Seminarvortrag Differentialgeometrie: Rotationsflächen konstanter Gaußscher Krümmung

Paul Eberman, Jens Körner, Marta Vitalis

10. Juni 2002

Inhaltsverzeichnis

0 Vorbemerkung

Wir verwenden in unseren Formeln als Bild- und Urbildmengen immer $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$. In Wirklichkeit sind hier immer auch nichtleere (idealerweise offene) Teilmengen davon zugelassen, wir schreiben nur $\mathbb{R}^n$, damit klarer wird, welche Dimension der jeweilige Raum hat, und um die Leser nicht durch ständig neue Mengen U, V, W, etc. zu verwirren.

1 Einführung

Drehflächen entstehen im $\mathbb{R}^3$ durch Rotation einer ebenen ($\mathbb{R}^2$-)Kurve um eine Dreh-Achse. Bekannte Beispiele sind Sphären, Zylinder, Tori.

Vereinbarung. Wir wollen stets um die z-Achse rotieren lassen.

Seien $r, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ C^∞-Funktionen, also

$$\begin{aligned}(r,h) : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2\\ t &\longmapsto (r(t), h(t))\end{aligned}$$

Parametrisierung einer Kurve im $\mathbb{R}^2$. Wir betten diese Kurve in die x,z-Ebene des $\mathbb{R}^3$ ein

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3\\ t &\longmapsto (r(t), 0, h(t))\end{aligned}$$

und rotieren diese Kurve um einen Winkel $\rho \in [0, 2\pi) \subset \mathbb{R}$, was durch Multiplikation mit der Drehmatrix D_ρ bewirkt wird. Wir erhalten

$$\begin{aligned}f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3\\ (t,\rho) &\longmapsto f(t,\rho) := D_\rho \cdot (r,0,h)^T(t)\\ &= \begin{pmatrix}\cos\rho & -\sin\rho & 0\\ \sin\rho & \cos\rho & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r(t)\\ 0\\ h(t)\end{pmatrix}\\ &= (r(t)\cos\rho, r(t)\sin\rho, h(t))\end{aligned}$$

Definition.

$$S := f(\mathbb{R}^2) = \big\{(r(t)\cos\rho, r(t)\sin\rho, h(t)) \in \mathbb{R}^3 \mid \rho, t \in \mathbb{R}\big\}$$

heißt **Rotationsfläche** im $\mathbb{R}^3$.

Im Folgenden berechnen wir die Krümmungsgrößen derartiger Flächen.

2 Erste Fundamentalform

Die dafür nötigen partiellen Ableitungen ergeben sich zu

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t}(t,\rho) &= (r'(t)\cos\rho, r'(t)\sin\rho, h'(t))\\ \frac{\partial f}{\partial \rho}(t,\rho) &= (-r(t)\sin\rho, r(t)\cos\rho, 0)\end{aligned}$$

Die erste Fundamentalform ist damit

$$
\begin{aligned}
I &= \begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial f}{\partial \rho}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial \rho} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial f}{\partial \rho}, \frac{\partial f}{\partial \rho} \right\rangle \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} r'^2 + h'^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Bemerkung 1. *Wie wir sehen, ist $I(t,\rho) =: I(t)$ im Falle von Rotationsflächen mit dieser Parametrisierung nur von t abhängig. Damit können wir schreiben:*

$$
\begin{aligned}
I : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathrm{Bil}(\mathbb{R}^2) \cong \mathbb{R}^{2\times 2} \\
t &\longmapsto I(t) = \begin{pmatrix} r'^2(t) + h'^2(t) & 0 \\ 0 & r^2(t) \end{pmatrix} \\
&\qquad\quad\;\, = I_{f(t,\rho)} \\
I(t) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

(vgl. Vortrag „Reguläre Flächen“.)

Ist $r(t) \neq 0\ \forall t \in \mathbb{R}$ und die Ausgangskurve regulär, d.h. $r'(t) \neq 0 \neq h'(0)\ \forall t$, so folgt $r'(t)^2 + h'(t)^2 > 0\ \forall t$, also $I(t)$ reguläre Matrix für alle t. f heißt dann **Immersion**.

3 Verträgliche Normalenvektoren

Das mit der Parametrisierung verträgliche Normalenvektorfeld (in unserer Parametrisierung) ergibt sich als

$$
\begin{aligned}
v : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
v &= N \circ f,
\end{aligned}
$$

wobei hier $N : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ die (mit f verträgliche) Gauß-Abbildung zu S ist.

$$
\begin{aligned}
v &= \frac{\frac{\partial f}{\partial t} \times \frac{\partial f}{\partial \rho}}{\left\| \frac{\partial f}{\partial t} \times \frac{\partial f}{\partial \rho} \right\|} \\
v(t,\rho) &= \frac{\begin{pmatrix} r'(t)\sin\rho \cdot 0 - h'(t)\cdot r(t)\cos\rho \\ h'(t)\cdot(-r(t)\sin\rho) - r'(t)\cos\rho\cdot 0 \\ r'(t)\cos\rho\cdot r(t)\cos\rho - r'(t)\sin(\rho)\cdot(-r(t)\sin(\rho)) \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} r'(t)\sin\rho \cdot 0 - h'(t)\cdot r(t)\cos\rho \\ h'(t)\cdot(-r(t)\sin\rho) - r'(t)\cos\rho\cdot 0 \\ r'(t)\cos\rho\cdot r(t)\cos\rho - r'(t)\sin(\rho)\cdot(-r(t)\sin(\rho)) \end{pmatrix} \right\|} \\
&= \frac{\begin{pmatrix} -h'(t)r(t)\cos\rho \\ -h'(t)r(t)\sin\rho \\ r'(t)r(t) \end{pmatrix}}{\sqrt{(h'(t)r(t)\cos\rho)^2 + (h'(t)r(t)\sin\rho)^2 + (r'(t)r(t))^2}}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{r(t) \cdot \begin{pmatrix} -h'(t)\cos\rho \\ -h'(t)\sin\rho \\ r'(t) \end{pmatrix}}{\sqrt{(h'(t)^2 r(t)^2 + r'(t)^2 r^2)}}$$

Die Normalenvektoren lassen sich also darstellen als

$$v(t,\rho) = \frac{1}{\sqrt{h'(t)^2 + r'(t)^2}} \cdot \begin{pmatrix} -h'(t)\cos\rho \\ -h'(t)\sin\rho \\ r'(t) \end{pmatrix}$$

4 Zweite Fundamentalform

Die für die zweite Fundamentalform nötigen zweiten partiellen Ableitungen ergeben sich zu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial t} = (r''(t)\cos\rho, r''(t)\sin\rho, h''(t)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \rho} = (r'(t)\sin\rho, r'(t)\cos\rho, 0)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial \rho \partial \rho} = (-r\cos\rho, -r\sin\rho, 0)$$

Wir erhalten die zweite Fundamentalform als

$$II = \begin{pmatrix} \left\langle v, \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial t} \right\rangle & \left\langle v, \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \rho} \right\rangle \\ \left\langle v, \frac{\partial^2 f}{\partial \rho \partial t} \right\rangle & \left\langle v, \frac{\partial^2 f}{\partial \rho \partial \rho} \right\rangle \end{pmatrix},$$

wobei für die Einträge gilt

$$\left\langle v, \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial t} \right\rangle (t,\rho) = \frac{-h'(t)\cos\rho \cdot r''(t)\cos\rho + r''(t)\sin\rho \cdot (-h'(t)\sin\rho) + h''(t)r'(t)}{\sqrt{h'(t)^2 + r'(t)^2}}$$
$$= \frac{-h'(t)r''(t) + h''(t)r'(t)}{\sqrt{h'(t)^2 + r'(t)^2}}$$
$$\left\langle v, \frac{\partial^2 f}{\partial \rho \partial t} \right\rangle (t,\rho) = \frac{-r'(t)\sin\rho \cdot (-h'(t)\cos\rho) + (-h'\sin\rho) \cdot r'(t)\cos\rho + 0 \cdot r'(t)}{\sqrt{h'(t)^2 + r'(t)^2}}$$
$$= 0$$
$$\left\langle v, \frac{\partial^2 f}{\partial \rho \partial \rho} \right\rangle (t,\rho) = \frac{-r(t)\cos\rho(-h'(t)\cos\rho) + (-h'(t)\sin\rho)(-r(t)\sin\rho) + 0}{\sqrt{h'(t)^2 + r'(t)^2}}$$
$$= \frac{r(t)h'(t)}{\sqrt{h'(t)^2 + r'(t)^2}}$$

Es ist also (offensichtlich wieder unabhängig von ρ) die zweite Fundamentalform

$$II = \frac{1}{\sqrt{h'^2 + r'^2}} \cdot \begin{pmatrix} -h'r'' + h''r' & 0 \\ 0 & rh' \end{pmatrix}$$
$$II : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{Bil}(\mathbb{R}^2) \cong \mathbb{R}^{2\times 2}$$
$$II(t) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

5 Krümmungsgrößen

(1) Hauptkrümmungen

Die Hauptkrümmungen κ_1 und κ_2 ergeben sich als Eigenwerte der negativen Weingartenabbildung $-dN$. Ihre Matrix bezüglich II und I ist

$$II \cdot I^{-1} = \frac{1}{\sqrt{h'^2 + r'^2}} \begin{pmatrix} \frac{-r''h' + r''h''}{h'^2 + r'^2} & 0 \\ 0 & \frac{rh'}{r^2} \end{pmatrix}$$

Die beiden Hauptkrümmungen sind also (ebenfalls von ρ unabhängig)

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{-r''h' + r'h''}{(h'^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \kappa_2 &= \frac{h'}{r \cdot \sqrt{h'^2 + r'^2}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

Sei nun (r, h) (also die – rotierende – ebene Kurve) nach Bogenlänge parametrisiert. Also ist $1 = \|(r, h)'\| = r'^2 + h'^2$. Für die Fundamentalformen ergibt sich

$$\begin{aligned} I &= \begin{pmatrix} r'^2 + h'^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \\ II &= \frac{1}{\sqrt{h'^2 + r'^2}} \cdot \begin{pmatrix} -h'r'' + h''r' & 0 \\ 0 & rh' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -h'r'' + h''r' & 0 \\ 0 & rh' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= -h'r'' + h''r' \\ \kappa_2 &= \frac{h'}{r} \end{aligned}$$

Lemma. *Die erste Hauptkrümmung κ_1 der Drehfläche S ist genau die Krümmung κ der $\mathbb{R}^2$-Kurve $t \mapsto (r(t), h(t))$.*

Beweis. Nach den Frenetgleichungen gilt für das Frenet-Koordinatensystem ("Zweibein") $e_1, e_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} e_1' &= \kappa e_2 & e_2' &= \kappa e_1 & &\text{und} \\ e_1 &= (r', h') & e_1' &= (r'', h'') & e_2 &= (-h', r') \end{aligned}$$

also

$$\kappa = \langle e_1', e_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} r'' \\ h'' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -h' \\ r' \end{pmatrix} \right\rangle = -r''h' + h''r' = \kappa_1$$

$\square$

Bemerkung 2. *Wegen* $r'^2 + h'^2 = 1$ *gilt*

$$\begin{aligned} 0 &= (r'^2 + r'^2)' = 2r'r'' + 2h'h'' \\ \Leftrightarrow 0 &= r'r'' + h'h'' \\ \Leftrightarrow r'' &= -\frac{h'h''}{r'} \end{aligned} \tag{$*$}$$

Es ergeben sich für κ_1 folgende weitere Darstellungen:

$$\kappa_1 = -r''h' + h''r' \overset{(*)}{=} \frac{h'h''}{r'}h' + h''r' = \frac{h''}{r'}\underbrace{(h'^2 + r'^2)}_{=1 \text{ n.V.}} = \frac{h''}{r'} = \frac{h''h'}{r'h'} \overset{(*)}{=} -\frac{r''}{h'}$$

(2) Gauß- und mittlere Krümmung

Die **Gauß-Krümmung** $K : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ergibt sich also zu

$$K = \kappa_1 \cdot \kappa_2 = -\frac{r''}{h'} \cdot \frac{h'}{r} = -\frac{r''}{r}$$

Die **mittlere Krümmung** $H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist

$$H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{h''}{r'} + \frac{h'}{r}\right) = \frac{rh'' + r'h'}{2rr'} = \frac{(rh')'}{(r^2)'}$$

Es folgt für Flächen mit konstanter gaußscher Krümmung $K \in \mathbb{R}$ bzw. konstanter mittlerer Krümmung $H \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} K &= \frac{-r''}{r} & &\Longleftrightarrow & r'' + rK &= 0 \\ H &= \frac{rh'' + r'h'}{2rr'} & &\Longleftrightarrow & H \cdot (r^2)' &= (rh')' \end{aligned}$$

Ferner ergibt sich als Bedingung für Nabelpunkte einer Drehfläche

$$\kappa_1 = \kappa_2 \Longleftrightarrow \frac{h''}{r'} = \frac{h'}{r} \qquad \Longleftrightarrow h'r' = h''r \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{h''}{h'} = \frac{r'}{r}$$

(3) Fazit

Jede Bedingung an die mittlere Krümmung H und an die Gauß-Krümmung K führt also auf eine Differentialgleichung in r (da h durch $h' = \pm\sqrt{1 - r'^2}$ – bis auf Verschiebung – festgelegt ist).

6 Scheinbare Degeneration

Es können Fälle auftreten, bei denen in einzelnen Punkten eine Singularität vorliegt, d.h. eine Hauptkrümmung wird 0, die andere unendlich (Das nennt man **Degeneration** der Fläche an diesen Punkten).

Aber: Eine Drehfläche kann auf der z-Achse (also $r(t_0) = 0$) in anderer Parametrisierung eine reguläre Fläche sein, sogar C^∞ oder analytisch, obwohl dort

$$I(t) = \begin{pmatrix} r'^2(t_0) + h'(t_0) & 0 \\ 0 & r(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r'^2(t_0) + h'(t_0) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

scheinbar degeneriert. Man muss die Krümmungen dann über Grenzwertbildung berechnen:

$$\kappa_2 = \lim_{t \to t_0} \frac{h'(t)}{r(t)}$$

Das ist (wegen $r(t_0) = 0$) nur dann nicht $\pm\infty$, wenn $\lim\limits_{t \to t_0} h'(0) = 0$. Dann folgt nach L'Hospital:

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \to t_0} \frac{h''(t)}{r'(t)} \\
&= \pm \lim_{t \to t_0} \frac{h''(t)}{\sqrt{1 - h'(t)^2}} \\
&= \pm \frac{\lim\limits_{t \to t_0} h''(t)}{\underbrace{\lim\limits_{t \to t_0} \sqrt{1 - h'(t)^2}}_{=1}} \\
\kappa_2 &= \pm \lim_{t \to t_0} h''(t).
\end{aligned}$$

Beispiel. Betrachten wir die Sphäre, parametrisiert durch $r(t) := \sin t$, $h(t) := -\cos t$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\kappa_1(t) &= -(r''h'' + r'h'')(t) = \sin^2 t + \cos^2 t = 1 \\
\kappa_2(t) &= \frac{h'(t)}{r(t)} = \frac{\sin t}{\sin t} = 1 \quad \text{(auch für } t = 0\text{)}
\end{aligned}$$

Also ist die Sphäre auch in $t = 0$ regulär (denn $h'(0) = 0$). □

Bemerkung 3. *Falls die Fläche regulär und mindestens C^2 ist in einem solchen Punkt t_0 mit $r(t) = 0$, so gilt dort notwendig $\kappa_1(t_0) = \kappa_2(t_0)$ (Nabelpunkt).*

Beweis. Es gilt hier $r(t_0) = 0 = h'(t_0)$, also ist die vorhin gefundene hinreichende Bedingung $h'r' = rh''$ für Nabelpunkte erfüllt. □

7 Drehflächen mit konstanter Gaußscher Krümmung K

Zur Bestimmung der Drehflächen konstanter Gaußscher Krümmung K suchen wir alle Lösungen der Differentialgleichung

$$r'' + K \cdot r = 0$$

Dabei sei $t \longmapsto (r(t), h(t))$ auf Bogenlänge parametriesiert, was ja immer möglich ist, also

$$h'(t)^2 = 1 - r'(t)^2.$$

Hier setzen wir jetzt das Comuteralgebrasystem „Mathematica“ ein, was uns liefert:

Satz. *Alle Lösungen der Differentialgleichung $r'' + K \cdot r = 0$ (unter der Bedingung $|r'| \leq 1$ (wegen Parametrisierung auf Bogenlänge)) sind (für $a, b \in \mathbb{R}$) gegeben durch*

$$r(t) = \begin{cases} a\cos(\sqrt{K}t) + b\sin\sqrt{K}t & K > 0 \\ at + b \quad (mit\ |a| \leq 1) & K = 0 \\ a\cosh(\sqrt{-K}t) + b\sinh(\sqrt{-K}t) & K < 0 \end{cases}$$

Veranschaulichen wir uns die damit entstehenden Drehflächen:

(1) K=0

- Für $a = 0$ ist $r(t) = b$, damit $r'(t) = 0$, $h'^2 = 1 - r'^2 = 1$, $h(t) = t + c$ also das Bild von (r, h) eine Gerade, die parallel zur Drehachse verläuft:

  $$t \mapsto \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ t + c \end{pmatrix}$$

  Für $b \neq 0$ liefert die Drehung D_ρ dann den Zylinder mit der Gleichung $x^2 + y^2 = b^2$. ($b = 0$ ist der Entartungsfall der Gerade $x = y = 0$ – also die z-Achse –, was keine Fläche mehr darstellt).

  $\boxed{\text{Bild siehe Matematica}}$

- Für $a = \pm 1$ ist (jeweils für alle $t \in \mathbb{R}$) $r(t) = \pm t + b$, also $r'^2(t) = 1$, also (wegen der Parametrisierung nach Bogenlänge) $h'(t) = 0$, damit $h =$ const. Das Bild von (r, h) ist also eine Gerade, die senkrecht zur Drehachse steht:

  $$t \mapsto \begin{pmatrix} t + b \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

  Durch die Rotation entsteht die zur Drehachse senkrechte Ebene $z = c$.

  $\boxed{\text{Bild siehe Matematica}}$

- Für alle $a \in (0, 1)$ (sowie $(a \in (-1, 0))$ gilt

  $$\begin{aligned} r : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto at + b \\ r' &= a \\ h'^2 &= 1 - a^2 \\ h' &= \pm\sqrt{1 - a^2} \\ h(t) &= \pm\sqrt{1 - a^2} \cdot t + c \end{aligned}$$

  und unsere Kurve ist also

  $$t \mapsto \begin{pmatrix} at + c \\ 0 \\ \sqrt{1 - a^2} \cdot t + c \end{pmatrix}$$

Dies ist eine Gerade, die schräg zur Drehachse steht. Durch Rotation entsteht so ein gerader Kreiskegel.

Bild siehe Mathematica

(2) $K > 0$

Hier ist

$$\tilde{r}(t) = \tilde{a}\cos(\sqrt{K}t) + \tilde{b}\sin(\sqrt{K}t),$$

was wir durch eine (die Fläche ja nicht verändernde) Parameterverschiebung um t_0 zu

$$\begin{aligned} r(t) &= \tilde{a}\cos(\sqrt{K}(t+t_0)) + \tilde{b}\sin(\sqrt{K}(t+t_0)) \\ &= \tilde{a}\cos(\sqrt{K}t + \sqrt{K}t_0) + \tilde{b}\sin(\sqrt{K}t + \sqrt{K}t_0) \\ &= \tilde{a}\Big(\cos(\sqrt{K}t)\cos(\sqrt{K}t_0) - \sin(\sqrt{K}t)\sin(\sqrt{K}t_0)\Big) + \\ &\quad + \tilde{b}\Big(\sin(\sqrt{K}t)\cos(\sqrt{K}t_0) + \cos(\sqrt{K}t)\sin(\sqrt{K}t_0)\Big) \\ &= \cos(\sqrt{K}t)\underbrace{\Big(\tilde{a}\cos(\sqrt{K}t_0) + \tilde{b}\sin(\sqrt{K}t_0)\Big)}_{=:a} + \sin(\sqrt{K}t)\underbrace{\Big(\tilde{b}\cos(\sqrt{K}t_0) - \tilde{a}\sin(\sqrt{K}t_0)\Big)}_{=0,\text{ für } t_0 \text{ geeignet.}} \end{aligned}$$

$$r(t) = a\cos(\sqrt{K}t)$$

umformen können. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} h'(t)^2 &= 1 - r'(t)^2 \\ &= 1 - a^2K\sin(\sqrt{K}t)^2 \end{aligned}$$

Da wir nur reellwertige Funktionen betrachten, muss also gelten:

$$0 \leq a^2K\sin^2(\sqrt{K}t) \leq 1$$

Es ergibt sich (bis auf Verschiebung in Achsenrichtung eindeutig)

$$h(t) = \int_0^t \sqrt{1 - a^2K\sin^2(\sqrt{K}x)}dx.$$

Dabei entsprechen die Fälle

- $a^2K = 1$ der Sphäre Bild siehe Mathematica,
- $0 < a^2K < 1$ dem Spindeltyp Bild siehe Mathematica und
- $a^2K > 1$ dem Wulsttyp Bild siehe Mathematica.

(3) $K < 0$

Für Rotationsflächen mit negativer konstanter gaußscher Krümmung gilt.

$$r(t) = a\cosh(\sqrt{-K}t) + b\sinh(\sqrt{-K}t)$$

Auch hier können wir drei Typen unterscheiden:

- Für $b^2 > a^2$ erhält man den Kegeltyp $\boxed{\text{Bild siehe Mathematica}}$,
- für $a^2 > b^2$ erhält man den Kehltyp (oder hyperbolischen Typ) $\boxed{\text{Bild siehe Mathematica}}$.
- Für $a = b$ und $K = -1$ erhält man

$$\begin{aligned} r(t) &= a(\cosh t + \sinh t) \\ &= a\frac{1}{2}\left(e^t + e^{-t} + e^t - e^{-t}\right) \\ &= ae^t \end{aligned}$$

  und damit

$$\begin{aligned} h'(t)^2 &= 1 - a^2e^{2t} \\ h(t) &= \int_0^t \sqrt{1 - a^2e^{2x}}dx \end{aligned}$$

  Dies ist die berühmte **Pseudosphäre** (Beltramis Fläche) mit der Traktrix (Schleppkurve) als Meridiankurve.

  $\boxed{\text{Bild siehe Mathematica}}$

  Für $K \neq -1$ und $a^2 = b^2$ ergeben sich ähnliche Flächen.

8 Quellen

Quellen waren

- vor allem das Kapitel 3C im Buch „Differentialgeometrie (Kurven – Flächen – Mannigfaltigkeiten)“ von W. Kühnel,
- ergänzend das Buch „Differentialgeometrie, Kurven und Flächen“ von V. Wünsch (Kapitel 5)
- (v.a. für die Mathematica-Anteile) „Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces“ von A. Gray (Kapitel 21, nicht 20),
- Der Vortrag von Aleksander Momot und Christian Thier für die Definitionen der wichtigsten Krümmungsgrößen.