\ker(\varepsilon_0) \subseteq B_0(X,R) \subseteq \ker(\varepsilon_0)$, also $B(X,R) = \ker(\varepsilon_0)$. Das heißt, es ist $\tilde{H}_0(X,R) = (0)$ und

$$H_0(X,R) = R \cdot [x_0]_{B_0} \oplus (0) \cong R,$$

für $x_0 \in X$ beliebig. $\square$

> **SATZ 8.1.5.** Sei X topologischer Raum, $X = \bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha$ die Zerlegung in Wegekomponenten. Dann gilt:
>
> (1) Für alle $q \in \mathbb{Z}$:
> $$H_q(X,R) = \bigoplus_{\alpha\in I} H_q(X_\alpha, R)$$
>
> (2) $H_0(X,R)$ ist stets ein freier R-Modul vom Rang ≥ 1.
>
> (3) $\operatorname{Rg}_R(H_0(X,R)) = \operatorname{card}(I) =$ Anzahl der Wegekomponenten.

Beweis.

(1) Betrachte ein singuläres Simplex $\sigma : \Delta_q \to X$. Da Δ_q konvex, insbesondere wegezusammenhängend ist, ist auch $\sigma(\Delta_q)$ wegezusammenhängend, d.h.

$$\exists!\alpha \in I : \sigma(\Delta_q) \subseteq X_\alpha,$$

also $\sigma : \Delta_q \to X_\alpha$. Damit ist

$$S_q(X) = \dot{\bigcup_{\alpha\in I}} S_q(X_\alpha)$$

$$\overset{C}{\Rightarrow}_q (X,R) = F_R\left(\dot{\bigcup_{\alpha\in I}} S_q(X_\alpha)\right)$$

$$= \bigoplus_{\alpha\in I} F_R(S_q(X_\alpha, R))$$

$$= \bigoplus_{\alpha\in I} C_q(X_\alpha, R)$$

Nun ist für $\xi \in C_q(X,R)$, etwa $\xi = \sum\limits_{\sigma\in S_q(X)}$,

$$\begin{aligned}\partial_q(\xi) &= \sum_{\sigma\in S_q(X)} n_\sigma \cdot \partial_q(\sigma)\\ &= \sum_{\alpha\in I}\sum_{\sigma\in S_q(X_\alpha)} n_\sigma \cdot \partial_q(\sigma)\\ &= \sum_{\alpha\in I}\sum_{\sigma\in S_q(X_\alpha)} n_\sigma \cdot \sum_{i=0}^{q}(-1)^i \cdot \underbrace{(\sigma\circ F_q^i)}_{\in S_{q-1}(X_\alpha,R)}\\ &= \sum_{\alpha\in I}\sum_{\sigma\in S_q(X_\alpha)} n_\sigma \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{q}(-1)^i \cdot (\sigma\circ F_q^i)}_{\in S_{q-1}(X_\alpha,R)}\end{aligned}$$

Das heißt, ∂_q ist (für alle q) kompatibel zur Zerlegung von X in Wegekomponenten, also ist auch

$$B_q(X,R) = \bigoplus_{\alpha\in I} Z_q(X_\alpha, R)$$

$$Z_q(X,R) = \bigoplus_{\alpha\in I} B_q(X_\alpha, R)$$

Folglich gilt für die Homologiemoduln:

$$\begin{aligned}H_q(X,R) &= {Z_q(X,R)}\big/{B_q(X,R)}\\ &= \bigoplus_{\alpha\in I} {Z_q(X_\alpha,R)}\big/{B_q(X_\alpha,R)}\\ &= \bigoplus_{\alpha\in I} H_q(X_\alpha, R).\end{aligned}$$

(2), (3) Für $q = 1$ ergibt sich aus (1):

$$H_0(X,R) = \bigoplus_{\alpha\in I} H_0(X_\alpha, R)$$

und für $[\xi] \in B_0(X,R)$:

$$[\xi] = \sum_{\alpha\in I}[\xi_\alpha],$$
$$\xi = \sum_{\alpha\in I}\xi_\alpha, \quad \xi_\alpha \in Z_0(X_\alpha,R), \xi_\alpha = 0 \text{ p. p.}$$

Zusammen mit Satz 8.1.4 erhalten wir, da die X_α ja wegezusammenhängend sind:

$$H_0(X,R) = \bigoplus_{\alpha\in I} R\cdot[x_\alpha], \quad x_\alpha \in X_\alpha\text{beliebig},$$

wodurch $\{[x_\alpha] \mid \alpha\in I\}$ eine R-Basis von $H_0(X,R)$ bilden, mit Kardinalität $|I|$. $H_0(X,R)$ ist also wirklich R-frei, mit $\mathrm{Rg}_R(H_0(X,R)) = \mathrm{card}(I)$. □

$\boxed{\text{Korollar.}}$ Für die reduzierte Homologie gilt insbesondere: $\tilde{H}_0(X,R)$ ist ebenfalls frei, und

$$\mathrm{Rg}_R(H_0(X,R)) = \mathrm{Rg}_R(\tilde{H}_0(X,R)) + 1.$$

Beweis. Wir haben ja

$$H_0(X,R) = \bigoplus_{\alpha\in I} R\cdot[x_\alpha],$$

mit $x_\alpha \in X_\alpha$ beliebig gewählt. Für ein Element $\xi \in H_0(X,R)$ ist also

$$\xi = \sum_{\alpha\in I} r_\alpha\cdot[x_\alpha]$$

und mit einem $\alpha_0 \in I$

$$= \underbrace{\left(\sum_{\alpha\in I} r_\alpha\right)\cdot[x_{\alpha_0}]}_{\in R\cdot[x_{\alpha_0}]} + \underbrace{\sum_{\substack{\alpha\in I\\ \alpha\neq\alpha_0}} r_\alpha\cdot([x_\alpha]-[x_{\alpha_0}])}_{\in\tilde{H}_0(X,R)}$$

Dabei ist $B := \{[x_\alpha]-[x_{\alpha_0}] \mid \alpha\in I, \alpha\neq\alpha_0\}$ ebenfalls R-frei (weil $\{[x_\alpha] \mid \alpha\in I\}$ dies war), also eine R-Basis von $\tilde{H}_0(X,R)$. □

$\boxed{\text{Korollar.}}$ Für einen topologischen Raum X sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) X ist wegezusammenhängend.

(2) $H_0(X,R) \cong R$ (frei vom Rang 1)

(3) $\tilde{H}_0(X,R) = (0)$.

Definition 8.19. *Sei X topologischer Raum, R ein k+u-Ring. X heißt R-azyklisch, falls*

$$\tilde{H}_q(X,R) = (0) \quad \forall q \in \mathbb{Z}$$

bzw.

$$H_q(X,R) \cong \begin{cases} (0) & \forall q \neq 0 \\ R & \forall q = 0 \end{cases}$$

Bemerkung. Wir haben in der Übung gesehen (Beweis hier nicht, da Spezielfall des folgenden Satzes 8.1.6):

Ist $X = \{x_0\}$ ein einpunktiger Raum, so ist X auch R-azyklisch (für alle Ringe R).
Die Umkehrung gilt jedoch nicht, wie wir gleich sehen werden.

Die Homologie konvexer Mengen im $\mathbb{R}^n$

$\boxed{\text{Satz 8.1.6.}}$ *(Die Homologie konvexer Mengen im $\mathbb{R}^n$)*

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere konvexe Menge (z.B. $\mathbb{R}^n$ selbst, einpunktige Mengen, $\Delta_{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$, (gefüllte) Kugeln mit oder ohne Rand, ...). Dann gilt:

$$\tilde{H}_q(A,R) = 0 \quad \forall q \in \mathbb{Z}$$

bzw.

$$H_q(A,R) = (0) \quad \forall q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$
$$H_q(A,R) \cong R$$

Bemerkung. Das heißt, alle konvexen Mengen im $\mathbb{R}^n$ sind azyklisch, haben die gleiche Homologie, ohne allerdings (paarweise) homöomorph zu sein (zumindest $\{0\}$ und $\mathbb{R}^n$ selbst sind sicher nicht homöomorph.)

Beweis. Der Beweis erfolgt mit Hilfe der topologischen **Kegelkonstruktion** bzw. Konstruktion einer sogenannten **Kettenhomotopie**.

1. Schritt Sei ein beliebiges $x_0 \in A$ fixiert.

Wir wollen zunächst eine Abbildung $h_q^{(x_0)} : S_q(A) \to S_{q+1}(A)$ konstruieren.

Sei $\sigma \in S_q(A)$, $\sigma : \Delta_q \to A$. Ein $p \in \Delta_{q+1} \subseteq \mathbb{R}^{q+2}$ hat die Gestalt

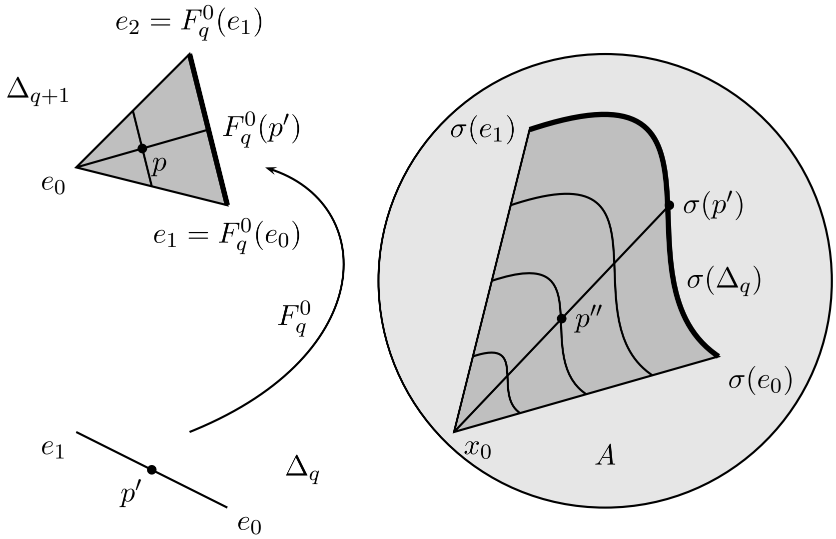
$$\begin{aligned} p &= (a_0, \cdots, a_{q+1}), \quad a_i \geq 0, \sum_{i=0}^{q+1} a_i = 1 \\ &= \begin{cases} e_0 & a_0 = 1 \\ a_0 \cdot e_0 + (1-a_0) \cdot \underbrace{\left(0, \frac{a_1}{1-a_0}, \cdots, \frac{a_{q+1}}{1-a_0}\right)}_{\in F_q^0(\Delta_q) \cong \Delta_q} & a_0 \neq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Das heißt, Δ_{q+1} ist darstellbar als ein Kegel über $F_q^0(\Delta_q)$ mit Spitze in x_0, und wir basteln uns entsprechend einen Kegel über $\sigma(\Delta_q)$, mit Spitze in x_0, wobei wir die Koordinaten einfach übertragen:

$\boxed{h_q^{(x_0)}}$

$$h_q^{(x_0)}(\sigma)(a_0, \cdots, a_{q+1}) := \begin{cases} x_0 & a_0 = 1 \\ a_0 \cdot x_0 + (1 - a_0) \cdot \sigma\left(\frac{a_1}{1-a_0}, \cdots, \frac{a_{q+1}}{1-a_0}\right) & a_0 \neq 1 \end{cases}$$

Wir projizieren also ein $p = (a_0, \cdots, a_{q+1}) \in \Delta_{q+1}$ auf $p' = \left(\frac{a_1}{1-a_0}, \cdots, \frac{a_{q+1}}{1-a_0}\right) \in \Delta_q$, transportieren dieses p' mit σ nach A und suchen dann den passenden Punkt zwischen $\sigma(p')$ und x_0. Dies ist wohldefiniert (d.h. p'' liegt auch in A), da A konvex ist.



$h_q^{(x_0)}$ ist offenbar für $a_0 \neq 1$ stetig, und es ist

$$\begin{aligned} \left\| h_q^{(x_0)}(\sigma)(p) - x_0 \right\| &= (1 - a_0) \cdot \|\sigma(p') - x_0\| \\ &\leq (1 - a_0) \cdot M, \end{aligned}$$

da ja $p' \in \Delta_q$ variiert, also in einer kompakten Menge, und daher $\|\Box - x_0\|$ beschränkt ist. Daher haben wir

$$\begin{aligned} \lim_{p \to e_0} \left\| h_q^{(x_0)}(\sigma)(p) - x_0 \right\| &= \lim_{a_0 \to 1} (1 - a_0) \cdot \ldots \\ &= 0. \end{aligned}$$

Es ist also $h_q^{(x_0)}$ auch an dieser Stelle stetig, also $h_q^{(x_0)}(\sigma) \in S_{q+1}(A)$.

Schritt 2: Vergleich von $h_q^{(x_0)}$ und ∂_q Wir können dieses auf Simplices definierte $h_q^{(x_0)}$ natürlich zu einer linearen Abbildung auf Ketten fortsetzen, und haben also

$$h_q^{(x_0)} : C_q(A, R) \to C_{q+1}(A, R).$$

Zusammen mit den ∂-Abbildungen ergibt sich das Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & C_{q+1}(A,R) \arrow[r, "\partial_{q+1}"] & C_q(A,R) \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[dl, "h_q^{(x_0)}"'] & C_{q-1}(A,R) \arrow[r] \arrow[dl, "h_{q-1}^{(x_0)}"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & C_{q+1}(A,R) \arrow[r, "\partial_{q+1}"'] & C_q(A,R) \arrow[r, "\partial_q"'] & C_{q-1}(A,R) \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Am „Ende" der Folge (d.h. der Stelle mit der Augmentierung) hat man außerdem diese Situation:

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & C_1(A,R) \arrow[r, "\partial_1"] & C_0(A,R) \arrow[r, "\varepsilon_0"] \arrow[dl, "h_0^{(x_0)}"'] & R \arrow[r] \arrow[dl, "s_{x_0}"] & 0 \arrow[r] & \dots \\
\dots \arrow[r] & C_1(A,R) \arrow[r, "\partial_1"'] & C_0(A,R) \arrow[r, "\varepsilon_0"'] & R \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

mit $s_{x_0}(r) := r \cdot x_0$.

BEHAUPTUNG. Diese Diagramme sind zwar nicht kommutativ, es gilt aber stattdessen:

(a) $\partial_{q+1} \circ h_q^{(x_0)} + h_{q-1}^{(x_0)} \circ \partial_q = \mathrm{id}_{C_q(X,R)}$

(b) $\partial_1 \circ h_0^{(x_0)} + s_{x_0} \circ \varepsilon_0 = \mathrm{id}_{C_0(X,R)}$

Beweis. Es genügt natürlich, diese Formeln auf den Basiselementen, d.h. $\sigma : \Delta_q \to A$ nachzuweisen.

(b): Ein $\sigma : \Delta_0 \to A$, also $\sigma : \{1\} \to A$, ist eindeutig bestimmt durch sein Bild $x_\sigma \in A$. Wir haben also (mit der passenden Identifikation A – $S_0(A)$)

$$\begin{aligned}
(\partial_1 \circ h_0^{(x_0)})(\sigma) &= x_\sigma - x_0 \\
&= \sigma - \underbrace{\varepsilon_0(\sigma)}_{1} \cdot x_0 \\
&= \sigma - s_{x_0}(\varepsilon_0(\sigma)) \\
(\partial_1 \circ h_0^{(x_0)})(\sigma) + (s_{x_0} \circ \varepsilon_0)(\sigma) &= \sigma \\
(\partial_1 \circ h_0^{(x_0)} + s_{x_0} \circ \varepsilon_0)(\sigma) &= \sigma \\
\partial_1 \circ h_0^{(x_0)} + s_{x_0} \circ \varepsilon_0 &= \mathrm{id}_{S_0(A)}
\end{aligned}$$

(a): Für $q \geq 1$ haben wir ja

$$\begin{aligned}(\partial_{q+1} \circ h_q(x_0))(\sigma) &= \partial_q^{(x_0)}(\sigma) \\ &= \sum_{i=}^{q+1} (-1)^i \cdot (h_q^{(x_0)} \circ F_{q+1}^i)\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}(h_{q-1}^{(x_0)} \circ \partial_q)(\sigma) &= h_{q-1}^{(x_0)}(\partial_q(\sigma)) \\ &= h_{q-1}^{(x_0)}\left(\sum_{j=0}^{q} (-1)^j (\sigma \circ F_q^j)\right)\end{aligned}$$

Schauen wir uns die Summanden der ersten Gleichung an, zunächst für $i = 0$:

$$\begin{aligned}(h_q^{(x_0)}(\sigma) \circ F_{q+1}^0)(a_0, \cdots, a_n) &= h_q^{(x_0)}(\sigma)(0, a_0, \cdots, a_n) \\ &= 0 \cdot x_0 + 1 \cdot \sigma(a_0, \cdots, a_n) \\ &= \sigma(a_0, \cdots, a_q),\end{aligned}$$

es ist also $h_q(\sigma) \circ F_{q+1}^0 = \sigma$. Für $i \geq 1$ ist dagegen

$$\begin{aligned}&h_q^{(x_0)}(\sigma) \circ F_{q+1}^i(a_0, \cdots, a_n) \\ &= h_q^{(x_0)}(a_0, \cdots, a_{i-1}, 0, a_i, \cdots, a_n) \\ &= \begin{cases} x_0 & a_0 = 1 \\ a_0 \cdot x_0 + (1 - a_0) \cdot \sigma\left(\frac{a_1}{1-a_0}, \cdots, 0, \cdots, \frac{a_n}{1-a_0}\right) & a_0 \neq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} x_0 & a_0 = 1 \\ a_0 \cdot x_0 + (1 - a_0) \cdot (\sigma \circ F_q^{i-1})\left(\frac{a_1}{1-a_0}, \cdots, \frac{a_n}{1-a_0}\right) & a_0 \neq 1 \end{cases} \\ &= h_{q-1}^{(x_0)}(\sigma \circ F_q^{i-1})(a_0, \cdots, a_n)\end{aligned}$$

Das heißt, wir haben insgesamt:

$$\begin{aligned}\partial_{q+1} \circ h_q^{(x_0)}(\sigma) &= \sigma + h_{q-1}^{(x_0)}\left(\sum_{i=1}^{q+1} (-1)^i \cdot \sigma \circ F_q^{i-1}\right) \\ &= \sigma + h_q^{(x_0)}\left(-\sum_{i=0}^{q} (-1)^i \cdot \sigma \circ F_q^i\right) \\ &= \sigma - (h_q^{(x_0)} \circ \partial_q)(\sigma),\end{aligned}$$

für alle $\sigma \in S_q(A)$. Wir haben also wirklich

$$\partial_{q+1} \circ h_q^{(x_0)} + h_{q-1}^{(x_0)} \circ \partial_q = \mathrm{id}_{C_q(A,R)}\,. \qquad \square$$

3. Schritt: Berechnung der Homologiegruppen $\tilde{H}_0(A,R) = (0)$ ist schon bekannt (weil A wegezusammenhängend), folgt aber ebenso mit (b).

Betrachte $\xi \in Z_q(A,R)$, also $\partial_q(\xi) = 0$, $q > 0$. Dann ist ja

$$\begin{aligned}\xi &= \partial_{q+1}(h_q^{(x_0)}(\xi)) + \underbrace{h_{q-1}^{(x_0)}(\partial_q(\xi))}_{=0}\\ &= \partial_{q+1}(h_q^{(x_0)}(\xi)),\end{aligned}$$

also $\xi \in \operatorname{im}(\partial_{q+1}) = B_q(A,R)$. Es ist also $Z_q(A,R) \subseteq B_q(A,R)$, und damit $H_q(A,R) = {Z_q(A,R)}/{B_q(A,R)} = (0)$ für alle $q > 0$.

Fazit. Für eine konvexe Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist $H_q(A,R) = \begin{cases}(0) & q \neq 0\\ R & q = 0\end{cases}$. □

8.2 Homologie und Kohomologie mit allgemeinen Koeffizienten, Homotopiekategorien

Sei $X \neq \varnothing$ topologischer Raum, R ein Ring, M ein R-Modul (z.B. $R = \mathbb{Z}$ und M eine beliebige abelsche Gruppe).

Wir haben ja dann den Kettenkomplex $(C_\bullet(X,R), \partial_\bullet)$:

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{q+2}} C_{q+1}(X,R) \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q(X,R) \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1}(X,R) \to \ldots$$

Tensorieren mit M ergibt dann:

$$\ldots \to C_{q+1}(X,R) \otimes_R M \xrightarrow{\partial_{q+1} \otimes \mathrm{id}_M} C_q(X,R) \otimes M \xrightarrow{\partial_q \otimes \mathrm{id}_M} C_{q-1}(X,R) \to \ldots$$

Diese Folge ist wirklich ein Komplex:

$$\begin{aligned}(\partial_q \otimes \mathrm{id}_M) \circ (\partial_{q+1} \otimes \mathrm{id}_M) &= (\partial_q \circ \partial_{q+1}) \otimes (\mathrm{id}_M \circ \mathrm{id}_M)\\ &= 0 \otimes \mathrm{id}_M\\ &= 0\end{aligned}$$

Definition 8.20. *Für $q \in \mathbb{Z}$ heißt der Modul*

$$\begin{aligned}H_q(X,M) &:= H_q(C_\bullet(X,R) \otimes_R M, \partial_\bullet \otimes \mathrm{id}_M)\\ &= {\ker(\partial_q \otimes \mathrm{id}_M)}/{\operatorname{im}(\partial_{q+1} \otimes \mathrm{id}_M)}\end{aligned}$$

*q-**ter Homologiemodul von X mit Koeffizienten in** M. Entsprechend heißen die Homologiemoduln des dualen Komplexes*

$$\begin{aligned}H^q(X,M) &:= H_{-q}((C_\bullet(X,R) \otimes_R M)^*, (\partial_\bullet \otimes \mathrm{id}_M)^*)\\ &= {\ker((\partial_{q+1} \otimes \mathrm{id}_M)^*)}/{\operatorname{im}((\partial_q \otimes \mathrm{id}_M)^*)}\end{aligned}$$

*die **Kohomologiemoduln von X mit Koeffizienten in** M.*

$\boxed{\text{Satz 8.2.1.}}$ Seien X topologischer Raum und M ein R-Modul. Dann existiert ein kanonischer R-Modul-Homomorphismus

$$\theta_q : H_q(X,R) \otimes_R M \to H_q(X,M),$$

welcher aber i.a. weder surjektiv noch injektiv ist.

Beweis. Es genügt, eine R-lineare Abbildung $\hat{\theta}_q : H_q(X,R) \times M \to H_q(X,M)$ zu konstruieren, und dann den assoziierten Homomorphismus $\theta_q : H_q(X,R) \otimes_R M \to H_q(X,M)$ zu nehmen.

Wir setzen also zunächst an:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_q : H_q(X,R) \times M &\longrightarrow H_q(X,M) \\ ([\xi]_{B_q(X,R)}, m) &\longmapsto [\xi \otimes m]_{B_q(X,M)}, \end{aligned}$$

für $\xi \in Z_q(X,R)$, also $[\xi] \in H_q(X,R)$ und $m \in M$. Wir müssen zeigen, dass dann auch wirklich $\xi \otimes m \in Z_q(X,M) = \ker(\partial_q \otimes \mathrm{id}_M)$ ist, und außerdem die Repräsentantenunabhängigkeit, damit das so wohldefiniert ist. Zunächst ist ja

$$\begin{aligned} (\partial_q \otimes \mathrm{id}_M)(\xi \otimes m) &= \partial_q(\xi) \otimes \mathrm{id}_M(m) \\ &= 0 \otimes m = 0. \end{aligned}$$

Zum zweiten Punkt: für $[\xi] = [\xi']$ ist ja $\xi - \xi' \in B_q(X,R)$, also gibt es ein $\eta \in C_{q+1}(X,R)$ mit

$$\xi - \xi' = \partial_{q+1}(\eta).$$

Für $m \in M$ ist dann

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \xi \otimes m - \xi' \otimes m &= \partial_{q+1}(\eta) \otimes m \\ &= (\partial_{q+1} \otimes \mathrm{id}_M)(\eta \otimes m) \\ &\in B_q(X,M), \end{aligned}$$

also $[\xi \otimes m]_{B_q(X,M)} = [\xi' \otimes m]_{B_q(X,M)}$. Die Bilinearität ist klar, da ja $\otimes_R$ bilinear war. Es ist also $\hat{\theta}$ wohldefiniert und bilinear, liefert deshalb die lineare Abbildung:

$$\begin{aligned} \theta_q : H_q(X,R) \otimes_R M &\longrightarrow H_q(X,M) \\ \sum_{i=1}^{r} [\xi_i] \otimes m_i &\longmapsto \left[\sum_{i=1}^{r} \xi_i \otimes m_i \right]_{B_q(X,M)} \end{aligned}$$ □

Achtung. Der Tensorierungsfunktor

$$\begin{aligned} \square \otimes_R M : \mathrm{Mod}_R &\longrightarrow \mathrm{Mod}_R \\ Q &\longmapsto Q \otimes_R M \\ (Q_1 \xrightarrow{f} Q_2) &\longmapsto (Q_1 \otimes_R M \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}_M} Q_2 \otimes_R M) \end{aligned}$$

ist nicht exakt, sondern nur rechtsexakt (erhält Epimorphismen, aber keine Monomorphismen). Deswegen ist i.a. nicht zu erwarten, dass θ_q ein Isomorphismus ist.

Aber es gibt doch *positive Ausnahmen*, wie wir gleich sehen werden.

SATZ 8.2.2. Seien X topologischer Raum, R ein Integritätsbereich, M ein flacher R-Modul (so dass also $\Box \otimes M$ doch ein exakter Funktor ist). Dann ist der kanonische R-Modulhomomorphismus

$$\theta_q : H_q(X,R) \otimes M \longrightarrow H_q(X,M)$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Betrachte die exakte Sequenz

$$0 \to Z_q(X,R) \overset{i}{\hookrightarrow} C_q(X,R) \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1}(X,R).$$

Da M flach ist, ist auch die tensorierte Sequenz exakt:

$$0 \to Z_q(X,R) \otimes M \xhookrightarrow{i \otimes \mathrm{id}} C_q(X,R) \otimes M \xrightarrow{\partial_q \otimes \mathrm{id}} C_{q-1}(X,R) \otimes M$$

Das heißt, es ist $Z_q(X,M) = \ker(\partial_q \otimes \mathrm{id}_M) \cong Z_q(X,R) \otimes M$, und analog mit B_q. Wir erhalten ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen und schon zwei Isomorphismen in den Spalten:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B_q(X,R) \otimes M \arrow[r] \arrow[d, equal, "\wr"] & Z_q(X,R) \otimes M \arrow[r] \arrow[d, equal, "\wr"] & H_q(X,R) \otimes M \arrow[r] \arrow[d, "\theta_q"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_q(X,M) \arrow[r] & Z_q(X,M) \arrow[r] & H_q(X,M) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Damit muss natürlich (Fünferlemma) auch θ_q ein Isomorphismus sein. $\Box$

Beispiel 8.2.1. Sei X topologischer Raum, R Ring, $f \in \mathrm{NNT}(R)$, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$, $S \subseteq R$ m. a. S..

(1) $(H_q(X,R))_f \cong H_q(X,R) \otimes R_f \cong H_q(X,R_f)$, $H_q(X,R_\mathfrak{p}) \cong_{\theta_q} H_q(X,R)_\mathfrak{p}$, allgemeiner $H_q(X,R_S) \cong_{\theta_q} (H_q(X,R))_S$.

(2) Ist R Int-Bereich, $Q(R) = R_{\mathrm{NNT}(R)}$ der Quotientenkörper, so sind $H_q(X,Q(R))$ und $H_q(X,R) \otimes_R Q(R) =: Q(H_q(X,R))$ kanonisch isomorph.

(3) Insbesondere sind $H_q(X,\mathbb{Q})$ (die q-te rationale Homologie) und $H_q(X,\mathbb{Z}) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}$ kanonisch isomorphe $\mathbb{Q}$-Vektorräume (bzw. $\mathbb{Z}$-Moduln).

Definition 8.21. *Sei X topologischer Raum, $i \in \mathbb{N}_0$. Dann heißt*

$$b_i(X) := \dim_\mathbb{Q} H_i(X,\mathbb{Q})$$

die i-te ***Betti-Zahl***[1] *von X.*

[1] nach Enrico Betti, 1823–1892, italienischer Topologe

Beispiel 8.2.2.

(a) $b_i(\Delta_n) = b_i(\mathbb{R}^n) = b_i(E_n) = \begin{cases} 0 & i > 0 \\ 1 & i = 0 \end{cases}.$

(b) Für $T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = S_1^2 \cong \mathbb{C}/\mathbb{Z}^2$ ist $b_0(T) = 1$ und $b_1(T) = 2$ (weil $H_1(t, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$).

Andere Interpretation der Kohomologiemoduln

Sei wieder X topologischer Raum, R ein Ring, $(H^q(X,R))_{q\in\mathbb{Z}}$ die Kohomologie mit Koeffizienten in R.

Frage. Wie kann man die $H^q(X,R)$ naiv besser verstehen, als uns die abstrakte Definition liefert? Gilt eventuell $C^q(X,R) = C_q(X,R)^*$?

SATZ 8.2.3. Sei X topologischer Raum, R Ring. Dann ist $C^q(X,R) = C_q(X,R)^*$ als R-Modul kanonisch isomoroph zu

$$\mathrm{Abb}(S_q(X), R) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_q(X,\mathbb{Z}), R).$$

Beweis. Übungsaufgabe, zu zeigen ist nur

$$\mathrm{Hom}_R(C_q(X,\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} R, R) \xrightarrow[\text{kanon.}]{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_q(X,\mathbb{Z}), R). \qquad \square$$

Bemerkung. Das heißt, q-Koketten sind interpretierbar als R-wertige Funktionen auf der Menge $S_q(X)$ der singulären Q-Simplices von X.

Entsprechend ist dann $\delta_q = (\partial_{q+1})^*$ die *Rand-Vorschalt-Funktion*: Es ist

$$\delta_q(\xi)(\sigma) = \xi(\partial_{q+1}(\sigma)),$$

d.h. δ_q baut aus einer Funktion zum Messen von q-Simplices eine solche zum Messen von $q+1$-Simplices, mittels Vorschalten von ∂_{q+1}.

$Z^q(X,R) = \ker(\delta_q)$ ist die Menge jener q-Simplex-R-Funktionen, welche alle q-Ränder annullieren.

$B^q(X,R) = \mathrm{im}(\delta_{q-1})$ die Menge jener q-Simplex-Funktionen, die von $q-1$-Simplex-Funktionen kommen, also nur die $(q-1$-)Ränder ihrer q-Simplices betrachten.

Offenbar ist $B^q \subseteq Z^q$, man hat also wieder die Faktorgruppen

$$H^q(X,R) = Z^q(X,R)/B^q(X,R).$$

Homotopiekategorien

Wir wollen das Beispiel der letzten Vorlesung (mit der Kegelkonstruktion in konvexen Mengen im $\mathbb{R}^n$, Satz 8.1.6) verallgemeinern.

Definition 8.22. *Seien $(C_\bullet, \partial_\bullet)$ und $(D_\bullet, \delta_\bullet)$ zwei Kettenkomplexe von R-Moduln, R ein Ring. Ein **Kettenmorphismus** von $(C_\bullet, \partial_\bullet)$ nach $(D_\bullet, \delta_\bullet)$ ist eine Familie $f_\bullet = (f_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ mit:*

(1) Für alle $q \in \mathbb{Z}$ ist $f_q \in \operatorname{Hom}_R(C_q, D_q)$.

(2) Für alle $q \in \mathbb{Z}$ ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & C_{q+1} \arrow[r, "\partial_{q+1}"] \arrow[d, "f_{q+1}"'] & C_q \arrow[r] \arrow[d, "f_q"] & {} \\ {} \arrow[r] & D_{q+1} \arrow[r, "\delta_{q+1}"'] & D_q \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

kommutativ, d.h. $\delta_{q+1} \circ f_{q+1} = f_q \circ \partial_{q+1}$.

Beispiel 8.2.3. Für jeden Kettenkomplex $(C_\bullet, \partial_\bullet)$ ist natürlich $\mathrm{id}_\bullet = (\mathrm{id}_{C_q})_q$ ein Kettenmorphismus von $(C_\bullet, \partial_\bullet)$ nach $(C_\bullet, \partial_\bullet)$.

Beispiel 8.2.4. Ist $X \xrightarrow{f} Y$ stetige Abbildung topologischer Räume, so ist $C_\bullet(f) := (C_q(f))_{q\in\mathbb{Z}}$ mit

$$\begin{aligned} C_q(f) : C_q(X, R) &\longrightarrow C_q(Y, R) \\ \sigma &\longmapsto f \circ \sigma \end{aligned}$$

ein Kettenmorphismus zwischen den singulären Homologien $(C_\bullet(X, R), \partial_\bullet)$ und $(C_\bullet(Y, R), \partial_\bullet)$.

Definition 8.23. *Seien*

$$(C_\bullet, \partial_\bullet) \xrightarrow{f_\bullet} (D_\bullet, \delta_\bullet) \xrightarrow{g_\bullet} (E_\bullet, \varepsilon_\bullet)$$

drei Kettenkomplexe mit zwei Kettenmorphismen. Wir bezeichnen dann mit $\boxed{g_\bullet \circ f_\bullet}$

$$g_\bullet \circ f_\bullet := (g_q \circ f_q)_{q\in\mathbb{Z}}$$

die Verkettung von $f_\bullet$ und $g_\bullet$.

$\underline{\mathrm{Comp}}_R$ sei die Kategorie, deren Objekte die Kettenkomplexe (aus R-Moduln) und deren Morphismen die Kettenmorphismen sind. $\boxed{\underline{\mathrm{Comp}}_R}$

Definition 8.24. *Sei $\mathfrak{C}$ beliebige Kategorie und $O \in \operatorname{obj}(\mathfrak{C})$. O heißt **Nullobjekt** in $\mathfrak{C}$, falls für alle Objekte $C \in \operatorname{obj}(\mathfrak{C})$ gilt:*

$$\operatorname{card}(\operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(O, C)) = \operatorname{card}(\operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(C, O)) = 1.$$

Bemerkung.

(1) Nullobjekte müssen für eine Kategorie nicht existieren (bsp. $\underline{\mathrm{Ens}}$ und $\underline{\mathrm{Top}}$).

(2) Nullobjekte sind gleichzeitig auch Anfangs- und Endobjekte in $\mathfrak{C}$ (und umgekehrt sind alle Objekte, die gleichzeitig Anfangs- und Endobjekte sind, auch Nullobjekte).

(3) $\underline{\mathrm{Mod}}_R$, $\underline{\mathrm{Ab}} = \underline{\mathrm{Mod}}_{\mathbb{Z}}$, $\underline{\mathrm{Comp}}_R$ haben alle Nullobjekte (in $\underline{\mathrm{Comp}}_R$ ist das der 0-Komplex: $\ldots \to 0 \to 0 \to 0 \to \ldots$).

(4) Nullobjekte sind, falls in einer Kategorie existent, bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Definition 8.25. *Sei $\mathfrak{C}$ eine Kategorie mit Nullobjekten. $\mathfrak{C}$ heißt eine* ***additive Kategorie****, falls*

(1) Für alle $(C, C') \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C})^2$: $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(C, C') \in \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{Ab}})$, d.h. die Menge der Homomorphismen trägt die Struktur einer abelschen Gruppe, mit fixierter Operation.

(2) Für $(C, C', C'') \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C})^3$ ist

$$\begin{aligned} \circ : \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(C, C') \times \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(C', C'') &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(C, C'') \\ (f, g) &\longmapsto f \circ g \end{aligned}$$

$\mathbb{Z}$-bilinear, erfüllt also die Distributivgesetze: $h \circ (f+g) = h \circ f + h \circ g$ und $(h+h') \circ g = h \circ f + h' \circ f$.

Beispiel 8.2.5. $\underline{\mathrm{Mod}}_R$, $\underline{\mathrm{Ab}}$, $\underline{\mathrm{Comp}}_R$ sind additive Kategorien.
(Für $\underline{\mathrm{Comp}}_R$: $f_\bullet + g_\bullet := (f_q + g_q)_{q \in \mathbb{Z}}$.)

Definition 8.26. *Seien $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$ additive Kategorien, $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ ein (kovarianter) Funktor. F heißt* ***additiver Funktor****, falls für alle $C_1, C_2 \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C})$ und alle $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(C_1, C_2)$ gilt:*

$$F(f+g) = F(f) + F(g) \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}'}(F(C_1), F(C_2))$$

Beispiel 8.2.6. Sei N beliebig fixierter R-Modul. Dann sind $\mathrm{Hom}(\square, N)$, $\mathrm{Hom}(N, \square)$ und $\square \otimes_R N$ additive Funktoren von $\underline{\mathrm{Mod}}_R$ nach $\underline{\mathrm{Mod}}_R$, bekanntlich nicht exakt.

Beispiel 8.2.7. Sei $\varphi : R \to R'$ Ringhomomorphismus, also R' eine R-Algebra. Dann ist

$$\begin{aligned} T_\varphi : \underline{\mathrm{Mod}}_R &\longrightarrow \underline{\mathrm{Mod}'}_R \\ M &\longmapsto M \otimes_R R' \\ (M \xrightarrow{f} N) &\longmapsto f \otimes \mathrm{id}_{R'} \end{aligned}$$

ein additiver Funktor, ebenfalls i.a. nicht exakt.

Definition 8.27. *Für $q \in \mathbb{Z}$ gibt es die* ***Homologiefunktoren***

$$\begin{aligned} H_q : \underline{\mathrm{Comp}}_R &\longrightarrow \underline{\mathrm{Mod}}_R \\ (C_\bullet, \partial_\bullet) &\longmapsto H_q((C_\bullet, \partial_\bullet)) = {}^{\ker(\partial_q)}\!\big/_{\mathrm{im}(\partial_{q+1})} \\ \Big((C_\bullet, \partial_\bullet) \xrightarrow{f_\bullet} (D_\bullet, \delta_\bullet)\Big) &\longmapsto H_q(f_\bullet) : H_q(C_\bullet, \partial_\bullet) \to H_q(D_\bullet, \delta_\bullet) \\ &\qquad\qquad [\xi] \mapsto [f_q(\xi)] \end{aligned}$$

Bemerkung. Offenbar sind auch die H_q additive Funktoren.

Bemerkung. Wir haben jetzt folgendes Diagramm von Funktoren für einen Ring R:

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Top}} \arrow[rr, "H_q(\square,R)"] \arrow[dr, "C_\bullet(\square,R)"'] & & \underline{\mathrm{Mod}}_R \\ & \underline{\mathrm{Comp}}_R \arrow[ur, "H_q"'] & \end{tikzcd}$$

> $\boxed{\text{SATZ 8.2.4.}}$ Seien A und B k&u-Ringe, $T : \underline{\mathrm{Mod}}_A \to \underline{\mathrm{Mod}}_B$ ein additiver und exakter Funktor. Dann „kommutiert T mit der Homologie", d.h. für alle Kettenkomplexe $(C_\bullet, \partial_\bullet) \in \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{Comp}}_A)$, für alle $q \in \mathbb{Z}$ gibt es kanonische Isomorphismen
>
> $$H_q(T(C_\bullet, \partial_\bullet)) \xrightarrow{\sim} T(H_q(C_\bullet, \partial_\bullet)).$$

Beispiel 8.2.8. Beispiele für solche additiven exakten Funktoren sind etwa Vergissfunktoren $V : \underline{\mathrm{Mod}}_A \to \underline{\mathrm{Mod}}_{\mathbb{Z}}$ (oder allgemeiner $V : \underline{\mathrm{Mod}}_B \to \underline{\mathrm{Mod}}_A$ mit einem Ringhomomorphismus $A \to B$) oder Lokalisierungsfunktoren ($S \subseteq A$ ein m. a. S., $B := A_S$):

$$\begin{aligned} \square_S : \mathrm{Mod}_A &\longrightarrow \mathrm{Mod}_{A_S} \\ M &\longmapsto M_S = M \otimes_A A_S \\ (M \xrightarrow{f} N) &\longmapsto M_S \xrightarrow{f_S} N_S \\ &\qquad \frac{x}{s} \mapsto \frac{f(x)}{s} \end{aligned}$$

Beweis. Wir haben ja zunächst den Komplex $(C_\bullet, \partial_\bullet)$, welcher das folgende Diagramm induziert:

$$\begin{tikzcd} & C_{q+2} \arrow[r, "\partial_{q+2}"] & C_{q+1} \arrow[r, "\partial_{q+1}"] \arrow[d, "\partial_{q+1}"'] & C_q \arrow[r, "\partial_q"] & C_{q-1} & \\ 0 \arrow[rr] & & \mathrm{im}(\partial_{q+1}) \arrow[r, tail, "j"] \arrow[d] & \ker(\partial_q) \arrow[r, two heads] \arrow[u, "i"'] & H_q(C_\bullet, \partial_\bullet) \arrow[r] & 0 \\ & & 0 & 0 \arrow[u] & & \end{tikzcd}$$

Das Diagramm ist kommutativ mit exakten Zeilen und Spalten, insbesondere auch exakter unterer Zeile. Anwenden des Funktors T ergibt:

$$\begin{tikzcd} & T(C_{q+2}) \arrow[r, "T(\partial_{q+2})"] & T(C_{q+1}) \arrow[r, "T(\partial_{q+1})"] \arrow[d, "T(\partial_{q+1})"'] & T(C_q) \arrow[r, "T(\partial_q)"] & T(C_{q-1}) & \\ 0 \arrow[rr] & & T(\mathrm{im}(\partial_{q+1})) \arrow[r, tail, "T(j)"] \arrow[d] & T(\ker(\partial_q)) \arrow[r, two heads] \arrow[u, "T(i)"'] & T(H_q(C_\bullet, \partial_\bullet)) \arrow[r] & 0 \\ & & 0 & 0 \arrow[u] & & \end{tikzcd}$$

Da T exakt ist, ist auch hier die untere Zeile des Diagrammes exakt, also gilt

$$T(H_q(C_\bullet, \partial_\bullet)) = {T(\ker(\partial_q))}\big/{T(\operatorname{im}(\partial_{q+1}))}.$$

Die Exaktheit liefert weiterhin

$$\begin{aligned} T(\ker(\partial_q)) &\cong \ker(T(\partial_q)) \\ T(\operatorname{im}(\partial_{q+1})) &\cong T(\operatorname{im}(\partial_{q+1})), \end{aligned}$$

zusammen haben wir also

$$\begin{aligned} T(H_q(C_\bullet, \partial_\bullet)) &\cong {\ker(T(\partial_q))}\big/{\operatorname{im}(T(\partial_{q+1}))} \\ &= H_q(T(C_\bullet, \partial_\bullet)). \end{aligned}$$

□

Definition 8.28. *Seien* $(C_\bullet, \partial_\bullet), (D_\bullet, \delta_\bullet) \in \operatorname{obj}(\underline{\mathrm{Comp}}_R)$ *zwei Kettenkomplexe,* $f_\bullet$ *und* $g_\bullet : (C_\bullet, \partial_\bullet) \to (D_\bullet, \delta_\bullet)$ *zwei Kettenmorphismen.*

(1) $f_\bullet$ *heißt* ***nullhomotoper Kettenmorphismus*** *(*$f_\bullet \sim 0_\bullet$*,* $f_\bullet \sim 0$ *oder* $f_\bullet \underset{htp}{\sim} 0$*), falls es eine Morphismenfolge* $(h_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ *mit* $h_q \in \operatorname{Hom}_R(C_q, D_{q+1})$ *gibt, so dass für alle* q *gilt:*

$$\partial_{q+1} \circ h_q + h_{q-1} \circ \partial_q = f_q$$

$\boxed{\underset{\text{htp}}{\sim}}$

(2) Zwei (parallele) Kettenmorphismen $f_\bullet$ *und* $g_\bullet$ *heißen (zueinander)* ***kettenhomotop*** *(*$f_\bullet \underset{\text{htp}}{\sim} g_\bullet$*), falls ihre Differenz* $f_\bullet - g_\bullet$ *nullhomotop ist.*

Bemerkung. Hier das (nicht kommutative!) Diagramm dazu:

$$\begin{tikzcd} {} & {} \arrow[r] & C_q \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[dl, "h_q"'] \arrow[d, "f_q"] & C_{q-1} \arrow[r] \arrow[dl, "h_{q-1}"] & {} \\ {} \arrow[r] & D_{q+1} \arrow[r, "\delta_{q+1}"'] & D_q \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

Beispiel 8.2.9. Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexe Menge, und $(C_\bullet, \partial_\bullet) := (\tilde{C}_\bullet(X,R), \tilde{\partial}_\bullet)$ die reduzierte singuläre Homologie. Dann ergibt (im Beweis von Satz 8.1.6) die Kegelkonstruktion die Existenz der Abbildungen $h_q : \tilde{C}_q(X,R) \to \tilde{C}_{q+1}(X,R)$ mit der Homotopiebedingung $\tilde{\partial}_{q+1} \circ \tilde{h}_q + h_{q-1} \circ \tilde{\partial}_q = \mathrm{id}_{\tilde{C}_q(X,R)}$ – die Identität ist hier also nullhomotop.

$\boxed{\text{Satz 8.2.5.}}$ Seien $(C_\bullet, \partial_\bullet) \underset{f_\bullet}{\overset{g_\bullet}{\rightrightarrows}} (D_\bullet, \delta_\bullet)$ Morphismen in $\underline{\mathrm{Comp}}_R$. Dann gilt für $q \in \mathbb{Z}$:

(1) Ist $f_\bullet \underset{\text{htp}}{\sim} 0_\bullet$, so ist $H_q(f_\bullet) = 0$.

(2) Ist $f_\bullet \underset{\text{htp}}{\sim} g_\bullet$, so ist $H_q(f_\bullet) = H_q(g_\bullet)$.

Beweis.

(1) Sei $f_\bullet \underset{\text{htp}}{\sim} 0$, etwa mit der Homotopie $(h_q)_{q\in\mathbb{Z}}$, $h_q : C_q \to D_{q+1}$. Dann ist für $q \in \mathbb{Z}$ mit $[\xi] \in H_q((C_\bullet, \partial_\bullet))$, also $\xi \in Z_q(C_\bullet, \partial_\bullet)$, d.h. $\partial_q(\xi) = 0$. Damit ist

$$H_q(f_\bullet)([\xi]) = [f_q(\xi)] = [\delta_{q+1}(h_q(\xi)) + h_{q-1}(\partial_q(\xi))] = [\underbrace{\delta_{q+1}(H_q(\xi))}_{\in B_q(D_\bullet)}] = [0].$$

(2) folgt aus (1), da H_q additiv ist, also $0 = H_q(f_\bullet - g_\bullet) = H_q(f_\bullet) - H_q(g_\bullet)$. $\square$

Frage. Wie prüft man *praktisch* für $(C_\bullet, \partial_\bullet) \underset{f_\bullet}{\overset{g_\bullet}{\rightrightarrows}} (D_\bullet, \delta_\bullet)$, ob $f_\bullet \underset{\text{htp}}{\sim} g_\bullet$ ist?

Bemerkung. Die Relation $\underset{\text{htp}}{\sim}$ auf $\operatorname{Hom}_{\underline{\text{Comp}}_R}((C_\bullet, \partial_\bullet), (D_\bullet, \delta_\bullet))$ ist eine Äquivalenzrelation.

Definition 8.29. *Für $f_\bullet \in \operatorname{Hom}_{\underline{\text{Comp}}_R}(C_\bullet, D_\bullet)$ bezeichne* $\boxed{[\square]_{\text{htp}}}$

$$[f_\bullet]_{\text{htp}} := \left\{ g_\bullet \mid g_\bullet \underset{\text{htp}}{\sim} f_\bullet \right\}$$

*die **Kettenhomotopieklasse** von $f_\bullet$.*

Definition 8.30. *Für einen Ring R heißt die Kategorie $\underline{\text{HComp}}_R$ mit* $\boxed{\underline{\text{HComp}}_R}$

$$\begin{aligned}
\operatorname{obj}(\underline{\text{HComp}}_R) &:= \operatorname{obj}(\text{Comp}_R) \\
\operatorname{Hom}_{\underline{\text{HComp}}_R}(C_\bullet, D_\bullet) &:= \operatorname{Hom}_{\underline{\text{Comp}}_R}(C_\bullet, D_\bullet)\big/_{\underset{\text{htp}}{\sim}} \\
&= \left\{ [f_\bullet]_{\text{htp}} \,\middle|\, f_\bullet \in \operatorname{Hom}_{\underline{\text{Comp}}_R}(C_\bullet, D_\bullet) \right\}
\end{aligned}$$

*heißt die **Homotopiekategorie** zu $\underline{\text{Comp}}_R$.*

Bemerkung. $\underline{\text{Comp}}_R$ ist als *Faktorkategorie* wirklich eine Kategorie, mit der Verkettung $[g_\bullet] \circ [f_\bullet] := [g_\bullet \circ f_\bullet]$, welche so wohldefiniert (repräsentantenunabhängig) ist.

Bemerkung. Wir haben also jetzt dieses Diagramm (für alle Ringe R und $q \in \mathbb{Z}$):

$$\begin{tikzcd}
\underline{\text{Top}} \arrow[r, "C_\bullet(\square, R)"] \arrow[d] & \underline{\text{Comp}}_R \arrow[r, "H_q"] \arrow[d, "Q_C"'] & \text{Mod}_R \\
\underline{\text{HTop}} \arrow[r] & \underline{\text{HComp}}_R \arrow[ur, "\check{H}_q"'] &
\end{tikzcd}$$

Zu ergänzen ist jetzt noch die Kategorie $\underline{\text{HTop}}$ in der unteren linken Ecke.

Bemerkung. $\underline{\text{HComp}}_R$ ist auch wieder eine additive Kategorie, via $[g_\bullet] + [f_\bullet] := [f_\bullet + g_\bullet]$.

Der Quotientenfunktor $Q_C : \underline{\text{Comp}}_R \to \underline{\text{HComp}}_R$ ist damit automatisch ein additiver Funktor.

Homotopiekonstruktion für $\underline{\mathrm{Top}}$

Definition 8.31. *Seien X, Y topologische Räume, $X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y$ zwei stetige Abbildungen,*
$\boxed{\underset{\text{htp}}{\sim}}$ *$I := [0,1]$. Wir nennen f* ***homotop*** *zu g ($f \underset{\text{htp}}{\sim} g$) , falls es eine stetige Abbildung $F : X \times I \to Y$ gibt mit $F(X,0) = f(x)$ und $F(x,1) = g(x)$ für alle $x \in X$.*

F heißt ***Homotopie*** *zwischen f und g.*

Bemerkung. $\underset{\text{htp}}{\sim}$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Top}}}(X,Y) = C(X,Y)$ (die Transitivität ergibt sich über eine Verklebung der Homotopien).

$\boxed{[\square]_{\text{htp}}}$ **Definition 8.32.** *Für eine stetige Abbildung ($\underline{\mathrm{Top}}$-Morphismus) $X \xrightarrow{f} Y$ heißt*

$$[f]_{\text{htp}} := \left\{ x : X \to Y \mid g \underset{\text{htp}}{\sim} f \right\}$$

die ***Homotopieklasse*** *von f.*

$\boxed{\underline{\mathrm{HTop}}}$ **Definition 8.33.** *Wir bezeichnen mit* $\underline{\mathrm{HTop}} := \left(\mathrm{obj}(\underline{\mathrm{Top}}), {}^{\mathrm{Mor}(\underline{\mathrm{Top}})}\!\big/_{\underset{\text{htp}}{\sim}}\right)$ *die* ***Homotopiekategorie*** *zu $\underline{\mathrm{Top}}$.*

Den Quotientenfunktor bezeichnen wir mit Q_t:

$$\begin{aligned} Q_t : \underline{\mathrm{Top}} &\longrightarrow \underline{\mathrm{HTop}} \\ X &\longmapsto X \\ (X \xrightarrow{f} Y) &\longmapsto \left[X \xrightarrow{f} Y\right]_{\text{htp}} \end{aligned}$$

Homotopie-Äquivalenz bzw. Homotopie-Typen topologischer Räume

Definition 8.34. *Seien X und Y topologische Räume, $f : X \to Y$. f heißt* ***Homotopieäquivalenz*** *zwischen X und Y, falls es eine Abbildung g gibt mit $g \circ f \underset{\text{htp}}{\sim} \mathrm{id}_X$ und $f \circ g \underset{\text{htp}}{\sim} \mathrm{id}_Y$.*

$\boxed{\approx}$ *Wir schreiben in diesem Fall auch $X \approx Y$ und sagen, dass X* ***homotopieäquivalent*** *zu Y ist, bzw. dass X und Y vom selben* ***Homotopietyp*** *sind.*

Bemerkung. $\approx$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{obj}(\underline{\mathrm{Top}})$.

Definition 8.35. *Ein topologischer Raum X heißt* ***kontrahierbar****, falls $X \approx \{x_0\}$ ist.*

Bemerkung. Es ist offenbar X kontrahierbar $\Leftrightarrow \mathrm{id}_X \underset{\text{htp}}{\sim} \mathrm{const}^X_{x_0}$ für ein $x_0 \in X$.

$\boxed{\underline{\mathrm{Top}}^{\approx}}$ *Bemerkung.* Damit erhalten wir eine Kategorie $\underline{\mathrm{Top}}^{\approx}$, durch

$$\begin{aligned} \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{Top}}^{\approx}) &:= {}^{\mathrm{obj}(\underline{\mathrm{Top}})}\!\big/_{\approx} \\ &= \left\{ [X]_{\approx} \mid X \in \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{Top}}) \right\} \\ \mathrm{Mor}_{\underline{\mathrm{Top}}^{\approx}}([X]_{\approx}, [Y]_{\approx}) &= \left\{ [f]_{\approx} \mid f \in \mathrm{Mor}_{\underline{\mathrm{Top}}}(X,Y) \right\} \end{aligned}$$

mit

$$[X]_{\approx} = \left\{ Y \in \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{Top}}) \mid X \approx Y \right\}$$
$$[f]_{\approx} = \left\{ g : X' \to Y' \;\middle|\; \begin{array}{l} X' \approx X, Y' \approx Y, \\ \text{und } \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift left, "\text{htp}"'] & Y \arrow[d, shift left, "\text{htp}"] \\ X' \arrow[r, "g"] \arrow[u, shift left] & Y' \arrow[u, shift left] \end{tikzcd} \text{ ist kommutativ.} \end{array} \right\}$$

Beispiel 8.2.10. Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Sterngebiet bzgl. $x_0 \in X$, und betrachte die beiden Abbildungen $X \underset{\mathrm{id}_X}{\overset{\mathrm{const}_{x_0}}{\rightrightarrows}} X$. Dann haben wir $\mathrm{const}_{x_0} \underset{\mathrm{htp}}{\sim} \mathrm{id}_X$ via der Homotopie

$$F : X \times I \to I, (x,t) \qquad \mapsto (1-t) \cdot x_0 + t \cdot x$$

(offenbar ist $F(x,0) = x_0$ und $F(x,1) = x$).

Beispiel 8.2.11. Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Sterngebiet bezüglich $x_0 \in X$. Dann ist $X \approx \{x_0\}$.

Beweis. Betrachte die Einbettung $i : \{x_0\} \hookrightarrow X$ und die Projektion $\mathrm{const}_{x_0} : X \to \{x_0\}$. Dabei gilt $\mathrm{const}_{x_0} \circ i = \mathrm{id}_{\{x_0\}}$, und $i \circ \mathrm{const}_{x_0} = \mathrm{const}_{x_0} \underset{\mathrm{htp}}{\sim} \mathrm{id}_X$. □

Beispiel 8.2.12. Betrachte nun $X := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{2} \leq |z| \leq 1 \right\}$ (Kreisring), $Y := S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ (Kreislinie) und $Z := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| \leq 1\}$ (punktierte Kreisscheibe).

Dann ist $X \approx Y \approx Z$ (ÜA).

Definition 8.36. *Sei $X \in \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{Top}})$, $\varnothing \neq A \subset X$ eine Teilmenge (top. Unterraum).*

*(1) A heißt **Retrakt** von X, falls $A \approx X$.*

*(2) A heißt **starker Retrakt** oder **Deformationsretrakt**, falls $A \underset{(f,g)}{\approx}$ mit $f : A \hookrightarrow X$ die Inklusion.*

Beispiel 8.2.13. S^1 ist ein (sogar starker) Retrakt von Kreisring und punktierter Kreisscheibe, $\{x_0\}$ ist starker Retrakt eines Sterngebietes um x_0.

> SATZ 8.2.6. *(Homotopie-Invarianz der (Ko-)Homologie, 2. Hauptsatz der algebraischen Topologie)*
>
> Seien $X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}}$ zwei homotope stetige Abbildungen, R ein Ring. Dann sind $C_\bullet(f)$ und $C_\bullet(g)$ kettenhomotop, d.h. es gibt eine Abbildungsfolge $(h_q)_{q\in\mathbb{Z}}$, $h_q : C_q(X,R) \to C_{q+1}(Y,R)$, so dass für alle $q \in \mathbb{Z}$ gilt:
>
> $$\partial^Y_{q+1} \circ h_q + h_{q-1} \circ \partial^X_q = C_q(f) - C_q(g)$$

Hier noch einmal als Diagramm:

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & C_{q+1}(X) \arrow[r, "\partial_{q+1}^X"] \arrow[d] \arrow[dl] & C_q(X) \arrow[r, "\partial_q^X"] \arrow[d, "C_q(f)-C_q(g)"] \arrow[dl, "h_q"'] & C_{q-1}(X) \arrow[r, "\partial_{q-1}^X"] \arrow[d] \arrow[dl, bend left, "h_{q-1}"] & {} \arrow[dl] \\
{} \arrow[r, "\partial_{q+2}^Y"'] & C_{q+1}(Y) \arrow[r, "\partial_{q+1}^Y"'] & C_q(Y) \arrow[r, "\partial_q^Y"'] & C_{q-1}(Y) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}
$$

Beweis. Betrachte das durch die Homotopie F induzierte kommutative Diagramm:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "i_0"] \arrow[ddr, "F\circ i_0=f"'] & & X \arrow[dl, "i_1"'] \arrow[ddl, "g=F\circ i_1"] \\
& X \times I \arrow[d, "F"] & \\
& Y &
\end{tikzcd}
$$

mit $i_0 = (\mathrm{id}, \mathrm{const}_0)$ und $i_1 = (\mathrm{id}, \mathrm{const}_1)$. Dann gilt offenbar (weil $C_\bullet$ Funktor ist) $C_\bullet(f) = C_\bullet(F) \circ C_\bullet(i_0)$ und $C_\bullet(g) = C_\bullet(F) \circ C_\bullet(i_1)$. Es reicht also zu zeigen, dass $C_\bullet(i_0) \underset{\mathrm{htp}}{\sim} C_\bullet(i_2)$, wir müssen also nur eine Kettenhomotopie für $C_\bullet(i_1) - C_\bullet(i_0)$ konstruieren:

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & C_{q+1}(X) \arrow[r, "\partial_{q+1}^X"] \arrow[d] \arrow[dl] & C_q(X) \arrow[r, "\partial_q^X"] \arrow[d, "C_q(i_1)-C_q(i_0)"] \arrow[dl, "h_q^X"'] & C_{q-1}(X) \arrow[r, "\partial_{q-1}^X"] \arrow[d] \arrow[dl, bend left, "h_{q-1}^X"] & {} \arrow[dl] \\
{} \arrow[r, "\partial_{q+2}^{X\times I}"'] & C_{q+1}(X \times I) \arrow[r, "\partial_{q+1}^{X\times I}"'] & C_q(X \times I) \arrow[r, "\partial_q^{X\times I}"'] & C_{q-1}(X \times I) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}
$$

Schritt 1: Offenbar sind ja $C_q(i_0) = C_q(i_1) = 0$ für alle $q < 0$, damit ist auch $h_q^X = 0$ für diese q geeignet.

Wir wollen zunächst $h_0^X : C_0(X) \to C_1(X \times I)$ konstruieren, mit

$$\partial_0^{X \times I} \circ h_0^X + 0 = C_0(i_1) - C_0(i_0).$$

Sei $(\sigma : \Delta_0 = \{1\} \to X) \in S_0(X)$. $\sigma = \mathrm{const}_{x_\sigma}$ kann mit $x_\sigma = \sigma(1) \in X$ identifiziert werden. Wir erhalten

$$
\begin{tikzcd}
 & (1,t) \arrow[r, mapsto] & (\sigma(1),t) \\
(1,t) \arrow[d, mapsto, shift left] & \Delta_0 \times I \arrow[r, "\sigma\times\mathrm{id}_I"'] \arrow[d, equal, "\wr"'] & X \times I \\
t \arrow[u, mapsto, shift left] \arrow[d, mapsto, shift left] & I \arrow[d, equal, "\wr"'] & \\
(1-t,t) \arrow[u, mapsto, shift left] & \Delta_1 \arrow[uu, bend right, "\rho"'] \arrow[uur] &
\end{tikzcd}
$$

Setze nun $h_0^X(\sigma) := (\sigma \times \mathrm{id}_I) \circ \rho \in S^1(X)$ und erhalte eine Abbildung

$$\begin{aligned} h_0^X : S_0(X) &\longrightarrow S_0(X \times I) \\ (\sigma : \Delta_0 \to X) &\longmapsto h_0^X(\sigma) : \Delta_1 \to X \times I \\ &\qquad\qquad (1-t, t) \mapsto (\sigma(1), t) \end{aligned}$$

und mit linearer Fortsetzung

$$\begin{aligned} h_0^X : C_0(X, R) &\longrightarrow C_1(X \times I) \\ \sum_{\sigma \in S_0(X)} n_\sigma \cdot \sigma &\longmapsto \left(\sum_{\sigma \in S_0(X)} n_\sigma \cdot ((\sigma \times \mathrm{id}_I) \circ \rho) \right) : \Delta_1 \to \bigoplus_{(x,t) \in X \times I} R \cdot (x, t) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (1-t, t) \mapsto \sum_{\sigma \in S_0(X)} n_\sigma \cdot (\sigma(1), t) \end{aligned}$$

Es ist nun für $\sigma \in S_1(X)$:

$$\begin{aligned} \partial_1^{X \times I}(h_0^X(\sigma)) &= h_0^X(\sigma)(1,0) - h_0^X(\sigma)(0,1) \\ &= (\sigma(1), 0) - (\sigma(1), 1) \\ &= C_0(i_0)(\sigma) - C_0(i_1)(\sigma) \\ &= (C_0(i_0) - C_0(i_1))(\sigma) \end{aligned}$$

Das heißt, h_0^X erfüllt (mit $h_q^X = 0$ für $q < 0$) die Homotopiebedingung.

Bemerkung. Diese Konstruktion von h_0^X ist *funktoriell* im folgenden Sinne: Ist $f : X \to Y$ stetig, so ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} C_0(X) \arrow[r, "C_0(f)"] \arrow[d, "h_0^X"'] & C_0(Y) \arrow[d, "h_0^Y"] \\ C_1(X \times I) \arrow[r, "C_1(f \times \mathrm{id})"'] & C_1(Y \times I) \end{tikzcd}$$

kommutativ.

Beweis. Es ist ja

$$\begin{aligned} h_0^Y(C_0(f)(x))(1-t, t) &= (h_0^Y(f(x)))(1-t, t) \\ &= (f(x), t) \\ &= (C_1(f \times \mathrm{id}_I))(x, t) \\ &= (C_1(f \times \mathrm{id}_I) \circ ((\sigma_x \times \mathrm{id}_I) \circ \rho))(1-t, t) \\ &= C_1(f \times \mathrm{id}_I)(h_0^X(x))(1-t, t), \end{aligned}$$

also $h_0^Y \circ C_0(f) = C_1(f \times \mathrm{id}_I) \circ h_0^X$. $\square$

Das heißt, die Familie $(h_0^X)_{X\in\text{obj}(\underline{\text{Top}})}$ ist ein Funktormorphismus zwischen

$$C_0(\Box) : \underline{\text{Top}} \longrightarrow \underline{\text{Mod}}_R$$

und

$$C_1(\Box \times I) : \underline{\text{Top}} \longrightarrow \underline{\text{Mod}}_R.$$

2. Schritt (Dies wird der allgemeine iterative Schritt.)

Seien $h_0^X, \ldots, h_{q-1}^X$ schon konstruiert für alle $X \in \text{obj}(\underline{\text{Top}})$ mit den Eigenschaften:

(a) Homotopieeigenschaft für $\nu \leq q-1$:

$$\partial_{\nu+1}^{X\times I} \circ h_\nu^X + h_{\nu-1}^X \circ \partial_\nu^X = C_\nu(i_1^X) - C_\nu(i_0^X)$$

(b) Funktorialitätseigenschaft: Für $\nu \leq q-1$ und eine stetige Abbildung $X \xrightarrow{f} Y$ ist das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{tikzcd} C_\nu(X) \arrow[r, "C_\nu(f)"] \arrow[d, "h_\nu^X"'] & C_\nu(Y) \arrow[d, "h_\nu^Y"] \\ C_{\nu+1}(X \times I) \arrow[r, "C_{\nu+1}(f\times\text{id})"'] & C_{\nu+1}(Y \times I) \end{tikzcd}$$

Jetzt soll h_q^X konstruiert werden:

$$h_q^X : C_q(X) \to C_{q+1}(X \times I),$$

mit Hilfe der h_ν^X für $\nu \leq q+1$ und ihren Eigenschaften (a) und (b). Sei $\sigma \in S_q(X)$ (also ein Basiselement von $C_q(X)$). Dann ist $\sigma : \Delta_q \to X$, also

$$\sigma = \sigma \circ \text{id}_{\Delta_q} = C_q(\sigma)(\text{id}_{\Delta_q}),$$

mit $\text{id}_{\Delta_q} \in S_q(\Delta_q)$. Wollen wir die Funktorialitätseigenschaft auf für h_q haben, so muss auch das folgende Diagramm kommutieren:

$$\begin{tikzcd} C_q(\Delta_q) \arrow[r, "C_q(\sigma)"] \arrow[d, "h_q^{\Delta_q}"'] & C_q(X) \arrow[d, "h_q^X"] \\ C_{q+1}(\Delta_q \times I) \arrow[r, "C_{q+1}(\sigma\times\text{id})"'] & C_{q+1}(X \times I) \end{tikzcd}$$

Als Formel:

$$h_q^X(\sigma) = h_q^X(C_q(\sigma)(\text{id}_{\Delta_q})) = C_{q+1}(\sigma \times \text{id}_I)(h_q^{\Delta_q}(\text{id}_{\Delta_q}))$$

Das heißt, $h_q^X(\sigma)$ ist schon durch das singuläre Simplex σ und eine Wahl von $h_q^{\Delta_q}(\text{id}_{\Delta_q}) \in C_{q+1}(\Delta_q \times I)$ eindeutig bestimmt. Weiterhin erfüllt ja $h_{q-1}^{\Delta_q}$ die Homotopiebedingung

$$\partial_q^{\Delta_q\times I} \circ h_{q+1}^{\Delta_q} + h_{q-2}^{\Delta_q} \circ \partial_{q+1}^{\Delta_q} = C_{q-1}(i_1^{\Delta_q}) - C_{q-1}(i_0^{\Delta_q})$$

Vorschalten von $\partial_q^{\Delta_q}$ ergibt:

$$\partial_q^{\Delta_q \times I} \circ h_{q-1}^{\Delta_q} \circ \partial_q^{\Delta_q} + 0 = C_{q-1}(i_1^{\Delta_q}) \circ \partial_q^{\Delta_q} - C_{q-1}(i_0^{\Delta_q}) \circ \partial_q^{\Delta_q}$$

und aufgrund der Ketten-Morphismus-Eigenschaft von $C_\bullet(i_1^{\Delta_q})$ sowie $C_\bullet(i_0^{\Delta_q})$:

$$= \partial_{q+1}^{\Delta_q + I} \circ (C_q(i_1^{\Delta_q}) - C_q(i_0^{\Delta_q})).$$

Anders formuliert:

$$\partial_q^{\Delta_q \times I} \circ \left(C_q(i_1^{\Delta_q}) - C_q(i_0^{\Delta_q}) - h_{q-1}^{\Delta_q} \circ \partial_q^{\Delta_q} \right) = 0,$$

also

$$\begin{aligned} \left(C_q(i_1^{\Delta_q}) - C_q(i_0^{\Delta_q}) - h_{q-1}^{\Delta_q} \circ \partial_q^{\Delta_q} \right) (\mathrm{id}_{\Delta_q}) &\in \ker(\partial_q^{\Delta_q \times I}) \\ &= Z_q(\Delta_q \times I) \\ &= B_q(\Delta_q \times I), \end{aligned}$$

da ja $\Delta_q \times I$ konvex ist. Das heißt, es gibt ein $\omega \in C_{q+1}(\Delta_q \times I)$ mit

$$\left(C_q(i_1^{\Delta_q}) - C_q(i_0^{\Delta_q}) - h_{q-1}^{\Delta_q} \circ \partial_q^{\Delta_q} \right) (\mathrm{id}_{\Delta_q}) = \partial_{q+1}^{\Delta_q \times I}(\omega).$$

Wir fixieren dieses ω, und stellen die Gleichung noch etwas um:

$$\partial_{q+1}^{\Delta_q \times I}(\omega) + (h_{q-1}^{\Delta_q} \circ \partial_q)(\mathrm{id}_{\Delta_q}) = (C_q(i_1^{\Delta_q}) - C_q(i_0^{\Delta_q}))(\mathrm{id}_{\Delta_q})$$

Wir wollen nun auch für $h_q^{\Delta_q}$ die Homotopieeigenschaft haben, und setzen daher $h_q^{\Delta_q}(\mathrm{id}_{\Delta_q}) := \omega$. Wir erhalten (mit der ebenfalls geforderten Funktorialität, siehe oben):

$$h_q^X(\sigma) = C_{q+1}(\sigma \times \mathrm{id}_I)(h_q^{\Delta_q}(\mathrm{id}_{\Delta_q})) = C_{q+1}(\sigma \times \mathrm{id}_I)(\omega).$$

Nach Konstruktion erfüllen die so konstruierten h_q^X die Funktorialitätsbedingungen, und $h_q^{\Delta_q}$ erfüllt auch die Homotopiebedingung (bezüglich des Basissimplex $\mathrm{id}_{\Delta_q} : \Delta_q \to \Delta_q$). Es bleibt zu zeigen, dass auch die h_q^X die Homotopiebedingung

$$\forall X \in \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{Top}}) : \quad \partial_{q+1}^{X \times I} \circ h_q^X + h_{q-1}^X \circ \partial_q^X = C_q(i_1^X) - C_q(i_0^X)$$

erfüllen. Dies rechnen wir „brutal" nach, unter Verwendung aller bisherigen Funktorialitätseigenschaften für ∂, C_q und h_ν (für $\nu \leq q-1$).

Für $\sigma \in S_q(X)$, also $\sigma : \Delta_q \to X$, gilt:

$$\begin{aligned} &(\partial_{q+1}^{X \times I} \circ h_q^X + h_{q-1}^X \circ \partial_q^X)(\sigma) \\ &= \partial_{q+1}^{X \times I}(\underbrace{h_q^X(\sigma)}_{=C_{q+1}(\sigma \times \mathrm{id}_I)(h_q^{\Delta_q}(\mathrm{id}_{\Delta_q}))}) + h_{q-1}^X(\partial_q^X(\underbrace{\sigma}_{=C_q(\sigma)(\mathrm{id}_{\Delta_q})})) \\ &= \left(\partial_{q+1}^{X \times I} \circ C_{q+1}(\sigma \times \mathrm{id}_I) \circ h_q^X \right) (\mathrm{id}_{\Delta_q}) + \left(h_{q-1}^X \circ \partial_q^X \circ C_q(\sigma) \right) (\mathrm{id}_{\Delta_q}) \\ &= \left(C_q(\sigma \times \mathrm{id}_I) \circ \partial_{q+1}^{\Delta_q \times I} \circ h_q^{\Delta_q} \right) (\mathrm{id}_{\Delta_q}) + \left(h_{q-1}^X \circ C_{q-1}(\sigma) \circ \partial_q^{\Delta_q} \right) (\mathrm{id}_{\Delta_q}) \\ &= \left(C_q(\sigma \times \mathrm{id}_I) \circ \partial_{q+1}^{\Delta_q \times I} \circ h_q^{\Delta_q} \right) (\mathrm{id}_{\Delta_q}) + \left(C_q(\sigma \times \mathrm{id}_I) \circ h_{q-1}^{\Delta_q} \circ \partial_q^{\Delta_q} \right) (\mathrm{id}_{\Delta_q}) \end{aligned}$$

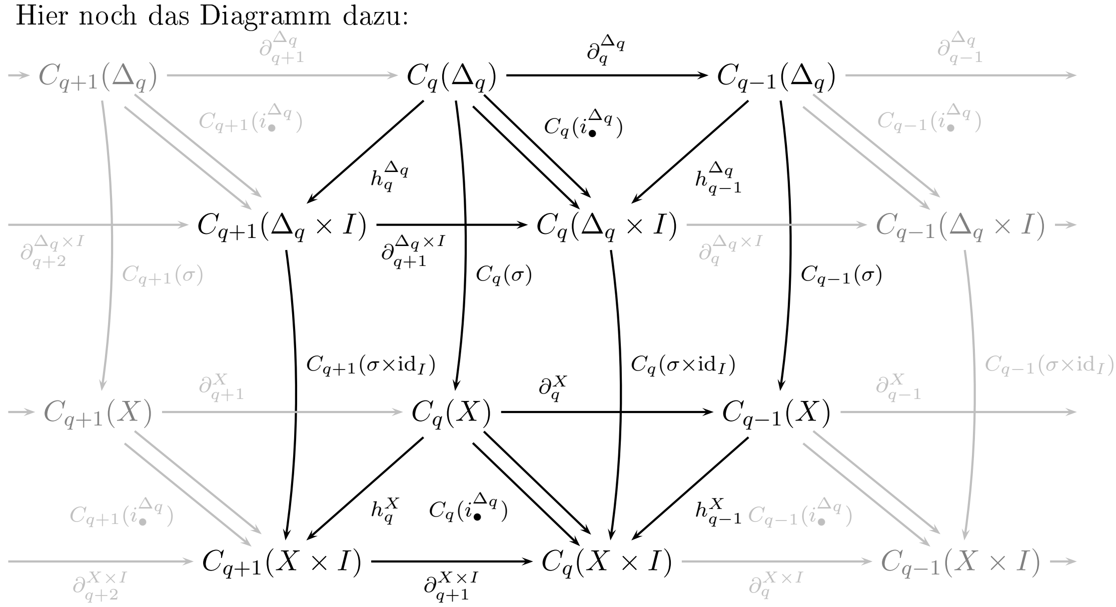
$$
\begin{aligned}
&= C_q(\sigma \times \mathrm{id}_I)\left(\left(\partial_{q+1}^{\Delta_q \times I} \circ h_q^{\Delta_q} + h_{q-1}^{\Delta_q} \circ \partial_q^{\Delta_q}\right)(\mathrm{id}_{\Delta_q})\right)\\
&= C_q(\sigma \times \mathrm{id}_I)\left(\left(C_q(i_1^{\Delta_q}) - C_q(i_0^{\Delta_q})\right)(\mathrm{id}_{\Delta_q})\right)\\
&= \left(C_q(\sigma \times \mathrm{id}_I) \circ C_q(i_1^{\Delta_q}) - C_q(\sigma \times \mathrm{id}_I) \circ C_q(i_0^{\Delta_q})\right)(\mathrm{id}_{\Delta_q}))\\
&= \left(C_q(i_1^X) \circ C_q(\sigma) + C_q(i_1^X) \circ C_q(\sigma)\right)(\mathrm{id}_{\Delta_q})\\
&= \left(C_q(i_1^X) - C_q(i_0^X)\right)(C_q(\sigma)(\mathrm{id}_{\Delta_q}))\\
&= \left(C_q(i_1^X) - C_q(i_0^X)\right)(\sigma)
\end{aligned}
$$

Es ist also

$$\partial_{q+1}^{X \times I} \circ h_q^X + h_{q-1}^X \circ \partial_q^X = C_q(i_1^X) - C_q(i_0^X)$$

auf $S_q(X)$, und mit linearer Fortsetzung auch auf $C_q(X, R)$. Es hat also auch h_q^X die Homotopieeigenschaft, für $X \in \underline{\mathrm{Top}}$, wodurch unsere induktive Konstruktion funktioniert. □

Hier noch das Diagramm dazu:



Dabei sind jeweils alle Parallelogramme mit senkrechten (gebogenen) Seiten kommutativ.

Illustrationen und Anwendungen der Homologie: Fortsetzbarkeit stetiger Abbildungen und *asphärische Räume*

$\boxed{S^n}$ $\boxed{E^{n+1}}$

Sei $S^n = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\right\}$ die n-**Sphäre** im $\mathbb{R}^{n+1}$, $E^{n+1} = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| \leq 1\right\}$ die **Vollkugel**. (Offenbar ist $\partial(E^{n+1}) = S^n$.)

Sei X topologischer Raum (beliebig), $f : S^n \to X$ beliebig.

Frage. Wann ist f auf E^{n+1} und damit auf ganz $\mathbb{R}^{n+1}$ fortsetzbar? D.h. wann existiert $\hat{f} : E^{n+1} \to X$ stetig, mit $\hat{f}|_{S^n} = f$?

$\boxed{\text{SATZ 8.2.7.}}$ Sei $X \neq \varnothing$ topologischer Raum, $f : S^n \to X$ stetig. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) Es gibt eine stetige Abbildung $\hat{f} : E^{n+1} \to X$ mit $\hat{f}|_{S^n} = f$

(2) Es existiert ein $x_0 \in X$, so dass $f \underset{\text{htp}}{\sim} \text{const}_{x_0}^{S^n}$.

Beweis.

(1) ⇒ (2): Sei f mittels $\hat{f} : E^{n+1} \to X$ stetig fortsetzbar. Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} F : S^n \times I &\longrightarrow X \\ (t, b) &\longmapsto \hat{f}(t \cdot b) \end{aligned}$$

(offenbar wohldefiniert, weil $\|t \cdot b\| = t \cdot \|b\| = t \leq 1$). F ist stetig, mit $F(b, 0) = \hat{f}(0) =: x_0$ und $F(b, 1) = \hat{f}(b) = f(b)$. Das heißt, F ist Homotopieabbildung zwischen $\text{const}_{x_0}^{S_1}$ und f, also ist $\text{const}_{x_0}^{S_1} \underset{\text{htp}}{\sim} f$.

(2) ⇒ (1): Sei $f : S^n \to X$ nullhomotop, d.h. $F : S^n \times I \to X$ mit $F(\Box, 0) = \text{const}_{x_0}$ und $F(\Box, 1) = f$ für ein $x_0 \in X$. Dann haben wir die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : E^{n+1} \setminus \{0\} &\longrightarrow S^n \times (0, 1] \\ a &\longmapsto \left(\frac{a}{\|a\|}, \|a\|\right), \end{aligned}$$

welche stetig ist, sogar ein Homöomorphismus mit der Inversen

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : S^n \times (0, 1] &\longrightarrow E^{n+1} \setminus \{0\} \\ (b, t) &\longmapsto t \cdot b \end{aligned}$$

Betrachte nun die Komposition

$$\begin{tikzcd} E^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[r, "\sim", "\varphi"'] \arrow[rrr, bend right, "\hat{F}"'] & S^n \times (0,1] \subseteq & S^n \times I \arrow[r, "F"] & X, \end{tikzcd}$$

mit $\hat{F}(0) := x_0$.

Wir erhalten $\hat{F} : E^{n+1} \to X$, stetig auf $E^{n+1} \setminus \{0\}$. Dabei ist für $b \in S^n$

$$\hat{F}(b) = F(b, 1) = f(b),$$

also ist $\hat{F}$ zumindest in <u>Ens</u> eine Erweiterung von f auf E^{n+1}. Es bleibt zu zeigen, dass $\hat{F}$ auch stetig ist in $0 \in E^{n+1}$.

Sei $U \in \text{Off}(X)$ mit $x_0 \in U$. (Wir müssen zeigen: $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(0) \subseteq \hat{F}^{-1}(U)$.) Es ist nun $F(S^n \times \{0\}) = \{x_0\} \subseteq U$, also $S^n \times \{0\} \subseteq F^{-1}(U) \in \text{Off}(S^n \times I)$.

Dabei ist $S^n \cong S^n \times \{0\}$ kompakt, wir können es also überdecken mit einer endlichen Anzahl offener Mengen der Form $(B_\varepsilon(b) \cap S^n) \times [0, \delta)$, welche jeweils in $F^{-1}(U)$ liegen:

$$S^n \times \{0\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} ((B_{\varepsilon_i}(b_i) \cap S^n) \times [0, \delta_i)) \subseteq F^{-1}(U)$$

Wähle $\varepsilon := \min_i \delta_i$, und erhalte $S^n \times [0, \varepsilon) \subseteq F^{-1}(U)$, also

$$\hat{F}(B_\varepsilon(0) \setminus \{0\}) \subseteq F(S^n \times [0, \varepsilon)) \subseteq U,$$

sowie $\hat{F}(0) = x_0 \in U$. Damit ist $B_\varepsilon(0) \subseteq \hat{F}^{-1}(U)$, also ist $\hat{F}$ auch global stetige Erweiterung von f. $\square$

KOROLLAR. Sei $f : S^n \to X$ stetig fortsetzbar auf E^{n+1}. Dann ist $H_q(f) = 0$ für alle $q \geq 1$.

Beweis. Der Satz gibt uns $f \underset{\text{htp}}{\sim} \text{const}_{x_0}$ für ein $x_0 \in X$, und damit $H_q(f) = H_q(\text{const}_{x_0}) : H_q(S^n) \to H_q(X)$. Wir haben dabei ja das Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
S^n \arrow[rr, shift left, "f"] \arrow[rr, shift right, "\text{const}_{x_0}"'] \arrow[dr, "p"'] & & X, \\
& \{x_0\} \arrow[ur, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

welches kommutativ im unteren Dreieck ist ($\text{const}_{x_0} = i \circ p$). Dies liefert uns für die Homologie:

$$\begin{tikzcd}
H_q(S^n, R) \arrow[rr, "H_q(f) = H_q(\text{const}_{x_0})"] \arrow[dr, "H_q(p)"'] & & H_q(X, R), \\
& H_q(\{x_0\}, R) \arrow[ur, "H_q(i)"'] &
\end{tikzcd}$$

Dabei ist bekanntlich $H_q(\{x_0\}, R) = (0)$ für $q \geq 1$, also auch $H_q(i) = H_q(p) = 0$, also $H_q(f) = 0$. $\square$

Bemerkung. Dies ($H_q(f) = 0$ für $q \geq 1$) ist also eine notwendige Bedingung für die Fortsetzbarkeit von $f : S^n \to X$ auf R^{n+1}.

Definition 8.37. *Sei $X \in \text{obj}(\underline{\text{Top}})$. X heißt* ***asphärisch****, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $(f : S^n \to X) \in \text{Mor}(\underline{\text{Top}})$ ein $(\hat{f} : E^{n+1} \to X) \in \text{Mor}(\underline{\text{Top}})$ existiert mit $\hat{f}|_{S^n} = f$.*

Bemerkung. Ein Raum ist also asphärisch, falls sich alle Abbildungen von Sphären nach X auf die jeweilige Vollkugel fortsetzen lassen.

Satz 8.2.8. Sphären sind nicht asphärisch.

Beweis.

$n = 0$: Hier haben wir $S^0 = \{-1, +1\}$ und $E^1 = [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}$. Die Identität $S^0 \xrightarrow{\mathrm{id}_{S^0}} S^0$ ist (wie jede Abbildung zwischen S^0 und S^0) stetig. Aber id_{S^0} ist nicht stetig auf E^1 fortsetzbar, weil E^1 zusammenhängend ist und damit auch $\hat{f}(E^1)$ zusammenhängend sein müsste, und damit nicht ganz S^0 sein kann.

$n \geq 1$ Betrachte $\mathrm{id}_{S^n} : S^n \to S^n$. Angenommen, id_S^n wäre auf E^{n+1} fortsetzbar. Nach Satz 8.2.7 wäre dann für $q \geq 1$

$$\mathrm{id}_{H_1(S^n,R)} = H_q(\mathrm{id}_{S^n}) = H_q(\mathrm{const}_{x_0}) = 0,$$

also $H_q(S^n, R) = (0)$ für $q \geq 0$. Es gilt nun aber

$$H_q(S^n, \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & q \in \{0, n\} \\ (0) & \text{sonst} \end{cases}$$

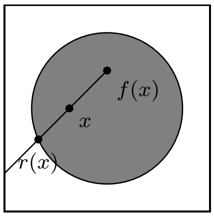
(siehe später). Dies ist ein Widerspruch zu $\mathbb{Z} \neq (0)$. □

Satz 8.2.9. *(Browerscher Fixpunktsatz)*
Sei $n \geq 1$ und $f : E^n \to E^n$ stetige Abbildung. Dann hat f einen Fixpunkt, d.h.

$$\exists a \in E^n : f(a) = a$$

Beweis. Nehmen wir an, wir hätten ein $f : E^n \to E^n$ ohne Fixpunkt, also

$$\forall x \in E^n : x \neq f(x).$$



Dann gibt es ja für jedes $x \in E^n$ die Halbgerade

$$h(f(x), x) := \{(1-t) \cdot f(x) + t \cdot x \mid t > 0\} \subseteq \mathbb{R}^n,$$

welche $f(x)$ und x verbindet. D.h. es ist $h(f(x), x) \cap S^{n-1} = \{r(x)\}$, und $r(x)$ ist eindeutig aus $f(x)$ und x bestimmt, durch die Gleichung $\|(1-t_r) \cdot f(x) + t_r \cdot x\| = 1$. Das so gewonnene $r : E^n \to S^{n-1}$ ist stetig und es ist $r|_{S^{n-1}}(b) = b$, d.h. $r|_{S^{n-1}} = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$.

Es ist also r eine stetige Fortsetzung von $\mathrm{id}_{S^{n-1}}$ auf E^n, eine solche existiert aber nicht (siehe Beweis von Satz 8.2.8).

Damit muss unsere Annahme falsch gewesen sein, f hat mindestens einen Fixpunkt. □

Satz 8.2.10. Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ein x_0-Sterngebiet. Dann ist X asphärisch.

Beweis. Sei $f : S^n \to X$ stetig, $n \geq 1$ (für $n = 0$ ist das trivial). Wir betrachten wieder die Verkettung

$$(x,t) \longmapsto f(x,t)$$

$$E^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow S^n \times (0,1] \xrightarrow[f \times \mathrm{id}]{} X \times (0,1] \xrightarrow{\text{incl}} X \times I \xrightarrow{\quad g \quad} X$$

$$a \longmapsto \left(\tfrac{a}{\|a\|}, \|a\|\right) \qquad\qquad (x,t) \longmapsto (1-t) \cdot x_0 + t \cdot x$$

Wir definieren nun $\hat{f} : E^{n+1}$ durch

$$\begin{aligned} \hat{f}(a) &= \begin{cases} g\left(f(\frac{a}{\|a\|}), \|a\|\right) & a \neq 0 \\ x_0 & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \begin{cases} (1 - \|a\|) \cdot x_0 + \|a\| \cdot f(\frac{a}{\|a\|}) & a \neq 0 \\ x_0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Durch Nachrechnen (Grezwertbetrachtung) sieht man, dass $\hat{f}$ auch in x_0, also global, stetig ist, und es ist

$$\hat{f}|_{S^n}(b) = (1-1) \cdot x_0 + 1 \cdot f(\frac{b}{1}) = f(b),$$

also $\hat{f}|_{S^n} = f$. Es ist also f stetig auf E^{n+1} fortsetzbar, und X ist asphärisch. $\square$

Fazit. Wir haben jetzt also insgesamt folgende Implikationen:

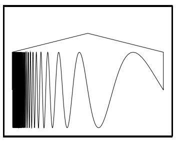
konvex $\Rightarrow$ Sterngebiet $\Rightarrow$ asphärisch

und

kontrahierbar $\Rightarrow$ azyklisch.

Frage. Gibt es Verbindungen zwischen den beiden Zeilen, gilt etwa eine der folgenden Implikationen?

(1) X kontrahierbar $\Rightarrow$ X asphärisch?



(2) X asphärisch $\Rightarrow$ X kontrahierbar?

Beispiel 8.2.14. Ein Gegenbeispiel für die zweite Implikation ist die **Sinuskurve der Topologen**:

$$X := \left\{\left(x, \frac{1}{\sin x}\right) \,\middle|\, x \in (0,1]\right\} \cup \{0,1\} \times [0,1] \cup \left\{\left(x, \frac{3}{2} - \left|x - \frac{1}{2}\right|\right) \,\middle|\, x \in [0,1]\right\}$$

X ist zwar asphärisch (d.h. jede stetige Funktion von der Sphäre nach X lässt sich auf die Vollkugel fortsetzen), aber X ist nicht kontrahierbar (Übungsaufgabe).

> $\boxed{\text{Satz 8.2.11.}}$ Sei $X \in \operatorname{obj}(\underline{\mathrm{Top}})$ kontrahierbar. Dann ist X asphärisch.

Beweis-idee. X kontrahierbar $\Rightarrow \mathrm{id}_X \underset{\mathrm{htp}}{\sim} \mathrm{const}_{x_0}^X$, d.h. $\exists F : X \times I \to X$ mit $F(\Box, 0) = \mathrm{const}_{x_0}$ und $F(\Box, 1) = \mathrm{id}_X$.

Wir basteln uns dann zu $f : S^n \to X$ durch Verkettung

$$\hat{f} : E^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow{\sim} S^n \times (0,1] \xrightarrow{f \times \mathrm{incl}} X \times I \xrightarrow{F} X$$

(mit Ergänzung $\hat{f}(0) := x_0$), analog wie früher. $\Box$

> $\boxed{\text{Satz 8.2.12.}}$ Sei X ein asphärischer topologischer Raum. Dann ist X auch azyklisch, d.h. $\tilde{H}_q(X, R) = (0)$ für alle $q \in \mathbb{Z}$, bzw.
>
> $$H_q(X, R) = \delta_{q0} \cdot R = \begin{cases} R & q = 0 \\ (0) & q \neq 0 \end{cases}$$

Beweis.

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r, "\partial_{q+1}"] & C_q(X) \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d, equal] & C_{q-1}(X) \arrow[r, "\partial_{q-1}"] \arrow[d, equal] \arrow[dl, "h_{q-1}"] & \dots \arrow[r, "\partial_2"] & C_1(X) \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, equal] & C_0(X) \arrow[r, "\tilde{\partial}_0 = \varepsilon_0"] \arrow[d, equal] \arrow[dl, "h_0"] & R \arrow[r, "\tilde{\partial}_{-1} = 0"] \arrow[d, equal] \arrow[dl, "h_{-1} = \eta"] & (0) \arrow[r] \arrow[dl, "h_{-2} = 0"] & \dots \\
\dots \arrow[r, "\partial_{q+1}"'] & C_q(X) \arrow[r, "\partial_q"'] & C_{q-1}(X) \arrow[r, "\partial_{q-1}"'] & \dots \arrow[r, "\partial_2"'] & C_1(X) \arrow[r, "\partial_1"'] & C_0(X) \arrow[r, "\tilde{\partial}_0 = \varepsilon_0"'] & R \arrow[r, "\tilde{\partial}_{-1} = 0"'] & (0) \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Wir wollen zeigen, dass $\mathrm{id}_\bullet \underset{\mathrm{htp}}{\sim} 0_\bullet$ ist, müssen also eine Kettenhomotopie $h_\bullet$ konstruieren.

Wir wissen, dass es ein $\eta : R \to C_0(X)$ gibt mit $\varepsilon_0 \circ \eta = \mathrm{id}$ (etwa mit einem fixiertem $x_0 \in X$ die Abbildung mit $\eta(r) := r \cdot x_0$). Wir setzen $h_{-1} := \eta$ und prüfen die Homotopieeigenschaft:

$$\varepsilon_0 \circ h_{-1} + \underbrace{h_{-2} \circ \tilde{\partial}_{-1}}_{=0 \circ 0} = \varepsilon_0 \circ \eta = \mathrm{id}_R$$

Dies passt also.

Nun konstruieren wir iterativ h_q mit Hilfe von h_{q-1}. Für $\sigma \in S_q(X)$ brauchen wir $h_q(\sigma) \in C_{q+1}(X, R)$, noch besser sogar $h_q(\sigma) \in S_{q+1}(X)$. Wir wollen also $h_q(\sigma) : \Delta_{q+1} \to X$ als singuläres Simplex haben.

Nun ist aber Δ_{q+1} homöomorph zu $E^{q+1} \subseteq \mathbb{R}^{q+1}$, durch eine geeignete Transformation $\varphi : \Delta_{q+1} \xrightarrow{\sim} E^{q+1}$. Dabei geht $\partial(\Delta_{q+1})$ in $\partial(E^{q+1}) = S^q$ über.

Haben wir nun eine stetige Abbildung $\tilde{\sigma} : \partial(\Delta_{q+1}) \to X$, lässt sich diese damit, weil X asphärisch ist, auf Δ_{q+1} fortsetzen:

$$\begin{tikzcd}
& \partial(\Delta_{q+1}) \arrow[rrr, hook, "\subseteq"] \arrow[dr, "\varphi|_{\dots}", "\sim"'] \arrow[ddr, bend right, "\tilde{\sigma}"'] & & & \Delta_{q+1} \arrow[dl, "\varphi"', "\sim"] \arrow[ddll, bend left, "\varphi\circ\widehat{\tilde{\sigma}'}"] \\
\Delta_q \arrow[ur, shift left, "F^i_{q+1}"] \arrow[ur] \arrow[ur, shift right] & & S^q \arrow[r, hook, "\subseteq"] \arrow[d, "\tilde{\sigma}'"'] & E^{q+1} \arrow[dl, "\widehat{\tilde{\sigma}'}"] & \\
& & X & &
\end{tikzcd}$$

Dabei ist $\widehat{\tilde{\sigma}'}$ eine Fortsetzung von $\tilde{\sigma}' = \sigma \circ (\varphi|_{\dots}^{-1}$, welche ja existiert, da X asphärisch ist.

Nun müssen wir noch ein geeignetes $\tilde{\sigma}$ finden. Dazu beobachten wir, dass ja

$$\partial(\Delta_{q+1}) = \bigcup_{i=0}^{q+1} F^i_{q+1}(\Delta_q)$$

ist, mit den Einbettungen $F^i_{q+1} : \Delta_q \to \partial(\Delta_{q+1})$.

Nun definieren wir

$$\tilde{\sigma} \circ F^i_{q+1} := \begin{cases} \sigma & i = 0 \\ h_{q-1}(\sigma \circ F^{i-1}_q) & i > 0 \end{cases}$$

Diese Definitionen sind miteinander verträglich, denn es ist ja (für $j \le i$):

$$F^i_{q+1} \circ F^j_q = F^j_{q+1} \circ F^{i-1}_q$$

und

$$\begin{aligned} F^i_{q+1}(\Delta_q) \cap F^j_{q+1}(\Delta_q) &= (F^i_{q+1} \circ F^j_q)(\Delta_{q-1}) \\ &= (F^j_{q+1} \circ F^{i-1}_q)(\Delta_q) \end{aligned}$$

Damit stimmen $\tilde{\sigma} \circ F^i_{q+1}$ und $\tilde{\sigma} \circ F^j_{q+1}$ auf ihrem gemeinsamen Definitionsbereich überein.

Damit ist $\sigma' : \partial(\Delta_{q+1}) \to X$ eindeutig definiert, und besitzt gemäß obiger Überlegung eine Fortsetzung

$$h_q(\sigma) := \varphi \circ \widehat{\tilde{\sigma}'} : \Delta_{q+1} \to X,$$

wobei also $h_q(\sigma)|_{\partial(\Delta_q)} = \tilde{\sigma}$ ist, und damit:

$$H_q(\sigma) \circ F^i_{q+1} = \tilde{\sigma} \circ F^i_{q+1} = \begin{cases} \sigma & i = 0 \\ h_{q-1}(\sigma \circ F^{i-1}_q) & i > 0 \end{cases}$$

Wir haben wir also eine Abbildung

$$\begin{aligned} h_q : S_q(X) &\longrightarrow S_{q+1}(X) \\ \sigma &\longmapsto \varphi \circ \widehat{\widetilde{\sigma}'}, \end{aligned}$$

welche sich jetzt natürlich linear fortsetzen lässt:

$$h_q : C_q(X,R) \longrightarrow C_{q+1}(X)$$

Überprüfen wir nun die Homotopie-Bedingung. Für $\sigma \in S_q(X)$ gilt

$$\begin{aligned} (\partial_{q+1} \circ h_q + h_{q-1} \circ \partial_q)(\sigma) &= \partial_{q+1}(h_q(\sigma)) + h_{q-1}(\partial_q(\sigma)) \\ &= \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i \cdot (h_q(\sigma) \circ F^i_{q+1}) + \sum_{j=0}^{q} (-1)^j h_{q-1}(\sigma \circ F^j_q) \end{aligned}$$

Einsetzen der Definition von $h_q(\sigma)$ liefert

$$\begin{aligned} &= \sigma + \sum_{j=0}^{q} (-1)^{j+1} \cdot \left(h_{q-1}(\sigma \circ F^j_q) - h_{q-1}(\sigma \circ F^j_q) \right) \\ &= \sigma, \end{aligned}$$

es ist also wirklich

$$\partial_{q+1} \circ h_q + h_{q-1} \circ \partial_q = \mathrm{id}_{C_q(X)},$$

für alle $q \in \mathbb{Z}$. □

> **BEMERKUNG 1.** Ist X asphärischer topologischer Raum, so ist X auch wegezusammenhängend.

Beweis. Seien x_1 und $x_2 \in X$. Dann haben wir die stetige Abbildung

$$\begin{aligned} f : S^0 = \{-1,+1\} &\longrightarrow X, \\ -1 &\mapsto x_1 \\ 1 &\mapsto x_2 \end{aligned}$$

und f ist (weil X asphärisch ist) fortsetzbar zu $\hat{f} : [-1,1] \to X$. Daraus erhält man mit $\gamma(t) := \hat{f}(2t-1)$ einen Weg $\gamma : [0,1] \to X$ von x_1 nach x_2. □

BEMERKUNG 2. Ist X asphärisch, so ist X einfach-zusammenhängend, d.h. $\Pi_1(X, x_0) = (0)$.

Beweis. Sei ${}^{[0,1]}\!\diagup_{0\,=\,1} \cong S^1 \xrightarrow{\gamma} X$ ein beliebiger geschlossener Weg in X, $\gamma((1,0)) = x_0$. Dann existiert eine stetige Fortsetzung $\hat{\gamma} : E^2 \to X$. Da E^2 auf jeden seiner Punkte kontrahierbar ist, liefert die Kontraktionshomotopie für $\hat{\gamma}$ eine Homotopie $\gamma \underset{\text{htp}}{\sim} \text{const}_{x_0}$. Damit ist $\Pi(X, x_0) = (0)$. □

$W(X,d)$

Definition 8.38. *Sei (X, d) metrischer Raum, wegezusammenhängend, dann heißt*

$$W(X, d) := C([0,1], X)$$

*die **Wegemenge** von X. Dann erhalten wir eine Metrik d^* auf $W(X)$ durch*

$$d^*(\gamma_1, \gamma_2) := \sup\{d(\gamma_1(t), \gamma_2(t) \,|\, t \in [0,1]\}$$

In $(W(X), d^*)$ liegt für $x_0 \in X$ der Unterraum

$$\mathcal{L}^1(X, X_0) = \mathcal{L}(X, X_0) := \{\gamma \in W(X) \mid \gamma(0) = \gamma(1)\},$$

*der **Schleifenraum** von X bezüglich x_0. Die (erste) Homotopiegruppe davon*

$$\Pi_2(X, x_0) := \Pi_1(\mathcal{L}(X, x_0), \text{const}^1 := \text{const}_{x_0})$$

*nennen wir die **zweite Homotopiegruppe** von X bezüglich x_0.*

*Induktiv erhalten wir die **höheren Homotopiegruppen**:*

$$\begin{aligned}\text{const}^n &:= \text{const}_{\text{const}^{n-1}} : \mathcal{L}^{n-1}(X, X_0) \to \mathcal{L}^{n-1}(X, X_0)\\ \mathcal{L}^n &:= \mathcal{L}(L^{n-1}(X, X_0)),\\ \Pi_{n+1}(X, x_0) &:= \Pi_1(\mathcal{L}^n(X, X_0), \text{const}^n)\end{aligned}$$

Bemerkung. Diese Definition lässt sich so leider nicht einfach auf beliebige topologische (nicht-metrische) Räume ausdehnen, weil man dort ja nicht einfach eine Topologie auf der Wege- bzw. Schleifenmenge erhält.

8.3 Exakte Homologiesequenzen

Definition 8.39. *Sei R ein Ring, $\underline{\text{Comp}_R}$ wie üblich die Kategorie der Kettenkomplexe von R-Moduln.*

*Sei $(C_\bullet, \partial_\bullet) \in \text{obj}(\underline{\text{Comp}_R})$ ein Kettenkomplex. Ein **Unterkomplex** von $(C_\bullet, \partial_\bullet)$ ist ein Komplex $(D_\bullet, \delta_\bullet)$ mit $\forall q \in \mathbb{Z}$:*

- *$D_q \subseteq C_q$ (als R-Untermodul)*
- *$\partial_q|_{D_q} = \delta_q$*

Wir schreiben auch $(D_\bullet, \delta_\bullet) \subseteq (C_\bullet, \partial_\bullet)$. $\boxed{\subseteq}$

Hier das (kommutative) Diagramm dazu:

$$\begin{tikzcd} \arrow[r] & C_q \arrow[r, "\partial_q"] & C_{q-1} \arrow[r] & {} \\ \arrow[r] & D_q \arrow[u, "\cup\!\shortmid"] \arrow[r, "\delta_q"'] & D_{q-1} \arrow[u, "\cup\!\shortmid"] \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

Definition 8.40. *Seien* $(D_\bullet, \delta_\bullet) \subseteq (C_\bullet, \partial_\bullet)$ *zwei Komplexe. Dann bezeichnen wir* $\boxed{C_\bullet/D_\bullet}$

$$C_\bullet/D_\bullet := \left(\ldots \to C_q/D_q \xrightarrow{\tilde{\partial}_q} C_{q-1}/D_{q-1} \to \ldots\right)$$

mit $\tilde{\partial}_q([\xi]_{D_q}) := [\partial_q(\xi)]_{D_{q-1}}$ *als den* ***Quotientenkomplex*** *von* $C_\bullet$ *nach* $D_\bullet$.

Man erhält hier zwei komponierbare Morphismen in $\underline{\mathrm{Comp}_R}$:

$$0_\bullet \xrightarrow{0} D_\bullet \xrightarrow{i_\bullet} C_\bullet \xrightarrow{\pi_\bullet} C_\bullet/D_\bullet \xrightarrow{0} 0_\bullet$$

Definition 8.41. *Sei* $(C'_\bullet, \partial'_\bullet) \xrightarrow{f_\bullet} (C_\bullet, \partial_\bullet)$ *Morphismus in* $\underline{\mathrm{Comp}_R}$, *d.h. für alle* $q \in \mathbb{Z}$ *das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} C'_q \arrow[r, "f_q"] \arrow[d, "\partial'_q"'] & C_q \arrow[d, "\partial_q"] \\ C'_{q-1} \arrow[r, "f_{q-1}"'] & C_{q-1} \end{tikzcd}$$

kommutativ. Dann haben wir ja jeweils $\ker f_q \overset{i_q}{\hookrightarrow} C'_q$, *mit* $\delta'_q = \partial'_q|_{\ker f_q} : \ker f_q \to \ker f_{q-1}$, *und erhalten den* ***Kernkomplex*** $(\ker f_\bullet, \delta'_\bullet)$ *von* $f_\bullet$. *Analog erhalten wir den* ***Bildkomplex*** $(\operatorname{im} f_\bullet, \delta_\bullet = \partial_\bullet|_{\operatorname{im} f_\bullet})$ *und den* ***Kokern-Komplex*** $(\operatorname{coker} f_\bullet, \tilde{\partial}_\bullet) = C_\bullet/\operatorname{im} f_\bullet$.

Bemerkung. Auch dazu ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd} & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r, tail] & \ker f_q \arrow[r, tail, "i_q", "\subseteq"'] \arrow[d, "\delta'_q"] & C'_q \arrow[r, two heads, "f_q"] \arrow[d, "\partial'_q"] & \operatorname{im} f_q \arrow[r, tail, "j_q", "\subseteq"'] \arrow[d, "\delta_q"] & C_q \arrow[r, two heads, "\pi_q"] \arrow[d, "\partial_q"] & \operatorname{coker} f_q \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\tilde{\partial}_q"] & 0 \\ 0 \arrow[r, tail] & \ker f_{q-1} \arrow[r, tail, "i_{q-1}", "\subseteq"'] \arrow[d] & C'_{q-1} \arrow[r, two heads, "f_{q-1}"] \arrow[d] & \operatorname{im} f_{q-1} \arrow[r, tail, "j_{q-1}", "\subseteq"'] \arrow[d] & C_{q-1} \arrow[r, two heads, "\pi_{q-1}"] \arrow[d] & \operatorname{coker} f_{q-1} \arrow[r, two heads] \arrow[d] & 0 \\ & {} & {} & {} & {} & {} & \end{tikzcd}$$

Die Zeilen sind (außer bei $\operatorname{im} f_\bullet$) exakt.

$\boxed{\text{LEMMA.}}$ *(Schlangenlemma)*
Sei R ein Ring, und sei ein kommutatives Diagramm von R-Moduln

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g", two heads] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'", tail] & B' \arrow[r, "g'"] & C' &
\end{tikzcd}$$

gegeben, mit exakten Zeilen (d.h. insbesondere g surjektiv, f' injektiv). Dann gilt:

(1) $f(\ker\alpha) \subseteq \ker\beta$ und $g(\ker\beta) \subseteq \ker\gamma)$, und die eingeschränkte Sequenz

$$\ker\alpha \xrightarrow{f|_{\ker\alpha}} \ker\beta \xrightarrow{g|_{\ker\beta}} \ker\gamma$$

ist an der Stelle $\ker\beta$ exakt.

(2) Es ist $f'(\operatorname{im}\alpha) \subseteq \operatorname{im}\beta$, $g'(im(\beta)) \subseteq \operatorname{im}(\gamma)$ und die induzierte Kokern-Folge

$$A'/_{\operatorname{im}\alpha} = \operatorname{coker}\alpha \xrightarrow{\widetilde{f'}} B'/_{\operatorname{im}\beta} = \operatorname{coker}\beta \xrightarrow{\widetilde{g'}} C'/_{\operatorname{im}\gamma} = \operatorname{coker}\gamma$$

ist ebenfalls exakt.

(3) Es existiert ein $\delta \in \operatorname{Hom}_R(\ker\gamma, \operatorname{coker}\alpha)$, so dass die Folge

$$\ker\alpha \xrightarrow{f|_{\dots}} \ker\beta \xrightarrow{g|_{\dots}} \ker\gamma \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker}\alpha \xrightarrow{\widetilde{f'}} \operatorname{coker}\beta \xrightarrow{\widetilde{g'}} \operatorname{coker}\gamma$$

exakt ist.

Bemerkung. Hier noch einmal das komplette Diagramm, mit allen durch das Lemma gegebenen Morphismen:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & \ker\alpha \arrow[r, "f|_{\dots}"] \arrow[d, tail] & \ker\beta \arrow[r, "g|_{\dots}"] \arrow[d, tail] & \ker\gamma \arrow[d, tail] \arrow[dddll, "\delta"] & \\
 & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g", two heads] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"', tail] \arrow[d, two heads] & B' \arrow[r, "g'"'] \arrow[d, two heads] & C' \arrow[d, two heads] & \\
 & \operatorname{coker}\alpha \arrow[r, "\widetilde{f'}"'] \arrow[d] & \operatorname{coker}\beta \arrow[r, "\widetilde{g'}"'] \arrow[d] & \operatorname{coker}\gamma \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Das Diagramm ist exakt in Zeilen und Spalten. Man sieht auch, warum das Lemma

Schlangenlemma genannt wird.

Definition 8.42. *Der Homomorphismus $\delta : \ker\gamma \to \operatorname{coker}\alpha$ heißt der **Verbindungshomomorphismus** oder auch **Bockstein-Operator** des Diagrammes.*

Beweis. Der Beweis gestaltet sich als routinemäßige Diagrammjagd. Wir geben Teile davon an, der Rest ist Übungsaufgabe.

(1) Sei $a \in \ker(\alpha)$, also

$$\begin{aligned} \alpha(a) &= 0. \\ \Rightarrow \quad f'(\alpha(a)) &= 0 \\ \Rightarrow \quad \beta(f(\alpha)) &= 0 \\ \Rightarrow \quad f(\alpha) &\in \ker\beta \end{aligned}$$

Die Inklusion $g(\ker\beta) \subseteq \ker(\gamma)$ geht analog. Die Folge

$$\ker\alpha \xrightarrow{f|_{\dots}} \ker\beta \xrightarrow{g|_{\dots}} \ker\gamma$$

ist also wohldefiniert, $g \circ f = 0$ gilt sowieso.

Sei $b \in \ker(\beta)$ mit $g(b) = 0$. Da die Folge $A \to B \to C$ exakt war, ist $b = f(a)$ für ein $a \in A$, also $0 = \beta(b) = \beta(f(a)) = f'(\alpha(a))$. Da f' ein Monomorphismus ist, ist damit $\alpha(a) = 0$, also $a \in \ker\alpha$, also $b \in f(\ker\alpha)$. Damit ist die Folge auch an $\ker(\beta)$ exakt.

(2) Sei $\alpha(a) \in \operatorname{im}(\alpha)$, mit $a \in A$. Dann ist $f'(\alpha(a)) = \beta(f(a)) \in \operatorname{im}(\beta)$, also $f'(\operatorname{im}\alpha) \subseteq \operatorname{im}\beta$. Die Inklusion $g'(\operatorname{im}\beta) \subseteq \operatorname{im}\gamma$ geht analog. Wir haben also

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{im}\alpha \arrow[r, "f'|_{\dots}"] \arrow[d, tail, "\subseteq"] & \operatorname{im}\beta \arrow[r, "g'|_{\dots}"] \arrow[d, tail, "\subseteq"] & \operatorname{im}\gamma \arrow[d, tail, "\subseteq"] \\
A' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, two heads] & B' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, two heads] & C' \arrow[d, two heads] \\
\operatorname{coker}\alpha \arrow[r, "\widetilde{f'}"] & \operatorname{coker}\beta \arrow[r, "\widetilde{g'}"] & \operatorname{coker}\gamma
\end{tikzcd}$$

Hierbei sind $\widetilde{f'}$ und $\widetilde{g'}$ nach den vorherigen Überlegungen wohldefiniert, und es ist natürlich $\widetilde{g'} \circ \widetilde{f'} = 0$, weil $g' \circ f' = 0$. Sei nun $[b']_{\operatorname{im}\beta} \in \ker\widetilde{g'}$ ($b' \in B'$). Das heißt, es ist

$$\begin{aligned} &\widetilde{g'}([b']_{\operatorname{im}\beta}) = [0]_{\operatorname{im}\gamma} \\ \Rightarrow \quad & g'(b') \in \operatorname{im}(\gamma) \\ \Rightarrow \quad & g'(b') = \gamma(c) && \text{(mit einem } c \in C) \\ & \qquad\;\; = \gamma(g(b)) && \text{(mit einem } b \in B, \text{ weil } g \text{ surjektiv)} \\ & g'(b') = g'(\beta(b)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad g'(b' - \beta(b)) = 0 \\
&\quad\Rightarrow \quad b' - \beta(b) \in \ker g' = \operatorname{im} f \\
&\quad\Rightarrow \quad b' - \beta(b) = f'(a') && \text{(mit einem } a' \in A) \\
&\qquad\Rightarrow \quad [b']_{\operatorname{im}\beta} = [f'(a')]_{\operatorname{im}\beta} \\
&\qquad\qquad\qquad = \widetilde{f'}([a']) \in \operatorname{im}\widetilde{f'}.
\end{aligned}$$

Es ist also auch $\ker\widetilde{g'} \subseteq \operatorname{im}\widetilde{f'}$, also die coker-Folge exakt.

(3) Nun wollen wir δ konstruieren. Sei $c \in \ker(\gamma)$, also $\gamma(c) = 0$. Weil g surjektiv ist, ist

$$\begin{aligned}
c &= g(b) && \text{mit einem } b \in B. \\
\Rightarrow \quad 0 &= \gamma(c) \\
&= \gamma(g(b)) \\
&= g'(\beta(b)) \\
\Rightarrow \quad \beta(b) &\in \ker g' = \operatorname{im} f' \\
\Rightarrow \quad \beta(b) &= f'(a') && \text{(mit einem } a' \in A'.)
\end{aligned}$$

Wir können nun „definieren“:

$$\delta(c) := [a']_{\operatorname{im}\alpha} \in \operatorname{coker}(\alpha)$$

Damit das wohldefiniert wird, muss noch die Unabhängigkeit von der Wahl von a' und b nachgewiesen werden. Seien also $c = g(b_1) = g(b_2)$ und $\beta(b_1) = f'(a'_1)$, $\beta(b_2) = f'(a'_2)$. (Wir müssen zeigen, dass dann $[a'_1]_{\operatorname{im}\alpha} = [a'_2]_{\operatorname{im}\alpha}$ ist.)

$$\Rightarrow \quad g(b_1 - b_2) = 0$$

Nun ist $A \to B \to C$ exakt, also

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad b_1 - b_2 &\in \operatorname{im}(f) \\
\Rightarrow \quad b_1 - b_2 &= f(a) && \text{(mit } a \in A) \\
\Rightarrow \quad \beta(b_1) - \beta(b_2) &= \beta(f(a)) \\
\Rightarrow \quad f'(a'_1) - f'(a'_2) &= f'(\alpha(a)) \\
\Rightarrow \quad f'(a'_1 - a'_2) &= f'(\alpha(a)) \\
\Rightarrow \quad a'_1 - a'_2 &= \alpha(a) && \text{(weil } f' \text{ Monomorphismus ist)} \\
\Rightarrow \quad [a_1]_{\operatorname{im}\alpha} - [a_2]_{\operatorname{im}\alpha} &= [0]_{\operatorname{im}\alpha} \\
\Rightarrow \quad [a_1]_{\operatorname{im}\alpha} &= [a_2]_{\operatorname{im}\alpha}
\end{aligned}$$

Die Wohldefiniertheit ist also gezeigt. Dass δ ein Homomorphismus wird, ist dann auch klar (alle Schritte, die gemacht wurden, sind R-linear). Es bleibt die Exaktheit der Folge

$$\ker\alpha \xrightarrow{f|\ldots} \ker\beta \xrightarrow{g|\ldots} \ker\gamma \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker}\alpha \xrightarrow{\widetilde{f'}} \operatorname{coker}\beta \xrightarrow{\widetilde{g'}} \operatorname{coker}\gamma$$

an den Stellen $\ker\gamma$ und $\operatorname{coker}\alpha$ zu zeigen.

(a) Sei $b \in \ker(\beta)$. Dann ist $(\delta \circ g|_{\dots})(b) = \delta(g(b)) = [a']$ mit einem $a' \in A'$, so dass $\beta(b) = f'(a')$ ist. Nun ist aber $\beta(b) = 0$, also $a' \in \ker(f') = (0)$, also $a' = 0$. Wir haben also $\delta \circ g|_{\dots} = 0$.
Sei umgekehrt $c \in \ker(\delta) \subseteq \ker(\gamma)$. Dann ist $c = g(b)$ (mit einem $b \in B$, weil g Epimorphismus), und $\beta(b) = f'(a')$ mit $[a']_{\operatorname{im}\alpha} = \delta(c) = 0$. Folglich ist $a' \in \operatorname{im}\alpha$, etwa $a' = \alpha(a)$ für ein $a \in A$. Das heißt, es ist
$$\beta(b) = f'(a') = f'(\alpha(a)) = \beta(f(a)).$$
Anders formuliert: $\beta(b - f(a)) = 0$, also $b - f(a) \in \ker(\beta)$. Zurück zu c:
$$c = g(b) = -\underbrace{g(f(a))}_{0} + g(b) = g(b - f(a)) \in \operatorname{im}(g|_{\ker(\beta)}).$$
Es ist also auch $\ker(\delta) \subseteq \operatorname{im}(g|_{\ker\beta})$.

(b) Die Exaktheit bei $\operatorname{coker}\alpha$ verifiziert man analog (Übungsaufgabe). □

Bemerkung. Falls f auch injektiv und g' surjektiv ist, haben wir die etwas längere exakte Folge:
$$0 \to \ker\alpha \hookrightarrow \ker\beta \to \ker\gamma \to \operatorname{coker}\alpha \to \operatorname{coker}\beta \twoheadrightarrow \operatorname{coker}\gamma \to 0$$

Satz 8.3.1. *(Die Existenz exakter (Ko)Homologiesequenzen)*
Sei R ein Ring,
$$0 \to C'_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} C_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} C''_\bullet \to 0$$
eine (kurze) exakte Folge von R-Kettenkomplexen (in $\underline{\mathrm{Comp}}_R$), d.h.
$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C'_q \arrow[r, "f_q"] \arrow[d, "\partial'_q"] & C_q \arrow[r, "g_q"] \arrow[d, "\partial_q"] & C''_q \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_q"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C'_{q-1} \arrow[r, "f_{q-1}"] \arrow[d] & C_{q-1} \arrow[r, "g_{q-1}"] \arrow[d] & C''_{q-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & {} & {} & {} &
\end{tikzcd}$$
als (unendliches) Diagramm mit lauter exakten Zeilen.
Dann existiert eine (unendlich) lange exakte Sequenz in der Homologie der Form
$$\begin{tikzcd}
 & & \cdots \arrow[dll, rounded corners, "\delta_{q+1}"] \\
H_q(C'_\bullet) \arrow[r, "H_q(f_\bullet)"] & H_q(C_\bullet) \arrow[r, "H_q(g_\bullet)"] & H_q(C''_\bullet) \arrow[dll, rounded corners, "\delta_q"] \\
H_{q-1}(C'_\bullet) \arrow[r, "H_{q-1}(f_\bullet)"] & H_{q-1}(C_\bullet) \arrow[r, "H_{q-1}(g_\bullet)"] & H_{q-1}(C''_\bullet) \arrow[dll, rounded corners, "\delta_{q-1}"] \\
\cdots & &
\end{tikzcd}$$
mit geeigneten (sogar funktoriellen) Verbindungshomomorphismen $(\delta_q)_{q\in\mathbb{Z}}$.

Definition 8.43. *Wir nennen die hier konstruierte lange exakte Sequenz*

$$\mathrm{EHF}(0 \to C'_\bullet \to C_\bullet \to C''_\bullet \to 0) := \left(\begin{tikzcd} & & \cdots \arrow[dll, rounded corners, to path={-- ([xshift=2ex]\tikztostart.east) |- node[right]{$\scriptstyle \delta_{q+1}$} (\tikztotarget)}] \\ H_q(C'_\bullet) \arrow[r, "H_q(f_\bullet)"] & H_q(C_\bullet) \arrow[r, "H_q(g_\bullet)"] & H_q(C''_\bullet) \arrow[dll, rounded corners, to path={-- ([xshift=2ex]\tikztostart.east) |- node[right]{$\scriptstyle \delta_q$} (\tikztotarget)}] \\ H_{q-1}(C'_\bullet) \arrow[r, "H_{q-1}(f_\bullet)"] & H_{q-1}(C_\bullet) \arrow[r, "H_{q-1}(g_\bullet)"] & H_{q-1}(C''_\bullet) \arrow[dll, rounded corners, to path={-- ([xshift=2ex]\tikztostart.east) |- node[right]{$\scriptstyle \delta_{q-1}$} (\tikztotarget)}] \\ \cdots \end{tikzcd} \right)$$

die ***exakte Homologiefolge*** *oder auch* ***exakte Homologiesequenz*** *der kurzen exakten Folge der Kettenkomplexe* $0 \to C'_\bullet \to C_\bullet \to C''_\bullet \to 0$.

Beweis. Zu den Kettenkomplexen $0 \to C'_\bullet \to C_\bullet \to C''_\bullet \to 0$ gibt es die Zyklen $Z'_q = \ker(\partial'_q)$, Z_q, Z_q, sowie die Ränder $B'_q = \operatorname{im}(\partial'_q)$, B_q und B''_q. Diese induzieren (für $q \in \mathbb{Z}$) ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd} & C'_q/B'_q \arrow[r, "\widetilde{f_q}"] \arrow[d, "\widetilde{\partial'_q}"] & C_q/B_q \arrow[r, two heads, "\widetilde{g_q}"] \arrow[d, "\widetilde{\partial_q}"] & C''_q/B''_q \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{\partial''_q}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Z'_{q-1} \arrow[r, tail, "f_{q-1}|_{\dots}"] & Z_{q-1} \arrow[r, "g_{q-1}|_{\dots}"] & Z''_{q-1} \end{tikzcd}$$

Auf dieses Diagramm können wir das Schlangenlemma anwenden. Dabei ist $\ker(\widetilde{\partial'_q}) = Z'_q/B'_q = H_q$, und $\operatorname{coker}(\widetilde{\partial'_q}) = Z'_{q-1}/B'_{q-1} = H_{q-1}$, analog für $\widetilde{\partial_q}$ und $\widetilde{\partial_{q-1}}$. Das heißt, wir haben jetzt:

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ & H_q(C'_\bullet) \arrow[r, "H_q(f_\bullet)"] \arrow[d] & H_q(C_\bullet) \arrow[r, "H_q(g_\bullet)"] \arrow[d] & H_q(C''_\bullet) \arrow[d] \arrow[dddll, rounded corners, "\delta_q"] & \\ & C'_q/B'_q \arrow[r, "\widetilde{f_q}"] \arrow[d, "\widetilde{\partial'_q}"'] & C_q/B_q \arrow[r, two heads, "\widetilde{g_q}"] \arrow[d, "\widetilde{\partial_q}"'] & C''_q/B''_q \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{\partial''_q}"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Z'_{q-1} \arrow[r, tail, "f_{q-1}|_{\dots}"'] \arrow[d] & Z'_{q-1} \arrow[r, "g_{q-1}|_{\dots}"'] \arrow[d] & Z''_{q-1} \arrow[d] & \\ & H'_{q-1}(C_\bullet) \arrow[r, "H_{q-1}(f_\bullet)"'] \arrow[d] & H_{q-1}(C_\bullet) \arrow[r, "H_{q-1}(g_\bullet)"'] \arrow[d] & H_{q-1}(C''_\bullet) \arrow[d] & \\ & 0 & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

Dabei ist δ_q der Verbindungshomomorphismus, welchen das Schlangenlemma liefert. Es liefert auch für $q \in \mathbb{Z}$ jeweils die exakte ker-coker-Sequenz:

$$H_q(C'_\bullet) \to H_q(C_\bullet) \to H_q(C''_\bullet) \xrightarrow{\delta_q} H_{q-1}(C'_\bullet) \to H_q(C_\bullet) \to H_q(C''_\bullet).$$

Durch Verkleben dieser Sequenzen erhalten wir unsere unendliche *exakte Homologiesequenz*:

$$\begin{tikzcd}
 & & \cdots \arrow[dll, "\delta_{q+1}"] \\
H_q(C'_\bullet) \arrow[r, "H_q(f_\bullet)"] & H_q(C_\bullet) \arrow[r, "H_q(g_\bullet)"] & H_q(C''_\bullet) \arrow[dll, "\delta_q"] \\
H_{q-1}(C'_\bullet) \arrow[r, "H_{q-1}(f_\bullet)"] & H_{q-1}(C_\bullet) \arrow[r, "H_{q-1}(g_\bullet)"] & H_{q-1}(C''_\bullet) \arrow[dll, "\delta_{q-1}"] \\
\cdots & &
\end{tikzcd}$$

Damit ist die Existenz einer exakten Homologie-Folge, mit gewissen (exakt konstruierten) Verbindungshomomorphismen, bewiesen.

Zur Funktorialität: Seien zwei kurze exakte Folgen in $\underline{\mathrm{Comp}}_C$ gegeben, mit Morphismen, so dass das folgende Diagramm (mit exakten Zeilen) kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C'_\bullet \arrow[r, "f_\bullet"] \arrow[d, "\alpha_\bullet"] & C_\bullet \arrow[r, "g_\bullet"] \arrow[d, "\beta_\bullet"] & C''_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_\bullet"] & 0 \\
0 \arrow[r] & D'_\bullet \arrow[r, "\varphi_\bullet"] & D_\bullet \arrow[r, "\psi_\bullet"] & D''_\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dann haben wir das assoziierte Diagramm der exakten Homologiefolgen:

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "\delta_{q+1}"] & H_q(C'_\bullet) \arrow[r, "H_q(f_\bullet)"] \arrow[d, "H_q(\alpha_\bullet)"] & H_q(C_\bullet) \arrow[r, "H_q(g_\bullet)"] \arrow[d, "H_q(\beta_\bullet)"] & H_q(C''_\bullet) \arrow[d, "H_q(\gamma_\bullet)"] \arrow[ddll, "\delta_q"] & \\
{} \arrow[r, "\Delta_{q+1}"'] & H_q(D'_\bullet) \arrow[r, "H_q(\varphi_\bullet)"'] & H_q(D_\bullet) \arrow[r, "H_q(\psi_\bullet)"'] & H_q(D''_\bullet) \arrow[ddll, "\Delta_q"'] & \\
 & H'_{q-1}(C'_\bullet) \arrow[r, "H_{q-1}(f_\bullet)"] \arrow[d, "H_{q-1}(\alpha_\bullet)"] & H_{q-1}(C_\bullet) \arrow[r, "H_{q-1}(g_\bullet)"] \arrow[d, "H_{q-1}(\beta_\bullet)"] & H_{q-1}(C''_\bullet) \arrow[r, "\delta_{q-1}"] \arrow[d, "H_{q-1}(\gamma_\bullet)"] & {} \\
 & H'_{q-1}(D'_\bullet) \arrow[r, "H_q(\varphi_\bullet)"'] & H_{q-1}(D_\bullet) \arrow[r, "H_q(\psi_\bullet)"'] & H_{q-1}(D''_\bullet) \arrow[r, "\Delta_{q-1}"'] & {}
\end{tikzcd}$$

Die Kommutativität in den H_q-Rechtecken ist bekannt (da H_q ja ein Funktor ist). Es gilt nun auch die Kommutativität in den δ_q-Δ_q-Rechtecken:

$$\begin{tikzcd}
H_q(C''_\bullet) \arrow[r, "\delta_q"] \arrow[d, "H_q(\gamma_\bullet)"'] & H_{q-1}(C'_\bullet) \arrow[d, "H_{q-1}(\alpha_\bullet)"] \\
H_q(D''_\bullet) \arrow[r, "\Delta_q"'] & H_{q-1}(C'_\bullet)
\end{tikzcd}$$

Dies ergibt sich aus der Konstruktion des Verbindungshomomorphismus im Schlangenlemma. $\square$

Definition 8.44. *Für eine Kategorie $\mathfrak{C}$ (mit Nullobjekt, Kernen und Bildern, also dem Begriff der exakten Sequenz) sei durch* $\boxed{\mathfrak{C}^{\mathrm{kex}}}$

$$\operatorname{obj}(\mathfrak{C}^{\mathrm{kex}}) := \left\{ 0 \to C' \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} C'' \to 0 \;\middle|\; \begin{array}{c} C, C', C'' \in \operatorname{obj}(\mathfrak{C}), \\ f, g \in \operatorname{Mor}(\mathfrak{C}), \ker(g) = \operatorname{im}(f), \\ \ker(f) = 0, \operatorname{im}(g) = C'' \end{array} \right\}$$

und

$$\operatorname{Mor}(\mathfrak{C}^{\mathrm{kex}}) := \left\{ \begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & C' & \to & C & \to & C'' & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \\ 0 & \to & D' & \to & D & \to & D'' & \to & 0 \end{array} \;\middle|\; \begin{array}{c} \alpha, \beta, \gamma \in \operatorname{Mor}(\mathfrak{C}), \\ \text{das Diagramm ist kommutativ} \end{array} \right\}$$

die ***Kategorie*** $\mathfrak{C}^{\mathrm{kex}}$ ***der kurzen exakten Folgen*** *in* $\mathfrak{C}$ *sowie durch*

$$\operatorname{obj}(\mathfrak{C}^{\mathrm{lex}}) := \left\{ \to M_{q+1} \xrightarrow{f_{q+1}} M_q \xrightarrow{f_q} M_{q-1} \to \;\middle|\; \begin{array}{c} \forall q \in \mathbb{Z}: \; M_q \in \operatorname{obj}(\mathfrak{C}), \\ f_q \in \operatorname{Mor}(\mathfrak{C}), \\ \ker(f_q) = \operatorname{im}(f_{q+1}), \end{array} \right\}$$

und

$$\operatorname{Mor}(\mathfrak{C}^{\mathrm{lex}}) := \left\{ \begin{array}{ccccc} \to & M_q & \xrightarrow{f_q} & M_{q-1} & \to \\ & \downarrow{\scriptstyle \psi_q} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_{q-1}} & \\ \to & N_q & \xrightarrow{g_q} & N_{q-1} & \to \end{array} \;\middle|\; \begin{array}{c} \forall q \in \mathbb{Z}: \; \psi_q \in \operatorname{Mor}(\mathfrak{C}), \\ g_q \circ \psi_q = \psi_{q-1} \circ f_q \end{array} \right\}$$

$\boxed{\mathfrak{C}^{\mathrm{lex}}}$ *die* ***Kategorie*** $\mathfrak{C}^{\mathrm{lex}}$ ***der langen exakten Folgen*** *in* $\mathfrak{C}$ *definiert.*

Bemerkung. Es ist $\mathfrak{C}^{\mathrm{lex}}$ eine volle Unterkategorie von $\underline{\mathrm{Comp}}_{\mathfrak{C}}$.

$\boxed{\text{Korollar.}}$ Die Abbildung

$$\mathrm{EHF} : \underline{\mathrm{Comp}}_R{}^{\mathrm{kex}} \to \underline{\mathrm{Mod}}_R{}^{\mathrm{lex}}$$

$$(0 \to C'_\bullet \to C_\bullet \to C''_\bullet \to 0) \mapsto \left(\begin{array}{l} \to H_q(C_\bullet') \to H_q(C_\bullet) \to H_q(C''_\bullet) \to \\ \to H_{q-1}(C_\bullet') \to H_{q-1}(C_\bullet) \to \end{array} \right)$$

$$(\alpha_\bullet, \beta_\bullet, \gamma_\bullet) \mapsto \left(\begin{array}{r} \ldots, H_{q+1}(\gamma_\bullet), H_q(\alpha_\bullet), H_q(\beta_\bullet), \\ H_q(\gamma_\bullet), H_{q-1}(\alpha_\bullet), \ldots \end{array} \right)$$

ist ein kovarianter Funktor.

$\boxed{\text{Satz 8.3.2.}}$ Seien X ein topologischer Raum, R ein k+u-Ring. Dann induziert jede kurze exakte Folge

$$0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$$

in $\underline{\mathrm{Mod}}_R$ (d.h. jedes Objekt in $\underline{\mathrm{Mod}}_R^{\mathrm{kex}}$) eine lange exakte Homologiefolge

$$\begin{aligned}
\ldots &\xrightarrow{\delta_{q+1}} H_q(X, M') \xrightarrow{H_q(\mathrm{id} \otimes f)} H_q(X, M) \xrightarrow{H_q(\mathrm{id} \otimes g)} H_q(X, M'') \\
&\xrightarrow{\delta_q} H_{q-1}(X, M') \xrightarrow{H_{q-1}(\mathrm{id} \otimes f)} H_{q-1}(X, M) \xrightarrow{H_{q-1}(\mathrm{id} \otimes g)} H_{q-1}(X, M'') \\
&\xrightarrow{\delta_{q-1}} \ldots
\end{aligned}$$

Beweis. Alle R-Moduln $C_q(X) := C_q(X, R)$ sind ja freie R-Moduln (oder 0-Moduln). Daher ist die damit tensorierte Folge

$$0 \to C_q(X) \otimes_R M' \xrightarrow{\mathrm{id}_{C_q(X)} \otimes f} C_q(X) \otimes_R M \xrightarrow{\mathrm{id}_{C_q(X)} \otimes g} C_q(X) \otimes_R M'' \to 0$$

ebenfalls exakt, für alle $q \in \mathbb{Z}$. Dies induziert eine exakte Folge von Kettenkomplexen

$$0 \to C_\bullet(X) \otimes M' \xrightarrow{\mathrm{id}_\bullet \otimes f} C_\bullet(X) \otimes M \xrightarrow{\mathrm{id}_\bullet \otimes g} C_\bullet(X) \otimes M \to 0,$$

weil $(\partial_q \otimes \mathrm{id}_M) \circ (\mathrm{id}_{C_q} \otimes f) = (\mathrm{id}_{C_{q-1}} \otimes f) \circ (\partial_q \otimes \mathrm{id}_{M'})$ (und analog für g). Satz 8.3.1 liefert uns nun die im Satz erwähnte lange Homologiefolge, die **exakte Homologiefolge von** X bezüglich der Koeffizientensequenz $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$. $\square$

Beispiel 8.3.1. Sei R ein Ring, $a \in \mathrm{NNT}(A)$, also die kurze Folge

$$0 \to R \xrightarrow{h_a = \square \cdot a} R \xrightarrow{\pi} R/(a) \to 0$$

exakt. Dann ergibt sich die lange exakte Homologiefolge

$$\ldots \to H_q(X, R) \xrightarrow{H_q(\mathrm{id} \otimes h_a)} H_q(X, R) \xrightarrow{H_q(\mathrm{id} \otimes \pi)} H_q\left(X, R/(a)\right) \xrightarrow{\delta_q} H_{q-1}(X, R) \to \ldots$$

Aus dieser langen Sequenz können wir nun mit Kokern und Kern eine kurze exakte Sequenz abspalten:

$$0 \to H_q(X, R)/a \cdot H_q(X, R) \hookrightarrow H_q\left(X, R/(a)\right) \xrightarrow{\delta_q} \ker(h_a) = \mathrm{Tors}_a\left(H_{q-1}(X, R)\right) \to 0$$

Dies liefert uns insgesamt:

(1) Es gibt eine Einbettung

$$H_q(X,R) \otimes_R R/_{(a)} \xhookrightarrow{\psi_q} H_q(X, R/_{(a)}),$$

mit $\operatorname{coker} \psi_q \cong \operatorname{Tors}_a(H_{q-1}(X,R))$.

(2) Ist H_{q-1} ohne a-Torsion, so ist

$$H_q(X,R) \otimes_R R/_{(a)} \xrightarrow{\sim} \psi_q H_q(X, R/_{(a)})$$

(3) Sei $R = \mathbb{Z}$. Wenn die $H_i(X,\mathbb{Z})$ alle torsionsfrei (oder (0)) sind, dann gilt die folgende Äquivalenz:

$$H_q(X, \mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}) = (0) \forall p \in \operatorname{Prim}(\mathbb{Z}) \iff H_i(X,\mathbb{Z}) \text{ ist sogar } \mathbb{Q}\text{-Vektorraum.}$$

Der Beweis der letzten Behauptung ist Übungsaufgabe.

Bemerkung. Satz 8.3.2 ist nicht ohne weiteres auf die Kohomologie übertragbar, denn

$$0 \to C_q(X) \otimes M' \xrightarrow{\operatorname{id} \otimes f} C_q(X) \otimes M \xrightarrow{\operatorname{id} \otimes g} C_q(X) \otimes M'' \to 0$$

ist zwar weiterhin exakt, aber die dualisierte Folge

$$0 \to (C_q(X) \otimes M'')^* \xrightarrow{(\operatorname{id} \otimes g)^*} (C_q(X) \otimes M)^* \xrightarrow{(\operatorname{id} \otimes f)^*} (C_q(X) \otimes M')^* \to 0$$

ist nicht mehr exakt an der Stelle $(C_q(X) \otimes M')^*$, d.h. $(\operatorname{id} \otimes f)^*$ ist i.a. nicht mehr surjektiv.

Raumpaare

Definition 8.45. *Sei X topologischer Raum, $A \in \mathfrak{P}(X)$ topologischer Unterraum (eventuell auch $\varnothing$). Dann heißt das Paar (X,A) ein **topologisches Raumpaar** (oder auch nur **Raumpaar**).*

$\boxed{\underline{\mathrm{Top}}_2}$ *Bemerkung.* Raumpaare bilden eine Kategorie $\underline{\mathrm{Top}}_2$ durch

$$\operatorname{obj}(\underline{\mathrm{Top}}_2) = \{(X,A) \mid (X,A) \text{ topol. Raumpaare}\}$$
$$\operatorname{Hom}_{\underline{\mathrm{Top}}_2}((X,A),(Y,B)) = \left\{ f : X \to Y \;\middle|\; f \in \operatorname{Hom}_{\underline{\mathrm{Top}}}(X,Y), f(A) \subseteq B \right\}$$

Definition 8.46. *Zwei Raumpaare (X,A) und (Y,B) heißen **homotopieäquivalent** ($(X,A) \approx (Y,B)$), falls*

(1) $\exists f : X \to Y$, stetig, mit $f(A) \subseteq B$,

(2) $\exists f : Y \to X$, stetig, mit $g(B) \subseteq B$,

(3) $g \circ f \underset{\text{htp}}{\sim} \operatorname{id}_X$ (in der Art, dass jeweils $F(\square, t)(A) \subseteq A$ für die Homotopie F gilt, für alle $t \in [0,1]$).

(4) $f \circ g \underset{\text{htp}}{\sim} \mathrm{id}_Y$ *(in der Art, dass jeweils $G(\square, t)(B) \subseteq B$ für die Homotopie G gilt, für alle $t \in [0,1]$).*

Ziel. Konstruktion von Homologie-Funktoren auf $\underline{\mathrm{Top}}_2$, und langen exakten Sequenzen, welche diese involvieren.

Bemerkung. Sei (X, A) Raumpaar. Dann kann

$$S_q(A) \xhookrightarrow{i_q} S_q(X)$$

als Inklusionspaar aufgefasst werden. Wir erhalten

$$C_q(A, R) \xhookrightarrow{j_q} C_q(X, R)$$

als Untermoduln bzw. R-Modul-Monomorphismus. $C_q(A)$ ist dabei sogar direkter Summand von $C_q(X)$, da durch einen Teil der Basis erzeugt. Wir haben also die Standardsequenz für Unter- und Faktormoduln:

$$0 \to C_q(A) \xhookrightarrow{j_q} C_q(X) \xrightarrow{\pi_q} C_q(X) \big/ C_q(A) \to 0$$

Dabei ist $C_q(X) \big/ C_q(A) \cong \bigoplus\limits_{\sigma \in S_q(X) \setminus S_q(A)} R \cdot \sigma$ wieder freier Modul. Weil die Dualisierung mit $\oplus$ verträglich ist, ist die duale Folge

$$0 \to \left(C_q(X) \big/ C_q(A)\right)^* \xhookrightarrow{\pi_q^*} C_q(X)^* \xrightarrow{j_q^*} C_q(A)^*$$

ebenfalls exakt und zerfallend.

Die Randoperatoren $\partial_q : C_q(X, R) \to C_{q-1}(X, R)$ respektieren die Untermoduln $C_\bullet(A, R)$, d.h. wir haben auch $\partial_q|_{C_q(A)} : C_q(A, R) \to C_{q-1}(A, R)$.

Damit erhalten wir den Unterkomplex $C_\bullet(A, R)$, und beide zusammen induzieren den Quotientenkomplex $C_\bullet(X, A) := C_\bullet(X, A, R) := C_\bullet(X, R) \big/ C_\bullet(A, R)$: $\boxed{C_\bullet(X, A)}$

$$\ldots \to C_q(X) \big/ C_q(A) \xrightarrow{\widetilde{\partial_q}} C_{q-1}(X) \big/ C_{q-1}(A) \to \ldots$$ $\boxed{C_\bullet(X, A, R)}$

Definition 8.47. *$C_\bullet(X, A, R)$ heißt **relativer Kettenkomplex** des Raumpaares (X, A). Dessen Homologiegruppe* $\boxed{C_\bullet(X, A, R)}$

$$H_q(X, A, R) := H_q(C_\bullet(X, A, R), \widetilde{\partial_\bullet})$$

*heißt q-te **relative Homologiegruppe** des Raumpaares (X, A).*

Fazit. Sei (X, A) Raumpaar. Dann hat man die assoziierte kurze exakte Folge von Kettenkomplexen:

$$0 \to C_\bullet(A, R) \xrightarrow{C_\bullet(\mathrm{incl})} C_\bullet(X, R) \xrightarrow{C_\bullet(\pi)} C_\bullet(X, A, R) \to 0$$

$\boxed{\text{Satz 8.3.3.}}$ *(Die lange exakte Homologiesequenz für Raumpaare)*
Sei (X, A) topologisches Raumpaar.

(1) Dann induziert die assoziierte kurze exakte Folge von Kettenkomplexen

$$(*) \quad 0 \to C_\bullet(A,R) \xrightarrow{C_\bullet(\mathrm{incl})} C_\bullet(X,R) \xrightarrow{C_\bullet(\pi)} C_\bullet(X,A,R) \to 0$$

eine lange exakte Homologiesequenz der Form:

$$\begin{aligned} \cdots &\xrightarrow{\delta_{q+1}} \tilde{H}_q(A,R) \xrightarrow{\tilde{H}_q(\mathrm{incl})} \tilde{H}_q(X,R) \xrightarrow{\tilde{H}_q(\pi)} \tilde{H}_q(X,A,R) \\ &\xrightarrow{\delta_q} \tilde{H}_{q-1}(A,R) \xrightarrow{\tilde{H}_{q-1}(\mathrm{incl})} \tilde{H}_{q-1}(X,R) \xrightarrow{\tilde{H}_{q-1}(\pi)} \tilde{H}_{q-1}(X,A,R) \\ &\xrightarrow{\delta_{q-1}} \cdots \end{aligned}$$

(2) Die zu $(*)$ duale Sequenz von Kettenkomplexen induziert die lange exakte Kohomologiesequenz:

$$\begin{aligned} \cdots &\xrightarrow{\delta_{q+1}} H^q(X,A,R) \xrightarrow{H^q(\pi^*)} H^q(X,R) \xrightarrow{H^q(\mathrm{incl}^*)} H^q(A,R) \\ &\xrightarrow{\delta_q} H^{q+1}(X,A,R) \xrightarrow{H^{q+1}(\pi^*)} H^{q+1}(X,R) \xrightarrow{H^{q+1}(\mathrm{incl}^*)} H^{q+1}(A,R) \\ &\xrightarrow{\delta_{q-1}} \cdots \end{aligned}$$

Beweis. Vorbemerkungen und Satz 8.3.1. □

Bemerkung. Für Kohomologiefolgen schreibt man die Sequenz auch oft rückwärts:

$$\begin{aligned} \cdots &\xleftarrow{\delta_{q+1}} H^q(A,R) \xleftarrow{H^q(\mathrm{incl}^*)} H^q(X,R) \xleftarrow{H^q(\pi^*)} H^q(X,A,R) \\ &\xleftarrow{\delta_q} H^{q-1}(A,R) \xleftarrow{H^{q-1}(\mathrm{incl}^*)} H^{q-1}(X,R) \xleftarrow{H^{q-1}(\pi^*)} H^{q-1}(X,A,R) \\ &\xleftarrow{\delta_{q-1}} \cdots \end{aligned}$$

Generelle Philosophie und Strategie in der Homologie-Theorie

(1) Gegeben sei ein topologischer Raum X und ein Ring R. Gesucht ist $H_*(X,R)$ (bzw. $H^*(X,R)$).

(2) Idee: Finde ein $A \subseteq X$ derart, dass $H_*(A, R)$ bekannt oder gut berechenbar ist, und $H_*(A, X, R)$ beherrschbar wird.

(3) Schließe auf die algebraische Struktur von $H_q(X, R)$ (bzw. $H^q(X, R)$) mittels der langen exakten (Ko-)Homologiesequenzen, etwa über Mayer-Vietories-Sequenzen oder Ausschneidungssätze.

Čech-Homologie bezüglich Überdeckungen

Definition 8.48. *Sei R ein Ring, X topologischer Raum, $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$ eine Überdeckung von X durch Teilmengen (Unterräume), also $X = \bigcup_{Z \in \mathfrak{U}} Z$. Die Überdeckung $\mathfrak{U}$ sei im folgenden fixiert.*

(1) Es sei $\boxed{S_q^{\mathfrak{U}}}$

$$S_q^{\mathfrak{U}}(X) := \{\sigma \in S_q(X) \mid \exists Z \in U : \sigma(\Delta_q) \subseteq Z\} \subseteq S_q(X)$$

(die Menge derjenigen singulären Simplices, die in je einer der Mengen von $\mathfrak{U}$ liegen, also nicht zu groß sind.*)*

(2) Durch Linearkombinationen davon erhält man $\boxed{S_q^{\mathfrak{U}}}$

$$C_q^{\mathfrak{U}}(X) := F_R(S_q^{\mathfrak{U}}(X)) \subseteq C_q(X, R),$$

sogar als direkter Summand (weil ein Teil der Basis verwendet wurde). Wie üblich setzen wir $C_q^{\mathfrak{U}}(X, R) := (0)$ für $q \leq 0$.

(3) Eine Randabbildung $\partial_q^{\mathfrak{U}} : C_q^{\mathfrak{U}}(X, R) \to C_{q-1}^{\mathfrak{U}}(X, R)$ ergibt sich einfach als Einschränkung von ∂_q. $\boxed{\partial_q^{\mathfrak{U}}}$

Bemerkung. Offensichtlich ist $\partial_q(C_q^{\mathfrak{U}}(X, R)) \subseteq C_{q-1}^{\mathfrak{U}}(X, R)$, also $\partial_q^{\mathfrak{U}}$ so wohldefiniert. Damit wird $(C_\bullet^{\mathfrak{U}}(X, R), \partial_\bullet^{\mathfrak{U}})$ ein Kettenkomplex (Objekt aus $\underline{\text{Comp}}_R$).

Definition 8.49.

*(4) $(C_\bullet^{\mathfrak{U}}(X, R), \partial_\bullet^{\mathfrak{U}})$ heißt auch der **Čech-Kettenkomplex** von X zu $\mathfrak{U}$.*

(5) Der Modul $\boxed{H_q^{\mathfrak{U}}(X, R)}$

$$H_q^{\mathfrak{U}}(X, R) := H_q(C_\bullet^{\mathfrak{U}}(X, R), \partial_\bullet^{\mathfrak{U}})$$

*heißt q-ter **Čech-Homologiemodul** oder q-te **Čech-Homologiegruppe** von X bezüglich $\mathfrak{U}$.*

Bemerkung. Die Modulmonomorphismen $C_q^{\mathfrak{U}}(X, R) \xrightarrow{i_q} C_q(X, R)$ (für $q \in \mathbb{Z}$) sind mit den Randoperatoren verträglich, und liefern einen Morphismus in $\underline{\text{Comp}}_R$

$$C_\bullet^{\mathfrak{U}}(X, R) \xrightarrow{i_\bullet} C_\bullet(X, R),$$

welcher seinerseits die kanonischen Homomorphismen ($\forall q \in \mathbb{Z}$)

$$H_q^{\mathfrak{U}}(X, R) \xrightarrow{H_q(i_\bullet)} H_q(X, R)$$

in der Homologie induziert.

$\boxed{\textsc{Satz } 8.3.4.}$ *(Vergleichssatz für Čech-Homologie und singuläre Homologie)*

Sei X ein topologischer Raum, $\mathfrak{U}$ eine Überdeckung von X mit der Eigenschaft

$$X = \bigcup_{Z \in \mathfrak{U}} \operatorname{Int}(Z),$$

(z.B. $\mathfrak{U}$ eine offene Überdeckung).
Dann sind die $H_q(i_\bullet)$ Isomorphismen:

$$H_q^{\mathfrak{U}} \xrightarrow[H_q(i_\bullet)]{\sim} H_q(X, R)$$

Das heißt, es ist $H_q^{\mathfrak{U}} \cong H_q(X, R)$ für alle $q \in \mathbb{Z}$, die singuläre und die Čech-Homologie stimmen überein.

Definition 8.50. *Eine solche Überdeckung $\mathfrak{U}$ mit der im Satz genannten Eigenschaft heißt auch **Cech-Uberdeckung@Čech-Überdeckung zweiter Art**.*

Beweis-idee. Konstruiere für jeden topologischen Raum X einen Kettenmorphismus

$$\mathrm{Sd}_\bullet^X : C_\bullet(X) \longrightarrow C_\bullet(X)$$
$$(\mathrm{Sd}_q^X : C_q(X) \longrightarrow C_q(X))$$

sowie eine Schar $(T_q^X)_{q \in \mathbb{Z}}$ von Operatoren

$$\mathrm{T}_q^X : C_q(X) \longrightarrow C_{q+1}(X)$$

auf funktorielle Weise, d.h.

$$\begin{tikzcd} C_q(X) \arrow[r, "\mathrm{Sd}_q^X"] \arrow[d, "\partial_q^X"] & C_q(X) \arrow[d, "\partial_q^X"] \\ C_{q-1}(X) \arrow[r, "\mathrm{Sd}_{q-1}^X"] & C_{q-1}(X) \end{tikzcd}$$

ist kommutativ für $q \in \mathbb{Z}$ (und $X \in \operatorname{obj}(\underline{\mathrm{Top}})$), und für alle $f : X \to Y$ ist auch

$$\begin{tikzcd} C_q(X) \arrow[r, "C_q(f)"] \arrow[d, "\mathrm{Sd}_q^X"] & C_q(Y) \arrow[d, "\mathrm{Sd}_q^Y"] \\ C_q(X) \arrow[r, "C_q(f)"] & C_q(Y) \end{tikzcd}$$

kommutativ. Für die Operatoren T_q^X sollen ebenfalls die entsprechenden Diagramme

$$\begin{tikzcd} C_q(X) \arrow[r, "C_q(f)"] \arrow[d, "\mathrm{T}_q^X"] & C_q(Y) \arrow[d, "\mathrm{T}_q^Y"] \\ C_{q+1}(X) \arrow[r, "C_{q+1}(f)"] & C_{q+1}(Y) \end{tikzcd}$$

kommutieren.

Wählt man für f nun ein singuläres Simplex $\sigma : \Delta_q \to X$, erhalten wir aus diesen Forderungen insbesondere

$$\begin{aligned} \mathrm{Sd}_q^X(\sigma) &= C_q(\sigma)(\mathrm{Sd}_q^{\Delta_q}(\mathrm{id}_{\Delta_q})) \\ \mathrm{T}_q^X(\sigma) &= C_{q+1}(\sigma)(\mathrm{T}_q^{\Delta_q}(\mathrm{id}_{\Delta_q})). \end{aligned}$$

Definiere nun Sd_q und T_q induktiv (für $q < 0$ ist schon $\mathrm{Sd}_q = 0$ und $\mathrm{T}_q = 0$ klar) für id_{Δ_q}, woraus sich ja dann alle anderen Werte ergeben.

(1) $\mathrm{Sd}_0^{\Delta_0}(\mathrm{id}_{\Delta_0}) := \mathrm{id}_{\Delta_0}$ und $T_0^{\Delta_0}(\mathrm{id}_{\Delta_0}) = 0$.

(2) Für $q \geq 1$ sei $B_q := \left(\frac{1}{q+1}, \cdots, \frac{1}{q+1}\right) \in \Delta_q$ das **Baryzentrum** (bzw. der **Schwerpunkt**) von Δ_q, und $K_q := K_{B_q} : C_{q-1}(\Delta_q) \to C_q(\Delta_q)$ die bekannte Kegelkonstruktion aus dem Beweis von Satz 8.1.6 (mit Spitze B_q). Dann definieren wir $\boxed{B_q}$

$$\mathrm{Sd}_q^{\Delta_q}(\mathrm{id}_{\Delta_q}) := K_q\left(\mathrm{Sd}_{q-1}^{\Delta_q}(\partial_q^{\Delta_q}(\mathrm{id}_{\Delta_q}))\right) \in C_q(\Delta_q)$$

(3) Schließlich sei noch

$$\mathrm{T}_q^{\Delta_q}(\mathrm{id}_{\Delta_q}) := K_{q+1}\left(\mathrm{id}_{\Delta_q} - \mathrm{Sd}_q^{\Delta_q}(\mathrm{id}_{\Delta_q}) - T_{q-1}^{\Delta_q}(\partial_q^{\Delta_q}(\mathrm{id}_{\Delta_q}))\right) \in C_{q+1}(\Delta_q)$$

$\mathrm{Sd}_q^{\Delta_q}$ unterteilt das Simplex Δ_q in mehrere kleinere Simplices der gleichen Dimension (d.h. bildet id_{Δ_q} auf die Summe seiner Teile ab), und heißt der **erste baryzentrische Unterteilungsoperator**, und seine r-fache Hintereinanderausführung $(\mathrm{Sd}_q^{\Delta_q})^r$ heißt der **r-te baryzentrische Unterteilungsoperator**.

Dabei sind die Summanden τ von $(\mathrm{Sd}_q^{\Delta_q})^r(\mathrm{id}_{\Delta_q})$ kleinere (singuläre) Simplices, mit

$$\mathrm{diam}\,(\tau(\Delta_q)) \leq \left(\frac{q}{q+1}\right)^r \cdot \mathrm{diam}(\Delta_q)$$

$\boxed{\text{Lemma.}}$ Die iterative Konstruktion von Sd_q^X und T_q^X (mit Funktorialität) liefert sofort:

(1) $\partial_q^X \circ \mathrm{Sd}_q^X = \mathrm{Sd}_{q-1}^X \circ \partial_q^X$

(2) $\partial_{q+1}^X \circ \mathrm{T}_q^X = \mathrm{id}_{C_q(X)} - \mathrm{Sd}_q^X - \mathrm{T}_{q-1}^X \circ \partial_q$

Beweis. Übungsaufgabe. □

Aus (2) folgt sofort

$$\partial_{q+1}^X \circ T_q^X + T_{q-1}^X \circ \partial_q^X = \mathrm{id}_{C_q(X)} - \mathrm{Sd}_q^X,$$

d.h. $(T_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ vermittelt eine Kettenhomotopie für $C_\bullet(X,R)$ zwischen $\mathrm{id}_\bullet$ und $\mathrm{Sd}_\bullet^X$, in der Homologie gilt also
$$H_q(\mathrm{Sd}_\bullet^X) = \mathrm{id}_{H_q(X,R)},$$
folglich auch
$$H_q((\mathrm{Sd}_\bullet^X)^r) = \mathrm{id}_{H_q(X,R)}\,.$$

$\boxed{\text{Korollar.}}$ Sei $X \in \bigcup_{U\in\mathfrak{U}} U$ eine offene Überdeckung. Dann gilt:

(1) Für alle $[\xi] \in H_q(X,R)$ ist $[\xi] = \left[\mathrm{Sd}_q^r(\xi)\right]$ für alle $r \in \mathbb{N}$.

(2) Für alle $[\xi] \in H_q(X,R)$ existiert ein $r \in \mathbb{N}$, so dass in der Darstellung von $\mathrm{Sd}_q^r(\xi)$ nur Simplices vorkommen, deren Bild in jeweils einer der offenen Mengen $U \in \mathfrak{U}$ liegen.

(3) Für $[\xi] \in H_q(X,R)$ existiert ein $r \in \mathbb{N}$, so dass $\mathrm{Sd}_q^r(\xi) \in Z_q^{\mathfrak{U}}(X,R)$ liegt, also $[\mathrm{Sd}_q^r(\xi)] \in H_q^{\mathfrak{U}}(X,R)$.

(4) Der kanonische Homomorphismus
$$H_q^{\mathfrak{U}}(X,R) \xrightarrow{H_q(\mathrm{incl})} H_q(X,R)$$
ist ein Epimorphismus.

(5) Der kanonische Homomorphismus
$$H_q^{\mathfrak{U}}(X,R) \xrightarrow[H_q(\mathrm{incl})]{\sim} H_q(X,R)$$
ist auch injektiv, also ein Isomorphismus.

Beweis.

(1) Klar.

(2) Sei $\sigma : \Delta_q \to X$ ein singuläres q-Simplex. X ist überdeckt durch $\mathfrak{U}$, also ist
$$\Delta_q = \bigcup_{U\in\mathfrak{U}} \sigma^{-1}(U) = \bigcup_{i=1}^{t} \sigma^{-1}(U_i),$$
weil Δ_q ja kompakt ist. Daher gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass
$$\forall p \in \Delta_q :\ \exists i_p \in \{1,\cdots,t\} :\ B_\varepsilon(p) \subseteq \sigma^{-1}(U_{i_p}), \sigma(B_\varepsilon(p)) \subseteq U_{i_p}$$
Wegen $\left(\frac{q}{q+1}\right)^r \xrightarrow[r\to\infty]{0}$ können wir r groß genug wählen, so dass für jeden Punkt p von Δ_q das entsprechende Teilsimplex in $B_\varepsilon(p)$ liegt, also dessen Bild in U_{i_p}.

(3) ist eine Folgerung von (2).

(4) ist eine Folgerung von (3).

(5) Zur Injektivität von $\alpha : H_q^{\mathfrak{U}}(X,R) \to H_q(X,R)$.

Sei $\langle\xi\rangle \in \ker(\alpha)$, d.h. $\langle\xi\rangle \in H_q^{\mathfrak{U}}(X,R)$, (also $\xi \in Z_q^{\mathfrak{U}}(X,R) = Z_q(X,R) \cap C_q^{\mathfrak{U}}(X,R)$, $\partial_q \xi = 0$) mit $[\xi] = [0]$ in $H_q(X,R)$. Dann ist

$$\xi \in \operatorname{im}(\partial_{q+1}^X),$$

etwa

$$\xi = \partial_{q+1}(\eta) \qquad \text{für ein } \eta \in C_{q+1}(X,R)$$

Nach (2) gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sd}_{q+1}^r(\eta) &\in C_{q+1}^{\mathfrak{U}}(X,R) \\
\overset{\mathrm{Sd}^r}{\Longrightarrow}_q (\xi) &= \mathrm{Sd}_q^r(\partial_{q+1}(\eta)) \\
&= \partial_q(\mathrm{Sd}_q^r(\eta)) \\
&\in B_q^{\mathfrak{U}}(X,R) \\
\overset{=}{\Longrightarrow} \langle\xi\rangle &= \left\langle \mathrm{Sd}_q^r(\xi) \right\rangle \\
&= \left\langle \partial_q(\mathrm{Sd}_{q+1}^r(\eta)) \right\rangle \\
&= \langle 0 \rangle
\end{aligned}$$

Das heißt, es ist auch $\langle\xi\rangle = \langle 0 \rangle$, also α wirklich injektiv.

□

KOROLLAR. Sei X topologischer Raum, $\mathfrak{U}$ eine Überdeckung mit

$$X = \bigcup_{Z \in \mathfrak{U}} Z = \bigcup_{Z \in \mathfrak{U}} \operatorname{Int}(Z)$$

Dann ist

$$H_q^{\mathfrak{U}}(X,R) \xrightarrow{\alpha} H_q(X,R)$$

wieder ein Isomorphismus.

Beweis. Betrachte die zu $\mathfrak{U}$ gehörende *offene* Überdeckung $\mathfrak{U}^o := \{\operatorname{Int}(Z) \mid Z \in \mathfrak{U}\}$. Dann haben wir ja das kommutative Diagramm aus kanonischen Abbildungen:

$$\begin{tikzcd}
H_q^{\mathfrak{U}^o}(X,R) \arrow[r, "\alpha^o", "\sim"'] \arrow[d, tail, "\beta"'] & H_q(X,R) \\
H_q^{\mathfrak{U}}(X,R) \arrow[ur, "\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

Hierbei ist α^o nach dem vorherigen Korollar ein Isomorphismus, also α surjektiv und β injektiv. Nach einer analogen Überlegung zu der im vorherigen Korollar ist auch β surjektiv, also ein Isomorphismus. Damit ist $\alpha = \beta^{-1} \circ \alpha^o$ ebenfalls ein Isomorphismus. □

Damit ist auch Satz 8.3.4 bewiesen. □

Mayer-Vietoris-Sequenzen

Sei X ein topologischer Raum mit Überdeckung $\mathfrak{U} = \{Z_1, Z_2\}$, so dass $X = \mathrm{Int}(Z_1) \cup \mathrm{Int}(Z_2)$. Dann sei

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{\sigma \in S_q(X) \mid \sigma(\Delta_q) \subseteq Z_1\} \\ A_2 &:= \{\sigma \in S_q(X) \mid \sigma(\Delta_q) \subseteq Z_2\} \end{aligned}$$

Weiterhin haben wir ja

$$\begin{aligned} F_R(A_1) &= \bigoplus_{sigma \in A_1} R \cdot \sigma = C_q(Z_1) \\ F_R(A_2) &= C_q(Z_2), \\ F_R(A_1 \cap A_2) &= C_q(Z_1 \cap Z_2) \\ F_R(A_1 \cup A_2) &= C_q^{\{Z_1, Z_2\}}(X) \end{aligned}$$

Dies liefert uns eine einfache natürliche exakte Sequenz:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \sigma \longmapsto (\sigma, -\sigma) & & & & & & \\ 0 & \longrightarrow & F_R(A_1 \cap A_2) & \longrightarrow & F_R(A_1) \times F_R(A_2) & \longrightarrow & F_R(A_1 \cup A_2) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & (\sigma_1, \sigma_2) \longmapsto \sigma_1 + \sigma_2 & & & & \end{array}$$

Diese Sequenzen für alle $q \in \mathbb{Z}$ ergeben eine exakte Sequenz in $\underline{\mathrm{Comp}}_R$ (d.h. ein Objekt in $\underline{\mathrm{Comp}}_R^{\mathrm{kex}}$):

$$0 \to C_\bullet(Z_1 \cap Z_2) \to C_\bullet(Z_1) \oplus C_\bullet(Z_2) \to C_\bullet^{\mathfrak{U}}(X, R) \to 0$$

$\boxed{\text{Satz 8.3.5.}}$ *(Existenz der einfachen Mayer-Vietoris-Sequenz)*
Sei X ein topologischer Raum mit Überdeckung $\mathcal{U} = \{Z_1, Z_2\}$, so dass $X = \operatorname{Int}(Z_1) \cup \operatorname{Int}(Z_2)$. Dann existiert eine lange exakte Homologiefolge

$$\begin{aligned}
&\cdots \xrightarrow{\delta_{q+1}} \tilde{H}_q(Z_1 \cap Z_2) \xrightarrow{\tilde{H}_q} \tilde{H}_q(Z_1) \oplus \tilde{H}_q(Z_2) \xrightarrow{\tilde{H}_q} \tilde{H}_q(X) \xrightarrow{\delta_q} \\
&\tilde{H}_{q-1}(Z_1 \cap Z_2) \xrightarrow{\tilde{H}_{q-1}} \tilde{H}_{q-1}(Z_1) \oplus \tilde{H}_{q-1}(Z_2) \xrightarrow{\tilde{H}_{q-1}} \tilde{H}_{q-1}(X) \xrightarrow{\delta_{q-1}} \cdots
\end{aligned}$$

Beweis. Dies folgt als exakte Homologiefolge der $\underline{\mathrm{Comp}_R}$-Sequenz mit Verwendung von Satz 8.3.4 für $H_q(X) = H_q^{\mathcal{U}}(X)$, sowie $H_q(C_\bullet \oplus C'_\bullet) = H_q(C_\bullet) \oplus H_q(C'_\bullet)$. □

Definition 8.51. *Die Folge*

$$\begin{aligned}
&\cdots \xrightarrow{\delta_{q+1}} \tilde{H}_q(Z_1 \cap Z_2) \xrightarrow{\tilde{H}_q} \tilde{H}_q(Z_1) \oplus \tilde{H}_q(Z_2) \xrightarrow{\tilde{H}_q} \tilde{H}_q(X) \xrightarrow{\delta_q} \\
&\tilde{H}_{q-1}(Z_1 \cap Z_2) \xrightarrow{\tilde{H}_{q-1}} \tilde{H}_{q-1}(Z_1) \oplus \tilde{H}_{q-1}(Z_2) \xrightarrow{\tilde{H}_{q-1}} \tilde{H}_{q-1}(X) \xrightarrow{\delta_{q-1}} \cdots
\end{aligned}$$

heißt auch die ***Mayer-Vietoris-Sequenz*** *von X bezüglich der Überdeckung $\mathcal{U} = \{Z_1, Z_2\}$ (mit $\operatorname{Int}(Z_1) \cup \operatorname{Int}(Z_2) = X$).*

Anwendung der Mayer-Vietoris-Sequenz

Homologie topologischer endlicher Graphen

Definition 8.52. *Ein* ***endlicher topologischer Graph*** *im $\mathbb{R}^n$ (für $n \geq 2$) ist die Vereinigung endlich vieler Bilder von Wegen im $\mathbb{R}^n$, welche jeweils höchstens Anfangs- und Endpunkte gemeinsam haben.*

Definition 8.53. *Ein* ***Sphärenbouqet*** *ist eine Vereinigung von Bildern von 1-Sphären, die alle (und auch paarweise) genau einen Punkt P gemeinsam haben. Insbesondere bezeichne für $r \geq 1$*

$$\Gamma_r := \{1, \cdots, r\} \times S^1 \big/ (n, (0,1)) \sim (m, (0,1))$$

das kanonische r-Sphärenbouqet (mit $\Gamma_0 := \{(0,1)\}$).

(Die anderen Sphärenbouqets sind homöomorph zu einem der kanonischen.)

Bemerkung. Jeder wegezusammenhängende endliche topologische Graph ist homotopieäquivalent zu genau einem kanonischen Sphärenbouquet Γ_r.

Satz 8.3.6. *(Die Homologie der Sphärenbouqets)*

$$\tilde{H}_q(\Gamma_r, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}^r & q = 1 \\ (0) & q \neq 1 \end{cases}$$

Bemerkung. Damit kann man die Homologie wegezusammenhängender endlicher topologischer Graphen bestimmen, und durch Zerlegung in Zusammenhangskomponenten auch die aller endlichen topologischen Graphen.

Beweis.

$r = 0$: Γ_0 ist ein Punkt, damit ist $H_q(\Gamma_0) = 0$ klar.

$r \geq 1$: Es ist ja $\Gamma_q \cong \Gamma_{r-1} \cup S^{1'}$, so dass $\Gamma_{r-1} \cap S^{1'} = \{P\}$ ist. Dies ist offenbar eine Čech-Überdeckung, wir haben also unsere Mayer-Vietoris-Sequenz:

$$\ldots \to \tilde{H}_q(\{p\}) \to \tilde{H}_q(S^1) \oplus \tilde{H}_q(\Gamma_{r-1}) \to \tilde{H}_q(\Gamma_r) \to \tilde{H}_{q-1}(\{p\}) \to \ldots$$

Dabei ist ja bekanntlich $\tilde{H}_*(\{p\}) = 0$, wir haben also lauter (sehr) kurze exakte Sequenzen, und es ist für $q \geq 2$:

$$H_q(\Gamma_r) \cong \underbrace{H_q(S^1)}_{=(0)} \oplus H_q(\Gamma_{r-1}) \cong H_q(\Gamma_{r-1}) = \ldots = H_q(\Gamma_0) = 0$$

Am „Ende" der Sequenz haben wir:

$$\ldots \to 0 = H_1(\{P\}) \to H_1(S_1) \oplus H_1(\Gamma_{r-1}) \to H_1(\Gamma_r) \to \tilde{H}_0(\{p\}) = 0 \to \ldots$$

Wegen $H_1(S^1) = \mathbb{Z}$ ist also

$$H_1(\Gamma_r) = H_1(\Gamma_{r-1}) \oplus \mathbb{Z} = \ldots = H_1(\Gamma_0) \oplus \mathbb{Z}^r = \mathbb{Z}^r.$$

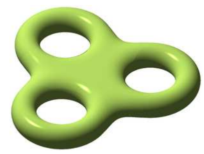
□

Homologie geschlossener kompakter Flächen vom Geschlecht g

$\boxed{\sqcup}$ **Definition 8.54.** *Seien X und Y zwei geschlossene kompakte Flächen, d.h. abgeschlossene kompakte zweidimensionale Untermannigfaltigkeiten (ohne Rand) des $\mathbb{R}^3$. Dann sei $X \sqcup Y$ eine Fläche, die entsteht, indem aus X und Y jeweils ein zu B^2 homöomorphes Loch ausgeschnitten wird und die beiden Flächen an den entstehenden Randlinien verklebt werden.*

Bemerkung. Die genaue Wahl der *Löcher* und Verklebungen ist dadurch natürlich nicht eindeutig festgelegt, aber dies ist auch nicht notwendig, da alle möglichen Varianten jeweils homöomorph zueinander sind und wir uns in diesem Abschnitt auf Untersuchung homöomorphieinvarianter Eigenschaften (wie der Homologie) beschränken.

F_2



F_3

Definition 8.55. *Es sei $T^2 = S^1 \times S^1$ der bekannte 2-Torus. Dann bezeichne*

$$\begin{aligned} F_0 &:= S^2 \\ F_1 &:= S^2 \sqcup T^2 \\ &\cong T^2 \\ F_2 &:= S^2 \sqcup T^2 \sqcup T^2 \\ &\cong T^2 \sqcup T^2, \\ F_3 &:= S^2 \sqcup T^2 \sqcup T^2 \sqcup T^2 \\ &\cong T^2 \sqcup T^2 \sqcup T^2, \\ &\vdots \end{aligned}$$

allgemein:

$$F_g := F_{g-1} \sqcup T^2.$$

Die Flächen F_g für $g \in \mathbb{N}_0$ heißen die ***Standardflächen vom Geschlecht*** *g.* $\boxed{F_g}$

Es ist also F_g eine Fläche mit *g Löchern*, bzw. eine *Kugel mit g Henkeln.*

Bemerkung. Ist X eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension 1 (also eine kompakte Riemannsche Fläche), so ist X topologisch äquivalent zu einer Fläche F_g. g heißt dann das **Geschlecht** der Riemannschen Fläche X, und es gilt:

$$g = \dim_{\mathbb{C}} \Gamma(X, T^*(X)),$$

d.h. das (topologische) Geschlecht ist auch die Dimension des Raumes der abelschen Differentiale auf X, das sogenannte **analytische Geschlecht** von X. (Beweis nicht hier.)

Frage. Wie sieht $H_q(F_g, \mathbb{Z})$ aus?

Bemerkung. Bereits bekannt ist ja:

$$\tilde{H}_q(F_0, \mathbb{Z}) = \tilde{H}_q(S^2, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

> $\boxed{\text{SATZ 8.3.7.}}$ *(Homologie geschlossener Flächen vom Geschlecht g)*
> Sei $g \geq 1$. Dann gilt
>
> $$H_q(F_g, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 2 \\ \mathbb{Z}^{2g} & q = 1 \\ (0) & \text{sonst} \end{cases}$$

Bemerkung. Sei X kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g. Nach Satz 8.3.7 ist dann $H_1(X,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g}$, und $\Gamma(X,T^*X)$ ist g-dimensionaler komplexer Vektorraum. Wir erhalten die Paarung

$$\begin{aligned} H_1(X,\mathbb{Z}) \times \Gamma(X,T^*X) &\to \mathbb{C} \\ ([\gamma],\omega) &\mapsto \int_\gamma \omega. \end{aligned}$$

Diese Paarung ist nichtausgeartet (ÜA), und induziert daher eine (injektive) Abbildung

$$H_1(X,\mathbb{Z}) \hookrightarrow \Gamma(X,T^*(X))^*,$$

dessen Bild sogar ein Gitter in $\Gamma(X,T^*(X))^*$ liefert.

Definition 8.56. *Der Quotient*

$$\mathcal{J}(X) := {\Gamma(X,T^*X)^*}\Big/{j(H_1(X,\mathbb{Z}))},$$

*ein komplexer Torus der Dimension g, heißt **Jacobi-Torus** von X.*

Beweis von Satz 8.3.7. Sei $j : \mathbb{R}^3 \hookrightarrow S^3$ eine Einbettung. Für $F_g \subseteq \mathbb{R}^3$ (mit $g \geq 1$) ist dann $j(F_g) \subseteq S^3$, und wir bezeichnen mit J_g die Abschließung des *Innengebietes* von $j(F_g)$, (quasi eine *Vollbrezel*) und mit $J'_g := S^3 \setminus Int(J_g)$ das *Außengebiet.* (Eine genauere Betrachtung liefert, dass $j(F_g)$ die Sphäre S^3 in zwei isomorphe Gebiete zerlegt. Welches davon wir als „innen" und welches als „außen" ansehen, ist für den Beweis egal.)

Wir haben also $S^3 = J_g \cup J'_g$ mit $J_g \cap J'_g = F_g$. Nun kann man sich von folgenden Fakten überzeugen (ÜA):

(1) J_g ist homotopieäquivalent zu einem endlichen topologischen Graphen mit g Schleifen, d.h. $J_g \approx \Gamma_g$.

(2) Für J'_g gilt das gleiche: $J'_g \approx \Gamma_g$.

(3) Schließlich ist $S^3 = J_g \cup J'_g$ eine Čech-Überdeckung zweiter Art.

Damit haben wir die (exakte) Mayer-Vietoris-Sequenz

$$\to H_{q+1}(S^3) \to H_q(F_g) \to H_q(\Gamma_g) \oplus H_q(\Gamma_g) \to H_q(S^3) \to$$

Satz 8.3.6 liefert daraus:

$$\begin{aligned} &\forall q \geq 3: \ H_{q-1}(F_g) \cong H_q(S^3) \\ \Rightarrow \quad &\forall q \geq 2: \ H_q(F_g) \cong H_{q+1}(S^3) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q+1=3 \\ (0) & \text{sonst} \end{cases}. \end{aligned}$$

$\tilde{H}_0(F_g) = (0)$ ist sowieso klar, weil F_g wegezusammenhängend ist. Für $q = 1$ haben wir

$$0 = H_2(S^3) \to H_1(F_g) \to H_1(\Gamma_g) \oplus H_1(\Gamma_g) \to H_1(S^3) = 0,$$

also

$$H_1(F_g,\mathbb{Z}) \cong H_1(\Gamma_g) \oplus H_1(\Gamma_g) \cong \mathbb{Z}^g \oplus \mathbb{Z}^g \cong \mathbb{Z}^{2g}.$$

□

Der Ausschneidungssatz

Definition 8.57. *Sei $B \subseteq A \subseteq X$ Kette von Unterräumen (d.h. Teilmengen). Das Tripel (X, A, B) heißt dann auch* ***topologische Triade*** *.*

Eine durch eine Triade gegebene Einbettung von Raumpaaren (d.h. Morphismus in $\underline{\mathrm{Top}}^2$)

$$j : (X \setminus B, A \setminus B) \hookrightarrow (X, A)$$

heißt ***Ausschneidung****, falls die Homologieabbildungen*

$$H_q(j) : H_q(X \setminus B, A \setminus B) \to H_q(X, A)$$

(für alle $q \in \mathbb{Z}$) Isomorphismen (der $\mathbb{Z}$-Moduln) sind.

(X, A, B) heißt dann auch ***Ausschneidungstriade****.*

Frage. Welche (hinreichende) Bedingung gibt es für eine Triade (X, A, B), so dass die Einbettung $j : (X \setminus B, A \setminus B) \to (X, A)$ eine Ausschneidung ist?

> $\boxed{\text{Satz 8.3.8.}}$ *(Ausschneidungssatz, erste Version)*
>
> Sei (X, A, B) eine topologische Triade mit $\overline{B}^X \subseteq \mathrm{Int}(A)$. Dann ist die Einbettung $j : (X \setminus B, A \setminus B) \to (X, A)$ eine Ausschneidung.

Beweis. Betrachte die beiden Überdeckungen $\mathfrak{U} = \{X \setminus B, \mathrm{Int}(A)\}$ von X und $\mathfrak{U} = \{A \setminus B, \mathrm{Int}(A)\}$ von A. Dies sind sogar Čech-Überdeckungen von X bzw. A, es ist nämlich

$$\mathrm{Int}(X \setminus B) \cup \mathrm{Int}(A) = (X \setminus \overline{B}^X) \cup \mathrm{Int}(A) = X,$$
$$\mathrm{Int}(A \setminus B) \cup \mathrm{Int}(A) = (A \setminus \overline{B}^X) \cup \mathrm{Int}(A) = A.$$

Wir haben also die exakte Folge von Čech-Komplexen:

$$0 \to C_\bullet^{\mathfrak{U}'}(A) \to C_\bullet^{\mathfrak{U}}(X) \to C_\bullet^{\mathfrak{U}}(X) / C_\bullet^{\mathfrak{U}'}(A) \to 0$$

Diese induziert nun die (funktoriellen) langen exakten Homologiesequenzen:

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & H_q^{\mathfrak{U}'}(A) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & H_q^{\mathfrak{U}}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & H_q\left(C_\bullet^{\mathfrak{U}}(U) / C_\bullet^{\mathfrak{U}'}(X)\right) \arrow[d, "\alpha_q"] \arrow[dddll, rounded corners] \\
{} \arrow[r] & H_q(A) \arrow[r] & H_q(X) \arrow[r] & H_q(X, A) \arrow[dddll, rounded corners] \\
 & & & \\
 & H_{q-1}^{\mathfrak{U}'}(A) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & H_{q-1}^{\mathfrak{U}}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & H_{q-1}\left(C_\bullet^{\mathfrak{U}}(U) / C_\bullet^{\mathfrak{U}'}(X)\right) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{q-1}"] & {} \\
 & H_{q-1}(A) \arrow[r] & H_{q-1}(X) \arrow[r] & H_{q-1}(X, A) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

Dabei werden die (eingezeichneten) vertikalen Isomorphismen durch Satz 8.3.4 gegeben, und nach dem Fünferlemma müssen damit auch die α_q Isomorphismen sein, es ist also

$$H_q(X, A) \cong H_q\left(C_\bullet^{\mathfrak{U}}(U) \middle/ C_\bullet^{\mathfrak{U}'}(X) \right).$$

Es bleibt, dies auszurechnen. Wir haben ja $S_q^{\mathfrak{U}}(X) = S_q(X \setminus B) \cup S_q(\operatorname{Int} A)$, also

$$C_q^{\mathfrak{U}}(X) = C_q(X \setminus B) + C_q(\operatorname{Int} A) \subseteq C_q(X).$$

Analog erhalten wir für $\mathfrak{U}'$:

$$C_q^{\mathfrak{U}'}(A) = C_q(A \setminus B) + C_q(\operatorname{Int} A) \subseteq C_q(A) \subseteq C_q(X)$$

Damit ist der Quotient berechenbar:

$$C_q^{\mathfrak{U}}(X) \middle/ C_q^{\mathfrak{U}'}(A) = C_q(X \setminus B) + C_q(\operatorname{Int}(A)) \middle/ C_q(A \setminus B) + C_q(\operatorname{Int} A)$$

und aufgrund des Noether-Isomorphismus

$$\begin{aligned} &\cong C_q(X \setminus B) \middle/ C_q(X \setminus B) \cap (C_q(A \setminus B) + C_q(\operatorname{Int} A)) \\ &= C_q(X \setminus B) \middle/ C_q(A \setminus B) \\ &= C_q(X \setminus B, A \setminus B) \end{aligned}$$

Wir haben also das Diagramm aus kanonischen Morphismen (daher kommutativ):

$$\begin{tikzcd} H_q\left(C_\bullet^{\mathfrak{U}}(X) \middle/ C_\bullet^{\mathfrak{U}'}(A) \right) \arrow[rr, equal, "\sim"] \arrow[dr, equal, "\sim"'] & & H_q(X \setminus B, A \setminus B) \arrow[dl, "H_q(j)"] \\ & H_q(X, A) & \end{tikzcd}$$

Damit muss auch $H_q(j)$ ein Isomorphismus sein. □

$\boxed{\textsc{Satz 8.3.9.}}$ *(Ausschneidungssatz, zweite Version)*
Sei X ein topologischer Raum mit Teilmengen $C \subseteq B \subseteq A \subseteq X$, so dass

(1) $j : (X \setminus C, A \setminus C) \to (X, A)$ ist eine Ausschneidung

(2) $k : (X \setminus B, A \setminus B) \to (X \setminus C, A \setminus C)$ ist ein Deformationsretrakt der Raumpaare.

Dann ist $i : (X \setminus B, A \setminus B) \hookrightarrow (X, A)$ eine Ausschneidung.

Beweis. Wir haben hier für alle $q \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{tikzcd}
H_q(X \setminus B, A \setminus B) \arrow[rr, "H_q(i)"] \arrow[dr, "H_q(k)"'] & & H_q(X, A) \\
& H_q(X \setminus C, A \setminus C) \arrow[ur, "H_q(j)"'] &
\end{tikzcd}$$

Nach Voraussetzung sind $H_q(k)$ und $H_q(i)$ Isomorphismen, also auch $H_q(i)$ Isomorphismus. □

Beispiel 8.3.2. Betrachte $X = S^n$, $A = H^n_- = \{(x_0, \cdots, x_n) \in S^n \mid x_n \leq 0\}$, $B := \operatorname{Int}(H^n_-)$. Nun ist $\overline{B} \not\subseteq \operatorname{Int}(A)$, also die erste Version des Ausschneidungssatzes (8.3.8) nicht direkt anwendbar.

Verwende daher $C := \left\{(x_0, \cdots, x_n) \in S^n \mid x_n < -\frac{1}{2}\right\}$. Nun ist $\overline{C} \subset \operatorname{Int} A$, wir können also auf (X, A, C) die erste Version des Ausschneidungssatzes anwenden, d.h. $(S^n \setminus C, A \setminus C) \hookrightarrow (S^n, A)$ ist eine Ausschneidung.

Nun haben wir zur Einbettung

$$k : (S^n \setminus B = H^n_+, A \setminus B = S^{n-1} \times \{0\}) \hookrightarrow (S^n \setminus C, A \setminus C)$$

die Abbildung (Homotopie)

$$\begin{aligned}
F : (S^n \setminus C) \times I &\longrightarrow S^n \setminus C \\
(x, t) &\longmapsto \begin{cases} x & x \in H^n_+ \\ \frac{(1-t)\cdot x + t\cdot \operatorname{pr}(x)}{\|(1-t)\cdot x + t\cdot \operatorname{pr}(x)\|} & \text{sonst} \end{cases},
\end{aligned}$$

wobei pr die Projektion von S^n auf die Äquatorebene ist:

$$\begin{aligned}
\operatorname{pr} : S^n &\longrightarrow E^{n-1} = \{x = (x_0, \cdots, x_{n-1}, 0) \mid \|x\| \leq 1\} \\
(x_0, \cdots, x_n) &\longmapsto (x_0, \cdots, x_{n-1}, 0)
\end{aligned}$$

F ist wohldefiniert und eine Homotopie zwischen $F(\square, 0) = \mathrm{id}_{S^n \setminus C}$ und $F(\square, 1) =: p$. Es ist

$$p(x) = \left(\begin{cases} x & x \in H^n_+ \\ \frac{\operatorname{pr}(x)}{\|\operatorname{pr}(x)\|} \in S^{n-1} \times \{0\} & \text{sonst} \end{cases} \right) \in H^n_+,$$

dabei ist $p \circ k = \mathrm{id}_{H^n_+}$. Es ist also k wirklich ein Deformationsretrakt, und nach der zweiten Version des Ausschneidungssatzes (8.3.9) ist damit auch

$$i : (S^n \setminus B, A \setminus B) \to (S^n, B)$$

eine Ausschneidung.

Analog erhält man $H_1(H^n_-, S^{n-1}) \cong H_q(S^n, H^n_+)$.

Eine Anwendung davon ist eine andere Berechnungsmethode für die Sphären-Homologien, diesmal ohne Mayer-Vietoris.

Wir haben ja die lange Homologiefolge der Ausschneidung:

$$\to H_q(S^{n-1}) \to H_q(H_+^n) \to H_q(H_+^n, S^{n-1}) \to H_{q-1}(S^{n-1}) \to H_{q-1}(H_+^n) \to$$

Dabei ist H_n^+ kontrahierbar auf einen Punkt, also $H_q(H_+^n) = (0)$. Damit muss $H_q(H_+^n, S^{n-1}) \cong H_{q-1}(S^{n-1})$ sein, sowie

$$H_q(H_+^n, S^{n-1}) \cong H_q(S^n, H_-^n) \cong H_q(S^n).$$

Das heißt, es ist $H_q(S^n) \cong H_{q-1}(S^{n-1})$ für alle $q \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$. Mit geeigneten Induktionsanfängen erhält man die bekannten Eigenschaften.

Zusammenhang zwischen Ausschneidungssätzen und Mayer-Vietoris-Sequenzen

Sei $X \in \text{obj}(\underline{\text{Top}})$, $X_1, X_2 \subseteq X$ mit $X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$. Dies liefert Inklusionen von Raumpaaren $(X_1 \cup X_2, X_1)$ und $(X_1 \cup X_2, X_2)$. Hier kann $X_1 \setminus X_2$ bzw. $X_2 \setminus X_1$ weggeschnitten werden:

$$k_1 : (X_1, X_1 \cap X_2) \hookrightarrow (X_1 \cup X_2, X_2)$$
$$k_2 : (X_2, X_1 \cap X_2) \hookrightarrow (X_1 \cup X_2, X_1)$$

Definition 8.58. *Ein solches Tripel (X, X_1, X_2) heißt **exakte Triade** (von topologischen Räumen), falls k_1 und k_2 wirklich Ausschneidungen sind, d.h. $H_q(k_1)$ und $H_q(k_2)$ wirklich Isomorphismen für alle $q \in \mathbb{Z}$.*

Beispiel 8.3.3.

(1) (S^n, H_+^n, H_-^n) ist eine exakte Triade.

(2) Sei X offener Raum, $X = U_1 \cup U_2$ offene Überdeckung. Dann ist (X, U_1, U_2) eine exakte Triade.

Sei (X, X_1, X_2) exakte Triade, $A := X_1 \cap X_2$. Dann hat man das kommutative Diagramm von Homologieabbildungen in Abbildung 8.2, mit den Ausschnitten der diversen langen exakten Raumpaar-Sequenzen (gegeben durch Satz 8.3.3).

Die schwarz gekennzeichneten Pfeile sind dabei die durch die Exaktheit gegebenen Isomorphismen.

SATZ 8.3.10. *(Mayer-Vietoris für exakte Triaden)*
Sei (X, X_1, X_2) exakte Triade von topologischen Räumen. Dann ist die lange Homologiefolge

$$\to H_q(A) \to H_q(X) \oplus H_q(X_2) \to H_q(X) \to H_{q-1}(A) \to$$

eine exakte Folge.

Beweis. Dies ist eine Folgerung von 8.3.5, angewandt auf unser Diagramm. ☐

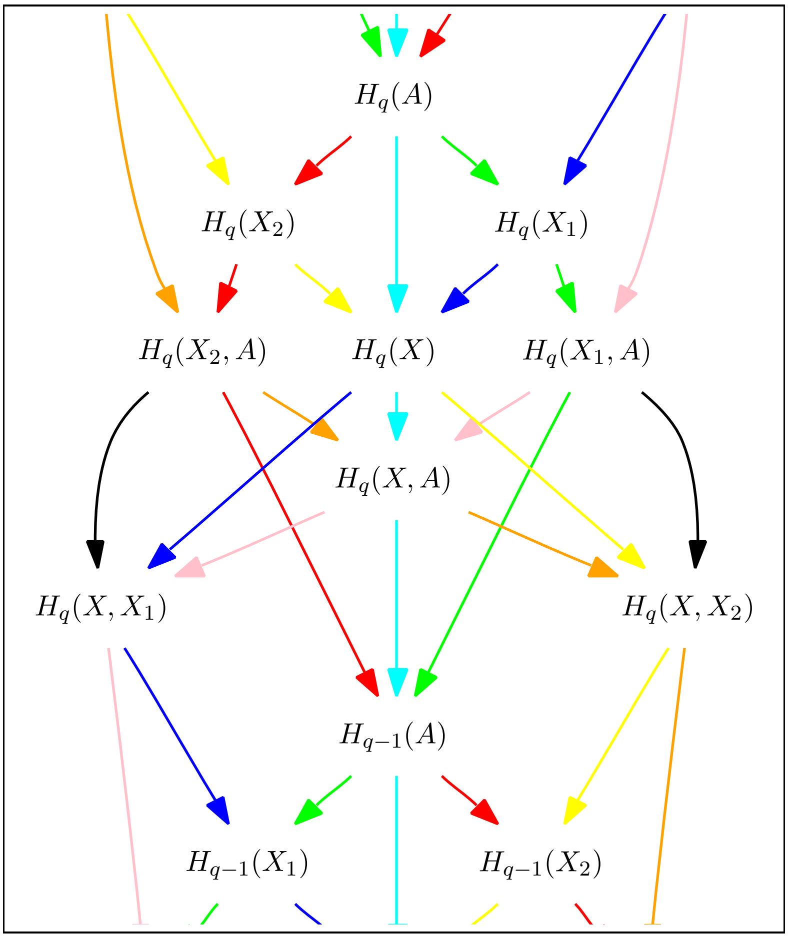


Abbildung 8.2: Lange Sequenzen und Isomorphismen bei einer exakten Triade (X, X_1, X_2) (mit $A = X_1 \cap X_2$)

8.4 Homologische Algebra in abelschen Kategorien und (abstrakten) Garben

Exakte Kategorien

$\boxed{0}$ *Erinnerung.* Sei $\mathfrak{C}$ eine Kategorie mit Nullobjekt 0, d.h. für alle Objekte $C \in \operatorname{obj}(\mathfrak{C})$ ist $|\operatorname{Hom}(C,0)| = |\operatorname{Hom}(0,C)| = 1$. (Wir nennen diese Morphismen $0_C : C \to 0$ bzw.
$\boxed{0_C}$ $0^C : 0 \to C$.)

Dann ist dieses bis auf Isomorphie eindeutig. Außerdem gibt es für alle Objekte $A, B \in$
$\boxed{0^C}$ $\operatorname{obj}(\mathfrak{C})$ einen eindeutigem Morphismus $0 := 0_A^B : A \to B$ (es ist $0 = 0_A \circ 0^B$), so dass
$\boxed{0_A^B}$ für $f \in \operatorname{Mor}(B,A)$ immer gilt $f \circ 0_A^B = 0_A^A$ und $0_A^B \circ f = 0_B^B$. Wir schreiben aber für alle diese Morphismen immer 0.

$\boxed{0}$

Definition 8.59. *Sei $\mathfrak{C}$ eine Kategorie mit Nullobjekt 0, $(A \xrightarrow{f} B) \in \mathfrak{C}$ ein Morphismus. Ein **Kern** von f ist ein Paar (K,i) mit $K \in \operatorname{obj}(\mathfrak{C})$, $i \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(K,A)$ und den Eigenschaften:*

(1) $f \circ i = 0$

(2) Für alle $(D \xrightarrow{g} A) \in \operatorname{Mor}(\mathfrak{C})$ mit $f \circ g = 0$ gibt es genau ein $h \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(D,K)$ mit $g = i \circ h$.

Bemerkung.

(a) Dies ist offenbar wieder ein eine Definition mittels Universaleigenschaft, damit sind Kerne eines Morphismus (falls existent) bis auf Isomorphie eindeutig.

(b) Kerne müssen nicht notwendig existieren.

(c) In den Kategorien $\underline{\mathrm{Ab}}$, $\underline{\mathrm{Mod}}_R$, $\underline{\mathrm{Vect}}_K$, ... gibt es Kerne (für jeden Morphismus), sogar kanonische Modelle.

(d) Eine alternative Charakterisierung für Kerne (K,i) von $A \xrightarrow{f} B$:

 (1) $K \overset{i}{\hookrightarrow} A$ ist Monomorphismus
 (2) $f \circ i = 0$
 (3) Für alle (D,g) mit $D \xrightarrow{g} A$ und $f \circ g = 0$ existiert ein $h \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(D,K)$ mit $g = i \circ h$.

$$\begin{tikzcd} \ker f \arrow[r, "i"'] \arrow[rr, bend left, "0"] & A \arrow[r, "f"'] & B \\ & T \arrow[ul, dashed, "\exists! h"] \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

Definition 8.60. *Analog definieren wir einen **Kokern** als ein Paar (C,p) mit $C \in$ $\operatorname{obj}(K)$, $p : B \to K$, $p \circ f = 0$ und der entsprechenden Universaleigenschaft.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend left, "0"] \arrow[dr, "0"'] & B \arrow[r, two heads, "p"'] \arrow[d, "t"] & \operatorname{coker} f \arrow[dl, dashed, "\exists! h"] \\ & T & \end{tikzcd}$$

Bemerkung. Alle Kokerne einer Abbildung sind isomorph zueinander, d.h. $\operatorname{coker} f$ ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Definition 8.61. *Sei $\mathfrak{C}$ eine Kategorie, nicht notwendigerweise mit Nullobjekt. Sei $A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$ ein Paar von Morphismen in $\mathfrak{C}$. Ein* ***Differenzkern*** *von (f,g) ist ein Paar (E,i) mit den Eigenschaften*

(1) $E \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C})$, $i \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(E,A)$

(2) $f \circ i = g \circ i$

(3) $\forall (F,k)$ *mit* $F \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C})$, $k \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(E,A)$ *und* $f \circ k = g \circ k$ *existiert genau ein* $h : F \to E$ *mit* $k = i \circ h$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ F \arrow[u, dashed, "\exists! h"] \arrow[ur, "k"'] & & \end{tikzcd}$$

Wir schreiben $\ker(f,g)$ *für einen solchen Differenzkern.*

Bemerkung.

(1) Ein Differenzkern ist, falls existent, bis auf Isomorphie eindeutig.

(2) So ein Differenzkern existiert auch in Ens, (mit den obigen Bezeichnungen) ist das $E := \{x \in A \mid f(x) = g(x)\}$ mit der Inklusion.

(3) In Kategorien mit Nullobjekt ist $\ker f = \ker(f,0)$ (falls existent).

(4) $i : E \to A$ ist auch hier ein Monomorphismus.

Definition 8.62. *Sei $\mathfrak{C}$ eine Kategorie, nicht notwendigerweise mit Nullobjekt. Sei $A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$ ein Paar von Morphismen in $\mathfrak{C}$. Ein* ***Differenzkokern*** *von (f,g) ist ein Paar (Q,p) mit den Eigenschaften*

(1) $Q \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C})$, $i \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(B,Q)$

(2) $p \circ f = p \circ g$

(3) $\forall (F,\lambda)$ *mit* $F \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C})$, $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(B,F)$ *und* $\lambda \circ f = \lambda \circ b$ *existiert genau ein* $h : Q \to F$ *mit* $\lambda = h \circ p$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "\exists! h", "\lambda"'] & Q \\ & & F \end{tikzcd}$$

Wir schreiben $\operatorname{coker}(f,g)$ *für einen solchen Differenzkokern.*

Bemerkung.

(1) In Ens gibt es keine Differenzkokerne.

(2) Auch Differenzkokerne sind, falls existent, bis auf Isomorphie eindeutig.

(3) In $\underline{\mathrm{Mod}}_R$ existieren Differenzkerne und -kokerne, nämlich $\ker(f,g) = \ker(f-g)$ und $\operatorname{coker}(f,g) = \operatorname{coker}(f-g) = {}^{B}\!/\!_{\operatorname{im}(f-g)}$.

Definition 8.63. *Sei* $(\mathfrak{C}, 0)$ *eine Kategorie mit Nullobjekt,* $A \xrightarrow{f} B$ *ein Morphismus mit Kokern* (Q,p)*. Dann heißt jeder Kern von* $p : B \to Q$ *ein* ***Bild*** *von* f*.*
Ist (K,i) *ein Kern von* f*, so heißt jeder Kokern von* i *ein* ***Kobild*** *von* f*.*

Bemerkung. Natürlich sind auch Bilder und Kobilder, falls existent, bis auf Isomorphie eindeutig.

$\boxed{\ker f}$ $\boxed{\operatorname{coker} f}$

Definition 8.64. *Sei* $(A \xrightarrow{f} B)$ *ein Morphismus in einer Kategorie* $\mathfrak{C}$*. Dann sei* $(\ker f, i)$ *ein ausgewählter Kern (aus allen ja isomorphen Kernen) von* f*,* $(\operatorname{coker} f, p)$ *ein ausgewählter Kokern,* $(\operatorname{im}(f), j)$ *ein ausgewähltes Bild und* $(\operatorname{coim}(f), \pi)$ *ein ausgewähltes Kobild von* f*.*

Bemerkung. Ist $(\mathfrak{C}, 0)$ eine Kategorie mit Nullobjekt, in der für jeden Morphismus Kerne und Kokerne existieren, so gibt es dort auch Bilder und Kobilder für jeden Morphismus.

Beispiel 8.4.1.

(1) $0 \xrightarrow{0} A$ hat einen Kern $(0, 0 \xrightarrow{\mathrm{id}_0} 0)$, und Kokern (A, id_A)

(2) $A \xrightarrow{0} 0$ hat einen Kern (A, id_A) und Kokern $(0, \mathrm{id}_0)$

(3) $A \xrightarrow{\mathrm{id}_A} A$ hat als Kern $(0, 0 \xrightarrow{0} A)$ und als Kokern $(0, A \xrightarrow{0} 0)$.

(4) $A \xrightarrow{0} A$ hat als Kern (A, id_A), als Kokern ebenso.

Bemerkung. Die Existenz von Kernen und Kokernen ist selbst in Kategorien mit Nullobjekt nicht gesichert.

Beispiel 8.4.2. Die volle Unterkategorie der freien abelschen Gruppen in Ab hat nicht immer Kerne und Kokerne, obwohl Ab solche hat: Untergruppen und Faktorgruppen freier Gruppen sind i.a. nicht wieder frei.

> $\boxed{\text{Bemerkung 1.}}$ Sei $\mathfrak{C}$ eine Kategorie mit Kernen und Kokernen. Dann gilt:
>
> (i) Ist $A \xrightarrow{f} B$ ein Monomorphismus, so ist $\ker f = 0$.
>
> (ii) Ist $A \xrightarrow{f} B$ ein Epimorphismus, so ist $\operatorname{coker} f = 0$.

Beweis.

(i) Sei $C \xrightarrow{v} A$ beliebig mit $f \circ v = 0$. Dann haben wir ja

$$C \underset{0}{\overset{v}{\rightrightarrows}} A \overset{f}{\hookrightarrow} B,$$

mit $f \circ v = 0 = f \circ 0$, also (da f Monomorphismus) $v = 0$. Damit faktorisiert v (via $C \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} A$) eindeutig über $(0,0)$, also ist $\ker f = 0$.

(ii) Dual dazu.

□

> $\boxed{\text{Satz 8.4.1.}}$ Sei $(\mathfrak{C}, 0)$ eine Kategorie mit Kernen und Kokernen (also auch Bildern und Kobildern), sei $f : A \to B$ ein Morphismus in $\mathfrak{C}$, $\ker f$, $\operatorname{coker} f$, $\operatorname{im} f$, $\operatorname{coim} f$ alle fest gewählt (mit den entsprechenden Morphismen).
> Dann gibt es ein kommutatives Faktorisierungs-Diagramm:
>
> $$\begin{tikzcd} \ker f \arrow[r, "i"'] \arrow[rr, bend left, "0"] \arrow[dr, "0"'] & A \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "\pi"] \arrow[rr, bend left, "0"] & B \arrow[r, "p"'] & \operatorname{coker} f \\ & \operatorname{coker} i = \operatorname{coim} f \arrow[r, dashed, "\vartheta_f"'] & \operatorname{im} f = \ker p \arrow[u, "j"'] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$
>
> Genauer: Es existiert genau ein $\vartheta_f \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(\operatorname{coim} f, \operatorname{im} f)$, so dass $f = j \circ \vartheta_f \circ \pi$.

$\boxed{\vartheta_f}$

Beweis. Wir haben $f \circ i = 0$, da $(\ker f, i)$ ein Kern von f war. Nun existiert (nach Kokern-Definition) genau ein $\vartheta_1 : \operatorname{coker} i \to B$ mit $f = \vartheta_1 \circ \pi$, und damit ist

$$0 \circ \pi = 0 = p \circ f = p \circ \vartheta_1 \circ \pi,$$

und da π Epimorphismus ist, auch $p \circ \vartheta_1 = 0$. Das heißt, ϑ_1 faktorisiert eindeutig über $\ker p = (\operatorname{im} f, j)$, es existiert also $\vartheta_f : \operatorname{coim} f \to \operatorname{im} f$ mit $j \circ \vartheta_f = \vartheta_1$, und damit haben wir

$$f = j \circ \vartheta_f \circ \pi.$$

Dieses faktorisierende ϑ_f ist auch eindeutig: Haben wir außerdem ϑ' mit $j \circ \vartheta' \circ \pi = f$, so können wir, da j Monomorphismus und π Epimorphismus ist, $\vartheta' = \vartheta_f$ folgern. □

Definition 8.65. *Sei $(\mathfrak{C}, 0)$ eine Kategorie mit Kernen und Kokernen. $\mathfrak{C}$ heißt eine* ***exakte Kategorie****, falls für alle $f : A \to B$ der faktorisierende Morphismus $\vartheta_f : \operatorname{coim} f \to \operatorname{im} f$ ein Isomorphismus ist.*

Beispiel 8.4.3. Ab, Mod_R, Comp_R sind exakte Kategorien aufgrund des bekannten Homomorphiesatzes.

$\boxed{\text{Satz 8.4.2.}}$ Sei $\mathfrak{C}$ eine exakte Kategorie. Dann gilt:

(1) Jeder Monomorphismus in $\mathfrak{C}$ ist ein Kern seines Kokerns.

(2) Jeder Epimorphismus in $\mathfrak{C}$ ist ein Kokern seines Kerns.

Beweis.

(1) f Monomorphismus, also $\ker f = 0$. Damit ist $(\operatorname{coim} f, \pi) = (A, \mathrm{id}_A)$ und aufgrund der Exaktheit auch $\operatorname{im} f \cong A$, daher auch $(A, f) \cong (\operatorname{im} f, j) = (\ker(p), j)$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_A = \pi"'] & B \arrow[r, two heads, "p"] & \text{coker} \\
A = \operatorname{coim} f \arrow[r, "\sim", "\vartheta_f"'] & \operatorname{im} f = \ker p \arrow[u, "j"'] &
\end{tikzcd}$$

(2) geht analog (dual).

□

$\boxed{\text{Korollar.}}$ Sei $\mathfrak{C}$ eine exakte Kategorie, $(A \xrightarrow{f} B) \in \operatorname{Mor}(\mathfrak{C})$. Dann gilt:

(1) f ist Monomorphismus $\Leftrightarrow \ker f = 0$.

(2) f ist Epimorphismus $\Leftrightarrow \operatorname{coker} f = 0$.

(3) f ist Isomorphismus $\Leftrightarrow$ f ist Monomorphismus und Epimorphismus.

Beweis. Alles folgt nun ganz leicht aus Satz 8.4.1 mit dem Faktorisierungsdiagramm:

$$\begin{tikzcd}
\ker f \arrow[r, "i"'] & A \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "\pi"] & B \arrow[r, "p"'] & \operatorname{coker} f \\
& \operatorname{coker} i = \operatorname{coim} f \arrow[r, "\sim", "\vartheta_f"'] & \operatorname{im} f = \ker p \arrow[u, "j"'] &
\end{tikzcd}$$

(1) Ist $\ker f = 0$, so ist $\operatorname{coim}(f) = A$ und $\pi = \mathrm{id}_A$, also ist $f = j \circ \vartheta_f$ Monomorphismus.

(2) Ist $\operatorname{coker} f = 0$, so ist $\operatorname{im} f = B$, $j = \mathrm{id}_B$, also $f = \vartheta \circ \pi$ Epimorphismus.

(3) Ist f Monomorphismus, so ist π Isomorphismus, ist f Epimorphismus, so ist j Isomorphismus. Also sind π, j, ϑ Isomorphismen, also auch $f = j \circ \vartheta \circ i$ Isomorphismus.

Die jeweils andere Richtung ist bereits bekannt bzw. allgemein (nicht nur für exakte Kategorien) gültig. $\square$

Exakte Sequenzen in exakten Kategorien

Frage. Sei $(\mathfrak{C}, 0)$ eine exakte Kategorie. Seien $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ zwei verknüpfbare Morphismen. Was bedeutet nun $g \circ f = 0$ in Termen von Kernen, Kokernen usw.?

$g \circ f = 0$ heißt, dass f eindeutig über $\ker g \overset{i}{\hookrightarrow} B$ faktorisiert, also existiert genau ein $h : A \to \ker g$ mit $f = i \circ h$. Ebenso faktorisiert g über $B \overset{p}{\twoheadrightarrow} \operatorname{coker} f$, womit dann $g = \lambda \circ p$ ist. Damit ist $g \circ j = \lambda \circ p \circ j = \lambda \circ 0 = 0$, d.h. j faktorisiert über $\ker g$, und wir haben genau ein $\mu : \operatorname{im} f \to \ker g$ mit $i \circ \mu = j$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "\exists! h"'] & B \arrow[r, "g"] & C \\
& \ker g \arrow[u, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"'] & C \\
& \operatorname{coker} f \arrow[ur, dashed, "\exists! \lambda"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \ker g \arrow[dr, "i"] \arrow[rrrd, dotted, "0"] & & \operatorname{coker} f \arrow[dr, "\lambda"] & \\
A \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "\pi'"] \arrow[rrru, dotted, "0"] \arrow[rrrr, dotted, bend right, "0"] & & B \arrow[ur, "p"] \arrow[rr, "g"] & & C \\
\operatorname{coim} f \arrow[rr, "\sim", "\vartheta_f"'] & & \operatorname{im} f \arrow[u, "j"] \arrow[uul, dashed, "\mu"] \arrow[uur, dotted, "0"] \arrow[urr, dotted, "0"] & &
\end{tikzcd}$$

Weil j Monomorphismus war, muss auch μ ein solcher sein. Das heißt, wir haben auch $f = i \circ \mu \circ \vartheta_f \circ \pi'$. Und mit dieser Eigenschaft ist μ eindeutig, weil π' Epimorphismus, ϑ_f Isomorphismus imd i Monomorphismus ist.

Dies führt uns zum Satz:

> $\boxed{\text{Satz 8.4.3.}}$ Sei $\mathfrak{C}$ exakte Kategorie, $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ zwei Morphismen, mit $\ker g \overset{i}{\hookrightarrow} B$ und $A \overset{\pi'}{\twoheadrightarrow} \operatorname{coim} f \xrightarrow[\vartheta_f]{\sim} \operatorname{im} f$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:
>
> (1) $g \circ f = 0$
>
> (2) Es gibt genau ein $\mu : \operatorname{im} f \to \ker k$ mit $f = i \circ \mu \circ \vartheta_f \circ \pi'$.
>
> In diesem Fall ist dieses μ ein Monomorphismus.

Beweis.

(1) ⇒ (2): wurde oben gezeigt.

(2) ⇒ (1): Ist $f = i \circ \mu \circ \mu \circ \vartheta_f \circ \pi'$, so ist

$$g \circ f = g \circ i \circ \mu \circ \mu \circ \vartheta_f \circ \pi' = 0 \circ \mu \circ \mu \circ \vartheta_f \circ \pi' = 0.$$

□

Definition 8.66. *Sei $\mathfrak{C}$ eine exakte Kategorie. Eine Sequenz $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ heißt **exakt** bei B, falls $g \circ f = 0$ und der Morphismus $\mu : \operatorname{im} f \hookrightarrow \ker g$ aus Satz 8.4.3 ein Isomorphismus ist* (kurz: „$\operatorname{im} f = \ker g$“).

Definition 8.67. *Eine Sequenz von Morphismen heißt **exakt**, falls sie an jeder Stelle exakt ist.*

Bemerkung. Sei $\mathfrak{C}$ (wie üblich) eine exakte Kategorie.

- Eine Sequenz der Form $0 \to A \xrightarrow{f} B$ ist genau dann exakt, wenn f Monomorphismus ist.
- Eine Sequenz der Form $A \xrightarrow{\varphi} B \to 0$ ist genau dann exakt, wenn φ Epimorphismus ist.
- Eine Sequenz der Form $0 \to A \xrightarrow{\psi} B \to 0$ ist genau dann exakt, wenn ψ Isomorphismus ist.

Definition 8.68. *Sei $\mathfrak{C}$ eine exakte Kategorie,*

(1) Eine (aufsteigend numerierte) Sequenz

$$(A_\bullet, \partial_\bullet) := \left(\ldots \to A_{q-1} \xrightarrow{\partial_{q-1}} A_q \xrightarrow{\partial_q} A_{q+1} \to \ldots\right)$$

*von komponierbaren Morphismen in $\mathfrak{C}$ heißt **Kokomplex** in $\mathfrak{C}$, falls $\partial_{q+1} \circ \partial_q = 0$ für alle $q \in \mathbb{Z}$ gilt.*

(2) Eine (absteigend numerierte) Sequenz

$$(A_\bullet, \partial_\bullet) := \left(\ldots \to A_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} A_q \xrightarrow{\partial_q} A_{q-1} \to \ldots\right)$$

*von komponierbaren Morphismen in $\mathfrak{C}$ heißt **Komplex** in $\mathfrak{C}$, falls $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0$ für alle $q \in \mathbb{Z}$ gilt.*

*(3) Ein (Ko-)Komplex $(A_\bullet, \partial_\bullet)$ heißt **azyklisch** oder **lange exakte Sequenz**, falls $(A_\bullet, \partial_\bullet)$ exakt an der Stelle A_q ist (für alle $q \in \mathbb{Z}$).*

Definition 8.69. *Sei $\mathfrak{C}$ eine exakte Kategorie. Die Kategorie $\underline{\mathrm{Comp}}_{\mathfrak{C}}$ hat dann als Objekte die Komplexe aus Objekten (und Morphismen) in $\mathfrak{C}$, sowie als Morphismen die sogenannten Komplex-Morphismen, d.h.*

$$\mathrm{Mor}_{\underline{\mathrm{Comp}}_{\mathfrak{C}}}((C_\bullet,\partial_\bullet),(D_\bullet,\delta_\bullet)) := \left\{ (\gamma_q)_{q\in\mathbb{Z}} \;\middle|\; \begin{array}{ll} \forall q \in \mathbb{Z}: & \gamma_i \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(C_q, D_q), \\ & \gamma_q \circ \partial_{q-1} = \delta_{q-1} \circ \partial_i \end{array} \right\}$$

Bemerkung. Bei einem Komplex hat man ja (für jedes q) dann aus Satz 8.4.3 den (eindeutigen) Monomorphismus $\mu_q : \mathrm{im}\,\partial_{q+1} \to \ker \partial_q$ mit $\partial_{q+1} = i_q \circ \mu_q \circ \vartheta_{q+1} \circ \pi_{q+1}$:

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & A_{q+1} \arrow[rr, "\partial_{q+1}"] \arrow[d, "\pi_{q+1}"'] & & A_q \arrow[rr, "\partial_q"] & & A_{q-1} \\
& \mathrm{coim}\,\partial_{q+1} \arrow[r, "\vartheta_{q+1}", "\sim"'] & \mathrm{im}\,\partial_{q+1} \arrow[ur, hook, "j_{q+1}"] \arrow[r, tail, "\mu_q"] & \ker\partial_q \arrow[u, hook, "i_q"'] \arrow[r, two heads] & \mathrm{coker}\,\mu_q &
\end{tikzcd}$$

Definition 8.70.

- *Wir nennen*
$$H_q((A_\bullet,\partial_\bullet)) := \mathrm{coker}\,\mu_q$$
das q-te ***Homologieobjekt*** *des Komplexes $(A_\bullet,\partial_\bullet)$.*

- *Im Falle eines Kokomplexes (also aufsteigend numeriert) sprechen wir von den* ***Kohomologieobjekten***
$$H^q((A_\bullet,\partial_\bullet)) := \mathrm{coker}\left(\mathrm{im}\,\partial_q \overset{\mu_q}{\hookrightarrow} \ker\partial_{q+1}\right).$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & A_q \arrow[rr, "\partial_q"] \arrow[d, "\pi_q"'] & & A_{q+1} \arrow[rr, "\partial_{q+1}"] & & A_{q+2} \\
& \mathrm{coim}\,\partial_q \arrow[r, "\vartheta_q", "\sim"'] & \mathrm{im}\,\partial_q \arrow[ur, hook, "j_q"] \arrow[r, tail, "\mu_q"] & \ker\partial_{q+1} \arrow[u, hook, "i_{q+1}"'] \arrow[r, two heads] & \mathrm{coker}\,\mu_q &
\end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{SATZ 8.4.4.}}$ *(Aufspalten exakter Folgen in exakten Kategorien:* ***Aufspaltungslemma****)*

Sei $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ eine exakte Sequenz von Morphismen in der exakten Kategorie $\mathfrak{C}$.

Dann existiert ein Objekt $E \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C})$ und Morphismen $B \overset{p}{\twoheadrightarrow} E$, $E \overset{\lambda}{\hookrightarrow} C$, mit den Eigenschaften:

(1) $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{p} E \to 0$ ist exakt.

(2) $0 \to E \xrightarrow{\lambda} C \xrightarrow{h} D$ ist exakt.

(3) $g = \lambda \circ p$.

$$\begin{tikzcd}
& & 0 \arrow[d] & \\
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "g"'] & E \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"] & 0 \\
& & C \arrow[d, "h"] & \\
& & D &
\end{tikzcd}$$

Beweis. Wir wählen $E := \operatorname{coker} f$, mit $p : B \twoheadrightarrow E$ dem entsprechenden Epimorphismus. Dann ist schon $A \xrightarrow{f} B \overset{p}{\twoheadrightarrow} E \to 0$ exakt.

Andererseits ist wegen der Exaktheit von (f, g, h) auch

$$\begin{aligned}\ker(h) &\cong \operatorname{im} g \\ &\cong \operatorname{coim} g \\ &= \operatorname{coker}(\ker g \hookrightarrow B) \\ &\cong \operatorname{coker}(\operatorname{im} f \hookrightarrow B) \\ &\cong \operatorname{coker}(A \xrightarrow{f} B),\end{aligned}$$

alles mittels der eindeutigen Isomorphismen, die „alles verträglich und kommutativ machen“. Nennen wir den Gesamt-Isomorphismus $\tau : \operatorname{coker} f \to h$, so haben wir

$$A \xrightarrow{f} B \overset{p}{\twoheadrightarrow} \operatorname{coker} f \xrightarrow[\tau]{\sim} \ker h \overset{j}{\hookrightarrow} C \xrightarrow{h} D,$$

und erhalten mit $\lambda := j \circ \tau$ das gewünschte $g = \lambda \circ p$. $\square$

$\boxed{\text{SATZ 8.4.5.}}$ *(Aufspaltungssatz für Diagramme)*
Sei $\mathfrak{C}$ eine exakte Kategorie,

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\gamma"] & D \arrow[d, "\delta"] \\
A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C' \arrow[r, "h'"] & D'
\end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm in $\mathfrak{C}$ mit exakten Zeilen.
Dann existieren Objekte E, E' sowie Morphismen p, p', λ, λ', σ, so dass das folgende Diagramm kommutativ ist mit exakten Zeilen und Spalten:

$$\begin{tikzcd}
& & & & 0 \arrow[dd] & & & \\
& & & & & 0 \arrow[dd] & & \\
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\alpha"] & & B \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "\beta"] \arrow[ddrr, bend left, "g"] & & E \arrow[rr] \arrow[dr, "\sigma"] \arrow[dd, "\lambda"] & & 0 & \\
& A' \arrow[rr, "f'"] & & B' \arrow[rr, "p'"] \arrow[ddrr, bend left, "g'"] & & E' \arrow[rr] \arrow[dd, "\lambda'"] & & 0 \\
& & & & C \arrow[dr, "\gamma"] \arrow[dd, "h"] & & & \\
& & & & & C' \arrow[dd, "h'"] & & \\
& & & & D \arrow[dr, "\delta"] & & & \\
& & & & & D' & &
\end{tikzcd}$$

Beweis. Aus Satz 8.4.4 haben wir schon die Aufspaltungen $B \overset{p}{\twoheadrightarrow} E = \operatorname{coker} f \overset{\lambda}{\hookrightarrow} C$ und $B' \overset{p'}{\twoheadrightarrow} E' = \operatorname{coker} f' \overset{\lambda'}{\hookrightarrow} C'$, welche schon die beiden Diagramme

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\beta"] & E \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\exists!\sigma"] & 0 \\
A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "p'"] & E' \arrow[r] & 0'
\end{tikzcd}$$

und

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, dashed, "\exists!\tau"] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\gamma"] & D \arrow[d, "\delta"] \\
0 \arrow[r] & E' \arrow[r, "\lambda'"] & C' \arrow[r, "h'"] & D'
\end{tikzcd}$$

ergeben, jeweils exakt in den Zeilen. Damit gilt

$$0 = 0 \circ \alpha = p' \circ f' \circ \alpha = p' \circ \beta \circ f$$

Das heißt, $p' \circ \beta$ faktorisiert über $B \overset{p}{\twoheadrightarrow} \operatorname{coker} f = E$, wir haben also (genau) ein $\sigma : E \to E'$ mit $p' \circ \beta = \sigma \circ p$, σ vervollständigt also das erste Diagramm.

Dual dazu erhalten wir $\tau : E \to E'$. Nun ist $g = \lambda \circ p$ und $g' = \lambda' \circ p'$, und daher

$$\begin{aligned}\lambda' \circ \tau \circ p &= \gamma \circ \lambda \circ p\\ &= \gamma \circ g\\ &= g' \circ \beta\\ &= \lambda \circ p' \circ \beta\\ &= \lambda' \circ \sigma \circ p.\end{aligned}$$

Weil λ' Monomorphismus und p Epimorphismus ist, ist damit $\sigma = \tau$. □

Bemerkung. Wir werden später sehen, dass solche Aufspaltungen ausreichen, um das Fünfer-Lemma für exakte Kategorien zu beweisen, und dergestalt exakte (Ko-)Homologiesequenzen abzuleiten.

$\boxed{\text{Lemma.}}$ *(Eindeutigkeit der Zerlegung von Morphismen)*
Sei $\mathfrak{C}$ exakte Kategorie, $A \xrightarrow{f} B$ Morphismus in $\mathfrak{C}$ sowie $A \overset{\alpha}{\twoheadrightarrow} X \overset{\beta}{\hookrightarrow} B$ eine Zerlegung von f (d.h. $f = \beta \circ \alpha$) in Mono- und Epimorphismus. Dann existiert genau ein $h \in \operatorname{Isom}_{\mathfrak{C}}(X, \operatorname{im} \varphi)$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads, "\alpha"'] \arrow[dr, "\pi_f"'] & X \arrow[r, tail, "\beta"'] \arrow[d, dashed, "\wr\, h"] & B \\ & \operatorname{im} f \arrow[ur, "j_f"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis. Betrachte $B \xrightarrow{p} \operatorname{coker} f$. Dabei ist $0 = p \circ f = p \circ \beta \circ \alpha$, also auch $p \circ \beta = 0$. Das heißt, β faktorisiert über $\ker p = \operatorname{im} f$, etwa $\beta = j_f \circ h$ (eindeutig). Weil β Monomorphismus war, gilt dies auch für h. Ebenfalls ist $\pi_f = h \circ \alpha$, also ist h auch Epimorphismus, also Isomorphismus. □

Abelsche Kategorien

Produkte in allgemeinen Kategorien

Definition 8.71. *Sei $\mathfrak{C}$ eine beliebige (kleine) Kategorie, $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von Objekten aus $\mathfrak{C}$. Ein **kategorielles Produkt** von $(A_i)_i$ ist ein Paar $(A, (p_i)_i)$ mit*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\omega_i"] \arrow[d, "\exists! h"'] & A_i \\ A \arrow[ur, "p_i"'] & \end{tikzcd}$$

(Prod 1) $A \in \operatorname{obj}(\mathfrak{C})$, $(p_i : A \to A_i) \in \operatorname{Mor}(\mathfrak{C})$ für alle $i \in I$.

(Prod 2) Ist $(X, (\omega_i)_i)$ Paar mit (Prod 1), so existiert genau ein $h \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, A)$ mit $p_i \circ h = \omega_i$ für alle i.

$\boxed{\text{SATZ 8.4.6.}}$ *(Eigenschaften beliebiger Produkte in Kategorien)*
Sei $\mathfrak{C}$ eine Kategorie mit Nullobjekt, $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Objekten in $\mathfrak{C}$, $(A,(p_i)_i)$ ein Produkt von $(A_i)_i$. Dann gilt:

(1) Es gibt eine Familie $(u_i)_{i\in I}$ mit $u_i : A_i \to A$ und

$$\forall i,j \in I: \quad p_j \circ u_i = \begin{cases} \mathrm{id}_{A_i} & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

(2) Für alle $i \in I$ ist $p_i \in \mathrm{Epi}_{\mathfrak{C}}(A, A_i)$ und $u_i \in \mathrm{Mono}_{\mathfrak{C}}(A_i, A)$.

Beweis. Für ein $i \in I$ betrachten wir das Objekt A_i mit der Morphismenfamilie $(A_i \xrightarrow{w_j^{(i)}} A_j)_j$, definiert durch $w_j^{(i)} := \delta_{ij}$, d.h. $w_i^{(i)} := \mathrm{id}_{A_i}$ und $w_j^{(i)} := 0$ für $i \neq j$. Aufgrund der Universaleigenschaft (Prod 2) von $(A,(p_i)_i)$ existiert dann ein $u_i : A_i \to A$, mit $w_j^{(i)} = p_j \circ u_i$.

Dabei ist insbesondere $\mathrm{id}_{A_i} = w_i^{(i)} = p_i \circ u_i$, wodurch p_i ein Epimorphismus und u_i Monomorphismus sein muss.

Durchgeführt für sämtliche i ergibt diese Konstruktion das Gewünschte. $\square$

$\boxed{\text{KOROLLAR.}}$ Sei $\mathfrak{C}$ eine Kategorie mit Nullobjekt, (A_1, A_2) Familie aus zwei Objekten und $(A,(p_1,p_2))$ ein Produkt für (A_1,A_2). Dann gilt mit den Morphismen u_i aus Satz 8.4.6:

(1) (A_1, u_1) ist ein Kern von p_2 und (A_2, u_2) ist ein Kern von p_1.

(2) Ist überdies $\mathfrak{C}$ eine exakte Kategorie, so ist auch (A_1, p_1) ein Kokern von u_2 und (A_2, p_2) ein Kokern von u_1.

Beweis.

(1) Sei $w : X \to A$ ein Morphismus mit $p_2 \circ w = 0$. Dann ist

$$p_1 \circ u_1 \circ p_1 \circ w = \mathrm{id}_{A_1} \circ p_1 \circ w = p_1 \circ w$$

und

$$p_2 \circ u_1 \circ p_1 \circ w = 0 \circ p_1 \circ w = 0 = p_2 \circ w.$$

Nach (Prod 2) (die Eindeutigkeits-Bestimmung, $w_i = p_i \circ w$) ist damit $u_1 \circ p_1 \circ w = w$. Das heißt, w faktorisiert eindeutig über $A_1 \xhookrightarrow{u_1} A$, es ist also wirklich (A_1, u_1) ein Kern von p_2. ((A_2, u_2) geht analog (Vertauschen von 1 und 2).)

(2) Sei also $\mathfrak{C}$ auch noch exakt. Dann folgt (2) aus (1) mit Satz 8.4.2, weil die u_i ja Monomorphismen sind.

$\square$

Bemerkung. In jeder Kategorie gilt, dass Produkte von Familien $(A_i)_i$, falls existent, untereinander eindeutig isomorph sind, aufgrund der Universaleigenschaft (Prod 2).

$\boxed{\prod}$ $\boxed{\times}$

Wir schreiben in so einem Fall

$$\prod_{i \in I} A_i \qquad \text{und manchmal auch} \qquad \bigtimes_{i \in I} A_i$$

für $(A, (p_i)_i)$.

Beispiel 8.4.4. Die bekannten Produkte in $\underline{\mathrm{Ens}}$ (das kartesische Mengenprodukt) und $\underline{\mathrm{Mod}}_R$ (kartesisches Produkt mit der Produkt-Modulstruktur) sind auch kategorielle Produkte.

Beispiel 8.4.5. Es existieren keine (unendlichen) kategoriellen Produkte z.B. in den Kategorien der endlichen zyklischen Gruppen oder der endlichen abelschen Gruppen. (Die entsprechenden Produkte in $\underline{\mathrm{Ab}}$ sind dann nicht mehr unbedingt endlich.)

Beispiel 8.4.6. Es existieren Produkte in der Kategorie der endlich erzeugten abelschen Torsionsgruppen, welche i.a. verschieden vom kartesischen Produkt sind. (ÜA!)

Definition 8.72. *Sei $\mathfrak{C}$ eine Kategorie, $(A_i)_i$ eine Familie von Objekten in $\mathfrak{C}$. Ein* ***kategorielles Koprodukt*** *von $(A_i)_i$ in $\mathfrak{C}$ ist dann ein kategorielles Produkt von (A_i) in der oppositionellen Kategorie $\mathfrak{C}^o$.*

$\boxed{\amalg_{i \in I} A_i}$ *Falls ein solches existiert, schreiben wir $\amalg_{i \in I} A_i$ dafür.*

Bemerkung. Das heißt, das Koprodukt ist genauso definiert wie das Produkt, nur mit umgekehrten Pfeilen.

Beispiel 8.4.7. Auch (unendliche) Koprodukte müssen nicht immer existieren, in $\underline{\mathrm{Ens}}$ sind sie als disjunkte Vereinigungen vorhanden, in $\underline{\mathrm{Mod}}_R$ als direkte Summen.

Abelsche Kategorien

Definition 8.73. *Eine Kategorie $\mathfrak{C}$ heißt* ***abelsche Kategorie****, falls:*

(AB 1) $\mathfrak{C}$ ist additive Kategorie,

(AB 2) $\mathfrak{C}$ ist exakte Kategorie und

(AB 3) in $\mathfrak{C}$ existieren Produkte und Koprodukte für endliche Familien.

> $\boxed{\text{Lemma.}}$ Sei $\mathfrak{C}$ eine additive Kategorie, $(A_i)_{i \in I}$ eine endliche Objektfamilie in $\mathfrak{C}$ sowie $(A, (p_i)_i)$ ein Produkt dieser Familie (mit den Epimorphismen $p_i : A \twoheadrightarrow A_i$ sowie den assoziierten Monomorphismen $u_i : A_i \hookrightarrow A$).
> Dann ist $(A, (u_i)_i)$ ein Koprodukt von $(A_i)_i$.

Beweis. Wir haben also $(A, (p_i)_i)$ als Produkt von $(A_i)_i$, mit der assoziierten Familie $(u_i)_i$ von Monomorphismen.

Sei nun C ein weiteres Objekt und $(A_i \xrightarrow{w_i} C)_i$ eine beliebige Familie von Morphismen. Wir müssen nun ein eindeutiges h finden, so dass $h \circ u_i = w_i$ für alle $i \in I$. Wähle dazu

$$h := \sum_{j \in I} w_j \circ p_j$$

(wir haben ja eine additive Kategorie). Dann ist für $i \in I$:

$$\begin{aligned} h \circ u_i &= \left(\sum_j w_j \circ p_j \right) \circ u_i \\ &= \sum_j w_j \circ (p_j \circ u_i) \\ &= \sum_j w_j \circ \delta_{ij} \\ &= w_i \end{aligned}$$

Die Existenz ist also gezeigt. Zur Eindeutigkeit: Ist $h' : A \to C$ ein weiterer Morphismus mit $h' \circ u_i = w_i$, so ist für $j \in I$:

$$h' \circ u_j \circ p_j = w_j \circ p_j$$

und damit auch

$$h' \circ \left(\sum_j u_j \circ p_j \right) = \sum_j w_j \circ p_j = h$$

Dabei ist aber

$$p_i \circ \left(\sum_j u_j \circ p_j \right) = p_i \operatorname{id}_A,$$

also (weil $(A, (p_i)_i)$ Produkt)

$$\sum_j u_j \circ p_j = \operatorname{id}_A,$$

somit

$$h' = h,$$

h ist also eindeutig. Damit ist $(A, (u_i)_i)$ wirklich ein Koprodukt. □

Bemerkung. Der Übergang zur oppositionellen Kategorie liefert, dass endliche koprodukte in additiven Kategorien auch endliche Produkte induzieren.

$\boxed{\text{Lemma.}}$ *Verhältnis zwischen beliebigen Produkten und Koprodukten*
Sei $\mathfrak{C}$ eine beliebige Kategorie, $(A_i)_{i\in I}$ eine Objektfamilie mit Koprodukt $(\coprod_i A_i, (v_i)_i)$, sowie $(B_j)_{j\in J}$ eine weitere Objektfamilie mit Produkt $\left(\prod_j B_j, (p_j)_j\right)$. Dann existiert

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}\left(\coprod_{i\in I} A_i, \prod_{j\in J} B_j\right) \xrightarrow{\sim} \bigtimes_{i\in I, j\in J} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A_i, B_j)$$

als (kanonischer) Isomorphismus in <u>Ens</u> (d.h. als kanonische Bijektion).

Beweis. Sei $h : \coprod_i A_i \to \prod_j B_j$ ein Morphismus in $\mathfrak{C}$. Für $(k,l) \in I \times J$ haben wir dann

$$\begin{tikzcd} \coprod_i A_i \arrow[r, "h"] & \prod_j B_j \arrow[d, "p_l"] \\ A_k \arrow[u, "v_k"] \arrow[r, dashed, "h_{kl}"'] & B_l, \end{tikzcd}$$

also eine Familie von Morphismen $(h_{kl})_{(k,l)\in I\times J} \in \bigtimes_{(k,l)} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A_k, A_l)$. Dies ergibt eine Mengenabbildung

$$\begin{aligned} \alpha : \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}\left(\coprod_{i\in I} A_i, \prod_{j\in J} B_j\right) &\longrightarrow \bigtimes_{i\in I, j\in J} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A_i, B_j) \\ h &\longmapsto (h_k l)_{k,l} = (p_l \circ h \circ v_k)_{k\in I, l\in J} \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass das so definierte α bijektiv ist.

Injektivität: Ist $\alpha(h) = \alpha(h')$, so ist für alle $k, l \in I \times J$

$$p_l \circ h \circ v_k = p_l \circ h' \circ v_k,$$

und da die $(p_l)_l$ ein Produkt bilden:

$$h \circ v_k = h' \circ v_k \qquad \forall k$$

Die $(v_k)_k$ bilden ein Koprodukt, womit folgt $h = h'$.

Surjektivität: Sei $(f_{kl})_{k,l} \in \bigtimes_{(i,j)} \mathrm{Hom}_{catC}(A_k, B_l)$, also $f_{kl} \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A_k, B_l)$.

Aufgrund der Definition des Koproduktes gibt es dann für jedes $k \in I$ (genau) einen Morphismus $h_l : \coprod_{i\in I} A_i \to B_l$ mit $f_{kl} = h_l \circ v_k$. Damit haben wir eine Familie $(h_l)_{l\in J}$. Die Produkt-Charakterisierung liefert uns dazu die Existenz eines $h : \coprod_i A_i \to \prod_j B_j$, mit $p_l \circ h = h_l$ für alle $l \in J$. Es ist also wirklich $f_{kl} = p_l \circ h \circ v_k$, also $(f_{kl})_{k,l} = \alpha(h)$, damit α surjektiv.

$\square$

Bemerkung. Sei $\mathfrak{C}$ eine Kategorie mit Nullobjekt, $(A_i)_{i\in I}$ eine Objektfamilie mit Produkt und Koprodukt. Dann haben wir ja die **Kronecker-Morphismen**

$$\delta_{ij} : A_i \to A_j, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} \mathrm{id}_{A_i} & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}.$$

Die **Kronecker-Familie** $(\delta_{ij})_{(i,j)\in I\times I}$ induziert dann nach dem Lemma den **Kronecker-Morphismus** $\boxed{\delta}$

$$\delta : \coprod_{i\in I} A_i \longrightarrow \prod_{i\in I} A_i,$$

mit $\delta_k l = p_l \circ \delta \circ v_k$.

Definition 8.74. *$\prod_{i\in I} A_i$ bzw. $\coprod_{i\in I} A_i$ heißt **Biprodukt**, falls $\delta : \coprod_i A_i \to \prod_i A_i$ ein Isomorphismus ist.*

Beispiel 8.4.8. Endliche Produkte (oder Koprodukte) in additiven Familien sind also automatisch auch Biprodukte.

Achtung. Abelsche Kategorien, insbesondere die Existenz endlicher Produkte und Koprodukte, sind etwas höchst kostbares.

Beispiel 8.4.9. In der Kategorie $\underline{\text{Rings}}$ der kommutativen unitären Ringe (mit $1 \neq 0$) gibt es beliebige Produkte, aber nicht einmal für alle endlichen Familien Koprodukte:

Haben wir $A_1 := \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ und $A_2 := \mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}$, so müsste für ein Koprodukt $(R, (v_1, v_2))$ gelten:

$$v_1([1]_2) = 1_R = v_2([1]_3)$$

und damit

$$\begin{aligned} & 1_R + 1_R = 0_R = 1_R + 1_R + 1_R \\ \Rightarrow \quad & 0_R = 1_R, \end{aligned}$$

was natürlich in $\underline{\text{Rings}}$ nicht sein kann.

In der erweiterten Kategorie $\underline{\text{Rings}'} := \underline{\text{Rings}} \cup (0)$ (mit dem Nullring) ist $\otimes_{\mathbb{Z}}$ ein Koprodukt (und $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}} = 0$ ist altbekannt).

Beispiel 8.4.10. Sei k ein Körper, und betrachten wir die Kategorie der k-Algebren k-Alg. Hier existieren endliche Koprodukte, nämlich mittels $A \amalg B := A \otimes_k B$.

Hier ist i.a. $A \otimes_k B \ncong A \times B$, weil $A \times B$ stets Nullteiler hat $((0,1)\cdot(1,0) = (0,0))$, während für Integritätsalgebren A und B das Koprodukt $A \otimes_k B$ wieder eine Integritätsalgebra ist.

Damit kann k-Alg auch keine additive Kategorie werden. (Zumindest mit der üblichen Addition von Abbildungen war dies bereits klar: die Summe zweier Morphismen ist selbst kein Morphismus.)

Weitere homologische Algebra in abelschen Kategorien

> $\boxed{\text{Satz 8.4.7.}}$ Sei $\mathfrak{C}$ eine exakte Kategorie, $f_\bullet : (A_\bullet, \partial_\bullet) \to (B_\bullet, \delta_\bullet)$ ein (Kokomplex-)Morphismus in $\mathrm{Comp}_{\mathfrak{C}}$.
> Dann induziert $f_\bullet$ eine Familie von Kohomologiemorphismen
>
> $$H^q(f_\bullet) : H^q(A_\bullet, \partial_\bullet) \to H^q(B_\bullet, \delta_\bullet)$$
>
> in funktorieller Weise.

Beweis. Wir haben $\partial_q \circ \partial_{q-1} = 0$, $\delta_q \circ \delta_{q-1} = 0$ und $f_q \circ \partial_{q-1} = \delta_{q-1} \circ f_{q-1}$, also das folgende kommutative Diagramm mit komplexartigen Zeilen:

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & A_{q-1} \arrow[r, "\partial_{q-1}"] \arrow[d, "f_{q-1}"] & A_q \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d, "f_q"] & A_{q+1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{q+1}"] & {} \\
{} \arrow[r] & B_{q-1} \arrow[r, "\delta_{q-1}"'] & B_q \arrow[r, "\delta_q"'] & B_{q+1} \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

Aufgrund von $\partial_q \circ \partial_{q-1} = 0$ faktorisiert ∂_{q-1} zu

$$A_{q-1} \overset{\pi_1}{\twoheadrightarrow} \operatorname{im} \partial_{q-1} \overset{h_{q-1}}{\hookrightarrow} \overset{i_q}{\hookrightarrow} A_q,$$

entsprechendes gilt für δ_q. Aufgrund der Eigenschaften von ker und im erhalten wir weiterhin Abbildungen $\tilde{f}_{q-1} : \operatorname{im} \partial_{q-1} \to \operatorname{im} \delta_{q-1}$ sowie $\hat{f}_q : \ker \partial_q \to \ker \delta_q$, so dass das folgende Diagramm in den (echten) Trapezen kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & A_{q-1} \arrow[rrr, "\partial_{q-1}"'] \arrow[dr, "\pi_{q-1}"] \arrow[ddd, "f_{q-1}"'] & & & A_q \arrow[r] \arrow[ddd, "f_q"] & {} \\
& & \operatorname{im} \partial_{q-1} \arrow[r, tail, "h_{q-1}"] \arrow[d, "\tilde{f}_{q-1}"] \arrow[dr, phantom, "?"] & \ker \partial_q \arrow[ur, tail, "i_q"'] \arrow[d, "\hat{f}_q"] & & \\
& & \operatorname{im} \delta_{q-1} \arrow[r, tail, "h'_{q-1}"'] & \ker \delta_q \arrow[dr, tail, "i'_q"] & & \\
{} \arrow[r] & B_{q-1} \arrow[rrr, "\delta_{q-1}"] \arrow[ur, "\pi'_{q-1}"'] & & & B_q \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

Das äußere Quadrat ist dabei bekanntlich auch kommutativ. Zu untersuchen ist jetzt noch, ob auch das innere Quadrat kommutiert. Wir haben folgende Kette von Gleichheiten:

$$\begin{aligned}
i'_q \circ \hat{f}_q \circ h_{q-1} \circ \pi_{q-1} &= f_q \circ i_q \circ h_{q-1} \circ \pi_{q-1} && \text{(rechtes Trapez)} \\
&= f_q \circ \partial_{q-1} && \text{(oberes Trapez)} \\
&= \delta_{q-1} \circ f_{q-1} && \text{(äußeres Quadrat)} \\
&= i'_q \circ h'_{q-1} \circ \pi'_{q-1} \circ f_{q-1} && \text{(unteres Trapez)} \\
&= i'_q \circ h'_{q-1} \circ \tilde{f}_{q-1} \circ \pi_{q-1}. && \text{(linkes Trapez)}
\end{aligned}$$

Insgesamt haben wir also

$$i'_q \circ (\hat{f}_q \circ h_{q-1}) \circ \pi_{q-1} = i'_q \circ (h'_{q-1} \circ \tilde{f}_{q-1}) \circ \pi_{q-1},$$

und da i'_q Monomorphismus sowie π_{q-1} Epimorphismus ist, ist auch

$$\hat{f}_q \circ h_{q-1} = h'_{q-1} \circ \hat{f}_{q-1}.$$

Wir erhalten damit das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{im} \partial_{q-1} \arrow[r, tail, "h_{q-1}"] \arrow[d, "\tilde{f}_{q-1}"'] & \ker \partial_q \arrow[r, two heads, "p_q"] \arrow[d, "\hat{f}_q"] & \operatorname{coker} h_{q-1} =: H^q((A_\bullet, \partial_\bullet)) \arrow[d, dashed, "\exists! H^q(f)"] \\
\operatorname{im} \delta_{q-1} \arrow[r, tail, "h'_{q-1}"'] & \ker \delta_q \arrow[r, two heads, "p'_q"'] & \operatorname{coker} h'_{q-1} =: H^q((B_\bullet, \partial_\bullet))
\end{tikzcd}$$

Hier existiert (aufgrund der Kokern-Eigenschaften) ein eindeutiger Kokernmorphismus

$$H^q(f) : H^q((A_\bullet, \partial_\bullet)) \longrightarrow H^q((A_\bullet, \partial_\bullet)),$$

welcher das Diagramm kommutativ vervollständigt.

Schließlich ist offenbar auch $H^q(\mathrm{id}_\bullet) = \mathrm{id}_{H^q(A_\bullet, \partial_\bullet)}$ und $H^q(g_\bullet \circ f_\bullet) = H^q(g_\bullet) \circ H^(f_\bullet)$, es ist also wirklich $H^q : \underline{\mathrm{Comp}}_{\mathfrak{C}} \to \mathfrak{C}$ ein kovarianter Funktor für exakte Kategorien $\mathfrak{C}$. $\square$

Definition 8.75. *Sei $\mathfrak{C}$ eine additive und exakte Kategorie, $(f_q)_{q\in\mathbb{Z}} = f_\bullet : (A_\bullet, \partial_\bullet) \to (B_\bullet, \delta_\bullet)$ ein Morphismus zwischen Kokomplexen in $\underline{\mathrm{Comp}}_{\mathfrak{C}}$.*

f heißt ***nullhomotop*** *($f_\bullet \underset{\text{htp}}{\sim} 0_\bullet$), falls es eine Folge $(h_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ von $\mathfrak{C}$-Morphismen gibt,*

(i) $h_q : A_q \to B_{q-1}$

(ii) $h_{q+1} \circ \partial_q + \delta_{q-1} \circ h_q = f_q$

$$\begin{tikzcd}
 & \arrow[r] & A_q \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[dl, "h_q"'] \arrow[d, "f_q"] & A_{q+1} \arrow[r] \arrow[dl, "h_{q+1}"] & {} \\
\arrow[r] & B_{q-1} \arrow[r, "\delta_{q+1}"'] & B_q \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

> $\boxed{\text{Satz 8.4.8.}}$ Sei $\mathfrak{C}$ eine additive und exakte Kategorie, $(f_q)_{q\in\mathbb{Z}} = f_\bullet : (A_\bullet, \partial_\bullet) \to (B_\bullet, \delta_\bullet)$ ein nullhomotoper Morphismus zwischen Kokomplexen in $\underline{\mathrm{Comp}}_{\mathfrak{C}}$.
> Dann ist $\overline{H^q(f_\bullet)} = 0$ für alle $q \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Wir haben wieder unser Kohomologiediagramm:

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & A_{q-1} \arrow[rrrr, "\partial_{q-1}"] \arrow[dr, "\pi_{q-1}"] \arrow[ddd, "f_{q-1}"'] & & & & A_q \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[ddd, "f_q"] & A_{q+1} \\
& & \operatorname{im}\partial_{q-1} \arrow[r, hook, "h_{q-1}"] \arrow[d, "\tilde{f}_{q-1}"'] & \ker\partial_q \arrow[r, two heads, "\mathrm{pr}_q"'] \arrow[d, "\hat{f}_q"] \arrow[dl, dashed, "\theta_q"] \arrow[urr, "i_q"] & H^q(A_\bullet) \arrow[d, "H_q(f_\bullet)"] & & \\
& & \operatorname{im}\delta_{q-1} \arrow[r, hook, "h'_{q-1}"'] & \ker\delta_q \arrow[r, two heads, "\mathrm{pr}'_q"] \arrow[drr, "i'_q"] & H^q(B_\bullet) & & \\
{} \arrow[r] & B_{q-1} \arrow[ur, "\pi'_{q-1}"'] \arrow[rrrr, "\delta_{q-1}"] & & & & B_q \arrow[r] \arrow[dr, "p_{q-1}"'] & B_{q+1} \\
& & & & & & \operatorname{coker}\delta_{q-1}
\end{tikzcd}$$

Sei $(\mathring{h}_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ die Morphismenfamilie aus der Definition von *nullhomotop*, d.h. mit

$$\mathring{h}_{q+1} \circ \partial_q + \delta_{q-1} \circ \mathring{h}_q = f_q.$$

Vorschalten von $i : \ker\partial_q \to A_q$ liefert

$$\mathring{h}_{q+1} \circ \underbrace{\partial_q \circ i_q}_{=0} + \delta_{q-1} \circ \mathring{h}_q \circ i_q = f_q \circ i_q$$

$$\Rightarrow \quad \delta_{q-1} \circ \mathring{h}_q \circ i_q = i'_q \circ \hat{f}_q.$$

Schalten wir weiterhin den Kokern-Morphismus $p'_{q+1} : B_q \to \operatorname{coker}\delta_{q-1}$ nach, so haben wir

$$0 = \underbrace{p'_{q-1} \circ \delta_{q-1}}_{=0} \circ \mathring{h}_q \circ i_q = p'_{q-1} \circ i'_q \circ \hat{f}_q$$

Das heißt, $i'_q \circ \hat{f}_q = f_q \circ i_q$ faktorisiert[2]über $\ker(p'_{q-1}) = \operatorname{im}\delta_{q+1} \xhookrightarrow{i'_q\circ h'_{q-1}} B_q$, wir haben also ein (sogar eindeutiges) $\theta_q : \ker\partial_q \to \operatorname{im}\delta_{q-1}$ mit

$$i'_q \circ \hat{f}_q = i'_q \circ h_{q-1} \circ \theta_q.$$

Da i'_q Monomorphismus ist, ergibt sich auch $\hat{f}_q = h'_{q-1} \circ \theta_q$, und im (horizontal exakten)

[2]Hier zur Erinnerung noch einmal das Faktorisierungsdiagramm:

$$\begin{tikzcd}
& \operatorname{coker}\delta_{q-1} \\
\ker(\partial_q) \arrow[ur, bend left, "0"] \arrow[r, "i'_q\circ\hat{f}_q"] \arrow[dr, dashed, "\exists!\theta_q"'] & B_q \arrow[u, "p_{q-1}"'] \\
& \ker p'_{q-1} = \operatorname{im}\delta_{q-1} \arrow[u, "i'_q\circ h_{q-1}"']
\end{tikzcd}$$

rowsep

Innenteil des Homologiediagrammes gilt damit:

$$H^q(f_\bullet) \circ \mathrm{pr}_q = \mathrm{pr}'_q \circ \hat{f}_q = p' \circ h_{q-1} \circ \theta_q = 0 \circ \theta_q = 0,$$

und da pr_q ein Epimorphismus ist, auch $H^q(f_\bullet) = 0$. $\square$

Definition 8.76. *Sei $\mathfrak{C}$ wieder additive und exakte Kategorie, $(A_\bullet, \partial_\bullet) \overset{f_\bullet}{\underset{g_\bullet}{\rightrightarrows}} (B_\bullet, \delta_\bullet)$ Morphismen in* $\mathrm{Comp}_{\mathfrak{C}}$.

*$f_\bullet$ und $g_\bullet$ heißen **homotop** ($f_\bullet \underset{\mathrm{htp}}{\sim} g_\bullet$), falls $f_\bullet - g_\bullet := (f_q - g_q)_{q\in\mathbb{Z}} \underset{\mathrm{htp}}{\sim} 0$.* $\boxed{\underset{\mathrm{htp}}{\sim}}$

$\boxed{\text{KOROLLAR.}}$ Sei $(A_\bullet, \partial_\bullet) \overset{f_\bullet}{\underset{g_\bullet}{\rightrightarrows}} (B_\bullet, \delta_\bullet)$ mit $f_\bullet \underset{\mathrm{htp}}{\sim} g_\bullet$.
Dann ist $H^q(f_\bullet) = H^q(g_\bullet) : H^q(A_\bullet) \to H^q(B_\bullet)$.

Bemerkung. $\underset{\mathrm{htp}}{\sim}$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Comp}_{\mathfrak{C}}}((A_\bullet, \partial_\bullet), (B_\bullet, \delta_\bullet))$.

Definition 8.77. *Bezeichnen wir die Äquivalenzklassen von $\underset{\mathrm{htp}}{\sim}$ mit*

$$\langle f_\bullet \rangle_{\mathrm{htp}} := \left\{ g_\bullet : (A_\bullet, \partial_\bullet) \to (B_\bullet, \delta_\bullet) \,\middle|\, f_\bullet \underset{\mathrm{htp}}{\sim} g_\bullet \right\}.$$

*Dann erhält man die **Homotopiekategorie** $H\mathfrak{C}$ zur (exakten, additiven) Kategorie $\mathfrak{C}$ durch*

$$\mathrm{obj}(H\mathfrak{C}) = \mathrm{obj}(\mathrm{Comp}_{\mathfrak{C}})$$
$$\mathrm{Hom}_{H\mathfrak{C}}(A_\bullet, B_\bullet) = \{\langle f_\bullet \rangle\}\ f_\bullet \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Comp}_{\mathfrak{C}}}(A_\bullet, B_\bullet) \qquad = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Comp}_{\mathfrak{C}}}(A_\bullet, B_\bullet)\big/_{\underset{\mathrm{htp}}{\sim}}$$

Bemerkung. Die Implikation des Korollars ist i.a. nicht umkehrbar, nicht einmal in unserer „idealen“ Kategorie $\underline{\mathrm{Mod}}_R$ für einen Ring R. Dies führt zur Definition:

Definition 8.78. *Zwei Komplexe (oder Kokomplexe) $(A_\bullet, \partial_\bullet)$ und $(B_\bullet, \delta_\bullet)$ heißen **quasiisomorph**, falls es Morphismen $A_\bullet \overset{f_\bullet}{\underset{g_\bullet}{\rightleftarrows}} B_\bullet$ gibt mit*

$$H^q(f_\bullet) \circ H^q(g_\bullet) = \mathrm{id}_{H_q(A_\bullet)}$$

und

$$H^q(g_\bullet) \circ H^q(f_\bullet) = \mathrm{id}_{H_q(B_\bullet)}.$$

(Halb-)Exakte Funktoren auf exakten additiven Kategorien

Definition 8.79. *Seien $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ zwei exakte und additive Kategorien.*

- *Ein* kovarianter *Funktor* $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ *heißt* ***linksexakt****, falls für jede exakte Folge der Form*
$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$
in $\mathfrak{C}$ *auch die Bildfolge*
$$0 \to F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C)$$
exakt ist in $\mathfrak{C}'$.

- *Ein* kontravarianter *Funktor* $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ *heißt linksexakt, falls* $F^o : \mathfrak{C}^o \to C'$ *linkssexakt ist.*

- *Ein* kovarianter *Funktor* $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ *heißt* ***rechtsexakt****, falls für jede exakte Folge der Form*
$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$
in $\mathfrak{C}$ *auch die Bildfolge*
$$F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \to 0$$
exakt ist in $\mathfrak{C}'$.

- *Ein* kontravarianter *Funktor* $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ *heißt rechtsexakt, falls* $F^o : \mathfrak{C}^o \to C'$ *rechtsexakt ist.*

- *Ein ko- oder kontravarianter Funktor* $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ *heißt* ***exakt****, falls* F *rechts- und linksexakt ist, also kurze exakte Folgen in* $\mathfrak{C}$ *in kurze exakte Folgen in* $\mathfrak{C}$ *überführt.*

Beispiel 8.4.11.

- $\square \otimes M$ sowie $\mathrm{Hom}_R(\square, M)$ bzw. $\mathrm{Hom}_R(M, \square)$ sind für jeden R-Modul M linksexakte Funktoren $\underline{\mathrm{Mod}}_R \to \underline{\mathrm{Mod}}_R$.

- Der Lokalisierungsfunktor $\square_S : \underline{\mathrm{Mod}}_R \to \underline{\mathrm{Mod}}_{R_S}$ ist exakter Funktor für m. a. S. $S \subsetneqq R$.

$\boxed{\hat{X}}$ *Beispiel* 8.4.12. Sei $\mathfrak{C}$ additive und exakte Kategorie, (also $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, B) \in \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{Ab}})$). Fixiere ein $A \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C})$ beliebig, und betrachte den Funktor

$$\begin{aligned} \hat{A} := \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, \square) : \mathfrak{C} &\longrightarrow \underline{\mathrm{Ab}} \\ X &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, X) \\ (X \xrightarrow{f} Y) &\longmapsto f_A^* : \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(B, X) \\ &\qquad\qquad \varphi \mapsto f \circ \varphi \end{aligned}$$

$\hat{A} : \mathfrak{C} \to \underline{\mathrm{Ab}}$ ist kovariant und linksexakt (siehe folgender Satz), aber i.a. nicht exakt.

$\boxed{\text{SATZ 8.4.9.}}$ Sei $\mathfrak{C}$ eine exakte Kategorie, $S := \left(0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C\right)$ eine Morphismensequenz in $\mathfrak{C}$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) S ist exakt

(2) für alle $X \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C})$ ist die Sequenz

$$\hat{X}(S) = (0 \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, A) \xrightarrow{f_X^*} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, B) \xrightarrow{g_X^*} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, C))$$

exakt in $\underline{\mathrm{Ab}}$.

Beweis.

(1) $\Rightarrow$ (2): Sei also S eine exakte Sequenz in $\mathfrak{C}$, sei $X \in \mathrm{obj}(\mathfrak{X})$ beliebig.

Wir müssen zeigen, dass dann auch $\hat{X}(S)$ exakt ist, also $\hat{X}(f) = f_X^*$ injektiv und $\mathrm{im}(\hat{X}(f)) = \ker(\hat{X}(g))$.

(a) Sei $u \in \ker(f_X^*)$, d.h. $u : X \to A$ mit $f_X^*(u) = 0$. D.h., es ist $f \circ u = 0$, also (weil f Monomorphismus) auch $u = 0$. D.h. $\ker(\hat{X}(f)) = \{0\}$, $\hat{X}(f)$ ist Monomorphismus.

(b) Für alle $u \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, A)$ ist

$$(g_X^* \circ f_X^*)(u) = g \circ f \circ u = 0 \circ u = 0,$$

also ist $\mathrm{im}\, f_X^* \subseteq \ker g_X^*$.

(c) Sei $\varphi \in \ker g_X^*$, also $\varphi : X \to B$ mit $0 = g_X^*(\varphi) = g \circ \varphi$. Das heißt, φ faktorisiert über $\ker(g) \cong \mathrm{im}\, f$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "\pi_f"', "\wr"] & B \arrow[r, "g"] & C \\
 & \mathrm{im}\, f \arrow[r, leftrightarrow, "\sim", "\exists h"'] & \ker g \arrow[u, tail, "j"] & X \arrow[u, "0"'] \arrow[ul, "\varphi"]
\end{tikzcd}$$

Wir haben also ein $\tau : X \to \ker g$ mit $\varphi = j \circ \tau$. π_f ist hier sogar Isomorphismus, weil f Monomorphismus war. Das heißt, wir haben

$$\begin{aligned}
f &= j \circ h \circ \pi_f \\
\overset{j}{\Rightarrow} &= f \circ \pi_f^{-1} \circ h^{-1} \\
\overset{\varphi}{\Rightarrow} &= f \circ \pi_f^{-1} \circ h^{-1} \circ \tau \\
&= f_X^*(\pi_f^{-1} \circ h \circ \tau) \qquad\qquad \in \mathrm{im}\, f_X^*
\end{aligned}$$

Das heißt, wir haben auch $\ker g_X^* \subseteq \mathrm{im}\, f_X^*$, also $\ker g_X^* = \mathrm{im}\, f_X^*$.

(2) ⇒ (1): Sei $\hat{X}(S)$ exakte Sequenz für alle $X \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C})$. Wir müssen zeigen, dass dann auch S exakt ist, also f Monomorphismus, $g \circ f = 0$ (also $\operatorname{im} f \xhookrightarrow{h} \ker g$ existent und Monomorphismus), und dass $h : \operatorname{im} f \to \ker g$ sogar Isomorphismus ist.

(i) Seien $X \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} A$ parallele Morphismen mit beliebigen $X \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C})$ und $f \circ u = f \circ v$. Das heißt, es ist $f_X^*(u) = f_X^*(v)$. Da nun f^* injektiv war, ist $u = v$, also (da dies für alle X, u, v gilt) f ein Monomorphismus.

(ii) $g \circ f = g \circ f \circ \mathrm{id}_A = (g_A^* \circ f_A^*)(\mathrm{id}_A) = 0_A^*(\mathrm{id}_A) = 0$.

(iii) Wähle $X := \ker g$ und $\varphi := i_g : \ker g \hookrightarrow B$. Dann ist $g \circ i_g = g^*_{\ker g}(i_g) = 0$, d.h. $i_g \in \ker(g^*_{\ker g}) = \operatorname{im}(f^*_{\ker g})$. Das heißt, es existiert ein $\tau : \ker g \to A$ mit $f^*_{\ker g}(\tau) = i_g$, d.h. $f \circ \tau = i_g$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_f"', "\wr"] & B \arrow[r, "g"] & C \\ \operatorname{im} f \arrow[r, tail, "h"'] & \ker g \arrow[u, "i"'] \arrow[ul, dashed] & \end{tikzcd}$$

Nun war war ja $f = i_g \circ h \circ \pi_f$ und damit $i_g = f \circ \tau = i_g \circ h \circ \pi_f \circ \tau$, also (weil i_g Monomorphismus ist) $\mathrm{id}_A = h \circ \pi_f \circ \tau$. Damit ist h auch Epimorphismus, also auch Isomorphismus. □

Korollar. $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, \square)$ ist linksexakt für beliebige $X \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C})$.

Die lange exakte (Ko-)Homologiesequenz in exakten Kategorien

Satz 8.4.10. *(Schlangenlemma)*
Sei $\mathfrak{C}$ eine exakte Kategorie (z.B. abelsch), und sei

$$\begin{tikzcd} & A' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha'"] & A \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, "\alpha"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B' \arrow[r, tail, "\varphi"] & B \arrow[r, "\gamma"] & B'' & \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm von Objekten und Morphismen in $\mathfrak{C}$, mit exakten Zeilen, $K := \ker \alpha$, $C := \operatorname{coker} \alpha$ usw. Dann gilt:

(1) Die induzierte Kernsequenz $K' \xrightarrow{\hat{f}} K \xrightarrow{\hat{g}} K''$ sowie die induzierte Kokernsequenz $C' \xrightarrow{\tilde{\gamma}} C \xrightarrow{\tilde{\gamma}} $ sind exakte Folgen.

(2) Es gibt einen funktoriellen Verbindungsmorphismus $\delta : K'' \to C'$, so dass die Folge

$$K' \to K \to K'' \xrightarrow{\delta} C' \to C \to C''$$

eine exakte Folge ist.

Bemerkung. Auch hier noch einmal das komplette Diagramm, welches den Namen erklärt.

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
& K \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d, tail] & K \arrow[r, "\hat{g}"] \arrow[d, tail] & K'' \arrow[d, tail] \arrow[dddll, dashed, "\delta"] & \\
& A' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & A \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, tail, "\varphi"'] \arrow[d, two heads] & B \arrow[r, "\gamma"'] \arrow[d, two heads] & B'' \arrow[d, two heads] & \\
& C' \arrow[r, "\tilde{\varphi}"'] \arrow[d] & C \arrow[r, "\tilde{\gamma}"'] \arrow[d] & C'' \arrow[d] & \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Das Diagramm hat exakte Spalten und Zeilen, inklusive der durch den Schlangenmorphismus *fortgesetzten* Zeile.

Bemerkung. Für Mod_R kennen wir dieses Lemma schon. Nun gibt es das Meta-Theorem von Freyd-Mitchell für abelsche Kategorien:

> Jede kleine abelsche Kategorie $\mathfrak{C}$ (d.h. $\mathrm{obj}(\mathfrak{C})$ ist Menge) ist über einen exakten Funktor F isomorph zu einer vollen abelschen Unterkategorie von $\underline{\mathrm{Mod}}_R$ mit einem passendem Ring R.

Haben wir nun ein Diagramm D in einer abelschen Kategorie mit einer Menge von Objekten in D, so kann man die von diesen Objekten erzeugte volle abelsche Unterkategorie $\mathcal{A}_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{C})$ von $\mathfrak{C}$ bilden (d.h. Kerne, Kokerne und endliche Produkte hinzunehmen).

$\mathcal{A}_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{C})$ ist dann eine kleine abelsche Kategorie, es gibt also den Freyd-Mitchell-Funktor $F : \mathcal{A}_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{C}) \to \underline{\mathrm{Mod}}_{\mathcal{A}}$, und die Diagrammjagden im Diagramm können in $F(\mathcal{A}_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{C}))$ durchgeführt werden.

Damit kann der Beweis des Schlangenlemmas aus $\underline{\mathrm{Mod}}_R$ auf beliebige abelsche Kategorien übertragen werden.

Hier ist das Lemma für exakte Kategorien formuliert, also etwas allgemeiner, daher ein anderer Beweis.

Beweis.

(1) Es genügt, dies für die Kerne zu zeigen, für die Kokerne gilt dies analog (Dualisierung).

Betrachte also das Teildiagramm mit den Kernsequenzen:

$$\begin{tikzcd}
 & K' \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d, "i'"] & K \arrow[r, "\hat{g}"] \arrow[d, "i"] & K'' \arrow[d, "i''"] & \\
 & A' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha'"] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "\varphi"] & B \arrow[r, "\gamma"] & B'' &
\end{tikzcd}$$

Zunächst ist klar: $i'' \circ \hat{g} \circ \hat{f} = g \circ f \circ i' = 0 \circ i' = 0$, und da i'' Monomorphismus ist, ist $\hat{g} \circ \hat{f} = 0$.

Betrachten wir einen Ausschnitt dieses Diagrammes genauer:

$$\begin{tikzcd}
 & A' \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_f"] \arrow[ddd, "\alpha'"'] & & A \arrow[r, "g"] \arrow[ddd, "\alpha"] & A'' \arrow[ddd, "\alpha''"] \\
 & & \operatorname{im}(f) \cong \ker g \arrow[ur, "j_f"] \arrow[d, dotted] \arrow[ddl, dashed, "f_1"'] & & \\
 & & \operatorname{im}\varphi \cong \ker\gamma \arrow[dr, "j_\varphi"] & & \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[rr, tail, "\varphi"'] \arrow[ur, "\pi_\varphi"', "\sim"] & & B \arrow[r, "\gamma"'] & B''
\end{tikzcd}$$

Dabei gilt wegen $g \circ f = 0$ auch

$$\begin{aligned}
\alpha'' \circ g \circ f &= 0 \\
\Rightarrow \quad \alpha'' \circ g \circ j_f \circ \pi_f &= 0 \\
\Rightarrow \quad \alpha'' \circ g \circ j_f &= 0 \\
\Rightarrow \quad \gamma \circ \alpha \circ j_f &= 0
\end{aligned}$$

Das heißt, $\alpha \circ j_f$ faktorisiert über $\ker\gamma = \operatorname{im}\varphi$, und weil φ Monomorphismus (also π_φ Isomorphismus) ist, auch über B:

$$\begin{aligned}
\exists f_1 : \operatorname{im} f \to B' : \quad \varphi \circ f_1 &= \alpha \circ j_f \\
\Rightarrow \quad \alpha \circ j_f \circ \pi_f &= \varphi \circ f_1 \circ \pi_f \\
\Rightarrow \quad \alpha \circ f &= \varphi \circ f_1 \circ \pi_f \\
\Rightarrow \quad \varphi \circ \alpha' &= \varphi \circ f_1 \circ \pi_f \\
\Rightarrow \quad \alpha' &= f_1 \circ \pi_f
\end{aligned}$$

Diese Gleichheit ergibt das Diagramm (mit induzierten Kokernen):

$$\begin{tikzcd}
K' \arrow[r, two heads, "\pi_{\hat f}"'] \arrow[d, "i'"'] \arrow[rr, bend left, "\hat f"] & \ker f_1 \arrow[r, tail, "j_{\hat f}"'] \arrow[d, "i'_1"] & K \arrow[d, "i"] \\
A' \arrow[r, two heads, "\pi_f"'] \arrow[rr, bend left, "f"] \arrow[dr, "\alpha'"'] & \operatorname{im} f \arrow[r, tail, "j_f"'] \arrow[d, "f_1"] & A \arrow[d, "\alpha"] \\
 & B' \arrow[r, tail, "\varphi"] & B
\end{tikzcd}$$

Offenbar ist hier wirklich $\ker f_1 = \operatorname{im} \hat{f}$.

(Wir wollen nun $\ker \hat{g}$ berechnen.) Sei $u : X \to K$ mit $\hat{g} \circ u = 0$ beliebig. Dann ist auch $i'' \circ \hat{g} \circ u = 0$, also $g \circ i \circ u = 0$. Das heißt, $i \circ u$ faktorisiert über $\ker g = \operatorname{im} f$, es existiert genau ein $\vartheta : X \to \ker f_1$, so dass $i \circ u = j_f \circ \vartheta$ ist.

Nun faktorisiert wiederum ϑ über $\ker f_1 \xrightarrow{i'_1} \operatorname{im} f$ (ÜA), d.h. wir haben ein $\vartheta' : X \to \ker f_1$ mit $\vartheta = i'_1 \circ \vartheta'$. Damit ist

$$\begin{aligned} i \circ u &= j_f \circ \vartheta \\ &= j_f \circ i'_1 \circ \vartheta' \\ &= i \circ j_{\hat f} \circ \vartheta' \end{aligned}$$

Da nun i Monomorphismus ist, folgt

$$u = j_{\hat f} \circ \theta',$$

d.h. u faktorisiert eindeutig über $j_{\hat f}$. Das heißt, es ist $(\ker f_1, j_{\hat f})$ ein Kern von $\hat{g}$, also $\ker \hat{g} = \ker f_1 = \operatorname{im} \hat{f}$, die Kern-Sequenz $K' \xrightarrow{\hat f} K \xrightarrow{\hat g} K''$ ist also wirklich exakt.

(2) (Nur Skizze) Zu konstruieren ist ein $\delta : K'' \to C$ mit Verbindungseigenschaft. Bilde $H'' := \operatorname{coker} \hat{g}$ und $H' := \ker \tilde{\varphi}$, $X' := \ker(\varphi \circ \alpha')$, $X'' := \operatorname{coker}(\gamma \circ \alpha)$, womit wir die vier exakten Sequenzen

$$K \xrightarrow{\hat{}} gK'' \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} H'' \to 0$$

$$0 \to H' \overset{i}{\hookrightarrow} C' \xrightarrow{\tilde{\varphi}} C$$

$$0 \to X' \hookrightarrow A' \xrightarrow{\varphi \circ \alpha' = \alpha \circ f} B$$

$$A \xrightarrow{\gamma \circ \alpha = \alpha'' \circ g} B \twoheadrightarrow X'' \to 0$$

haben. Aus den Kern- bzw. Kokern-Eigenschaften von H', X' bzw. H'', X'' erhält man eindeutige Morphismen ρ_1, ρ_2, τ_1 und τ_2, welche das folgende Diagramm auch außen kommutativ machen:

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[rrr, dashed, "\rho_1"] \arrow[ddd, dashed, "\rho_2"'] \arrow[dr] & & & K'' \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[d, tail] & H'' \arrow[ddd, dashed, "\tau_2"] \\
& A' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & A \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & A'' \arrow[d] & \\
& B' \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] & B'' \arrow[dr] & \\
H' \arrow[r, tail, "i"'] & C' \arrow[rrr, dashed, "\tau_1"] & & & X''
\end{tikzcd}$$

Nun zeigt man, dass ρ_1 und ρ_2 Epimorphismen sind (also auch $\pi \circ \rho_1$) sowie τ_1 und τ_2 Monomorphismen (also auch $\tau_1 \circ i$). Wir haben also

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, two heads, "\pi\circ\rho_1"] \arrow[d, "\rho_2"'] & H'' \arrow[d, tail, "\tau_2"] \\
H' \arrow[r, tail, "\tau_1\circ i"'] & X''
\end{tikzcd}$$

Nach dem Zerlegungs-Lemma von Seite 596 ist dabei

$$\begin{tikzcd}
H'' & \cong \operatorname{im}(\tau_2 \circ \pi \circ \rho_1) = \operatorname{im}(\tau_1 \circ i \circ \rho_2) \cong & H', \arrow[ll, bend right, "\chi"']
\end{tikzcd}$$

wir können also die beiden exakten Sequenzen

$$K' \to K \to K'' \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} H'' \to 0$$

und

$$0 \to H'' \cong H' \to C' \to C \to C''$$

mit dem Aufspaltungslemma zusammensetzen, mit $\delta := \pi \circ \chi \circ i$, so dass die Sequenz

$$K' \to K \to K'' \xrightarrow{\delta} C' \to C \to C''$$

exakt wird. $\square$

$\boxed{\text{Satz 8.4.11.}}$ *(Existenz der langen exakten (Ko)Homologiefolge in exakten Kategorien)*
Sei $\mathfrak{C}$ exakte Kategorie. Sei weiterhin

$$0 \to A_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} B_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} C_\bullet \to 0$$

eine exakte Folge in $\underline{\mathrm{Comp}_{\mathfrak{C}}}$. Seien Kohomologieobjekte $(H^q(A_\bullet))_{q\in\mathbb{Z}}$, $(H^q(B_\bullet))_{q\in\mathbb{Z}}$ und $(H^q(C_\bullet))_{q\in\mathbb{Z}}$ fixiert (diese sind ja bis auf Isomorphie eindeutig) und $H^q(f)$ und $H^q(g)$ die dann eindeutigen Kohomologiemorphismen in $\mathfrak{C}$.
Dann existiert eine lange exakte Kohomologiesequenz der Form

$$\cdots \xrightarrow{\delta_{q+1}} H^q(A_\bullet) \xrightarrow{H^q(f_\bullet)} H^q(B_\bullet) \xrightarrow{H^q(g_\bullet)} H^q(B_\bullet) \xrightarrow{\delta_q} H^{q+1}(A_\bullet) \xrightarrow{H^{q+1}(f_\bullet)} H^{q+1}(B_\bullet) \xrightarrow{H^{q+1}(g_\bullet)} H^{q+1}(B_\bullet) \xrightarrow{\delta_{q-1}} \cdots$$

mit Verbindungshomomorphismen $(\delta_q)_{q\in\mathbb{Z}}$, welche natürlich (funktoriell) sind.

Beweis.

1. Schritt

$\boxed{\text{Behauptung.}}$ Es existiert (für $q \in \mathbb{Z}$) eine (funktorielle) kurze exakte Folge

$$0 \to H^{q-1}(A_\bullet) \overset{\alpha_q}{\hookrightarrow} \operatorname{coker}(\partial^A_{q-1}) \xrightarrow{\tau_q} \ker(\partial^A_{q+1}) \twoheadrightarrow H^q(A) \to 0$$

(ebenso für $B_\bullet$ und $C_\bullet$).

Beweis. Betrachte das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A_{q-1} \arrow[rr, "\partial_{q-1}"] \arrow[dr] & & A_q \arrow[r, two heads, "p_{q-1}"] & \operatorname{coker}\partial^A_{q-1} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{im}\partial^A_{q-1} \arrow[ur, "j_{q-1}"] \arrow[r, tail, "h_{q-1}"'] & \ker\partial_q \arrow[u, tail, "i_q"] \arrow[r, two heads, "\mathrm{pr}_{q-1}"] & \operatorname{coker} h_q = H^{q-1}(A_\bullet) \arrow[u, dashed, tail] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Wegen $p \circ \partial_{q-1} = 0$ ist auch

$$p \circ i_q \circ h_{q-1} \circ \pi_{q-1} = 0$$
$$\xRightarrow[\text{Epi}]{\pi_{q-1}} \quad p \circ i_q \circ h_{q-1} = 0$$

Das heißt, $p \circ i_q$ faktorisiert über $\operatorname{coker} h_{q-1} = H^{q-1}(A_\bullet)$, wir haben also genau ein $\alpha : H^{q-1}(A_\bullet) \to \operatorname{coker} \partial_{q-1}$ mit $p \circ i_q = \alpha \circ \mathrm{pr}_{q-1}$. Malen wir einen Teil dieses Diagramms noch einmal in einer anderen Form auf, so sieht man, dass das Schlangenlemma anwendbar wird:

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r, dashed] & 0 \arrow[r, dashed] \arrow[d] & 0 \arrow[r, dashed] \arrow[d] & \ker\alpha \arrow[d, tail] \arrow[dddll, dashed, rounded corners] & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{im}\partial_{q-1} \arrow[r, tail, "h_{q-1}"] \arrow[d, equal] & \ker\partial_q \arrow[r, two heads, "\mathrm{pr}_{q-1}"] \arrow[d, "i_q"] & H^{q-1}(A_\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{im}\partial_{q-1} = \ker p_{q-1} \arrow[r, tail, "i_{q-1}"'] \arrow[d] & A_q \arrow[r, two heads, "p_{q-1}"'] \arrow[d, two heads] & \operatorname{coker}\partial_q \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 0 \\
 & 0 \arrow[r, dashed] \arrow[d] & \operatorname{coker} i_q = \operatorname{im}\partial_q \arrow[r, dashed, "\sigma"'] \arrow[d] & \operatorname{coker}\alpha \arrow[r, dashed] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Das heißt, wir haben die exakte Sequenz

$$0 \to \ker\alpha \to 0 \to \operatorname{im}\partial_q \xrightarrow{\sigma} \operatorname{coker}\alpha \to 0,$$

wodurch $\ker\alpha = 0$ wird (also α Monomorphismus), und $\operatorname{coker}\alpha \cong \operatorname{im}\partial_q$, da σ hier nur die Wahl bleibt, Isomorphismus zu sein. Wir haben damit die zwei kurzen exakten Sequenzen (letzte Spalte)

$$0 \to H^{q-1}(A_\bullet) \xhookrightarrow{\alpha_q} \operatorname{coker}\partial_{q-1} \xrightarrow{\theta} \operatorname{im}\partial_q \to 0$$

und (die zweite Zeile im Diagramm mit verschobenen Indices)

$$0 \to \operatorname{im}\partial_q \xhookrightarrow{h_q} \ker\partial_{q+1} \xrightarrow{\mathrm{pr}_q} H^q(A_\bullet) \to 0$$

Mit dem Aufspaltungslemma können wir diese zu einer exakten Sequenz zusammensetzen:

$$0 \to H^{q-1}(A_\bullet) \xhookrightarrow{\alpha} \operatorname{coker}\partial_{q-1} \xrightarrow{\tau_q := h_q \circ \theta} \ker\partial_{q+1} \xrightarrow{\mathrm{pr}_q} H^q \to 0$$

Dabei macht τ_q auch das Diagramm 1 kommutativ (und ist mit dieser Eigenschaft eindeutig, aufgrund der Eigenschaften von $\ker\partial_{q+1}$ und $\operatorname{coker}\partial_{q+1}$) $\square$

2. Schritt Aus der Funktorialität dieser Konstruktion für $A_\bullet$, $B_\bullet$ und $C_\bullet$ haben wir das

Diagramm 1 Die in Schritt 1 konstruierten Homologie–Kokern–Kern–Homologie-Sequenzen für einen Komplex

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & \ker \partial_{q-1} \arrow[d, two heads] \arrow[dr, tail] & & & \\
& H^{q-2} \arrow[d] \arrow[dr, dashed, tail, "\alpha_{q-1}"'] & A_{q-1} \arrow[d, two heads] \arrow[dr, two heads] \arrow[dddd, bend left, "\partial_{q-1}"] & 0 \arrow[d] & \\
& 0 & \operatorname{coker} \partial_{q-2} \arrow[d] \arrow[ddr, dashed, "\tau_{q-1}"] & \operatorname{im} \partial_{q-1} \arrow[dd, tail, "h_{q-1}"] \arrow[dr] & \\
& & 0 & & 0 \arrow[dl] \\
& & & \ker \partial_q \arrow[dl, tail] \arrow[d, two heads] & 0 \arrow[dl] \\
& 0 \arrow[d] & A_q \arrow[dl, two heads] \arrow[d, two heads] \arrow[dddd, bend right, "\partial_q"] & H^{q-1} \arrow[dl, dashed, tail, "\alpha_q"] \arrow[d] & \\
& \operatorname{im} \partial_q \arrow[dl] \arrow[dd, tail, "h_q"'] & \operatorname{coker} \partial_{q-1} \arrow[d] \arrow[ddl, dashed, "\tau_q"] & 0 & \\
0 \arrow[dr] & & 0 & & \\
0 \arrow[dr] & \ker \partial_{q+1} \arrow[d, two heads] \arrow[dr, tail] & & & \\
& H^q \arrow[d] \arrow[dr, dashed, tail, "\alpha_{q+1}"'] & A_{q+1} \arrow[d, two heads] \arrow[dr, two heads] \arrow[dddd, bend left, "\partial_{q+1}"] & 0 \arrow[d] & \\
& 0 & \operatorname{coker} \partial_q \arrow[d] \arrow[ddr, dashed, "\tau_{q+1}"] & \operatorname{im} \partial_{q+1} \arrow[dd, tail, "h_{q+1}"] \arrow[dr] & \\
& & 0 & & 0 \arrow[dl] \\
& & & \ker \partial_{q+2} \arrow[dl, tail] \arrow[d, two heads] & 0 \arrow[dl] \\
& 0 \arrow[d] & A_{q+2} \arrow[dl, two heads] \arrow[d, two heads] & H^{q+1} \arrow[dl, dashed, tail, "\alpha_{q+2}"] \arrow[d] & \\
& \operatorname{im} \partial_{q+2} & \operatorname{coker} \partial_{q+1} & 0 &
\end{tikzcd}
$$

folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & H^q(A_\bullet) \arrow[r, tail, "\alpha_q^A"] \arrow[d, "H^q(f_\bullet)"'] & \operatorname{coker} \partial_{q-1}^A \arrow[r, "\tau_q^A"] \arrow[d, "\tilde{f}_{q-1}"] & \ker \partial_{q+1}^A \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\hat{f}_{q+1}"] & H^{q+1}(A_\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "H^{q+1}(f_\bullet)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^q(B_\bullet) \arrow[r, tail, "\alpha_q^B"] \arrow[d, "H^q(g_\bullet)"'] & \operatorname{coker} \partial_{q-1}^B \arrow[r, "\tau_q^B"] \arrow[d, "\tilde{g}_{q-1}"] & \ker \partial_{q+1}^B \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\hat{g}_{q+1}"] & H^{q+1}(B_\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "H^{q+1}(g_\bullet)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^q(C_\bullet) \arrow[r, tail, "\alpha_q^C"] \arrow[uuurrr, dashed, bend right=60, "\delta_q"'] & \operatorname{coker} \partial_{q-1}^C \arrow[r, "\tau_q^C"] \arrow[d] & \ker \partial_{q+1}^C \arrow[r, two heads] & H^{q+1}(C_\bullet) \arrow[r] & 0 \\
 & & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

Dabei sind aufgrund der Exaktheit von $0 \to A_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} B_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} C_\bullet \to 0$ auch $\tilde{g}_{q+1}$ Epimorphismus sowie $\hat{f}_{q+1}$ Monomorphismus, also die beiden mittleren Spalten exakt. Wir können hier also unser Schlangenlemma anwenden, die Kerne/Kokerne der Morphismen $\tau_q^\square$ in der Mitte sind gerade die H^q bzw. H^{q+1}, wir erhalten also die exakte Schlange mit einem (eindeutig bestimmten, funktorialen) Verbindungsmorphismus δ_q.

3. Schritt Zusammensetzen dieser Schlangensequenzen für die einzelnen q ergibt die gewünschte lange exakte Kohomologiesequenz. $\square$

$\boxed{\text{KOROLLAR.}}$ Sei $0 \to A_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} B_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} C_\bullet \to 0$ eine exakte Folge in $\mathrm{Comp}_{\mathfrak{C}}$ mit einer exakten Kategorie $\mathfrak{C}$. Sind hier nun je zwei der Komplexe *azyklisch* (d.h. $H^q(\square) = 0$ für alle $q \in \mathbb{Z}$), so ist auch der dritte Komplex azyklisch.

Beweis. Die lange exakte Kohomologiesequenz ist ja dann (wenn $D_\bullet$ der dritte Komplex ist) der Form

$$\ldots \to 0 \to H^q(D_\bullet) \to 0 \to \cdots,$$

also ist auch $H^q(D_\bullet) = 0$ für alle $q \in \mathbb{Z}$. $\square$

Injektive (und projektive) Objekte in abelschen Kategorien

Definition 8.80. *Sei $\mathfrak{C}$ eine abelsche Kategorie, $E \in \operatorname{obj}(\mathfrak{C})$. E heißt* ***injektives Objekt*** *in $\mathfrak{C}$, falls der kontravariante Funktor*

$$\begin{aligned}
\operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(\square, E) : \mathfrak{C} &\longrightarrow \underline{\mathrm{Ab}} \\
A &\longmapsto \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, E) \\
\left(A \xrightarrow{f} B\right) &\longmapsto f^* : \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(B, E) \to \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, E) \\
&\qquad\qquad \varphi \mapsto \varphi \circ f
\end{aligned}$$

ein exakter Funktor ist.

Bemerkung. $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\square, E)$ ist ja bekanntlich sowieso linksexakt, daher ist äquivalent zur Injektivität von E, dass er *rechtsexakt* ist.

$\boxed{\text{Lemma.}}$ Sei $E \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C})$, $\mathfrak{C}$ eine abelsche Kategorie. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) E ist ein injektives Objekt.

(2) $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\square, E)$ überführt Monomorphismen (in $\mathfrak{C}$) in Epimorphismen (in $\underline{\mathrm{Ab}}$).

(3) Für alle Diagramme der Art

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail] \arrow[d] & B \arrow[dl, dashed, "\exists\tilde{\varphi}"] \\ E & \end{tikzcd}$$

mit einem Monomorphismus $f : A \hookrightarrow B$ und beliebigem $\varphi : A \to E$ gibt es einen Morphismus $\tilde{\varphi} : B \to E$, welcher das Diagramm kommutativ macht: $\tilde{\varphi} \circ f = \varphi$.

Beweis. Dies sind jeweils nur andere Schreibweisen des selben Sachverhaltes. □

Definition 8.81. *Sei $\mathfrak{C}$ eine abelsche Kategorie. $\mathfrak{C}$ hat **genügend viele injektive Objekte**, falls es eine volle Unterkategorie von **injektiven Kogeneratoren** gibt, d.h. es existiert eine volle Unterkategorie $\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{C}$, alle $E \in \mathrm{obj}(\mathfrak{J})$ sind $\mathfrak{C}$-injektive Objekte, und für alle $A \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C})$ gibt es ein Objekt $E \in \mathrm{obj}(\mathfrak{J})$ und einen Monomorphismus $f : A \hookrightarrow E$.*

Bemerkung. Mit anderen Worten: $\mathfrak{C}$ hat genügend viele injektive Objekte, falls jedes Objekt in ein injektives Objekt „eingebettet“ werden kann.

Fragen.

(1) Wie findet man heraus, ob eine abelsche Kategorie genügend viele injektive Objekte hat?

(2) Welche Beispiele für abelschen Kategorien mit genügend vielen injektive Objekten gibt es?

$\boxed{\text{Satz 8.4.12.}}$ *(Charakterisierung der injektiven R-Moduln)*
Sei R ein k&u-Ring, E ein R-Modul. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) E ist ein injektiver R-Modul (d.h. injektives Objekt in $\underline{\text{Mod}}_R$).

(2) Ist $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal, $\varphi \in \text{Hom}_R(\mathfrak{a}, E)$, so existiert ein $\hat{\varphi} : E \to E$ mit $\hat{\varphi}|_{\mathfrak{a}} = \varphi$.

(3) Ist $0 \to E \overset{i}{\hookrightarrow} C \overset{p}{\twoheadrightarrow} D \to 0$ exakte Sequenz in $\underline{\text{Mod}}_R$, so splittet diese Sequenz, d.h. ist isomorph zur Standardsequenz $0 \to E \overset{i_1}{\hookrightarrow} E \oplus D \overset{p_2}{\twoheadrightarrow} D \to 0$.

Bemerkung. Die Implikation (2) $\Rightarrow$ (1) ist auch als **Kriterium von Reinhold Baer** bekannt und wurde bereits in Algebra II bewiesen, siehe Satz 4.3.1 auf Seite 185.

Hmm, hier fehlen die nächsten paar Sätze, die wurden wohl in der Übung gemacht.

Bemerkung. In Algebra II (Abschnitt 4.3, *Injektive Moduln*) wurden bereits folgende Eigenschaften für die injektiven Objekte in $\underline{\text{Mod}}_R$ gezeigt:

(1) Ist R Hauptidealring, so ist E injektiv genau dann, wenn E dividierbar ist.

(2) $\prod_{i\in I} E_i$ ist injektiv genau dann, wenn E_i injektiv ist für alle $i \in I$.

(3) $\prod_{i\in I} E_i$ ist dividierbar genau dann, wenn E_i dividierbar ist für alle $i \in I$.

(4) Ist $\bigoplus_{i\in I} E_i$ injektiv, so ist auch E_i injektiv für alle $i \in I$ (die Umkehrung gilt für unendliche I i.a. nicht).

(5) Ist R Hauptidealring oder I endliche Menge, so gilt auch die Äquivalenz:

$$\bigoplus_{i\in I} E_i \text{ injektiv} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall i \in I:\ E_i \text{ injektiv}$$

$\boxed{\text{Satz 8.4.13.}}$ In $\underline{\text{Ab}} = \underline{\text{Mod}}_{\mathbb{Z}}$ gibt es genügend viele injektive Objekte.

Beweis. Sei $G \in \text{obj}(\underline{\text{Ab}})$ eine abelsche Gruppe. Dann ist durch Wahl eines Erzeugendensystemes $G \cong \mathbb{Z}^{(I)}/H$ (mit einer geeigneten Untergruppe H), was sich kanonisch in $\mathbb{Q}^{(I)}/H$ einbetten lässt. $\mathbb{Q}$ ist dividierbar, damit ist $\mathbb{Q}^{(I)}$ dividierbar, $\mathbb{Q}^{(I)}/H$ dividierbar, also auch injektiv. $\square$

> $\boxed{\text{Satz 8.4.14.}}$ Für jeden k&u-Ring R gibt es auch in $\underline{\mathrm{Mod}}_R$ genügend viele injektive Objekte.

Beweis. Sei $M \in \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{Mod}}_R)$ ein R-Modul.

(1) Für eine abelsche Gruppe G hat man ja $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, G)$, und darauf gibt es die natürliche R-Modulstruktur

$$\begin{aligned} R \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, G) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, G) \\ (r, \varphi) &\longmapsto \begin{array}{l} r \cdot \varphi : M \to G \\ \qquad x \mapsto \varphi(r \cdot x) \end{array} \end{aligned}$$

Das heißt, insbesondere ist auch $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, G)$ ist ein R-Modul.

(2) Wähle nun insbesondere eine dividierbare (d.h. injektive) Gruppe D.

> $\boxed{\text{Behauptung.}}$ Dann ist $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)$ als R-Modul ein injektiver R-Modul.

Beweis. Für $M \in \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{Mod}}_R)$ gibt es den natürlichen R-Modul-Isomorphismus

$$\begin{aligned} \theta_M : \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, D) \\ h &\longmapsto \begin{array}{l} \theta_M(h) : M \to D \\ \qquad\quad x \mapsto h(x)(1_R) \end{array} \\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D) \leftarrow M : \theta_M^{-1}(\varphi) &\longleftarrow\!\shortmid\ \varphi \\ (r \mapsto \varphi(r \cdot x)) \leftarrow\!\shortmid\ x & \end{aligned}$$

Die dadurch induzierte Abbildung

$$\theta_{\square} : \mathrm{Hom}_R(\square, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\square, D)$$

ist sogar ein Funktormorphismus. (ÜA: Nachrechnen.)

Sei nun $f : A \hookrightarrow B$ ein Monomorphismus von R-Moduln. Dann erhalten wir das kommutative Diagramm von R-Moduln:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_R(B, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\theta_B"', "\wr"] & \mathrm{Hom}_R(B, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)) \arrow[d, "\theta_A", "\wr"'] \\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B, D) \arrow[r, "\hat{f}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, D) \end{tikzcd}$$

In $\underline{\mathrm{Ab}}$ ist D injektiv, also ist $\hat{f} = f \circ \square$ Epimorphismus (surjektiv) in $\underline{\mathrm{Ab}}$, also auch noch surjektiv als R-Modul-Homomorphismus. Damit ist auch $f^* \in \mathrm{Epi}_{\underline{\mathrm{Mod}}_R}$, also $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)$ injektives Objekt. $\square$

(3) Sei nun M ein beliebiger R-Modul. Dann ist M nach Satz 8.4.13 als (abelsche) Gruppe einbettbar in eine injektive (dividierbare) Gruppe D, wir haben also $M \overset{\varphi}{\hookrightarrow} D$. Nun haben wir die Einbettungskette (in $\underline{\text{Mod}}_R$):

$$M \cong_M \text{Hom}_R(R, M) \hookrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M) \overset{\varphi^*}{\hookrightarrow} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D),$$

und $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)$ ist ein injektiver R-Modul. Das heißt, M ist in einen injektiven R-Modul einbettbar.

Die Kategorie $\underline{\text{Mod}}_R$ hat also genügend viele injektive Objekte. $\square$

Definition 8.82. *Sei $\mathfrak{C}$ eine Kategorie, $A \in \text{obj}(\mathfrak{C})$. Eine* ***Auflösung*** *von A ist eine exakte Folge der Form*

$$0 \to A \to X_0 \to X_1 \to X_2 \to \dots$$

bzw. ein exakter Komplex der Form:

$$\dots \to 0 \to 0 \to A \to X_0 \to X_1 \to X_2 \to \dots$$

Definition 8.83. *Sei $\mathfrak{C}$ eine abelsche Kategorie und $A \in \text{obj}(\mathfrak{C})$. Eine* ***injektive Auflösung*** *von A ist eine exakte Folge der Gestalt*

$$0 \to A \overset{\nu_0}{\hookrightarrow} I_0 \xrightarrow{\partial_0} I_1 \xrightarrow{\partial_1} I_2 \xrightarrow{\partial_2} \dots$$

mit injektiven Objekten I_i für $i \in \mathbb{N}_0$, bzw. ein Objekt in $\text{Comp}_{\mathfrak{C}}$ der Gestalt

$$\dots \to 0 \to 0 \to A \overset{\nu_0}{\hookrightarrow} I_0 \xrightarrow{\partial_0} I_1 \xrightarrow{\partial_1} I_2 \xrightarrow{\partial_2} \dots$$

mit injektiven I_i und Exaktheit (an allen Stellen).

| LEMMA. | In einer abelschen Kategorie mit genügend vielen injektiven Objekten hat jedes Objekt $A \in \text{obj}(\mathfrak{C})$ mindestens eine injektive Auflösung. |

Beweis. Nach Vorraussetzung existiert ein Monomorphismus $A \overset{\nu_0}{\hookrightarrow} I_0$ mit einem injektiven Objekt I_0. Dies induziert die exakte Folge

$$0 \to A \overset{\nu_0}{\hookrightarrow} I_0 \overset{p_0}{\twoheadrightarrow} \text{coker}\, \nu_0 \to 0.$$

$\text{coker}\, \nu_0$ kann nun wieder injektiv eingebettet werden, dies gibt uns die exakte Folge

$$0 \to \text{coker}\, \nu_0 \overset{\nu_1}{\hookrightarrow} I_1 \overset{p_1}{\twoheadrightarrow} \text{coker}\, \nu_1 \to 0.$$

Dies lässt sich natürlich fortsetzen, und zusammensetzen (Aufspaltungslemma) liefert eine lange exakte Folge

$$0 \to A \to I_0 \xrightarrow{\partial_0 = p_0 \circ \nu_1} I_1 \xrightarrow{\partial_1 = p_1 \circ \nu_2} I_2 \to \dots$$

$\square$

Bemerkung. In $\underline{\mathrm{Mod}}_R$ kann man mit dem Konstruktionsprinzip der beiden vorhergehenden Sätze so ganz konkrete injektive Auflösungen erhalten.

> $\boxed{\text{Satz 8.4.15.}}$ *(Charakterisierung der noetherschen Ringe durch Eigenschaften ihrer injektiven Moduln)*
>
> Sei R ein k&u-Ring. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:
>
> (1) R ist ein noetherscher Ring.
>
> (2) Für alle Familien von injektiven R-Moduln $(E_i)_{i\in I}$ ist $\bigoplus_{i\in I} E_i$ ebenfalls injektiver R-Modul.

Beweis.

(1) ⇒ (2): Sei R ein noetherscher Ring, $(E_i)_{i\in I}$ Familie injektiver R-Moduln, $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal, $\varphi : \mathfrak{a} \to \bigoplus_{i\in I} E_i$ ein Morphismus.

Wir müssen zeigen, dass sich φ auf ganz R erweitern lässt.

Für $\mathfrak{a} = (0)$ ist dies trivial, sei also $\mathfrak{a} = (a_1, \cdots, a_r)$ (weil R noethersch). Das heißt, es ist

$$\begin{aligned} \operatorname{im}\varphi &= \operatorname{span}_R\left(\{\varphi(a_i) \mid i \in I\}\right) \\ &\subseteq \bigoplus_{i\in J} E_i \end{aligned}$$

mit einer endlichen Teilmenge $J \subseteq I$

$$= \prod_{i\in J} E_i =: E_J,$$

und dies ist bekanntlich ein injektiver Modul. Wir erhalten:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{a} \arrow[r, "\varphi_0"'] \arrow[rr, bend left, "\varphi"] \arrow[d, tail] & E_J \arrow[r, tail, "j"'] & \bigoplus_{i\in I} E_i \\ R \arrow[ur, dashed, "\hat{\varphi}_0"] \arrow[urr, dotted, "\hat{\varphi}:=j\circ\hat{\varphi}_0"'] & & \end{tikzcd}$$

Es ist also auch $\bigoplus_{i\in I} E_i$ injektiver R-Modul.

(2) ⇒ (1) Sei R ein Ring mit (2), und

$$\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{a}_n \subseteq \ldots$$

eine beliebige aufsteigende Idealkette (von der wir zeigen wollen, dass sie stationär wird, also R nothersch ist).

Sei $\mathfrak{a} := \bigcup_{i \in I} \mathfrak{a}_i$. Wähle für $i \in I$ eine injektive Einbettung ${}^{\mathfrak{a}}\!/\!_{\mathfrak{a}_i} \xhookrightarrow{\theta_i} E_i$. Betrachte den Homomorphismus

$$\begin{aligned} \varphi_0 : \mathfrak{a} &\longrightarrow \bigoplus_{i \in I} E_i \\ a &\longmapsto (\theta_i([a]_{\mathfrak{a}_i}))_{i \in I} \end{aligned}$$

Dies ist wohldefiniert, es ist wirklich $(\varphi_0(a))_i = 0$ p. p., weil für $a \in \mathfrak{a}$ auch a in einem der $\mathfrak{a}_i$ ist und damit auch in allen $\mathfrak{a}_j$ mit $j \geq j$, also $[a]_{\mathfrak{a}_j} = [0]_{\mathfrak{a}_j}$ für alle $j \geq i$.

Nun ist $\bigoplus_{i \in I} E_i$ injektiv, also ist φ_0 auf R erweiterbar, mittels einem R-Modulhomomorphismus $\hat{\varphi}_0 : R \to \bigoplus_{i \in I} E_i$, so dass für $a \in \mathfrak{a}$ immer $\hat{\varphi}_0(a) = \varphi_0(a)$ ist.

Es ist dann insbesondere $\hat{\varphi}_0(1) = (x_i)_{i \in I}$ mit $x_i \in E_i$, mit $x_i = 0$ für alle $i \geq n_0$ mit einem passenden n_0. Für $a \in \mathfrak{a}$ gilt dann:

$$\begin{aligned} (\theta_i([a_i]_{\mathfrak{a}_i}))_{i \in I} &= \varphi_0(a) \\ &= \hat{\varphi}_0(a) \\ &= a \cdot \hat{\varphi}_0(1) \\ &= (a \cdot x_i)_{i \in I} \end{aligned}$$

Das heißt, für alle $a \in A$ ist schon $\theta_i([a]_{\mathfrak{a}_i}) = 0$ für alle $i \geq n_0$, d.h. (weil θ_i Monomorphismen waren) $[a]_{\mathfrak{a}_i} = [0]_{\mathfrak{a}_i}$, also $a \in \mathfrak{a}_i$ für alle $i \geq n_0$, insbesondere $a \in \mathfrak{a}_{n_0}$. D.h. es ist schon $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{n_0}$, die Kette wird also stationär ab Index n_0. □

Abgeleitete Funktoren

Sei $\mathfrak{C}$ abelsche Kategorie mit genügend vielen injektiven Objekten (also stets existierenden injektiven Auflösungen), $\mathfrak{C}'$ eine weitere (beliebige) abelsche Kategorie und $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ ein additiver kovarianter Funktor.

Ziel. Wir wollen nun (unter Benutzung der injektiven Auflösungen) die abgeleiteten Funktoren $R^q F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ konstruieren.

$\boxed{\text{Satz 8.4.16.}}$ Seien $A, B \in \operatorname{obj}(\mathfrak{C})$,

$$0 \to A \xrightarrow{\nu_0^A} X_0 \xrightarrow{\partial_0} X_1 \xrightarrow{\partial_1} X_2 \to \dots$$

eine (beliebige) Auflösung von A,

$$0 \to B \to J_0 \xrightarrow{\delta_0} J_1 \xrightarrow{\delta_1} J_2 \to \dots$$

eine *injektive* Auflösung von B und $f \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, B)$. Dann gilt:

(1) $f : A \to B$ kann in einen Morphismus $\varphi_\bullet = (\varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ in $\underline{\mathrm{Comp}}_{\mathfrak{C}}$ erweitert werden, d.h. es gibt $\varphi_n : X_n \to J_n$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, tail] \arrow[d, "f"'] & X_0 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_0"] & X_1 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_1"] & \dots \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, tail] & J_0 \arrow[r] & J_1 \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

(2) Sind $(\varphi_\bullet)$, $(\psi_\bullet)$ zwei solche Erweiterungen von f, so gilt $\varphi_\bullet \underset{\text{htp}}{\sim} \psi_\bullet$.

Beweis.

(1) Betrachte

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, tail, "\nu_0^A"] \arrow[d, "f"'] & X_0 \arrow[d, dashed, "\varphi_0"] \\
 & B \arrow[r, "\nu_0^B"'] & J_0
\end{tikzcd}$$

Weil ν_0^A Monomorphismus ist und J_0 injektives Objekt, faktorisiert $\nu_0^B \circ f$ über $A \overset{\nu_0^A}{\hookrightarrow} X_0$, wodurch wir $\varphi_0 : X_0 \to J_0$ erhalten.

Induktiv: Sei $\varphi_n : X_n \to J_n$ schon konstruiert. Wir haben dann den induzierten

Kokernmorphismus $\hat{\varphi}_n : \operatorname{coker} \partial_{n-1} \to \operatorname{coker} \delta_{n-1}$.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X_{n-1} \arrow[r, "\partial_{n-1}"'] \arrow[ddd] & X_n \arrow[rr, "\partial_n"'] \arrow[dr, "p_{n-1}"] \arrow[ddd, "\varphi_n"'] & & X_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"'] \arrow[ddd, dotted, "\varphi_{n+1}"] & {} \\
& & & \begin{array}{l} \operatorname{coker} \partial_{n-1} \\ = \operatorname{im} \partial_n \\ = \ker \partial_{n+1} \end{array} \arrow[ur, "j_{n+1}"'] \arrow[d, dashed, "\hat{\varphi}_n"] & & \\
& & & \begin{array}{l} \operatorname{coker} \delta_{n-1} \\ = \operatorname{im} \delta_n \\ = \ker \delta_{n+1} \end{array} \arrow[dr, "i_{n+1}"'] & & \\
\cdots \arrow[r] & J_{n-1} \arrow[r, "\delta_{n-1}"] & J_n \arrow[rr, "\delta_n"] \arrow[ur, "\pi_{n-1}"] & & J_{n+1} \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & {}
\end{tikzcd}$$

Da nun J_{n+1} injektives Objekt ist, faktorisiert $i_{n+1} \circ \hat{\varphi}_n$ über dem Monomorphismus j_{n+1}, wir haben also $\varphi_{n+1} : X_{n+1} \to J_{n+1}$ mit $\varphi_{n+1} \circ \partial_n = i_{n+1} \circ \hat{\varphi}_n \circ p_{n-1} = \delta_n \circ \varphi_n$.

(2) Seien $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ zwei solche Erweiterungen von $f : A \to B$ auf die auflösenden (exakten) Komplexe. Wir betrachten nun den (abgeschnittenen) Komplex aus nur injektiven Moduln

$$(J_\bullet)^+ := \Big(\ldots \to 0 \to 0 \to J_0 \xrightarrow{\delta_0} J_1 \xrightarrow{\delta_1} J_2 \to \ldots \Big)$$

sowie entsprechend auch $(X_\bullet)^+$. (Diese Komplexe sind außer bei J_0 bzw. X_0 überall exakt.)

> $\boxed{\text{Behauptung.}}$ $(\varphi_\bullet)$ und $(\psi_\bullet)$ sind homotop für die abgeänderten Komplexe $(X_\bullet)^+$ und $(J_\bullet)^+$

Beweis. Wir haben also

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\nu_0^A"] \arrow[d, "f"'] & X_0 \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[d, shift right, "\psi_0"'] \arrow[d, shift left, "\varphi_0"] & X_1 \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, shift right, "\psi_1"'] \arrow[d, shift left, "\varphi_1"] & \ldots \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\nu_0^B"'] & J_0 \arrow[r, "\delta_0"'] & J_1 \arrow[r, "\delta_1"'] & \ldots
\end{tikzcd}$$

mit

$$\varphi_0 \circ \nu_0^A = \nu_0^B \circ f \qquad\qquad \delta_q \circ \varphi_q = \varphi_{q+1} \circ \delta_q$$
$$\psi_0 \circ \nu_0^A = \nu_0^B \circ f \qquad\qquad \delta_q \circ \psi_q = \psi_{q+1} \circ \delta_q$$

Nun genügt es offenbar, für den Spezialfall $f = 0$ und einen Kettenmorphismus $g_\bullet = \varphi_\bullet - \psi_\bullet$ zu zeigen, dass $g_\bullet$ (für die abgeschnittenen Komplexe $(X_\bullet)^+$ und $(J_\bullet)^+$) nullhomotop ist:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, tail, "\nu_0^A"] \arrow[d, "0"'] & X_0 \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[d, "g_0"'] \arrow[dll, "0"', "h_0"] & X_1 \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "g_1"'] \arrow[dl, dashed, "h_1"'] & \dots \arrow[dl, dashed, "h_2"'] \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, tail, "\nu_0^B"'] & J_0 \arrow[r, "\delta_0"'] & J_1 \arrow[r, "\delta_1"'] & \dots
\end{tikzcd}$$

Konstruieren wir also die Kettenhomotopie für $g_\bullet$.

Induktionsanfang h_1**:** Zunächst ist ja $g_0 \circ \nu_0^A = \nu_0^B \circ 0 = 0$, d.h. g_0 faktorisiert über coker ν_0^A:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d, "0"'] & 0 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"'] & X_0 \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, "g_0"'] \arrow[dl, "h_0"'] \arrow[rr, bend left, "\partial_0"] & \operatorname{coker} \nu_0^A \arrow[r, tail, "i"] \arrow[dl, dashed, "h'"'] & X_1 \arrow[dll, dotted, "h_1"] \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r, "0"'] & J_0 & &
\end{tikzcd}$$

Es gibt also ein $h' : \operatorname{coker}(\nu_0^A) \to J_0$ mit $h' \circ p = g_0$. Nun ist i ein Monomorphismus und J_0 injektives Objekt, d.h. auch h' faktorisiert über i (lässt sich auf X_1 fortsetzen), und wir haben $h_1 : X_1 \to J_0$ mit $h \circ i = h'$, also $h_1 \circ \partial_0 = g_0$. Zusammen mit $h_0 = 0$ und $\delta_{-1} = 0$ erhalten wir

$$h_1 \circ \partial_0 + \delta_{-1} \circ h_0 = g_0$$

Das heißt, $(h_n)_{n \leq 1}$ bildet den Anfang einer Kettenhomotopie für $g_\bullet$.

Induktiver Schritt Seien die $(h_i)_{i \leq n}$ schon konstruiert mit der Homotopieeigenschaft

$$h_i \circ \partial_{i-1} + \delta_{i-2} \circ h_{i-1} = g_{i-1}$$

$$\begin{tikzcd}
X_{n-2} \arrow[r, "\partial_{n-2}"] \arrow[d, "g_{n-2}"'] & X_{n-1} \arrow[r, "\partial_{n-1}"] \arrow[d, "g_{n-1}"] \arrow[dl, "h_{n-1}"'] & X_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "g_n"] \arrow[dl, "h_n"'] & X_{n+1} \arrow[dl, dashed, "h_n+1"] \\
J_{n-2} \arrow[r, "\delta_{n-2}"'] & J_{n-1} \arrow[r, "\delta_{n-1}"'] & J_n &
\end{tikzcd}$$

Insbesondere haben wir

$$\begin{aligned}
& & h_n \circ \partial_{n-1} + \delta_{n-2} \circ h_{n-1} &= g_{n-1}, \\
&\xRightarrow{\delta_{n-1} \circ \Box} & \delta_{n-1} \circ h_n \circ \partial_{n-1} + \underbrace{\delta_{n-1} \circ \delta_{n-2}}_{=0} \circ h_{n-1} &= \delta_{n-1} \circ g_{n-1} \\
& & \Rightarrow \quad \delta_{n-1} \circ h_n \circ \partial_{n-1} &= g_n \circ \partial_{n-1} \\
& & \Rightarrow \quad (g_n - \delta_{n-1} \circ h_n) \circ \partial_{n-1} &= 0
\end{aligned}$$

Das heißt, $g_n - \delta_{n-1} \circ h_n$ faktorisiert über $\operatorname{coker} \partial_{n-1}$,

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "\partial_{n-1}"] & X_n \arrow[r, two heads, "p"'] \arrow[d, "g_n - \delta_{n-1} \circ h_n"'] \arrow[rr, bend left, "\partial_n"] & \operatorname{coker} \partial_{n-1} \arrow[r, tail, "i"'] \arrow[dl, dashed, "\hat{h}"'] & X_{n+1} \arrow[dll, dotted, "h_{n+1}"] \\
& J_n & &
\end{tikzcd}$$

und wir erhalten $\hat{h} : \operatorname{coker} \partial_{n-1} \to J_n$ mit $g_n - \delta_{n-1} \circ h_n = \hat{h} \circ p$. Weil i Monomorphismus und J_n injektives Objekt ist, faktorisiert auch $\hat{h}$, und wir erhalten $h_{n+1} : X_{n+1} \to J_n$ mit

$$\begin{aligned} \hat{h} &= h_{n+1} \circ i \\ \overset{\square \circ p}{\Longrightarrow} \quad g - \delta_{n-1} \circ h_n &= h_{n+1} \circ \partial_n \\ \Rightarrow \quad g_n &= h_{n+1} \circ \partial_n + \delta_{n-1} \circ h_n \end{aligned}$$

Wir haben also insgesamt ein $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, welche $g_\bullet$ nullhomotop macht, also $\psi_\bullet$ homotop zu $\varphi_\bullet$. □

Damit ist unser Satz vollständig bewiesen. □

KOROLLAR. Sei $A \in \operatorname{obj}(\mathfrak{C})$ und seien

$$0 \to A \xhookrightarrow{\nu_0} I_0 \xrightarrow{\partial_0} I_1 \xrightarrow{\partial_1} I_2 \xrightarrow{\partial_2} \dots$$

sowie

$$0 \to A \xhookrightarrow{\mu_0} J_0 \xrightarrow{\delta_0} J_1 \xrightarrow{\delta_1} J_2 \xrightarrow{\delta_2} \dots$$

zwei injektive Auflösungen von A.
Dann besitzt $\mathrm{id}_A : A \to A$ eine Fortsetzung zu einem Morphismus $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Komplexe, und je zwei solcher Fortsetzungen $\varphi_\bullet$, $\psi_\bullet$ sind homotop. Da dies auch umgekehrt geht, sind $(I_\bullet)^+$ und $(J_\bullet)^+$ sind zueinander homotopieäquivalent.

Bemerkung. Damit besitzen beide Komplexe die selben Homologieobjekte – dies war aber schon klar, da beide exakt sind (und damit Homologie 0 haben).

Konstruktion der abgeleiteten Funktoren

Sei wieder $\mathfrak{C}$ eine abelsche Kategorie mit genügend vielen injektiven Objekten, $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ ein kovarianter additiver Funktor, $\mathfrak{C}'$ auch abelsche Kategorie.

Für ein $A \in \operatorname{obj}(\mathfrak{C})$ wählen wir eine beliebige injektive Auflösung

$$0 \to A \xhookrightarrow{\nu_0} I_0 \xrightarrow{\partial_0} I_1 \xrightarrow{\partial_1} I_2 \xrightarrow{\partial_2} \dots$$

und wenden F darauf an:

$$0 \to F(A) \xhookrightarrow{F(\nu_0)} F(I_0) \xrightarrow{F(\partial_0)} F(I_1) \xrightarrow{F(\partial_1)} F(I_2) \xrightarrow{F(\partial_2)} \dots$$

Ist $J_\bullet$ eine andere injektive Auflösung von A in $\mathfrak{C}$, so sind $(I_\bullet)^+$ und $(J_\bullet)^+$ homotope Komplexe in $\mathfrak{C}$, also sind (weil F additiv ist, via $(F(h_n))_{n \in \mathbb{N}}$) $F((I_\bullet)^+)$ und $F((J_\bullet)^+)$ ebenfalls homotope Komplexe, jetzt in $\mathfrak{C}'$.

Insbesondere ist also $H^q(F((I_\bullet)^+)) \cong H^q(F((J_\bullet)^+))$ für alle q.

Definition 8.84. *Für obiges Setup ($F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ additiver kovarianter Funktor zwischen abelschen Kategorien, $\mathfrak{C}$ mit genügend vielen injektiven Objekten), $n \in \mathbb{Z}$ definieren wir für alle $A \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C})$* $\boxed{R^n F}$

$$(R^n F)(A) := H^n\left(F((I_\bullet)^+)\right),$$

wobei $0 \to A \to I_\bullet$ eine beliebige injektive Auflösung von A sei.

Für $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, B)$ erhalten wir entsprechend den Morphismus

$$(R^n F)(f) := H^q\left(F((I_\bullet^A)^+) \xrightarrow{F(\varphi_\bullet)} F((I_\bullet^B)^+)\right) : (R^n F)(A) \longrightarrow (R^n F)(B)$$

*$R^n F$ heißt der **n-te rechtsabgeleitete Funktor zu** F.*

$\boxed{\text{Eigenschaften.}}$

(1) $(R^q F)(A) = 0$ für alle $q < 0$.

(2) Ist F linksexakt, so ist $(R^0 F)(A) \cong F(A)$.

(3) Ist I injektives Objekt, so ist $(R^n F)(I) = 0$ für alle $n \geq 1$.

Beweis.

(1) Klar durch Konstruktion, denn es ist ja $I_q = 0$ für $q \leq 0$, damit auch $F(I_q)$ und die Homologiegruppen davon.

(2) Ist F linksexakt, so ist der Anfang des $F(\square)$-Komplexes $0 \to F(A) \to F(I_0) \xrightarrow{F(\partial_0)} F(I_1)$ exakt, also $\ker F(\partial_0) \cong F(A)$, mit $\mathrm{im}(F(\partial_{-1})) = 0$.

(3) Ist I injektives Objekt in $\mathfrak{C}$, so ist $0 \to I \xrightarrow{\mathrm{id}_I} I \to 0 \to 0 \ldots$ eine injektive Auflösung, was zum F-Komplex $0 \to F(I) \to 0 \to 0 \to \ldots$ führt. Offenbar sind dessen Homologiegruppen alle 0 für $q \geq 1$.

$\square$

$\boxed{\text{Satz 8.4.17.}}$ *(Die lange exakte Folge für rechtsabgeleitete Funktoren)* Sei $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ kovarianter, additiver, *linksexakter* Funktor abelscher Kategorien, wobei $\mathfrak{C}$ genügend viele injektive Objekte habe. Sei weiterhin $0 \to A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \to 0$ eine kurze exakte Folge in $\mathfrak{C}$, so gibt es eine (funktorielle) lange exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F(A') \arrow[r, "F(f)"] & F(A) \arrow[r, "F(g)"] & F(A'') \arrow[dlll, rounded corners, to path={ -- ([xshift=2ex]\tikztostart.east) |- ([yshift=-2ex]\tikztostart.south) -| ([xshift=-2ex]\tikztotarget.west) -- (\tikztotarget)}, "\Delta_0"'] \\
 & R^1F(A') \arrow[r, "R^1F(f)"] & R^1F(A) \arrow[r, "R^1F(g)"] & R^1F(A'') \arrow[dlll, rounded corners, to path={ -- ([xshift=2ex]\tikztostart.east) |- ([yshift=-2ex]\tikztostart.south) -| ([xshift=-2ex]\tikztotarget.west) -- (\tikztotarget)}, "\Delta_1"'] \\
 & R^2F(A') \arrow[r, "R^2F(f)"] & R^2F(A) \arrow[r, "R^2F(g)"] & \ldots
\end{tikzcd}$$

mit Verbindungshomomorphismen $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, welche funktoriell auf $\mathfrak{C}^{\mathrm{kex}}$ sind.

Beweis. Sei also $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ eine kurze exakte Sequenz, mit injektiven Auflösungen für A' und A'':

$$0 \to A' \xhookrightarrow{\nu_0^{A'}} I_0(A') \to I_1(A') \to I_2(A') \to I_3(A') \to \ldots$$

$$0 \to A'' \xhookrightarrow{\nu_0^{A''}} I_0(A'') \to I_1(A'') \to I_2(A'') \to I_3(A'') \to \ldots$$

Daraus konstruieren wir eine injektive Auflösung für den Mittelterm. Wir haben (weil $\mathfrak{C}$ eine abelsche Kategorie ist) eine direkte Summe $I_0(A') \oplus I_0(A'')$, mit $i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2 = \mathrm{id}$.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[rr, tail, "f"] \arrow[d, "\nu_0^{A'}"'] & & A \arrow[rr, two heads, "g"] \arrow[d, tail, dashed, "\nu_0^A"] \arrow[dll, dotted, "\tilde{\nu}_0^{A'}"'] \arrow[drr, dotted, "\tilde{\nu}_0^{A''}"] & & A'' \arrow[r] \arrow[d, "\nu_0^{A''}"] & 0 \\
0 \arrow[r, leftrightarrow] & I_0(A') \arrow[rr, shift left, "i_1"] & & I_0(A') \oplus I_0(A'') \arrow[ll, shift left, "p_1"] \arrow[rr, shift left, "p_2"] & & I_0(A'') \arrow[ll, shift left, "i_2"] \arrow[r, leftrightarrow] & 0
\end{tikzcd}$$

$I_0(A')$ ist injektiv, f Monomorphismus, also faktorisiert $\nu_0^{A'}$ über f, wir haben also $\tilde{\nu}_0^{A'} : A \to I_0(A')$ mit $\nu_0^{A'} = \tilde{\nu}_0^{A'} \circ f$. Gleichzeitig haben wir auch noch $\tilde{\nu}_0^{A''} = \nu_0^{A''} \circ g$.

Die Universaleigenschaft der direkten Summe liefert uns aus diesen beiden einen Morphismus $\nu_0^A : A \to I_0(A') \oplus I_0(A'')$, welcher dieses Diagramm kommutativ macht.

Dieser Morphismus ist sogar Monomorphismus (ÜA, aus der Universaleigenschaft).

Wir setzen $I_0(A) := I_0(A') \oplus I_0(A'')$.

Diese Konstruktion führen wir nun iterativ durch:

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[d, tail, "\nu^{A'}_{n-1}"] & {} \arrow[d, tail, "\nu^{A}_{0}"] & {} \arrow[d, tail, "\nu^{A''}_{0}"] \\
I_{n-1}(A') \arrow[r] \arrow[d, two heads, "\pi'"] & I_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, two heads, "\pi"] & I_{n-1}(A'') \arrow[d, two heads, "\pi''"] \\
\operatorname{coker}\nu^{A'}_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, tail, "\nu^{A'}_{n}"] & \operatorname{coker}\nu^{A}_{n-1} \arrow[r] \arrow[dl, dotted] \arrow[d, dashed, "\nu^{A}_{n}"] \arrow[dr, dotted] & \operatorname{coker}\nu^{A''}_{n-1} \arrow[d, tail, "\nu^{A''}_{n}"] \\
I_n(A') \arrow[r, shift left, "i_1"] & I_n(A') \oplus I_n(A'') \arrow[l, shift left, "p_1"] \arrow[r, shift left, "p_2"] & I_n(A'') \arrow[l, shift left, "i_2"]
\end{tikzcd}
$$

Wir erhalten induktiv dieses Diagramm mit exakten Zeilen und Spalten:

$$
\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d] & I_0(A') \arrow[r] \arrow[d] & I_1(A') \arrow[r] \arrow[d] & I_2(A') \arrow[r] \arrow[d] & I_3(A') \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & I_0(A) \arrow[r] \arrow[d] & I_1(A) \arrow[r] \arrow[d] & I_2(A) \arrow[r] \arrow[d] & I_3(A) \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \\
0 \arrow[r] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & I_0(A'') \arrow[r] \arrow[d] & I_1(A'') \arrow[r] \arrow[d] & I_2(A'') \arrow[r] \arrow[d] & I_3(A'') \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \\
& 0 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Anders formuliert, wir haben eine exakte Folge in $\underline{\mathrm{Comp}}_{\mathfrak{C}}$:

$$0 \to I_\bullet(A')^+ \hookrightarrow I_\bullet(A)^+ = I_\bullet(A') \oplus I_\bullet(A'') \twoheadrightarrow I_\bullet(A'')^+ \to 0$$

Damit ist natürlich auch die Folge

$$0 \to F\left(I_\bullet(A')\right)^+ \hookrightarrow F\left(I_\bullet(A')\right)^+ \oplus F\left(I_\bullet(A'')\right)^+ \twoheadrightarrow F\left(I_\bullet(A'')\right)^+ \to 0$$

exakt in $\underline{\mathrm{Comp}}_{\mathfrak{C}'}$. Dies liefert uns die lange exakte Homologiesequenz, die im Satz genannt wurde. □

Berechnung abgeleiteter Funktoren mittels azyklischer Objekte

Definition 8.85. *Seien $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ zwei abelsche Kategorien, $\mathfrak{C}$ mit genug injektiven Objekten, $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ ein linksexakter additiver Funktor, $(R^qF)_{q\in\mathbb{Z}}$ die Familie der rechtsabgeleiteten Funktoren von F.*

*Ein Objekt $X \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C})$ heißt F-**azyklisch**, falls $(R^qF)(X) = 0$ für alle $q > 0$ ist.*

Bemerkung. Es ist $(R^0F)(X) \cong F(X)$ im allgemeinen nicht 0.

Beispiel 8.4.13. Sei X injektives Objekt. Dann ist X auch F-azyklisch.

Bemerkung. Je nach Kategorie und Funktor kann es eventuell – außer den injektiven – noch weitere F-azyklische Objekte geben. (Für den 0-Funktor etwa sind alle Objekte F-azyklisch.)

Definition 8.86. *Sei $A \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C})$. Eine F-**azyklische Auflösung** ist eine (lange) exakte Folge der Form*

$$\ldots \to 0 \to 0 \to A \to X_0 \xrightarrow{\gamma_0} X_1 \xrightarrow{\gamma_1} X_2 \xrightarrow{\gamma_2} \cdots,$$

wobei die X_i jeweils F-azyklische Objekte sind.

Beispiel 8.4.14. Injektive Auflösungen sind für alle Funktoren F auch F-azyklisch.

$\boxed{\text{Satz 8.4.18.}}$ Sei $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ ein kovarianter linksexakter Funktor, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$ wie immer, $A \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C})$ und $0 \to A \to X_0 \xrightarrow{\gamma_0} X_1 \xrightarrow{\gamma_1} \ldots$ eine F-azyklische Auflösung von A.
Dann ist $(R^qF)(A) \cong H^q(F(X_\bullet)^+)$.

Beweis. Wir zerlegen die azyklische Auflösung von A mit dem Aufspaltungslemma wie folgt:

$$0 \to A =: C_0 \xhookrightarrow{i_0} X_0 \xrightarrow{p_1} C_1 \to 0$$

$$0 \to C_1 \xhookrightarrow{i_1} X_1 \xrightarrow{p_2} C_2 \to 0$$

$$\vdots$$

$$0 \to C_n \xhookrightarrow{i_n} X_n \xrightarrow{p_{n+1}} C_{n+1} \to 0$$

Für jede dieser kurzen exakten Folgen gibt es eine entsprechende lange R^qF-Folge:

$$\begin{array}{l} 0 \longrightarrow F(C_n) \xrightarrow{F(i_n)} F(X_n) \xrightarrow{F(p_{n+1})} F(C_{n+1}) \xrightarrow{\Delta_0} \\ \xrightarrow{\Delta_0} R^1F(C_n) \xrightarrow{R^1F(i_n)} R^1F(X_n) \xrightarrow{R^1F(p_{n+1})} R^1F(C_{n+1}) \xrightarrow{\Delta_1} \\ \xrightarrow{\Delta_1} R^2F(C_n) \xrightarrow{R^2F(i_n)} R^2F(X_n) \xrightarrow{R^2F(p_{n+1})} \ldots \end{array}$$

Da die X_i azyklisch sind, werden einige dieser Objekte zu 0, und wir erhalten

$$\begin{array}{l} 0 \longrightarrow F(C_n) \xrightarrow{F(i_n)} F(X_n) \xrightarrow{F(p_{n+1})} F(C_{n+1}) \xrightarrow{\Delta_0} \\ \xrightarrow{\Delta_0} R^1F(C_n) \longrightarrow 0 \longrightarrow R^1F(C_{n+1}) \xrightarrow{\Delta_1} \\ \xrightarrow{\Delta_1} R^2F(C_n) \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots \end{array}$$

Das heißt, wir haben für alle $q, n \geq 1$:

$$0 \to (R^q F)(C_n) \xrightarrow{\sim} (R^{q+1} F)(C_{n-1}) \to 0$$

Außerdem haben wir für $n \in \mathbb{N}$ die exakte Sequenz

$$0 \to F(C_n) \xhookrightarrow{F(i_n)} F(X_n) \xrightarrow{F(p_{n+1})} F(C_{n+1}) \twoheadrightarrow (R^1 F)(C_n) \to 0$$

Das heißt, es ist $(R^1 F)(C_n) \cong \operatorname{coker} F(p_{n+1})$, außerdem ist (weil F linksexakt ist) auch $\ker F(\gamma_n) = F(\ker \gamma_n) = F(C_n)$, d.h. wir können die bekannten im-ker-H^q-Diagramme für $(F(X_\bullet), F(\gamma_\bullet))$ mit diesen Sequenzen zusammensetzen zu einem großen Diagramm.

Hier ein Ausschnitt des dieses (nach unten unendlichen, oben bei $F(C_0) = F(A)$ beginnenden) überall kommutativen Diagrammes, mit exakten Sequenzen in den Diagonalen, einem Komplex in der Mittelspalte sowie kurzen exakten Sequenzen in den Spalten daneben:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[dr] & \operatorname{im} F(\gamma_{n-1}) \arrow[l] \arrow[d, tail, "h_n"'] & F(X_{n-1}) \arrow[l, two heads, "\pi_{n-1}"'] \arrow[dl, "F(p_n)"] \arrow[dd, "F(\gamma_{n-1})"] & H^{n-1}(F(X_\bullet)) \arrow[d] \arrow[r, dashed, no head, "\sim"] & R^1 F(C_{n-2}) \arrow[dr] & \\
 & & F(C_n) \arrow[dl, two heads] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, hook, "F(i_n)"] & & 0 \arrow[d] & & 0 \\
 & R^1 F(C_{n-1}) \arrow[dl] \arrow[r, dashed, no head, "\approx"] & H^n(F(X_\bullet)) \arrow[d] & F(X_n) \arrow[r, two heads, "\pi_n"] \arrow[dr, "F(p_{n+1})"] \arrow[dd, "F(\gamma_n)"'] & \operatorname{im} F(\gamma_n) \arrow[r] \arrow[d, tail, "h_{n+1}"] & 0 \arrow[dl] & \\
0 & & 0 \arrow[d] & & F(C_{n+1}) \arrow[dl, hook, "F(i_{n+1})"] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, two heads] & & \\
 & 0 \arrow[dr] & \operatorname{im} F(\gamma_{n+1}) \arrow[l] \arrow[d, tail, "h_{n+2}"'] & F(X_{n+1}) \arrow[l, two heads, "\pi_{n+1}"'] \arrow[dl, "F(p_{n+2})"] \arrow[dd, "F(\gamma_{n+1})"] & H^{n+1}(F(X_\bullet)) \arrow[d] \arrow[r, dashed, no head, "\approx"] & R^1 F(C_n) \arrow[dr] & \\
 & & F(C_{n+2}) \arrow[dl, two heads] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, hook, "F(i_{n+2})"] & & 0 \arrow[d] & & 0 \\
 & R^1 F(C_{n+1}) \arrow[dl] \arrow[r, dashed, no head, "\sim"] & H^{n+2}(F(X_\bullet)) \arrow[d] & F(X_{n+2}) \arrow[r, two heads, "\pi_{n+2}"] \arrow[dr, "F(p_{n+3})"] \arrow[dd, "F(\gamma_{n+2})"'] & \operatorname{im} F(\gamma_{n+2}) \arrow[r] \arrow[d, tail, "h_{n+3}"] & 0 \arrow[dl] & \\
0 & & 0 \arrow[d] & & F(C_{n+3}) \arrow[dl, hook, "F(i_{n+3})"] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, two heads] & & \\
 & 0 & \operatorname{im} F(\gamma_{n+3}) \arrow[l] & F(X_{n+3}) \arrow[l, two heads, "\pi_{n+3}"'] & H^{n+3}(F(X_\bullet)) \arrow[r, dashed, no head, "\sim"] & R^1 F(C_{n+2}) &
\end{tikzcd}$$

Da π_n Epimorphismus ist, ist

$$R^1 F(C_n) = \operatorname{coker} F(p_{n+1}) = \operatorname{coker}(h_{n+1} \circ \pi_n) \cong \operatorname{coker} h_{n+1} = H^{n+1}(C_0),$$

also $R^1F(C_n) \cong H^{n+1}(E(X_\bullet))$.

Weiterhin haben wir (siehe oben)

$$(R^qF)(C_n) \cong (R^{q+1}F)(C_{n-1}),$$

also

$$\begin{aligned}(R^qF)(A) &= (R^qF)(C_0)\\ &\cong R^{q-1}(C_1)\\ &\cong R^{q-2}(C_2)\\ &\;\vdots\\ &\cong R^1F(C_{q-1})\end{aligned}$$

und das ist ja, wie wir eben ausgerechnet haben,

$$\cong H^q(F(X_\bullet)).$$

Und genau das wollten wir ja zeigen. $\square$

Exakte δ-Funktoren

Definition 8.87. *Für eine exakte Kategorie $\mathfrak{C}$ bezeichne $\mathfrak{C}^{\mathrm{lex}+}$ diejenige volle Unterkategorie von $\mathfrak{C}^{\mathrm{lex}}$, die aus den langenen exakten Sequenzen besteht, die links irgendwann nur noch aus 0-Objekten besteht (d.h. nur nach rechts wirklich unendlich sind):*

$$\mathrm{obj}(\mathfrak{C}^{\mathrm{lex}+}) := \left\{(C_\bullet, \partial_\bullet) \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C}^{\mathrm{lex}}) \,\middle|\, \forall q \leq 0 : \; C_q = 0\right\}$$

Definition 8.88. *Seien $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$ abelsche Kategorien, $\mathfrak{C}$ mit genug injektiven Objekten, $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ additiver linksexakter (kovarianter) Funktor.*

*Ein **exakter δ-Funktor** für F ist ein Funktor $\mathbb{G} : \mathfrak{C}^{\mathrm{kex}} \to (C')^{\mathrm{lex}+}$, so dass es eine Folge von kovarianten Funktoren $G_n : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ sowie $\gamma_n : \mathfrak{C}^{\mathrm{kex}} \to \underline{\mathrm{Mor}}(\mathfrak{C})$ gibt mit den folgenden Eigenschaften:*

(1) G setzt sich auf den G_i und γ_i zusammen, es ist

$$\mathbb{G}\left(0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0\right) = \begin{cases} 0 \to G_0(A) \xrightarrow{G_0(f)} G_0(B) \xrightarrow{G_0(g)} G_0(C) \\ \xrightarrow{\gamma_0} G_1(A) \xrightarrow{G_1(f)} G_1(B) \xrightarrow{G_1(g)} G_1(C) \\ \xrightarrow{\gamma_1} G_2(A) \xrightarrow{G_2(f)} G_2(B) \xrightarrow{G_2(g)} G_2(C) \xrightarrow{\gamma_2} \end{cases}$$

(Dabei steht γ_i hier für $\gamma_i\left(0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0\right)$.)

(2) $G_0 \cong F$ (als Funktorisomorphismus).

(3) Für injektive Objekte $I \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C})$ und $n \geq 1$ ist $G_n(I) = 0$.

Beispiel 8.4.15. $((R^qF)_{q\geq 0}, (\Delta_q)_{q\geq 0})$ ist nach Konstruktion ein exakter δ-Funktor für F.

$\boxed{\text{Satz 8.4.19.}}$ *(Universaleigenschaft der rechtsabgeleiteten Funktoren)*
Sei $\mathfrak{F} : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ additiver linksexakter Funktor zwischen abelschen Kategorien, $\mathfrak{C}$ Kategorie mit genug Injektiven. Sei $\mathbb{G} = ((G_n)_{n\geq 0}, (\gamma_n)_{n\geq 0})$ ein exakter δ-Funktor.
Dann ist $\mathbb{G}$ funktorisomorph zu $((R^n F)_{n\geq 0}, (\Delta_n)_{n\geq 0})$.

Beweis. Wir müssen Funktorisomorphismen $h^n : R^n F \xrightarrow{\sim} G_n$ auf funktorielle Weise konstruieren.

Wir haben ja $G_0 \cong F$ nach Vorraussetzung, außerdem $R^0 F \cong F$, was uns die Isomorphismenschar $h^n = (h^n_X)_{x\in X}$, $h^n_X : R^0 F(X) \xrightarrow{\sim} G_0(X)$ liefert.

Nun sei $A \in \operatorname{obj}(\mathfrak{C})$, mit injektiver Auflösung

$$0 \to A \to I_0 \to I_1 \to I_2 \to \dots$$

Wir können (wie üblich) diese Auflösung (mit dem Aufspaltungslemma) in einzelne kurze exakte ker-coker-Folgen zerlegen (mit $C_0 = A$):

$$0 \to C_n \overset{i_n}{\hookrightarrow} I_n \xrightarrow{p_{n+1}} C_{n+1} \to 0$$

Wenden wir nun $\mathbb{G}$ auf diese Folgen an, so erhalten wir diese langen Folgen (für $n \in \mathbb{N}_0$):

$$\begin{aligned}
0 \to G_0(C_n) &\xrightarrow{G_0(i_n)} G_0(I_n) \xrightarrow{G_0(p_{n+1})} G_0(C_{n+1}) \\
\xrightarrow{\gamma_0^n} G_1(C_n) &\xrightarrow{G_1(i_n)} G_1(I_n) \xrightarrow{G_1(p_{n+1})} G_1(C_{n+1}) \\
\xrightarrow{\gamma_1^n} G_2(C_n) &\xrightarrow{G_2(i_n)} G_2(I_n) \xrightarrow{G_2(p_{n+1})} G_2(C_{n+1}) \xrightarrow{\gamma_2^n} \dots
\end{aligned}$$

Nun ist $G_i(I_n) = 0$ für $i \geq 1$, also wird diese Folge zu

$$\begin{aligned}
0 \to G_0(C_n) &\xrightarrow{G_0(i_n)} G_0(I_n) \xrightarrow{G_0(p_{n+1})} G_0(C_{n+1}) \\
\xrightarrow{\gamma_0^n} G_1(C_n) &\to 0 \to G_1(C_{n+1}) \\
\xrightarrow{\gamma_1^n} G_2(C_n) &\to 0 \to G_2(C_{n+1}) \xrightarrow{\gamma_2^n} \dots
\end{aligned}$$

Die „hinteren Teile“ dieser Sequenz liefern uns Isomorphismen (für $i \geq 1$, $n \geq 0$):

$$\gamma_i^{(n)} : G_i(C_{n+1}) \xrightarrow{\sim} G_{i+1}(C_n)$$

Der vordere Teil (bis zur ersten 0) gibt uns zusammen mit den entsprechenden Anwendungen des Rechtsableitungs-Funktors $R^n F$ das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R^0F(C_n) \arrow[r] \arrow[d, "h^0_{C_n}"', "\wr"] & R^0F(I_n) \arrow[r] \arrow[d, "h^0_{I_n}"', "\wr"] & R^0F(C_{n+1}) \arrow[r] \arrow[d, "h^0_{C_{n+1}}"', "\wr"] & R^1F(C_n) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\wr"', "h^1_{C_n}"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & G_0(C_n) \arrow[r] & G_0(I_n) \arrow[r] & G_0(C_{n+1}) \arrow[r] & G_1(C_n) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Das Fünferlemma liefert uns hier einen (eindeutigen) Isomorphismus $h^1_{C_n}$, welcher das Diagramm kommutativ macht.

Die $h^{i+1}_{C_n}$ für $i \geq 1$ erhält man nun sukcessiv als diejenigen Morphismen, welche die Diagramme

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & R^iF(C_{n+1}) \arrow[r, "\Delta_i", "\sim"'] \arrow[d, "h^i_{C_{n+1}}"', "\wr"] & R^{q+1}F(C_n) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "h^{i+1}_{C_n}", "\wr"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & G_i(C_{n+1}) \arrow[r, "\gamma_i^{(n)}", "\sim"'] & G_{q+1}(C_n) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

kommutativ machen. Diese Morphismen sind dann natürlich auch wieder Isomorphismen (entweder mit dem Fünferlemma oder einfach als Verkettung von Isomorphismen.)

Für $n = 0$ liefert uns dies speziell die gewünschten $h^i_A : R^iF(A) \to G_i(A)$. $\square$

Ein spezieller abgeleiteter Funktor: Ext

Definition 8.89. *Sei wieder $\mathfrak{C}$ abelsche Kategorie mit genügend injektiven Objekten, $A \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C})$. Dann gibt es den* Hom*-Funktor*

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, \square) & : & \mathfrak{C} & \longrightarrow \quad \underline{\mathrm{Ab}} \\ & & B & \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, B) \\ & & \left(B \xrightarrow{f} C\right) & \longmapsto f^* : \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, C) \\ & & & \qquad\qquad \varphi \quad \mapsto \quad f \circ \varphi \end{array}$$

$\boxed{\mathrm{Ext}^q_{\mathfrak{C}}}$ $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, \square)$ *ist linksexakt, kovariant und additiv, hat also rechtsabgeleitete Funktoren*

$$\mathrm{Ext}^q_{\mathfrak{C}}(A, \square) := R^q\left(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, \square)\right) : \mathfrak{C} \to \underline{\mathrm{Ab}}$$

Bemerkung. Das heißt, für eine beliebige injektive Auflösung $(I_\bullet)^+$ von B ist $\mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{C}}(A, B) = H^n\left(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, I_\bullet)^+\right)$.

> KOROLLAR.
>
> (1) $\mathrm{Ext}^0_{\mathfrak{C}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, B)$
>
> (2) Für injektive Objekte B und $q \geq 1$ ist $\mathrm{Ext}^q_{\mathfrak{C}}(A, B) = 1$.

Definition 8.90. *Sei $\mathfrak{C}$ eine abelsche Kategorie. Ein Objekt $A \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C})$ heißt* ***projektives Objekt****, falls A ein injektives Objekt in der opositionellen Kategorie $\mathfrak{C}^o$ ist.*

Bemerkung. Äquivalent zur Projektivität von A sind:

(1) $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^o}(\square, A)$ ist exakter Funktor

(2) $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, \square)$ ist exakter Funktor

(3) Für jedes Diagramm der Form $\begin{tikzcd} B \arrow[r, two heads, "f"] & C \\ & A \arrow[u, "\varphi"'] \arrow[ul, dashed, "\hat\varphi"] \end{tikzcd}$ gibt es einen faktorisierenden Morphismus $\hat{\varphi}$.

(4) $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, \square)$ überführt Epimorphismen (in $\mathfrak{C}$) in Epimorphismen (in $\underline{\mathrm{Ab}}$).

$\boxed{\text{KOROLLAR.}}$ Für projektive Objekte $A \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C})$, beliebige $B \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C})$ und $q \geq 1$ ist ebenfalls $\mathrm{Ext}^q_{\mathfrak{C}}(A, B) = 0$.

Beweis. Wähle eine injektive Auflösung

$$0 \to B \to I_0 \to I_1 \to \dots$$

Da für projektive A $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, \Box)$ exakt ist, ist also die Hom-Folge

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(A, B) \to \mathrm{Hom}_A(A, I_0) \to \mathrm{Hom}_A(A, I_0) \to \dots$$

exakt, also $\mathrm{Ext}^q_{\mathfrak{C}}(A, B) = H^q(\mathrm{Hom}_(A, I_\bullet)^+) = 0$ für $q \geq 1$. □

Bemerkung. Wir haben also $\mathrm{Ext}^q_{\mathfrak{C}}(A, \Box) : \mathfrak{C} \to \underline{\mathrm{Ab}}$ als kovarianten Funktor (für jedes $A \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C})$). Durch Fixieren von $B \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C})$ (und einer Auflösung $0 \to B \to (I_\bullet)^+$) erhalten wir aber umgekehrt eine Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^q_{\mathfrak{C}}(\Box, B) : \mathrm{obj}(\mathfrak{C}) &\longrightarrow \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{Ab}}) \\ A &\longmapsto \mathrm{Ext}^q_{\mathfrak{C}}(A, B) = H^q\left(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, (I_\bullet)^+)\right), \end{aligned}$$

welche sich mit

$$(A \xrightarrow{f} A') \longmapsto H^q(\mathrm{hom}(f)) : \mathrm{Ext}^q_{\mathfrak{C}}(A', B) \to \mathrm{Ext}^q_{\mathfrak{C}}(A, B)$$

zu einem kontravarianten Funktor vervollständigen lässt. (Dass dies wirklich ein Funktor wird, kann leicht nachgerechnet werden.)

$\boxed{\text{FAZIT.}}$ Für eine abelsche Kategorie mit genügend vielen injektiven Objekten ist

$$\mathrm{Ext}^q_{\mathfrak{C}}(\Box, \Box) : \mathfrak{C} \times \mathfrak{C} \to \underline{\mathrm{Ab}}$$

ein **Bifunktor**, kontravariant in der ersten, kovariant in der zweiten Variable.

$\boxed{\text{SATZ 8.4.20.}}$ Sei $B \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C})$ fixiert, $0 \to B \to (I_\bullet)^+$ eine injektive Auflösung von B in $\mathfrak{C}$, $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ eine exakte Folge. Dann existiert eine (funktorielle) lange exakte Sequenz

$$\begin{array}{l} 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A'', B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A', B) \xrightarrow{\Delta_0} \\ \xrightarrow{\Delta_0} \mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{C}}(A'', B) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{C}}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{C}}(A', B) \xrightarrow{\Delta_1} \\ \xrightarrow{\Delta_1} \mathrm{Ext}^2_{\mathfrak{C}}(A'', B) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_{\mathfrak{C}}(A, B) \longrightarrow \dots \end{array}$$

Beweis. Zu der exakten Folge $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ erhalten wir (weil die I_n jeweils injektiv sind und damit $\mathrm{Hom}(\Box, I_n)$ exakt) eine Familie kurzer exakter Folgen (für $n \geq 0$):

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A'', I_n) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, I_n) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A', I_n) \to 0$$

Diese lassen sich (durch die von $I_n \xrightarrow{\partial_n} I_{n+1}$ induzierten kanonischen Nachschalt-Morphismen $(\partial_n \circ \Box)^{A''}$, $(\partial_n \circ \Box)^{A}$ und $(\partial_n \circ \Box)^{A'}$) zu einem Komplex-Diagramm verbinden (in den Spalten Komplexe, die Zeilen exakt):

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(A'', I_0) \arrow[r, tail] \arrow[d, "(\partial_0\circ\Box)^{A''}"] & \mathrm{Hom}(A, I_0) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "(\partial_0\circ\Box)^{A}"] & \mathrm{Hom}(A', I_0) \arrow[r] \arrow[d, "(\partial_0\circ\Box)^{A'}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(A'', I_0) \arrow[r, tail] \arrow[d, "(\partial_1\circ\Box)^{A''}"] & \mathrm{Hom}(A, I_0) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "(\partial_1\circ\Box)^{A}"] & \mathrm{Hom}(A', I_0) \arrow[r] \arrow[d, "(\partial_1\circ\Box)^{A'}"] & 0 \\
 & \vdots \arrow[d, "(\partial_{n-1}\circ\Box)^{A''}"] & \vdots \arrow[d, "(\partial_{n-1}\circ\Box)^{A}"] & \vdots \arrow[d, "(\partial_{n-1}\circ\Box)^{A'}"] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(A'', I_0) \arrow[r, tail] \arrow[d, "(\partial_n\circ\Box)^{A''}"] & \mathrm{Hom}(A, I_0) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "(\partial_n\circ\Box)^{A}"] & \mathrm{Hom}(A', I_0) \arrow[r] \arrow[d, "(\partial_n\circ\Box)^{A'}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(A'', I_0) \arrow[r, tail] \arrow[d, "(\partial_{n+1}\circ\Box)^{A''}"] & \mathrm{Hom}(A, I_0) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "(\partial_{n+1}\circ\Box)^{A}"] & \mathrm{Hom}(A', I_0) \arrow[r] \arrow[d, "(\partial_{n+1}\circ\Box)^{A'}"] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Zusammengefasst ist das eine kurze exakte Folge in $\underline{\mathrm{Comp}_{\mathrm{Ab}}}$:

$$0 \to (\mathrm{Hom}(A'', I_\bullet))^+ \hookrightarrow (\mathrm{Hom}(A, I_\bullet))^+ \twoheadrightarrow (\mathrm{Hom}(A', I_\bullet))^+ \to 0$$

Für diese existiert nach Satz 8.4.11 eine lange Kohomologiefolge, diese ist genau die im Satz genannte Sequenz. □ □

Die duale Theorie abgeleiteter Funktoren

Drehen wir in den bisherigen Betrachtungen alle Morphismenpfeile um, erhalten wir eine dazu duale Theorie (mit den selben Beweisen).

Definition 8.91. *Sei $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ kovarianter additiver Funktor, $\mathfrak{C}$ eine Kategorie mit* ***genügend vielen projektiven Objekten****, d.h. für jedes $A \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C})$ existiere ein projektives $P \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C})$ mit einem Epimorphismus $P \twoheadrightarrow A$.*

Dann gibt es den oppositionellen Funktor F^o als kovarianter Funktor zwischen den oppositionellen Kategorien: $F^o : \mathfrak{C}^o \to (\mathfrak{C}')^o$.

Dort existiert (weil $\mathfrak{C}^o$ jetzt genug injektive Objekte hat) der rechtsabgeleitete Funktor $R^q(F^o) : \mathfrak{C}^o \to (\mathfrak{C}')^o$. Dessen oppositioneller Funktor $\boxed{L_qF}$

$$L_qF := (R^qF^o)^o : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$$

*heißt dann q-**ter linksabgeleiteter Funktor** für F.*

Bemerkung. Ist $A \in \mathrm{obj}(\mathfrak{A})$, so haben wir eine (exakte) projektive Auflösung

$$\ldots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \twoheadrightarrow A \to 0$$

Anwenden von F ergibt dann den Komplex

$$\ldots \to F(P_2) \to F(P_1) \to F(P_0) \twoheadrightarrow F(A) \to 0$$

Das Objekt $F(A)$ schneiden wir ab, und haben dann

$$(L_qF)(A) = H_q(F(P_\bullet))$$

(als Homologieobjekt).

Definition 8.92. *Für einen* kontravarianten *Funktor $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ gibt es die dazugehörigen (kanonischen) kovarianten Funktoren* $\boxed{\bar{F}}$ $\boxed{\hat{F}}$

$$\begin{aligned} \bar{F} : \mathfrak{C}^o &\longrightarrow \mathfrak{C}' \\ A &\longmapsto F(A) \\ (A \xleftarrow{f} B) &\longmapsto F\left(A \xrightarrow{f} B\right) : F(A) \to F(B) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \hat{F} : \mathfrak{C} &\longrightarrow (\mathfrak{C}')^o \\ A &\longmapsto F(A) \\ (A \xrightarrow{f} B) &\longmapsto \left(F(B) \xrightarrow{F(f)} F(A)\right) \end{aligned}$$

Ist $\mathfrak{C}$ eine Kategorie mit genügend projektiven Objekten, so sei

$$R^qF := \overline{R^q\bar{F}} = \widehat{L^q\hat{F}} : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{C}'$$

als kontravarianter Funktor. Ist $\mathfrak{C}$ eine Kategorie mit genügend injektiven Objekten, so sei

$$L_qF := \widehat{R^q\hat{F}} = \overline{L^q\bar{F}} : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{C}'$$

ebenfalls als kontravarianter Funktor.

8.5 Garben

Geometrische oder konkrete Garben

Definition 8.93. *Sei X ein topologischer Raum.*

Eine (topologische) ***geometrische Garbe*** *(auch* ***konkrete Garbe****) über X ist ein Tripel (X, F, π), wobei F ebenfalls topologischer Raum und $\pi : F \twoheadrightarrow X$ lokal ein Homöomorphismus ist (d.h. für $y \in F$ gibt es eine Umgebung $V \in \mathrm{Off}'(F)$, so dass $\pi|_V : V \to \pi(V)$ ein Homöomorphismus ist).*

Geometrische Garben von X werden auch als ***etale Überlagerungen*** *bezeichnet.*

$\boxed{E_{\underline{\mathrm{Ens}}}(X)}$ *Wir schreiben $E_{\underline{\mathrm{Ens}}}(X)$ für die* ***Kategorie der geometrischen Garben*** *über X, mit*

$$\mathrm{obj}(E_{\underline{\mathrm{Ens}}}(X)) = \{(F, \pi) := (X, F, \pi) \mid (X, F, \pi) \text{ geometrische Garbe}\}$$

$$\mathrm{Hom}_{E_{\underline{\mathrm{Ens}}}(X)}((F, \pi), (F_1, \pi_1)) := \left\{ f \,\middle|\, f \in \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Top}}}(F, F_1), \pi = \pi_1 \circ f \right\}$$

Definition 8.94. *Sei X ein topologischer Raum, R ein* ***topologischer Ring*** *(d.h. topologischer Raum und Ring mit stetigen Operationen (und stetiger additiver Inversenbildung)) und $\mathfrak{C} \in \left\{\underline{\mathrm{Mod}}_R, \underline{\mathrm{Alg}}_R\right\}$ (d.h. die Kategorie der R-Moduln oder R-Algebren).*

$\boxed{E_{\mathfrak{C}}(X)}$ *Dann bezeichnen wir mit $E_{\mathfrak{C}}(X)$ die Kategorie, die definiert wird durch:*

(1) Die Objekte von $E_{\mathfrak{C}}(X)$ sind alle Quadrupel $(X, F, \pi, (\xi_x)_{x \in X})$ mit:
   - *(i) (X, F, π) ist (topologische) geometrische Garbe.*
   - *(ii) Für alle $x \in X$ ist $\xi_x = (+_x, \cdot_x^R)$ bzw. $\xi_x = (+_x, \cdot_x^F, \cdot_x^R)$ eine $\mathfrak{C}$-Struktur auf der Faser $F_x = \pi^{-1}(x) \subset F$.*
   - *(iii) Für das Faserprodukt*

$$F \times_X F = \{(s,t) \in F \times F \mid \pi(s) = \pi(t)\} = \bigcup_{x \in X} F_x$$

(mit der von $F \times F$ induzierten Topologie) sind die von $(\xi_x)_{x \in X}$ induzierten kanonischen Abbildungen

$$\begin{aligned} + : F \times_X F &\longrightarrow F \\ (s,t) &\longmapsto s +_{\pi(s)} t \\ \cdot^F : F \times_X F &\longrightarrow F \qquad\qquad \textit{(nur für } \mathrm{Alg}_R\textit{)} \\ (s,t) &\longmapsto s \cdot^F_{\pi(s)} t \\ \cdot^R : R \times F &\longrightarrow F \\ (r,t) &\longmapsto r \cdot^R_{\pi(t)} t \end{aligned}$$

sämtlich stetig.

(2) Die Morphismen von $E_{\mathfrak{C}}(X)$ sind gegeben durch

$$\mathrm{Hom}_{E_{\mathfrak{C}}(X)}((F, \pi), (F_1, \pi_1)) := \left\{ f : F \to F_1 \,\middle|\, \begin{array}{l} f \in \mathrm{Mor}(\underline{\mathrm{Top}}), \\ \pi = \pi_1 \circ f \,(\text{d.h. } f \text{ fasertreu}), \\ \forall x : f(F_x) \subseteq (F_1)_x, \\ f|_{F_x} \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(F_x, (F_1)_x) \end{array} \right\}$$

Üblicherweise schreibt man die $\mathfrak{C}$-Struktur $(\delta_x)_{x\in X}$ für eine Garbe $(F,\pi) = (X,F,\pi)$ nicht mit, wenn klar ist, welche gemeint ist.

*$E_{\mathfrak{C}}(X)$ heißt die **Kategorie der geometrischen $\mathfrak{C}$-Garben über** X.*

Definition 8.95. *Für zwei topologische Räume F und X ist $\pi \in \mathrm{Epi}_{\underline{\mathrm{Top}}}(F,X)$ eine **unverzweigte Überlagerung**, falls es für jedes $x \in X$ eine offene Umgebung $U \subseteq X$ gibt, so dass $\pi^{-1}(U) = \dot{\bigcup}_{a\in\pi^{-1}(x)} V_a$, mit $a \in V_a \in \mathrm{Off}'(F)$ und $V_a \xrightarrow[\pi|_{V_a}]{\sim} U$ für alle $a \in \pi^{-1}(x)$.*

Bemerkung. Offenbar induziert jede unverzweigte Überlagerung eine geometrische Garbe.

Beispiel 8.5.1. $X \times \mathbb{Z} \twoheadrightarrow X$, wobei $\mathbb{Z}$ die diskrete Topologie habe, ist für jeden topologischen Raum eine $\underline{\mathrm{Ab}}$-Garbe (d.h. $\underline{\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}}$-Garbe).

> LEMMA. Sei (X,F,π) geometrische Garbe.
>
> (a) Für alle $x \in X$ ist F_x mit der Teilraumtopologie ein diskreter Topologischer Raum.
>
> (b) Ist F oder X ein T_1-Raum (d.h. $\forall x \neq y \exists U \in \mathrm{Off}' :\ x \in U, y \notin U$), so auch der jeweils andere Raum.

Definition 8.96. *Sei (X,F,π) geometrische Garbe, $U \in \mathrm{Off}(X)$. Dann heißt*

$$\Gamma(U,F) := \left\{ s \in \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Top}}}(U,F) \mid \pi \circ s = \mathrm{id}_U \right\}$$

*Menge der **Schnitte** in F.*

Bemerkung. Sei (F,π) eine geometrische $\mathfrak{C}$-Garbe über F und $U \in \mathrm{Off}'(X)$. Dann gibt es eine natürliche $\mathfrak{C}$-Struktur auf $\Gamma(U,F)$, nämlich durch

$$\begin{aligned} + : \Gamma(U,F) \times \Gamma(u,f) &\longrightarrow \Gamma(U,F) \\ (s,t) &\longmapsto (s+t) : U \to F \\ &\qquad\qquad x \mapsto s(x) +_x t(x) \in F_x \end{aligned}$$

und analog für die weitere(n) Operation(en).

> LEMMA.
>
> (a) Jeder Schnitt $s : U \to F$ ist eine **offene** Abbildung.
>
> (b) Seien $U, V \subseteq X$ offen mit $x \in U \cap V$, $s : U \to F$ und $t : V \to F$ Schnitte mit $s(u) = t(v)$.
>
> Dann existiert eine offene Menge $U_1 \subseteq U \cap V$ mit $s|_{U_1} = t|_{U_1}$.
>
> (c) Die Menge $M = \left\{ s(U) \mid U \in \mathrm{Off}'(X), s : U \to F \text{ Schnitt} \right\}$ ist Basis der Topologie von F.

Beweis.

(a) Klar, weil π lokaler Homöomorphismus ist.

(b) Sei $H \subseteq F$ offene Umgebung von $s(x) = t(x)$, so dass $\pi|_H : H \to X$ Homöomorphismus ist. Setze dann $U_1 := s^{-1}(H) \cap t^{-1}(H)$. Offenbar ist dann $x \in U_1$, also $U_1 \neq \varnothing$.

Für jedes weitere $x_1 \in U_1$ gilt dann $s(x_1) \in H$, $t(x_1) \in H$, und es ist

$$(\pi|_H \circ s)(x_1) = x_1 = (\pi|_H \circ t)(x_1).$$

Da $\pi|_H$ ein Homöomorphismus ist, ist also auch $s(x_1) = t(x_1)$.

(c) Aus (b) folgt, dass für zwei Schnitte $s : U \to F$ und $t : V \to F$ entweder $s(U) \cap s(V) = \varnothing$ oder $s(U) \cap t(V) = s(U_1) = t(U_1)$, mit einer offenen Menge $U_1 \subseteq U \cap V$.

Weiterhin ist jede offene Menge $H' \subseteq F$ Überdeckung von Bildern $s(U)$ von Schnitten, denn für $a \in H'$ gibt es ja ein $H''_a \subseteq H$, $a \in H''_a$, so dass $\pi|_{H''_a}$ Homöomorphismus, und damit ist $s_a := (\pi|_H)^{-1}$ ein Schnitt, mit $a \in s(\pi^{-1}(H'')) = H''$, und $H' = \bigcup_{a \in H'} H''_a$.

Es ist also M wirklich eine Basis der Topologie. □

> $\boxed{\text{Korollar.}}$ Seien (F, π) und (F_1, π_1) zwei $\mathfrak{C}$-Graben auf X, $f : F \to F_1$ ein $E_{\mathfrak{C}}(X)$-Morphismus. Dann gilt:
>
> (1) f ist lokal injektiv.
>
> (2) f ist offen
>
> (3) f ist surjektiv $\Leftrightarrow$ f ist schon $E_{\mathfrak{C}}(X)$-Isomorphismus.

Beweis.

(1) weil $\pi_1 \circ f = \pi$ lokaler Homöomorphismus ist.

(2) Für einen Schnitt $s : U \to F$ ist ja $f \circ s : U \to F_1$ ein Schnitt, also $(f \circ s)(U) = f(s(U))$ offen. Da die $s(U)$ eine Topologie-Basis von F bilden, reicht dies aus.

(3) Folgt aus (1) und (2). □

Limes-Funktoren

Induktive/direkte Limites

Definition 8.97. *Sei $(I, \leq)$ halbgeordnete Menge (d.h. $\leq$ reflexive und transitive Ordnung auf I, nicht notwendig antisymmetrisch).*

$(I, \leq)$ heißt (nach oben) ***gerichtete Menge****, falls es für alle $(i, j) \in I^2$ ein $k \in I$ gibt mit $i \leq k$ und $j \leq k$.*

Beispiel 8.5.2. Für einen topologischen Raum X bildet $(\mathrm{Off}(X), \supseteq)$ eine gerichtete Menge, genauso wie $(\mathrm{Off}(X), \subseteq)$.

Beispiel 8.5.3. Auf den natürlichen Zahlen (oder $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$) ist die „teilt"-Relation gerichtet: Für $n, m \in \mathbb{N}$ ist $n \mid n \cdot m$ und $m \mid n \cdot m$.

Definition 8.98. *Eine halbgeordnete Menge I kann als Kategorie $\mathfrak{C}_I$ aufgefasst werden:* $\boxed{\mathfrak{C}_I}$

$$\mathrm{obj}(\mathfrak{C}_I) := I$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}_I}(i,j) := \begin{cases} \varnothing & i \not\leq j \\ \{(i,j)\} & i \leq j \end{cases}$$

Definition 8.99. *Sei I eine halbgeordnete Menge mit der zugehörigen kleinen Kategorie $\mathfrak{C}_I$, $\mathfrak{C}$ eine weitere Kategorie. Ein kovarianter Funktor $\mathfrak{C}_I \to \mathfrak{C}$ heißt auch **direktes System** oder **induktives System** in $\mathfrak{C}$.*

*Ist I gerichtete Menge, nennen wir F ein **gerichtetes direktes System**.*

Bemerkung. F ist vollständig bestimmt durch die Familie $(F(i))_{i\in I}$ und eine Familie von Morphismen $(\rho_{ij} : F(i) \to F(j))_{i \leq j}$ (mit $\rho_{jk} \circ \rho_{ij} = \rho_{ik}$ für $i \leq j \leq k$ und $\rho_{ii} = \mathrm{id}_{F(i)}$).

Definition 8.100. *Sei $F \mathrel{\hat=} ((C_i)_{i\in I}, (\rho_{ij})_{i\leq j})$ ein direktes System in $\mathfrak{C}$. Dann definiert dies einen weiteren kovarianten Funktor* $\boxed{\varinjlim F}$

$$\varinjlim F : \mathfrak{C} \longrightarrow \underline{\mathrm{Ens}}$$

durch

$$A \longmapsto \left\{ (g_i)_{i\in I} \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall i \in I: \; g_i \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(C_i, A) \\ \forall i,j \in I: \; i \leq j \Rightarrow g_i = g_j \circ \rho_{ij} \end{array} \right\}$$
$$(A \xrightarrow{f} B) \longmapsto (f \circ \square)_* : (\varinjlim F)(A) \to (\varinjlim F)(B)$$
$$(g_i)_{i\in I} \mapsto (f \circ g_i)_{i \in I}$$

Definition 8.101. *Sei $F \mathrel{\hat=} ((C_i)_{i\in I}, (\rho_{ij})_{i\leq j})$ ein direktes System in $\mathfrak{C}$.*

*Man sagt, F **hat einen direkten Limes** (oder **induktiven Limes**), falls der Funktor $\varinjlim F : \mathfrak{C} \to \underline{\mathrm{Ens}}$ darstellbar ist.*

Bemerkung. Es gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$\varinjlim F \text{ ist darstellbar}$$
$$\Leftrightarrow \exists A \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C}) : \quad \varinjlim F \cong_{\underline{\mathrm{Funct}}} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, \square)$$

und nach Satz 5.3.2

$$\Leftrightarrow \exists A \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C}), \eta = (\eta_i)_{i\in I} \in (\varinjlim F)(A) :$$
$$\forall C \in \mathrm{obj}(\mathfrak{C}), \forall (g_i)_i \in (\varinjlim F)(C) :$$
$$\exists! f : A \to C : \; \forall i \in I: \; g_i = f \circ \gamma_i$$

$\boxed{\varinjlim F}$ **Definition 8.102.** *Falls $F = ((C_i)_i, (\rho_{ij})_{i\leq j})$ einen direkten Limes hat (es also einen universellen Punkt $(A, (\gamma_i)_{i\in I})$ für $\underset{\rightsquigarrow}{\lim} F$ gibt), so nennen wir dieses Objekt*

$$\varinjlim F := \varinjlim_{i\in I} C_i := A$$

*den **direkten Limes** (bzw. **induktiven Limes**) für F.*

Bemerkung. Alle universellen Punkte $(A, (\gamma_i)_i)$ sind isomorph, denn die definierende Eigenschaft ist eine Universaleigenschaft. Daher ist der direkte Limes bis auf Isomorphie eindeutig definiert (und das reicht uns).

Definition 8.103. *Eine Kategorie $\mathfrak{C}$ heißt **Kategorie mit direkten Limites**, falls jedes gerichtete direkte System $F = ((C_i)_i, (\rho_{ij})_{i\leq j})$ einen direkten Limes hat.*

> $\boxed{\text{Satz 8.5.1.}}$ In den Kategorien $\underline{\text{Ens}}$ und $\underline{\text{Mod}}_R$ (für einen k&u-Ring R) hat jedes gerichtete direkte System einen direkten Limes, d.h. $\underline{\text{Ens}}$ und $\underline{\text{Mod}}_R$ sind Kategorien mit direkten Limites.

Beweis.

$\underline{\text{Ens}}$**:** Sei $((C_i)_{i\in I}, (\rho_{ij})_{i\leq j}) : \mathfrak{C}_i \to \underline{\text{Ens}}$ ein direktes System von Mengen. Betrachte

$$\hat{A} := \coprod_{i\in I} C_i = \bigcup_{i\in I} \{i\} \times C_i$$

und darauf die Äquivalenzrelation

$$(i, x_i) \sim (j, x_j) \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists k \in I: \ i \leq k, j \leq k, \rho_{ik}(x) = \rho_{jk}(x)$$

Betrachte dann die Faktormenge mit den Projektionsabbildungen

$$A := {}^{\hat{A}}\!/\!_{\sim}, \qquad \forall i \in I: \ \begin{aligned} \gamma_i : C_i &\to A \\ x &\mapsto [(i, x)]_\sim \end{aligned}$$

Dies soll unser universeller Punkt sein.

Sei eine Menge $C \in \mathrm{obj}(\underline{\text{Ens}})$ mit einer F-kompatiblen Abbildungsschar $(C_i \xrightarrow{g_i} C)_{i\in I}$ (d.h. $g_i = g_j \circ \rho_i^j \forall i \leq j$) gegeben.

Wir haben dann (für alle $i \in I$)

$$\begin{tikzcd} C_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "\gamma_i"'] & C \\ A \arrow[ur, dotted, "h"'] & \end{tikzcd}$$

mit einer zu konstruierenden Abbildung h. Falls es so ein h gibt, muss für alle $i \in I$ und alle $x \in C_i$ gelten:

$$h([(i,x)]) = h(\gamma_i(x)) = g_i(x)$$

Das heißt, h ist durch die g_i eindeutig bestimmt. Wir müssen nur noch zeigen, dass ein so definiertes h auch wohldefiniert ist. Seien also $x \in C_i$ und $y \in C_j$ mit $[(i,x)] = [(j,y)]$. Dann ist $(i,x) \sim (j,y)$, also gibt es ein k mit $i \leq k$, $j \leq k$ und $\rho_{ik}(x) = \rho_{jk}(y) \in C_k$. Das heißt:

$$g_i(x) = g_k(\rho_{ik}(x)) = g_k(\rho_j k(y)) = g_j(y),$$

und $h([(i,x)]) = h([(j,y)])$ ist wohldefiniert.

Fazit. In $\underline{\text{Ens}}$ existieren direkte Limites für direkte Systeme.

$\underline{\text{Mod}}_R$: Sei $((C_i)_{i\in I}, (\rho_{ij})_{i\leq j}) : \mathfrak{C}_i \to \underline{\text{Mod}}_R$ ein direktes System von R-Moduln. Dann hat $(C_i)_{i\in I}$ einen direkten Limes $A = \varinjlim_{i\in I} C_i$ in $\underline{\text{Ens}}$, mit Morphismen $\gamma_i : C_i \to A$. Es gibt nun eine kanonische (abelsche) Gruppen-Struktur auf $A \in \text{obj}(\underline{\text{Ens}})$:

$$\begin{aligned} + : A \times A &\longrightarrow A \\ ([(i,x)],[(j,y)]) &\longmapsto [(k, \rho_{ik}(x) + \rho_{jk}(y))] \\ &\qquad\qquad (\text{mit einem } k, \text{ so dass } i \leq k,\ j \leq k) \end{aligned}$$

Dies ist wohldefiniert, weil die $\rho_{\square\square}$ Homomorphismen sind und miteinander kommutieren. Multiplikation mit Skalaren ist klar (und auch mit der Addition verträglich), also wird A auch ein R-Modul, und offenbar sind die γ_i dann auch R-Modulhomomorphismen.

Die für einen weiteren Modul C mit F-kompatibler Morphismenschar g_i durch die $\underline{\text{Ens}}$-Universaleigenschaft gegebene Abbildung $h : A \to C$ wird offenbar (da die g_i alle R-Homomorphismen sind) auch Homomorphismus. $\square$

Bemerkung. Analog geht dies für $\underline{\text{Top}}$, $\underline{\text{Alg}}_R$, $\underline{\text{Mod}}_R^{[\square,\square]}$, $\underline{\text{Rings}} = \underline{\text{Alg}}_{\mathbb{Z}}$ etc.

Beispiel 8.5.4. Sei $X \neq \varnothing$ eine Menge, $I \subseteq \mathfrak{P}(X)$ abgeschlossen bezüglich endlichen Vereinigungen (d.h. $\forall A, B \in I : A \cup B \in I$.) Dann ist $(I, \subseteq)$ eine gerichtete Menge, und der kanonische Funktor

$$\begin{aligned} F : \mathfrak{C}_i &\longrightarrow \underline{\text{Ens}} \\ M &\longmapsto M \\ (M \subseteq N) &\longmapsto \left(M \xhookrightarrow{\text{incl}_M^N} N \right) =: \rho_{MN} \end{aligned}$$

ist ein (gerichtetes) direktes System. Nach Satz 8.5.1 gibt es also den direkten Limes $\varinjlim F = \varinjlim_{M\in I} M = \coprod_{M\in I} M/\sim$.

Außerdem haben wir noch $\bigcup_{N\in I} N$, mit den kanonischen Einbettungen $\nu_M : M \to \bigcup_{N\in I} N$. Diese Einbettungen sind offenbar auch F-kompatibel, wir haben damit (aufgrund der Universaleigenschaft von $\varinjlim F$) eine Abbildung

$$\begin{aligned} h : \varinjlim_{M\in I} M &\longrightarrow \bigcup_{N\in I} N \\ [(M,x)] &\longmapsto \nu_M(x) = x \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist offensichtlich surjektiv, und wegen

$$\begin{aligned} h([M,x]) &= h([N,y]) \\ \Rightarrow \quad x &= y \\ \Rightarrow \quad [M,x] &= [M\cup N, x] \\ &= [M\cup N, y] \\ &= [N,y] \end{aligned}$$

auch injektiv, also bijektiv.

Fazit. Direkte Limites sind Verallgemeinerungen von Vereinigungen.

Bemerkung. In Mod_R kann man entsprechend (unendliche) direkte Summen als direkte Limites von Modulsistemen mit endlichen direkten Summen darstellen.

Bemerkung. Der mengentheoretische Limes existiert nach der Konstruktion von Satz 8.5.1 auch für nicht-gerichtete direkte Systeme (d.h. Funktoren von $\mathfrak{C}_I$ für eine beliebige halbgeordnete Menge I).

Für $\mathfrak{C} = \underline{\mathrm{Mod}}_R$ funktioniert diese Konstruktion nur für gerichtete Systeme. Für den allgemeinen Fall $((M_i)_{i\in I}, (\rho_{ij} : M_i \to M_j)_{i\leq j})$ geht es dennoch, mittels

$$\begin{aligned} M &:= \bigoplus_{i\in I} M_i \big/ S, \\ S &:= \mathrm{span}_R \left\{ \nu_j(\rho_{ij}(x_i) - \nu_i(x_i)) \,|\, i \leq j \in I, x_i \in M_i \right\}, \end{aligned}$$

wobei $\nu_i : M_i \hookrightarrow \bigoplus_{k\in I} M_k$ die kanonischen Einbettungen darstellen sollen. Sei nun noch

$$\begin{aligned} \mu_j : M_j &\longrightarrow M \\ x &\longmapsto [\nu_j(x)]_S, \end{aligned}$$

dann bildet $(M, (\mu_i)_{i\in I})$ einen induktiven Limes (d.h. einen universellen Punkt für $\underset{i\in I}{\underset{\rightsquigarrow}{\lim}} M_i$).

Für gerichtete Systeme sind beide Konstruktionen R-isomorph, via

$$\begin{aligned} \varkappa : \coprod_{i\in I} M_i \big/ \sim &\longrightarrow \bigoplus_{i\in I} M_i \big/ S. \\ [(i,x)]_\sim &\longmapsto [\nu_i(x)]_S \end{aligned}$$

> $\boxed{\text{Lemma.}}$ In $\underline{\mathrm{Mod}}_R$ ist jede direkte Summe isomorph zu einem direkten Limes von R-Moduln.

Beweis. Sei $(E_i)_{i\in I}$ beliebige Familie von R-Moduln, $\bigoplus_{i\in I} E_i$ die direkte Summe. Betrachte

$$\mathfrak{J} := (\{J \in \mathfrak{P}(I) \mid J \text{ endlich}\}, \subseteq).$$

$\mathfrak{J}$ ist offenbar gerichtete Menge. Nun sei $F : \mathfrak{C}_\mathfrak{J} \to \underline{\mathrm{Mod}}_R$ gegeben durch

$$F(J) = \bigoplus_{i\in J} E_i =: E_J$$
$$F(J_1 \subseteq J_2) := \rho_{J_1 J_2} : \bigoplus_{i\in J_1} E_i \to \bigoplus_{i\in J_2} E_i \qquad \text{(kanonische Einbettung)}$$

$F = ((E_J)_{J\in\mathfrak{J}}, (\rho_{J_1 J_2})_{J_1\subseteq J_2})$ ist ein direktes System von Untermoduln von $E_I = \bigoplus_{i\in I} E_i$. Das heißt, es existiert $\varinjlim_{J\in\mathfrak{J}} E_J$, und man hat einen induzierten Homomorphismus

$$\vartheta : \varinjlim_{J\in\mathfrak{J}} E_J \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} E_i,$$

so dass für jedes $K \in \mathfrak{J}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} E_K \arrow[r, "\gamma_K"] \arrow[d, "\nu_K"'] & \varinjlim_{J\in\mathfrak{J}} E_J \arrow[dl, "\vartheta"] \\ \bigoplus_{i\in I} E_j & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Offenbar muss θ dann die Form

$$\theta([(J,(\xi_j)_{j\in J})]_S) = (\eta_j)_{i\in I} \qquad \text{mit} \quad \eta_i = \begin{cases} \xi_i & i \in J \\ 0 & i \notin J \end{cases}$$

haben, und dieser Homomorphismus ist offenbar schon ein R-Modul-Isomorphismus. Es ist also wirklich

$$\varinjlim_{J\in\mathfrak{J}} E_J \cong \bigoplus_{i\in I} E_j,$$

also die direkte Summe isomorph zu einem induktiven Limes (aus endlichen direkten Summen). $\square$

$\boxed{\text{SATZ 8.5.2.}}$ Sei R ein Ring. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) R ist noethersch.

(2) Für jedes gerichtete direkte System *injektiver* R-Moduln ist auch $\bigoplus_{i\in I} E_i$ injektiv.

(3) Für jedes gerichtete direkte System *injektiver* R-Moduln ist auch $\varinjlim_{i\in I} E_i$ injektiv.

Beweis.

(1) ⇔ (2): ist bereits bekannt (ohne Ordnung auf I, aber das ändert ja nichts an der direkten Summe).

(1) ⇒ (3): geht analog (ÜA).

(3) ⇒ (2): Folgt aus dem obigen Lemma (mit seinem Beweis), denn endliche direkte Summen von injektiven Moduln sind wieder injektiv. □

Duale Theorie: Inverse oder projektive Limites

Definition 8.104. *Sei wieder $(I, \leq)$ halbgeordnete Menge, $\mathfrak{C}$ eine Kategorie, $F : \mathfrak{C}_I \to \mathfrak{C}$ jetzt ein* kontravarianter *Funktor.*

Dann heißt F ein ***inverses System*** *oder* ***projektives System*** *in $\mathfrak{C}$, indiziert über $(I, \leq)$.*

Bemerkung. Wir haben dann dual zum direkten Fall $F \mathrel{\widehat{=}} ((C_i)_{i\in I}, (\rho_{ij})_{i\leq j})$, $C_i \in \operatorname{obj}(\mathfrak{C})$ und $\rho_{ij} : C_j \to C_i$.

$\boxed{\varprojlim F}$

Definition 8.105. *Sei $F \mathrel{\widehat{=}} ((C_i)_{i\in I}, (\rho_{ij})_{i\leq j})$ inverses System in $\mathfrak{C}$, dann sei der (kontravariante) Funktor*

$$\varprojlim F : \mathfrak{C} \longrightarrow \underline{\mathrm{Ens}}$$

definiert durch

$$\begin{aligned} A &\longmapsto \{(g_i)_{i\in I} \,|\, \forall i : g_i : A \to C_i, \forall i \leq j : \rho_{ji} \circ g_i = g_j\} \\ \left(A \xrightarrow{f} D\right) &\mapsto (\Box \circ f)_* : \left(\varprojlim F\right)(B) \to \left(\varprojlim F\right)(A) \\ &\qquad\qquad (\gamma_i)_{i\in I} \mapsto (\gamma_i \circ f)_{i\in I} \end{aligned}$$

Definition 8.106. *Falls für ein inverses System F der (kontravariante) Funktor $\varprojlim F$ darstellbar ist (d.h. funktorisomorph zu $\operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(\Box, B)$ mit einem geeigneten B), dann* ***hat*** *F* ***einen projektiven Limes*** *(bzw.* ***inversen Limes****).*

Bemerkung. Auch in diesem Falle existiert dann ein universeller Punkt $(B, (\delta_i)_{i\in I})$, $\delta_i : B \to C_i$ mit Universaleigenschaft

(i) $\forall i \leq j: \ \delta_i = rho_{ij} \circ \delta_j$

(ii) Ist ebenso $(X \xrightarrow{\alpha_i} C_i)_{i\in I}$ mit $\alpha_i = \rho_{ij} \circ \alpha_j$, so existiert genau ein $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, B)$ mit $\alpha_i = \delta_i \circ f$ für alle i.

Definition 8.107. *Wir nennen in diesem Fall diesen universellen Punkt*

$$\varprojlim F := \varprojlim_{i\in I} C_i := (B, (\delta_j)_j)$$

den ***projektiven Limes*** *(oder* ***inversen Limes****) von F.* $\boxed{\varprojlim F}$

Frage. In welchen Kategorien existieren inverse (projektive) Limites?

$\boxed{Z_F}$

$\boxed{\text{Satz 8.5.3.}}$ Sei $F \triangleq ((C_i)_{i\in I}, (\rho_{ij})_{i\leq j}) : \mathfrak{C}_i \to \underline{\mathrm{Ens}}$ inverses System von Mengen und

$$Z_F := \left\{ (\xi_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} C_i \,\middle|\, \forall i \leq j: \ \rho_{ij}(\xi_j) = \xi_j \right\}.$$

Ist $Z_F \neq \varnothing$, so ist $\left(Z_F, (Z_F \xrightarrow{\mathrm{pr}_i} C_i)_{i\in I}\right)$ ein inverser Limes für F.

Beweis. Nachrechnen. □

$\boxed{\text{Satz 8.5.4.}}$ In $\underline{\mathrm{Mod}}_R$ existieren *stets* projektive Limites für inverse Systeme von R-Moduln.

Beweis. Sei also $F = ((M_i)_{i\in I}, (\rho_{ij})_{i\leq j})$ ein inverses System in $\underline{\mathrm{Mod}}_R$. Wir betrachten das Z_F aus Satz 8.5.3. Es ist offenbar $(0)_{i\in I} \in Z_F$, also $Z_F \neq 0$. Damit ist

$$Z_F = \bigcap_{i\leq j} \ker(\rho_{ij} \circ \delta_j - \delta_i)$$

ein R-Untermodul von $\prod_{i\in I} M_i$. Das heißt, $\varprojlim_{i\in I} M_i$ existiert und Z_F ist ein kanonisches Modell. □

Beispiel 8.5.5. Sei $\mathfrak{C} = \underline{\mathrm{Ens}}$, $(E_i)_i \in I$ Familie von Mengen. Betrachte die (minimale) Halbordnung $i \leq j :\Leftrightarrow i = j$. Dann existiert $\varprojlim_{i\in I} E_i$ und ist gleich $\prod_{i\in I} E_i$.

Bemerkung. Analog zum Fazit aus Beispiel 8.5.4 ist der projektive Limes auch eine Verallgemeinerung der Schnittmenge.

Beispiel 8.5.6. Seien $M_1, M_2, M_3 \in \operatorname{obj}(\underline{\mathrm{Mod}}_R)$ mit $I = \{1,2,3\}$, $1 \leq 2$, $1 \leq 3$, $2 \nleq 3 \nleq 2$ sowie zugehörigen ρ_{ij}:

$$\begin{tikzcd} M_2 \arrow[r, "\rho_{12}"'] & M_1 \\ & M_3 \arrow[u, "\rho_{13}"] \end{tikzcd}$$

Dann existiert $\varprojlim\limits_{1,2,3} M_i$ und ist wegen der Universaleigenschaft isomorph zum Faserprodukt bzw. Pullback $M_2 \underset{(\rho_{12},\rho_{13})}{\times} M_2$:

$$\begin{tikzcd} & M_2 \arrow[r, "\rho_{12}"'] & M_1 \\ M_2 \underset{(\rho_{12},\rho_{13})}{\times} M_2 \cong & \varprojlim\limits_{1,2,3} M_i \arrow[u, dashed] \arrow[ur, dashed] \arrow[r, dashed] & M_3 \arrow[u, "\rho_{13}"'] \end{tikzcd}$$

Fazit. Inverse (projektive) Limites sind Verallgemeinerungen von

(a) Produkten

(b) Durchschnitten

(c) Pullbacks/Faserprodukten.

Beispiel 8.5.7. Weitere Beispiele von Verwendungen des projektiven Limes sind

(1) der Ring der ganzen p-adischen Zahlen $\mathbb{Z}_p = \varprojlim\limits_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ (mit seinem Quotientenkörper $\mathbb{Q}_p = Q(\mathbb{Z}_p)$)

(2) die $\mathfrak{a}$-adische Komplettierung $\hat{M}^{\mathfrak{a}} = \varprojlim\limits_{n \in \mathbb{N}} M/\mathfrak{a}^n M$ für einen R-Modul M und ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$.

Prägarben

$\boxed{\underline{\mathrm{Off}}(X)}$ **Definition 8.108.** *Sei X ein topologischer Raum. Dann sei die* ***Kategorie der offenen Mengen*** $\underline{\mathrm{Off}}(X)$ *definiert durch*

$$\operatorname{obj}(\underline{\mathrm{Off}}(X)) := \mathrm{Off}(X) = \{U \subseteq X \mid U \textit{ offen}\}$$

$$\operatorname{Hom}_{\underline{\mathrm{Off}}(X)}(U,V) = \begin{cases} \left\{\mathrm{incl}_U^V : U \to V\right\} & \textit{falls } \varnothing \neq U \subseteq V \\ \left\{\varnothing := \varnothing^V : \varnothing \to V\right\} & \textit{falls } U = \varnothing \\ \varnothing & \textit{sonst} \end{cases}$$

Die Verkettung sei die von $\underline{\mathrm{Ens}}$ *geerbte (d.h.* $\mathrm{incl}_V^W \circ \mathrm{incl}_U^V = \mathrm{incl}_U^W$*), mit* $f \circ \varnothing^U := \varnothing^V$*, und* $\mathrm{id}_U = \mathrm{incl}_U^U$.

Definition 8.109. *Sei $\mathfrak{C} \in \left\{\underline{\mathrm{Ens}}, \underline{\mathrm{Ab}}, \underline{\mathrm{Mod}}_R, \underline{\mathrm{Alg}}_R\right\}$, X ein topologischer Raum. Eine* ***$\mathfrak{C}$-Prägarbe*** *über X ist ein kontravarianter Funktor $P : \underline{\mathrm{Off}}(X) \to \mathfrak{C}$.*

Bemerkung. Einfacher formuliert: Eine $\mathfrak{C}$-Prägarbe P ist eine Familie $(P(U))_{U\in\mathrm{Off}(X)}$ von $\mathfrak{C}$-Objekten, zusammen mit **Einschränkungsmorphismen** $\rho_{VU} : P(V) \to P(U)$ für $U \subseteq V$, welche die Kompatibilitätsbedingungen $\rho_{VU} \circ \rho_W V = \rho_W U$ für $U \subseteq V \subseteq W$ erfüllen). (Dabei ist $\rho_{VU} = P(\mathrm{incl}_U^V : U \to V)$.)

Bemerkung. Eine $\mathfrak{C}$-Prägarbe ist also einfach ein inverses System in $\mathfrak{C}$ mit der (gerichteten!) Indexmenge $\mathrm{Off}(X)$ – wir können also die Theorie über (inverse) Limites anwenden.

Definition 8.110. *Es sei $\mathrm{Preg}_{\mathfrak{C}}(X)$ die* ***Kategorie der $\mathfrak{C}$-Prägarben*** *über X, mit*

$$\begin{aligned} \mathrm{obj}\left(\mathrm{Preg}_{\mathfrak{C}}(X)\right) &= \{\mathfrak{C}\text{-}\mathit{Prägarben}\} \\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{Preg}_{\mathfrak{C}}(X)}(P,Q) &= \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Funct}}}(P,Q) \\ &= \left\{ (h_U)_{U\in\mathrm{Off}(U)} \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall U \in \mathrm{Off}(X):\; h_U \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(P(U),Q(U)) \\ \forall U \subseteq V \in \mathrm{Off}(X):\; \rho^Q_{VU} \circ h_V = h_U \circ \rho^P_{VU} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Definition 8.111. *Sei X topologischer Raum, R ein k&u-Ring. Dann bezeichnen wir mit $\underline{\mathrm{PSh}}_R(X)$ die Kategorie der Prägarben von R-Moduln auf X:* $\boxed{\underline{\mathrm{PSh}}_R(X)}$

$$\underline{\mathrm{PSh}}_R(X) := \mathrm{Preg}_{\underline{\mathrm{Mod}}_R}(X) = \underline{\mathrm{Funct}}(\underline{\mathrm{Off}}(X)^o, \underline{\mathrm{Mod}}_R),$$

d.h.

$$\mathrm{obj}(\underline{\mathrm{PSh}}_R(X)) = \{F : \underline{\mathrm{Off}}(X) \to \underline{\mathrm{Mod}}_R \mid F \;\mathit{Prägarbe}\}$$

$$\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{PSh}}_R(X)}(F,G) = \left\{ \delta = (\delta_U)_{U\in\mathrm{Off}(X)} \;\middle|\; \forall U \subseteq V: \begin{array}{ccc} F(V) & \xrightarrow[\delta_V]{} & G(V) \\ {\scriptstyle \rho_U^V(F)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho_U^V(G)} \\ F(U) & \xrightarrow{\delta_U} & G(U) \end{array} \right\}$$

Definition 8.112. *Sei P ein $\mathfrak{C}$-Prägarbe über X. Für $x \in X$ sei* $\boxed{B_x}$

$$B_x := \{U \in \mathrm{Off}(X) \mid x \in U\}$$

die Menge der offenen Umgebungen von X. Auf der disjunkten Vereinigung $\coprod_{U\in B_x} P(U)$ definieren wir dann die Äquivalenzrelation $\sim_x$ via $\boxed{\sim_x}$

$$P(U) \ni f \sim g \in P(V) \;:\Longleftrightarrow\; \exists V_1 \in B_x, V_1 \subseteq U \cap V:\; \rho_{UV_1}(f) = \rho_{VV_1}(g)$$

Die Faktormenge $\boxed{P_x}$

$$P_x := \coprod_{U\in B_x} P(U) \Big/ {\sim_x}$$

heißt dann ***Halm*** *von P in X. Ein Element des Halmes, etwa*

$$[f]_x := \left\{ g \in \coprod_{U\in B_x} P(U) \;\middle|\; g \sim_x f \right\}$$

heißt ***Keim*** *von f in x.*

Bemerkung. Setzt man $\operatorname{Off}^x(X) := \{U \in \operatorname{Off}(X) \mid x \in U\}$, so liefert dies (mit den üblichen Inklusionen) eine (in beide Richtungen) gerichtete Menge, wodurch $\big((F(U))_{U\in\operatorname{Off}^x(X)}, (\rho_{VU})_{x\in U\subseteq V}\big)$ ein direktes System wird. Dann ist

$$\varinjlim_{U\in\operatorname{Off}^x(X)} F(U)$$

definiert und (als Menge) kanonisch isomorph zum oben definierten Halm.

Der Halm trägt also auch eine $\mathfrak{C}$-Struktur.

Bemerkung. Seien $h : P \to G$ ein Morphismus von $\mathfrak{C}$-Prägarben über X, $x \in X$. Für ein $f_x \in P_x$ gibt es dann natürlich ein $U \in B_x$ und ein $f_U \in P(U)$, so dass $[f_U]_x = f_x$. Darauf können wir h_U anwenden und erhalten $h_U(f_U) \in G(U)$, daraus ein $[h_U(f_U)]_x \in G_x$. Dies gibt uns eine Zuordnung $h_x : P_x \to G_x$.

$$\begin{tikzcd}
f_U \arrow[rrr, mapsto] \arrow[dd, mapsto] \arrow[dr, phantom, sloped, "\in"] & & & h_U(f_U) \arrow[dd, mapsto] \arrow[dl, phantom, sloped, "\ni"] \\
& P(U) \arrow[r, "h_U"'] \arrow[d, "{[\Box]_x}"] & G(U) \arrow[d, "{[\Box]_x}"'] & \\
f_x \arrow[r, phantom, "\in"] & P_x \arrow[r, dashed, "h_x"] & G_x \arrow[r, phantom, "\ni"] & {[h_U(f_U)]_x =: h_x(f_x)}
\end{tikzcd}$$

h_x ist auch wohldefiniert: Ist $f_V \in P(V)$ ein weiteres Element mit $[f_V]_x = f_x$, so gibt es (weil $f_V \sim_x f_X$) eine Teilmenge $V_1 \subseteq U \cap V$ mit $\rho^P_{UV_1}(f_U) = \rho^P_{VV_1}(f_V)$, und aufgrund der Verträglichkeit der $h_\Box$ mit den $\rho_{\Box\Box}$ ist

$$\rho^G_{UV_1}(h_U(f_U)) = h_{V_1}(\rho^P_{UV_1}(f_U)) = h_{V_1}(\rho^P_{VV_1}(f_V)) = \rho^G(h_V(f_V)),$$

also $h_V(f_V) \sim_x h_U(f_U)$, d.h. $[h_V(f_V)]_x = [h_U(f_U)]_x$.

$$\begin{tikzcd}
P(U) \arrow[rr, "h_U"] \arrow[dr, "\rho^P_{UV_1}"] \arrow[ddd] & & G(U) \arrow[dr, "\rho^G_{UV_1}"] \arrow[ddd] & \\
& P(V_1) \arrow[rr, "h_{V_1}"] & & G(V_1) \\
& P(V) \arrow[u, "\rho^P_{VV_1}"] \arrow[rr, "h_V"] \arrow[dl] & & G(V) \arrow[u, "\rho^G_{VV_1}"'] \arrow[dl] \\
P_x & & G_x &
\end{tikzcd}$$

h_x wird auch ein $\mathfrak{C}$-Morphismus, durch die Universaleigenschaft von $\varinjlim$.

Beispiel 8.5.8. Sei X ein topologischer Raum. Dann gibt es

$$\begin{aligned}
C(\Box, \mathbb{R}) : \underline{\operatorname{Off}}(X) &\longrightarrow \underline{\mathrm{Ab}} \\
U &\longmapsto C^0(U, \mathbb{R}) := \operatorname{Hom}_{\underline{\mathrm{Top}}}(U, \mathbb{R}) \\
(U \hookrightarrow V) &\longmapsto \rho^V_U : C(V, \mathbb{R}) \to C(U, \mathbb{R}) \\
& \qquad\qquad\qquad f \mapsto f|_U
\end{aligned}$$

$C(\Box, \mathbb{R})$ ist eine $\underline{\mathrm{Vect}}_{\mathbb{R}}$-Prägarbe (d.h. $\underline{\mathrm{Mod}}_{\mathbb{R}}$-Prägarbe), die **Prägarbe der stetigen reellwertigen Funktionen** auf X.

Beispiel 8.5.9. Sei X topologischer Raum, G abelsche Gruppe. Dann ist

$$\begin{aligned} C_G : \underline{\mathrm{Off}}(X) &\longrightarrow \underline{\mathrm{Ab}} \\ U &\longmapsto \begin{cases} G & U \neq \varnothing \\ (0) & U = \varnothing \end{cases} \\ (U \subseteq V) &\longmapsto \begin{cases} \mathrm{id}_G & U \neq \varnothing \\ G \twoheadrightarrow (0) & U = \varnothing \neq V \\ (0) \to (0) & V = \varnothing \end{cases} \end{aligned}$$

eine Prägarbe von abelschen Gruppen auf X, eine sogenannte **konstante Prägarbe**.

Definition 8.113. *Sei $\delta : F \to G$ ein Morphismus in $\underline{\mathrm{PSh}}_R(X)$, also $\delta = (\delta_U)_{U \in \mathrm{Off}(X)}$ mit Kompatibilitätsbedinungen.*

(a) Dann sei

$$(\ker \delta) : \underline{\mathrm{Off}}(X) \longrightarrow \underline{\mathrm{Mod}}_R$$

definiert durch

$$\begin{aligned} U &\longmapsto (\ker \delta)(U) := \ker \delta_U \subseteq F(U) \\ (U \subseteq V) &\longmapsto \rho_U^V(\ker \delta) : \ker \delta_V \to \ker \delta_U, \end{aligned}$$

$\rho_U^V(\ker \delta)$ *der induzierte* ker*-Homomorphismus in dem Diagramm:*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & \ker \delta_V \arrow[r, tail] \arrow[d, dashed] & F(V) \arrow[r] \arrow[d] & G(V) \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & \ker \delta_U \arrow[r, tail] & F(U) \arrow[r] & G(U) \end{tikzcd}$$

(b) entsprechend seien auch $\operatorname{coker} \delta$ *und* $\operatorname{im} \delta$ *definiert.*

Bemerkung. $\ker \delta$, $\operatorname{coker} \delta$ und $\operatorname{im} \delta$ sind für einen $\underline{\mathrm{PSh}}_R(X)$-Morphismus ebenfalls $\underline{\mathrm{Mod}}_R$-Prägarben auf X.

<table><tr><td>

SATZ 8.5.5. Sei X topologischer Raum, R ein Ring.

(1) $\ker \delta$, $\operatorname{coker} \delta$, $\operatorname{im} \delta$ sind in $\underline{\mathrm{PSh}}_R(X)$ wirklich Kern, Kokern und Bild von δ (im kategoriellen Sinne).

(2) $\underline{\mathrm{PSh}}_R(X)$ ist eine additive exakte Kategorie.

</td></tr></table>

Beweis. Klar. $\square$

Satz 8.5.6. Sei X topologischer Raum, R ein Ring. Dann ist $\underline{\mathrm{PSh}}_R(X)$ sogar eine *abelsche* Kategorie, mit Produkten, Koprodukten, direkten und inversen Limites.

Beweis. Sei $(F_i)_{i\in I}$ Familie in $\underline{\mathrm{PSh}}_R(X)$. Ein Koprodukt (direkte Summe) von $(F_i)_i$ erhält man dann als

$$\begin{aligned}
\left(\bigoplus_{i\in I} F_i\right) : \underline{\mathrm{Off}}(X) &\longrightarrow \underline{\mathrm{Mod}}_R \\
U &\longmapsto \bigoplus_{i\in I}(F_i(U)) \\
(U \subseteq V) &\longmapsto \rho_U^V\left(\bigoplus_{i\in I} F_i\right) \\
&:= \bigoplus_{i\in I}\left(\rho_U^V(F_i)\right) \ : \ \bigoplus_{i\in I} F_i(V) \to \bigoplus_{i\in I} F_i(U) \\
&\qquad\qquad (\xi_i)_i \mapsto \left(\rho_U^V(F_i)(\xi_i)\right)_{i\in I}
\end{aligned}$$

Dieses Objekt in $\underline{\mathrm{PSh}}_R(X)$ ist wirklich ein Koprodukt.

Analog erhält man ein Produkt und direkten bzw. inversen Limes (für halbgeordnete Mengen I und eine direkte/inverse Familie $(F_i)_i$):

$$\begin{aligned}
\left(\prod_{i\in I} F_i\right)(U) &:= \prod_{i\in I}(F_i(U)) \\
\left(\varinjlim_{i\in I} F_i\right)(U) &:= \varinjlim_{i\in I}(F_i(U)) \\
\left(\varprojlim_{i\in I} F_i\right)(U) &:= \varprojlim_{i\in I}(F_i(U)),
\end{aligned}$$

die mit den kanonischen Bildern für Morphismen zu Prägarben werden und dabei wirklich die Universaleigenschaften für Produkte und direkte/indirekte Limites erfüllen. □

Beispiel 8.5.10. Sei R ein k&u-Ring, $X := \operatorname{Spec} R$ das Primspektrum von R mit der Zariski-Topologie. Diese hat die Topologie-Basis $\mathcal{B}_X := \{D(f) \mid f \in R\}$, mit den offenen Basismengen $D(f) = \{\mathfrak{p} \mid f \notin p\}$.

$\boxed{\mathcal{O}_X}$ Dann sei

$$\mathcal{O}_X : \underline{\mathrm{Off}}(X) \longrightarrow \underline{\mathrm{Alg}}_R \subseteq \underline{\mathrm{Mod}}_R$$

definiert durch die Lokalisierungsringe

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_X(D(f)) &:= R_f \\
\mathcal{O}_X(U) &:= \varprojlim_{\substack{f\in R \\ D(f)\subseteq U}} R_f
\end{aligned}$$

(Insbesondere ist $\mathcal{O}_X(X) = \mathcal{O}_X(D(1)) = R_1 = R$.)

> SATZ 8.5.7. $\mathcal{O}_X : \mathrm{Off}(X) \to \underline{\mathrm{Alg}}_R$ ist wohldefiniert und eine Prägarbe von R-Algebren auf $X = \operatorname{Spec} R$.

Beweisidee.

(a) Zunächst zeigen wir, dass $\mathcal{O}_X|_{\mathcal{B}_X} : \underline{\mathcal{B}}_X \to \underline{\mathrm{Alg}}_R$ eine Prägarbe ist.
Für $f, g \in R$ ist

$$\begin{aligned} & D(f) \subseteq D(g) \\ & \Leftrightarrow V(f) \supseteq V(g) \\ & \Leftrightarrow \sqrt{(f)} \subseteq \sqrt{(g)} \\ & \Leftrightarrow f \in \sqrt{(g)} \\ & \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \exists h \in R: \; f^n = g \cdot h \end{aligned}$$

Damit erhält man eine Abbildung

$$\begin{aligned} \rho_f^g : R_g &\longrightarrow R_f \\ \frac{r}{g} &\longmapsto \frac{r \cdot h}{f^n}, \end{aligned}$$

welche nicht von der Wahl von n und h abhängt.
ρ_g^f ist R-Algebra-Homomorphismus und für $D(f) \subseteq D(g) \subseteq D(l)$ ist die Kompatibititätsbedingung $\rho_f^l = \rho_f^g \circ \rho_g^l$ erfüllt.
Das heißt, $\mathcal{O}_X|_{\mathcal{B}_X}$ ist eine Prägarbe.

(b) $\mathcal{O}_X(U) := \varprojlim_{D(f) \subseteq U} R_f$ erweitert dies nun zu einer Prägarbe auf X.

□

Garben

Definition 8.114. *Sei $\mathfrak{C}$ wieder eine unserer üblichen konkreten Kategorien, X ein topologischer Raum. Eine Prägarbe $F \in \mathrm{obj}(\mathrm{Preg}_{\mathfrak{C}}(X))$ heißt **Garbe**, falls folgende Axiome erfüllt sind:*

(Sh 1) *Für alle $U \in \mathrm{Off}(X)$ und alle offenen Überdeckungen $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, für alle $(s,t) \in F(U)^2$ gilt:*

$$(\forall i \in I: \; \rho_{UU_i}(s) = \rho_{UU_i}(t)) \Rightarrow s = t$$

(Sh 2) *Für alle $U \in \mathrm{Off}(X)$ und alle offenen Überdeckungen $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, für alle $(s_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} F(U_i)$ gilt:*
Ist $\rho_{U_i(U_i \cap U_j)}(s_i) = \rho_{U_j(U_i \cap U_j)}(s_j)$ für alle (i,j), so gibt es ein ein $s \in F(U)$ mit $\rho_{UU_i}(s) = s_i$ für alle i.

Eine Prägarbe, welche (Sh 1) erfüllt, heißt auch ***separierte Prägarbe****.*

Beispiel 8.5.11. Unsere Prägarbe $C^0(\square, \mathbb{R})$ der stetigen reellen Funktionen ist sogar Garbe von $\mathbb{R}$-Algebren.

$\boxed{s|_U}$ **Definition 8.115.** *Für $s \in F(V)$ und $U \subseteq V$ schreiben wir oft $s|_U := \rho_{VU}$.*

$\boxed{C_M}$ *Beispiel* 8.5.12. Sei X topologischer Raum M ein (nichttrivialer) R-Modul, und C_M die konstante Prägarbe auf X, d.h.

$$C_M(U) = \begin{cases} M & U \neq \varnothing \\ (0) & U = \varnothing \end{cases}.$$

Dann ist C_M eine Garbe genau dann, wenn X irreduzibel ist.

C_M ist immer separierte Garbe, aber (Sh 2) (das „Verklebungs-Axiom“) macht für nicht irreduzible Räume Probleme: Man hat dann nichtleere offene Mengen U_1 und U_2 mit $U_1 \cap U_2 = \varnothing$, und mit $g_1 \in C_M(U_1) = M$, $g_2 \in C_M(U_2)$, $g_1 \neq g_2$ ist ja $\rho_{U_1\varnothing}(g_1) = 0 = \rho_{U_2\varnothing}(g_2)$. Mit (Sh 2) würde es nun für $U = U_1 \cup U_2$ ein $g \in C_M(U)$ geben, so dass

$$g_1 = \rho_{UU_1}(g) = g = \rho_{UU_2}(g) = g_2$$

ist, und das ist ja ein Widerspruch zu $g_1 \neq g_2$.

$\boxed{\hat{C}_M}$ *Beispiel* 8.5.13. Die Prägarbe

$$\begin{aligned} \hat{C}_M : \underline{\mathrm{Off}}(X) &\longrightarrow \underline{\mathrm{Mod}}_R \\ U &\longmapsto \{f : U \to M \mid f \text{ lokal konstant}\} \end{aligned}$$

(mit den üblichen Einschränkungen) ist eine Garbe, und es gibt einen Mod_R-Prägarbenmonomorphismus

$$\begin{aligned} \theta : C_M &\to \hat{C}_M. \\ \theta_U(f) &:= f \end{aligned}$$

Definition 8.116. *Ist X lokal zusammenhängend, so heißt $\hat{C}_M$ die* ***konstante Garbe*** *zu M.*

Bemerkung. Für alle $x \in X$ (lokal zusammenhängend) ist

$$(\hat{X}_M)_x = \varinjlim_{U \in \mathrm{Off}^x(X)} \hat{C}_M(U) \cong M.$$

$\boxed{\underline{\mathrm{Sh}}_R(X)}$ **Definition 8.117.** *Die* ***Kategorie der Garben von R-Moduln*** $\underline{\mathrm{Sh}}_R(X)$ *ist definiert durch*

$$\begin{aligned} \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{Sh}}_R(X)) &:= \{F \in \mathrm{obj}(\underline{\mathrm{PSh}}_R(X)) \mid F \textit{ erfüllt } (\mathrm{Sh}\ 1) \textit{ und } (\mathrm{Sh}\ 2).\} \\ \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Sh}}_R(X)}(F, G) &:= \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{PSh}}_R(X)}(F, G), \end{aligned}$$

also als volle Unterkategorie von $\underline{\mathrm{PSh}}_R(X)$.

> $\boxed{\text{SATZ 8.5.8.}}$ Sei $\varphi : F \to G$ Morphismus in $\underline{\mathrm{Sh}}_R(X)$. Dann hat man ja die in $\underline{\mathrm{PSh}}_R(X)$ vorhandenen (und explizit konstruierten) $\ker\varphi$, $\operatorname{im}\varphi$, $\operatorname{coker}\varphi$, zunächst als Prägarben. Dabei gilt:
>
> (1) $\ker\varphi$ ist selbst eine Garbe.
>
> (2) $\operatorname{coker}\varphi$ und $\operatorname{im}\varphi$ sind i.a. keine Garben.

Beweis.

(1) Die Separiertheit ist klar, weil $\ker\varphi$ ja eine Unterprägarbe von F ist.

Sei $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ offene Überdeckung von U. Sei

$$(s_i)_{i\in I} \in \prod_i \underbrace{\ker(\varphi|_{U_i})}_{=(\ker(\varphi))(U_i)}$$

mit $s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{Ui\cap U_j}$ für alle i, j.

Da F eine Garbe ist, existiert ein $s \in F(U)$, so dass $s|_{U_i} = s_i$ für alle i ist. (Wir müssen noch zeigen, dass dieses s auch in $\ker\varphi_U$ ist.)

Für $x \in U$ ist nun $\varphi(s)_x = \varphi_x((s)_x) = \varphi_{U_i}(s_i)_x$ (mit einem i, so dass $x \in U_i$ ist), d.h. $\varphi(s)_x = 0$. Damit gibt es auch ein $V_x \in \mathrm{Off}^x(U)$, so dass $\varphi(s)|_{V_x} = 0$ ist, und weil $U = \bigcup_{x\in U} V_x$ ist, ist (nach (Sh 1) für G) auch $\varphi_U(s) = 0$, also $s \in \ker(\varphi_U)$.

(2) Hier findet man Gegenbeispiele:

Betrachte $\mathcal{H}ol \in \underline{\mathrm{Sh}}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\backslash\{0\})$, mit $\delta : \mathcal{H}ol \to \mathcal{H}ol$, $\delta(f) = \frac{d}{dz}f$. Hier ist $\operatorname{coker}(\delta)(U) = 0$ für alle einfach-zusammenhängenden Mengen, aber $\operatorname{coker}(\delta)(\mathbb{C}\setminus\{0\}) \neq (0)$ ist – dies widerspricht dem Verklebungsaxiom für Garben, also kann $\operatorname{coker}\delta$ keine Garbe sein.

Betrachte $X = \{q, p_1, p_2\}$ mit $\mathrm{Off}(X) = \{\varnothing, X, U_1 := \{q, p_1\}, U_2 := \{q, p_2\}, U := \{q\}\}$, und die Garbe

$$\begin{aligned} F : \mathrm{Off}(X) \to \underline{\mathrm{Vect}}_{\mathbb{Q}}\varnothing &\qquad\qquad \mapsto (0)\\ X &\mapsto \mathbb{Q}\\ U_1 &\mapsto \mathbb{Q}[T_1]\\ U_2 &\mapsto \mathbb{Q}[T_2]\\ U = U_1 \cap U_2 &\mapsto \mathbb{Q}[T_1, T_2] \end{aligned}$$

(mit den kanonischen Inklusionshomomorphismen (bzw. der Projektion auf 0). Als zweite Garbe nehmen wir die konstante $\mathbb{Q}[T_1]$-Garbe $G := C_{\mathbb{Q}[T_1]}$. Betrachte nun

$$\varphi : F \longrightarrow G,$$

definiert durch

$$T_i \longmapsto T_1$$

und $\mathbb{Q}$-Algebra-Fortsetzung.

Hier ist $\operatorname{im}\varphi$ keine Garbe, denn sonst wäre wegen $T_1 \in \operatorname{im}\varphi(U_i)$ und der Verklebungs-Axiome auch $T_1 \in \operatorname{im}\varphi(X)$, also gibt es ein $P \in F(X) = \mathbb{Q}$ mit $\varphi(X)(P) = T_1$ – also müsste $T_1 \in \mathbb{Q}$ oder $T_2 \in \mathbb{Q}$ sein.

$\square$

Anhang

Liste der Dateinamen

Hier die Liste aller Dateien, die während des LaTeX-Laufes, welcher dieses Dokument erzeugte, verwendet wurden. [3]

Dateiname	Seite	Datum	Ver.	Beschreibung
spezialisierung.tex	1	2008/02/28	v1.24	Haupt-Datei, lädt alle anderen (PE)
alg-script.cls	1	2006/03/23	v0.13	Pauls Algebra-Skript-Klasse (PE)
scrbook.cls	1	2006/07/22	v2.95a	KOMA-Script document class (book)
scrkbase.sty	1	2006/07/22	v2.95a	KOMA-Script package (basics and keyval use)
scrlfile.sty	1	2006/03/28	v2.95	KOMA-Script package (loading files)
keyval.sty	1	1999/03/16	v1.13	key=value parser (DPC)
leqno.clo	1	1998/08/17	v1.1c	Standard LaTeX option (left equation numbers)
bk11.clo	1	2004/02/16	v1.4f	Standard LaTeX file (size option)
typearea.sty	1	2006/07/22	v2.95a	KOMA-Script package (type area)
amsmath.sty	1	2000/07/18	v2.13	AMS math features
amstext.sty	1	2000/06/29	v2.01	
amsgen.sty	1	1999/11/30	v2.0	
amsbsy.sty	1	1999/11/29	v1.2d	
amsopn.sty	1	1999/12/14	v2.01	operator names
amsthm.sty	1	2004/08/06	v2.20	
amssymb.sty	1	2002/01/22	v2.2d	
amsfonts.sty	1	2001/10/25	v2.2f	
eucal.sty	1	2001/10/01	v2.2d	Euler Script fonts
amscd.sty	1	1999/11/29	v1.2d	
inputenc.sty	1	2004/02/05	v1.0d	Input encoding file
latin1.def	1	2004/02/05	v1.0d	Input encoding file
babel.sty	1	2004/11/20	v3.8d	The Babel package

[3] genauer: Es ist die Liste aller Dokumente, die einen LaTeX-Lauf früher verwendet wurden. Aber nach einigen Läufen sollte sich die Liste stabilisieren.

Dateiname	Seite	Datum	Ver.	Beschreibung
ngermanb.ldf	1	2004/02/20	v2.6m	new German support from the babel system
xspace.sty	1	2006/05/08	v1.12	Space after command names (DPC,MH)
enumerate.sty	1	1999/03/05	v3.00	enumerate extensions (DPC)
makeidx.sty	1	2000/03/29	v1.0m	Standard LaTeX package
mpgmpar.sty	1	2006/05/23	v0.2	Randnotizen auch in Minipages (PE)
specdefs.sty	1	2006/04/03	v0.3a	Definitionen fuer das Spezialisierungs-Skript (PE)
robustcommand.sty	1	2006/03/23	v0.1	Robuste Kommandos (PE)
draftcopy.sty	1	2002/02/25	v2.16	
draftcopy.cfg	1	—		
randbild.sty	1	2007/05/15	v0.2	Bild am Seitenrand (PE)
pst-plot.sty	1	2004/07/15	package	wrapper for pst-plot.tex
pstricks.sty	1	2004/05/12	v0.2l	LaTeX wrapper for ‘PSTricks’ (RN,HV)
pstricks.tex	1	2004/06/22	v1.04	‘PSTricks’ (tvz)
xcolor.sty	1	2007/01/21	v2.11	LaTeX color extensions (UK)
color.cfg	1	2005/02/03	v1.3	color configuration of teTeX/TeXLive
dvips.def	1	1999/02/16	v3.0i	Driver-dependant file (DPC,SPQR)
pst-plot.tex	1	2004/05/18	1.41	‘pst-plot’ (tvz)
varwidth.sty	1	2003/03/10	ver	0.9a; Variable-width minipages
mparhack.sty	1	2003/05/22	v1.3a	(T. Sgouros and S. Ulrich)
noitcrul.sty	1	2006/04/11	v0.2	Unterstreichungen ohne italic correction (PE)
faktor.sty	1	2006/04/05	v0.1b	Faktor-Ringe, -Gruppen, -Raeume (PE)
shorttoc.sty	1	2002/08/20	v1.3	Short table of contents (JPFD)
stmaryrd.sty	1	1994/03/03	St	Mary’s Road symbol package
mathtools.sty	1	2004/10/10	v1.01a	mathematical typesetting tools (MH)

Dateiname	**Seite**	**Datum**	**Ver.**	**Beschreibung**
calc.sty	1	2005/08/06	v4.2	Infix arithmetic (KKT,FJ)
mhsetup.sty	1	2004/10/10	v1.0b	programming setup (MH)
extpfeil.sty	1	2006/07/27	v0.3	Extensible Pfeile (PE)
cancel.sty	1	2000/03/12	v2.1	Cancel math terms
pst-node.sty	1	2004/07/15	package	wrapper for pst-node.tex
pst-node.tex	1	2000/11/09	97	patch 11 'pst-node' (tvz)
pst-3dplot.sty	1	2006/02/07	package	wrapper for pst-3dplot.tex (hv)
pst-3dplot.tex	1	2007/10/03	v1.77	'PST-3dplot' (hv)
pst-xkey.tex	1	2005/11/25	v1.6	PSTricks specialization of xkeyval (HA)
xkeyval.sty	1	2006/11/18	v2.5f	package option processing (HA)
xkeyval.tex	1	2006/11/18	v2.5f	key=value parser (HA)
fontenc.sty	1	—		
t1enc.def	1	2004/02/22	v1.99f	Standard LaTeX file
showkeys.sty	1	2006/01/09	v3.13	Show cite and label keys (DPC)
hyperref.sty	1	2003/11/30	v6.74m	Hypertext links for LaTeX
pd1enc.def	1	2003/11/30	v6.74m	Hyperref: PDFDocEncoding definition (HO)
hyperref.cfg	1	2005/03/07	hyperref	configuration of teTeX 3.0
url.sty	1	1999/03/02		ver 1.4 Verb mode for urls, email addresses, and file names
hdvips.def	1	2003/11/30	v6.74m	Hyperref driver for dvips
pdfmark.def	1	2003/11/30	v6.74m	Hyperref definitions for pdfmark specials
glossary.sty	1	2006/07/20	2.4	(NLCT)
ifthen.sty	1	2001/05/26	v1.1c	Standard LaTeX ifthen package (DPC)
longtable.sty	1	2004/02/01	v4.11	Multi-page Table package (DPC)
dateiliste.sty	1	2006/07/27	v0.3	Ausgabe der Dateiliste (PE)
rcsinfo.sty	1	2005/02/20	v1.10	
ltxtable.sty	1	1995/12/11	v0.2	longtable/tabularx merge (DPC)

Dateiname	**Seite**	**Datum**	**Ver.**	**Beschreibung**
tabularx.sty	1	1999/01/07	v2.07	‘tabularx’ package (DPC)
array.sty	1	2005/08/23	v2.4b	Tabular extension package (FMi)
verbatim.sty	1	2003/08/22	v1.5q	LaTeX2e package for verbatim enhancements
mathrsfs.sty	1	1996/01/01	Math	RSFS package v1.0 (jk)
graphicx.sty	1	1999/02/16	v1.0f	Enhanced LaTeX Graphics (DPC,SPQR)
graphics.sty	1	2001/07/07	v1.0n	Standard LaTeX Graphics (DPC,SPQR)
trig.sty	1	1999/03/16	v1.09	sin cos tan (DPC)
graphics.cfg	1	2005/02/03	v1.3	graphics configuration of teTeX/TeXLive
psfrag.sty	1	1998/04/11	v3.04	PSfrag (MCG)
float.sty	1	2001/11/08	v1.3d	Float enhancements (AL)
nameref.sty	1	2003/12/03	v2.21	Cross-referencing by name of section
t1cmss.fd	1	1999/05/25	v2.5h	Standard LaTeX font definitions
omxyhex.fd	1	—		
umsa.fd	1	2002/01/19	v2.2g	AMS font definitions
umsb.fd	1	2002/01/19	v2.2g	AMS font definitions
utxexa.fd	1	2000/12/15	v3.1	
ustmry.fd	1	—		
ursfs.fd	1	1998/03/24	rsfs	font definition file (jk)
t1cmtt.fd	1	1999/05/25	v2.5h	Standard LaTeX font definitions
ueus.fd	5	2002/01/19	v2.2g	AMS font definitions
ueuf.fd	8	2002/01/19	v2.2g	AMS font definitions
glossar.tex	10	2007/10/16	v1.10	Einträge und Einstellungen für das Glossar (PE)
einleitung.tex	10	2008/02/28	v1.6	Einleitung in das Skript (PE)
omscmr.fd	11	1999/05/25	v2.5h	Standard LaTeX font definitions
algebraII.tex	12	2007/03/22	v1.24	VL Algebra II (PE)
algebraIIa.tex	15	2008/01/08	v1.13	VL Algebra II, Kapitel 1 (PE)
algebraIIb.tex	75	2007/08/22	v1.13	VL Algebra II, Kapitel 2 (PE)

Dateiname	Seite	Datum	Ver.	Beschreibung
algebraIIc.tex	110	2007/08/07	v1.11	VL Algebra II, Kapitel 3 (PE)
algebraIId.tex	153	2008/02/14	v1.12	VL Algebra II, Kapitel 4 (PE)
KategorielleAlgebra.tex	201	2008/02/25	v1.15	VL Kategorielle Algebra (PE)
algebrGeomI.tex	216	2006/05/01	v1.21	VL Algebraische Geometrie I (Hauptdatei) (PE)
algebrGeomIa.tex	221	2007/12/18	v1.15	VL Algebraische Geometrie I, Abschnitte 1–5 (PE)
algebrGeomIb.tex	283	2007/09/25	v1.26	VL Algebraische Geometrie I (Abschnitte 6–8) (PE)
algebrGeomII.tex	355	2007/10/11	v1.7	VL Algebraische Geometrie II (PE)
algGeomIIa.tex	359	2007/06/06	v1.18	VL Algebraische Geometrie II, 1 (PE)
algGeomIIb.tex	403	2007/09/11	v1.19	VL Algebraische Geometrie II, 2 (PE)
algGeomIIc.tex	432	2007/10/01	v1.20	VL Algebraische Geometrie II, 3 (PE)
algGeomIId.tex	475	2007/10/16	v1.19	VL Algebraische Geometrie II, 4 (PE)
algGeomIIe.tex	502	2007/10/11	v1.6	VL Algebraische Geometrie II, 5 (PE)
koHomoTheo.tex	511	2008/02/28	v1.6	VL (Ko-)Homologietheorien und ihre Anwendung (PE)
koHomoTheo1.tex	515	2008/02/12	v1.9	VL (Ko-)Homologieth., Teil 1: singuläre Homologie top. Räume (PE)
koHomoTheo2.tex	535	2008/02/28	v1.14	VL (Ko-)Homologietheorien und ihre Anwendung, Teil 2 (PE)
koHomoTheo3.tex	558	2008/02/28	v1.12	VL (Ko-)Homologietheorien und ihre Anwendung, Teil 3 (PE)

Dateiname	**Seite**	**Datum**	**Ver.**	**Beschreibung**
torus-double.eps	578	—		
torus-triple.eps	578	—		
langSequTrDiag.epsi	584	—		
koHomoTheo4.tex	584	2008/02/20	v1.15	VL (Ko-)Homologietheorien und ihre Anwendung, Teil 4 (PE)
koHomoTheo5.tex	637	2008/02/28	v1.5	VL (Ko-)Homologietheorien und ihre Anwendung, Teil 5 (PE)
spezialisierung.filelist	664	2008/02/28	—	automatically generated filelist
spezialisierung.gls	664	—		
spezialisierung.ind	666	—		

Glossar

Hier ein paar Notationen, welche häufig benutzt und nie (bzw. noch nicht in dem bisher aufgeschriebenen Teil) wirklich definiert wurden. (Die Seitennummern geben einige der Verwendungen an.) Alles andere ist über den Index an der passenden Stelle im Skript zu finden.

Notation	**Description**	
einfach	**Definition G.118.** *Ein Ring A heißt* ***einfach****, falls es keine Ringe B und C gibt derart, dass $A \cong B \times C$ (mit der komponentenweisen Multiplikation).* Dies ist äquivalent dazu, dass A nur 0 und 1 als idempotente Elemente hat.	283
$\hom(f)$	Für $f \in \operatorname{Hom}(A, B)$ haben wir $$\begin{aligned} \hom(f) = \hom_C(f) : \operatorname{Hom}(B, C) &\to \operatorname{Hom}(A, C) \\ \psi &\mapsto \psi \circ f \end{aligned}$$ (Was C ist, geht bei der Schreibweise $\hom(f)$ dann hoffentlich aus dem Kontext hervor.) Ein Spezialfall ist $f^* : A^* \to A^*$ (für Moduln), ebenso wie $f^\# : \operatorname{Abb}(B, k) \to \operatorname{Abb}(B, k)$ (für k-Varietäten).	288, 490

Notation	Description	
Zornsches Lemma	Zunächst eine Definition: **Definition G.119.** *Sei $(\mathfrak{M}, \leq)$ eine beliebige geordnete Menge. $(\mathfrak{M}, \leq)$ heißt* ***induktiv geordnete Menge****, falls gilt: Jede $\leq$-totalgeordnete Teilmenge $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ hat mindestens eine obere Schranke in $\mathfrak{M}$.* Damit kann das Lemma dann formuliert werden: SATZ G.1. **Zornsches Lemma** Sei $(\mathfrak{M}, \leq)$ eine induktiv geordnete Menge. Dann besitzt $\mathfrak{M}$ mindestens ein $\leq$-maximales Element: $\exists c \in \mathfrak{M} : \forall x \in \mathfrak{M} : \quad c \leq x \Rightarrow x = c$ Der Satz mit Beweis findet sich in meiner Mitschrift zu *Lineare Algebra und Analytische Geometrie I* als Satz 0.5.1.	29, 39, 41, 49, 234, 275, 350

Index