Kapitel 3

Grundbegriffe der (semi-)Riemannschen Geometrie

Idee von B. Riemann (1954): Man kann alle geometrischen Objekte (Längen, Flächeninhalte, Volumen, Winkel, Krümmungen) durch ein einziges algebraisches Objekt ausdrücken, der sogenannten "Riemannschen Metrik" $g \in \Gamma(S^2(M))$, einem symmetrisches nichtausgeartetes $(2,0)$-Tensorfeld auf M:

$$g \,:\, x \in M \mapsto g_x : T_x \times T_x M \to \mathbb{R},$$

dabei ist g_x ein Skalarprodukt auf $T_x M$.

3.1 Riemannsche und pseudo-Riemannsche Metriken

Definition. *Sei M^n C^∞-Mannigfaltigkeit. Eine <u>Metrik auf M^n</u> ist ein symmetrisches, nichtausgeartetes $(2,0)$-Tensorfeld $g : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ auf M mit konstantem Index, d.h.*

$$g : x \in M \mapsto g_x : T_x M \times T_x M \to \mathbb{R}$$

und g_x ist für jedes $x \in M$ eine symmetrische, nichtausgeartete Bilinearform mit Normalform

$$N(g) = \begin{pmatrix} -1_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -1_k & & & \\ & & & 1_{k+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1_n \end{pmatrix}$$

Die Zahl k soll konstant bleiben und heißt <u>Index von g</u>. $(k, n-k)$ heißt <u>Signatur von g</u>.

- *Ist Index $g = 0$, d.h. g_x ein positiv-definites Euklidisches Skalarprodukt auf T_xM, so heißt g Riemannsche Metrik*
- *Ist Index $(g) = 1$, so heißt g Lorentz-Metrik (Lorentz-Metriken benutzt man in der Relativitätstheorie)*
- $1 \leq k \leq n-1$, *so heißt g pseudo-Riemannsche Metrik*
- k *beliebig , dann heißt g semi-Riemannsche Metrik*

Definition. *Ist g eine Metrik auf M^n, so heißt (M, g)*

- *Riemannsche Mannigfaltigkeit* $\Leftrightarrow$ g *Riemannsche Metrik*
- *Lorentz-Mannigfaltigkeit* $\Leftrightarrow$ g *Lorentz-Metrik*
- *pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit* $\Leftrightarrow$ g *pseudo-Riemannsche Metrik*
- *semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit* $\Leftrightarrow$ g *beliebige Metrik*

Definition. *Sei g eine Metrik auf M, dann heißt*

- $v \in T_xM$ *heißt zeitartig* $\Leftrightarrow g_x(v, v) < 0$
- $v \in T_xM$ *heißt isotrop (lichtartig)* $\Leftrightarrow g_x(v, v) = 0, \forall v \neq 0$
- $v \in T_xM$ *heißt raumartig* $\Leftrightarrow g_x(v, v) > 0$

Lokale Darstellung einer Metrik:

Sei $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ eine zulässige Karte, dann ist

$$g_U = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx_i \otimes dx_j = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i \circ dx_j$$

mit

$$g_{ij}(x) = g(\frac{\partial}{\partial x_i}(x), \frac{\partial}{\partial x_j}(x))$$

Die Funktionen $g_{ij} \in C^\infty(U)$ heißen lokale Koeffizienten der Metrik bezüglich (U, φ).

Da g_x nichtausgeartet und symmetrisch, ist die matrix $(g_{ij}(x))_{i,j=1}^n$ symmetrisch und invertierbar. Die dazu inverse Matrix bezeichnet man mit $(g^{kl}(x))_{k,l=1}^n$.

Es folgen nun Beispiele von Metriken.

Beispiel 50. METRIKEN IM $\mathbb{R}^n$

Sei $\langle , \rangle_{p,q}$ eine nichtausgeartete symm. BLF vom Index p auf $\mathbb{R}^n$. Ein Vektorfeld auf $\mathbb{R}^n$ ist eine glatte Abbildung

$$X \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$

und somit ist

$$g_{p,q}(X, Y)(x) := \langle X(x), Y(x) \rangle_{p,q}$$

eine Metrik vom Index p auf der Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}^n$.

Lokale Darstellung von $g_{n,k}$: Sei $(a_1, \ldots, a_n)$ ONB von $(\mathbb{R}^{p,q}, \langle , \rangle_{p,q})$, d.h.

$$\langle a_i, a_j \rangle_{p,q} = \begin{cases} -\delta_{ij} & \text{für } i \leq p \\ \delta_{ij} & \text{für } i > p \end{cases}$$

Für eine Karte auf dem $\mathbb{R}^n$: $\varphi(x) = (x_1, \ldots, x_n)$ mit $x = \sum x_i a_i$ gilt dann $\frac{\partial}{\partial x_i}(x) = a_i$ und daraus folgt

$$g_{ij}(x) = \langle a_i, a_j \rangle_{p,q} = \varepsilon_i \delta_{ij} \quad \text{wobei } \varepsilon_i = \begin{cases} -1 & \text{für } i \leq p \\ 1 & \text{für } i > p \end{cases}$$

und damit ist

$$g_{p,q} = -dx_1^2 - \ldots - dx_p^2 + dx_{p+1}^2 + \ldots + dx_{x_n}^2 \text{ wobei } dx_i^2 = dx_i \circ dx_i.$$

Das Paar $(\mathbb{R}^n, g_{n,n-1})$ heißt <u>Minkowski-Raum</u>

Beispiel 51. INDUZIERTE METRIKEN

Sei $(\tilde{M}, \tilde{g})$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $f : M \to \tilde{M}$ eine Immersion, dann heißt

$$f^* \tilde{g} =: g$$

die <u>induzierte Riemannsche Metrik auf M</u>

Sei $(\tilde{M}, \tilde{g})$ eine pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit und $f : M \to \tilde{M}$ eine Immersion so dass für alle $x \in M$

$$df_x(T_x M) \subset T_{f(x)} \tilde{M}$$

ein nichtausgearteter Unterraum ist, (d.h. $\tilde{g}_{f(x)}$ ist auf $df_x(T_x M)$ nichtausgeartet), dann ist

$$g := f^* \tilde{g}$$

eine Metrik auf M und heißt <u>induzierte semi-Riemannsche Metrik</u>

- Sei $(\mathbb{R}^2, g_{1,1})$ und $M = \mathbb{R}$. Die Abbildung $f : M \to \mathbb{R}^2, x \to (x, x)$ ist eine Einbettung. Aber jeder Vektor $df_{(x,x)}(v)$ ist isotrop und deshalb ist $f^* g_{1,1} \equiv 0$. Keine Metrik!
- Sei speziell $M \subset \tilde{M}$ eine Untermannigfaltigkeit und $(\tilde{M}, \tilde{g})$ eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, sodass für alle $x \in M$ $T_x M \subset T_x \tilde{M}$ ein nichtausgearteter Unterraum ist. Dann ist

  $$g := \tilde{g}|_{\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)}$$

  eine semi-Riemannsche Metrik auf M.
- Ist $M \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit des reellen Vektorraumes $\mathbb{R}^N$ und $\langle , \rangle_{\mathbb{R}^N}$ das Standardskalarprodukt von $\mathbb{R}^N$. Dann gilt $\mathfrak{X}(M) \subset C^\infty(M^n, \mathbb{R}^N)$.

  $$g(X, Y)(x) := \langle X(x), Y(x) \rangle_{\mathbb{R}^N} \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

  ist Riemannsche Metrik auf M^n. Diese heißt <u>induzierte Riemannsche Metrik der Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^N$</u>.

Beispiel 52. ROTATIONSFLÄCHEN IM $\mathbb{R}^3$

Wir betrachten die Mannigfaltigkeit

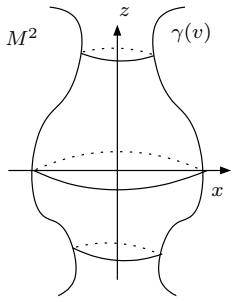
$$M^2 = \{f(u,v) = (\gamma_1(v)\cos u, \gamma_1(v)\sin u, \gamma_2(v)) \mid v \in (a,b), u \in \mathbb{R}\}$$

mit einer Kurve

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : (a,b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

mit den Eigenschaften $\gamma_1(v) > 0$ und $\dot{\gamma} \neq 0$.

$M^2 \subset \mathbb{R}^3$ ist eine 2-dim. UMF. Sei $D = (u_0 - \pi, u_o + \pi, v_o - \epsilon, v_0 + \epsilon)$, dann ist $\big(U = f(D), \varphi = f^{-1}|_D = (u,v)\big)$ eine Karte um $f(u_o, v_o)$.



Für die kanonischen Basis ergibt sich damit

$$\frac{\partial}{\partial u}(f(u,v)) = \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) = (-\gamma_1 \sin u, \gamma_1 \cos u, 0)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial v}(f(u,v)) = \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = (\dot{\gamma}_1(v)\cos u, \dot{\gamma}_1(v)\sin u, \dot{\gamma}_2(v)).$$

Die Koeffizienten der lokale Darstellung der induzierten Metrik ergeben sich dann aus

$$\begin{aligned}(g_{ij}(f(u,v))) &= \begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma^2(v) & 0 \\ 0 & \|\dot{\gamma}(v)\|^2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Es ist also

$$\boxed{g_{f(u,v)} = \gamma^2(v)du^2 + \|\dot{\gamma}(v)\|^2 dv^2}$$

Beispiel 53. PRODUKT-METRIKEN

Seien $(M,g), (N,h)$ semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit den Projektionen

$$\pi_1 : M \times N \to M \text{ und } \pi_2 : M \times N \to N$$

Wir definieren eine Metrik $r \in \mathfrak{X}^{(2,0)}(M \times N)$ durch

$$r := \pi_1^* g + \pi_2^* h.$$

Dies ist eine Metrik auf $M \times N$ mit Index $(r) =$ Index $(g) +$ Index (h) und heißt <u>Produkt-Metrik</u>.

Nun ist jedoch

$$\begin{aligned} T_{(x,y)}(M \times N) &\simeq T_x M \times T_y N \\ v &\mapsto (\underbrace{(d\pi_1)_{(x,y)}(v)}_{v_1}, \underbrace{(d\pi_2)_{(x,y)}(v)}_{v_2}) \end{aligned}$$

und damit

$$r_{(x,y)}(v_1 + v_2, w_1 + w_2) = g_x(v_1, w_1) + h_y(v_2, w_2).$$

Deshalb benutzt man auch folgende Schreibweise:

$$r = g + h$$

Beispiel 54. WARPED-PRODUCT-METRIKEN

Seien $(M, g), (N, h)$ semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten und

$$f \in C^\infty(M), f > 0$$

Wir definieren folgende Metrik auf $M \times N$

$$r := \pi_1^* g + (f \circ \pi_1)^2 \pi^* h,$$

oder in <u>Kurzform</u>

$$r = g + f^2 h,$$

wobei

$$r_{(x,y)}(v_1 + v_2, w_1 + w_2) = g_x(v_1, w_1) + f(x)^2 h_y(v_2, w_2)$$

Diese semi-Riemannsche Mannigfaltikgeit $M \times_f N := (M \times N, r)$ heißt <u>warped product</u>.

Viele kosmologische Modelle (4-dimensionale Mannigfaltigkeiten, die die Einstein-Gleichungen der ART erfüllen: $Ric - \frac{1}{2} R\, g = T$) sind warped products.

$$M = I \times_f F$$

Dabei ist (F, g) eine 3-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeiten konstanter Schnittkrümmung, $I_{offen} \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f \in C^\infty(I)$. Für die Metrik ergibt sich

$$r = -dt^2 + f^2 g.$$

Satz 3.1. *Auf jeder C^∞-Mannigfaltigkeit M^n existiert eine <u>Riemannsche</u> Metrik.*

Beweis:

Sei $\mathcal{A} = \{U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ abzählbarer Atlas mit Zelegung der 1 $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$. Wir betrachten die induzierte Riemannsche Metrik

$$g_\alpha := \varphi_\alpha^* \langle , \rangle_{\mathbb{R}^n} \in \mathfrak{X}^{(2,0)}(U_\alpha)$$

auf $U_\alpha \subset M$. Da $\sup f_\alpha \subset U_\alpha$ ist $f_\alpha g_\alpha \in \mathfrak{X}^{(2,0)}(M)$ ein symmetrisches Tensorfeld auf M. Die Fortsetzung

$$g := \sum_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha \cdot g_\alpha \in \mathfrak{X}^{(2,0)}(M)$$

ist symmetrisch und existiert, da $\{\sup f_\alpha\}$ lokal endlich ist.

g_x ist positiv-definit: Für $v \in T_xM, v \neq 0$ gilt

$$g_x(v,v) = \sum_{\alpha \in \tilde{\Lambda}} f_\alpha(x) g_{\alpha_x}(v,v) \geq 0,$$

wobei

$$\tilde{\Lambda} = \{\alpha \in \Lambda |\ x \in U_\alpha\}.$$

Da $\sum\limits_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha \equiv 1$, existiert α_0 und $f_{\alpha_0}(x) > 0$, sodass

$$g_x(v,v) > 0.$$

Damit ist g eine Riemannsche Metrik auf M.

□

Metriken mit Index $g = k > 0$ existieren nicht immer. Dazu braucht man zusätzlich topologische Bedingungen an M.

Satz 3.2. *Auf M^n existiert genau dann eine pseudo-Riemannsche Metrik der Signatur (p,q), wenn*

$$TM = \xi^p \oplus \eta^q,$$

debei sind ξ^p und η^q Vektorbündel vom Rang p und q.

Die Aufspaltung $TM = \xi^p \oplus \eta^q$ hat topologische Konsequenzen → Stiefel-Withney-Klassen, Chernklassen. Für Lorentz-Metriken gilt speziell

Satz 3.3. *Sei M^n eine C^∞-Mannigfaltigkeit. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

1. *Auf M existiert eine Lorentz-Metrik*
2. *Es existiert ein nirgends verschwindendes Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ $(X(x) \neq 0, \forall x \in M)$*
3. *M ist nicht-kompakt oder M ist kompakt und die Eulersche Charakteristik $\mathfrak{X}(M)$ ist Null.*

(Beweis: → O'Neill: Semi-Riemannsche Geometrie, S. 149).

Wir erinnern an den schon aus Analysis IV bekannten

Satz 3.4 (Igelsatz)**.** *Auf der Sphäre S^{2n} existiert kein nirgends verschwindendes Vektorfeld.*

Aus Satz 3.3 folgt nun, dass auf S^{2n} keine Lorentz-Metrik exsistieren kann.

3.2 Längen, Winkel und Volumen in semi-Riem. MF

Wir wollen uns in diesem Abschnitt mit dem Problem der Volumen- und Längendefinition einer semi-Riem. Mannigfaltigkeit (M, g) beschäftigen.

3.2.1 Längen von Kurven in M

Definition. *Sei $v \in T_x M$, dann heißt*

$$\|v\|_g := \sqrt{|g_x(v,v)|}$$

<u>die Länge des Vektors v</u> in $(T_x M, g)$.

Definition. *Sei (M, g) eine semi-Riem. MF. und $\gamma : I_{Intervall} \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ eine glatte Kurve auf M. Dann heißt*

$$l(\gamma) := \int_I \|\dot{\gamma}(t)\|_g \, dt$$

<u>Länge von γ</u> in (M, g).

Bemerkungen:

- Ist $M^n \subset \mathbb{R}^N$ eine UMF mit induzierter Metrik. Dann ist für eine glatte Kurve $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$

  $$l(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|_{\mathbb{R}^n} \, dt$$

  die aus der Analysis bekannte Länge.

- Für eine pseudo-Riem.-MF kann die Länge einer nicht konstanten Kurve auch null sein, da für isotrope Kurven stets $\|\dot{\gamma}\| \equiv 0$ gilt. (Das Licht bewegt sich in der Reletivitätstheorie auf isotropen Kurven.)

Eigenschaften der Länge

1. Sei $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ eine glatte Kurve und $\tau : J \longrightarrow I$ eine Parametertrafo (d.h. τ ist ein Diffeomorphismus). Sei dann

   $$\tilde{\gamma} := \gamma \circ \tau \ : J \longrightarrow M \qquad \text{Umparametrisierung von } \gamma$$

   so gilt

   $$\boxed{l(\gamma) = l(\tilde{\gamma})}$$

, da

$$\begin{aligned}
l(\tilde{\gamma}) &= \int_J \|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\|_g \, dt \\
&= \int_J \|(\gamma \circ \tau)'(t)\|_g \, dt \\
&\overset{Int.-Trafo}{=} \int_{\tau(J)} \|(\gamma \circ \tau)'(\tau^{-1}(t))\|_g \left|\det\left(\tau^{-1}\right)'(t)\right| \, dt \\
&\overset{KR}{=} \int_I \|(\dot{\gamma} \circ \tau)(\tau^{-1})\|_g |\tau'(t)| \frac{1}{|\tau'(t)|} \, dt \\
&= l(\gamma)
\end{aligned}$$

2. Eine Kurve $\gamma : I = [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ heißt <u>nach Bogenlänge parametrisiert</u>, falls

$$\|\dot{\gamma}(t)\|_g \equiv 1.$$

Für eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve γ gilt dann

$$\begin{aligned}
l(\gamma) &= \int_I \|\dot{\gamma}(t)\|_g \, dt \\
&= \int_I dt \\
&= b - a
\end{aligned}$$

3. Eine Kurve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ heißt <u>regulär</u>, falls $\dot{\gamma} \neq 0$ für alle $t \in I$.

Behauptung: Jede reguläre, nirgens isotrope Kurve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ ist nach Bogenlänge parametrisierbar, d.h. es exisstiert eine Umparametrisierung $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \tau$ mit $\|\tilde{\gamma}(t)\|_g \equiv 1$.

Beweis: Sei $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ regulär und nirgens isotrop. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned}
l : [a,b] &\longrightarrow M \\
t &\longmapsto l\left(\gamma_{|[a,t]}\right) = \int_a^t \|\dot{\gamma}(t)\|_g \, dt
\end{aligned}$$

dann ist $l'(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|_g > 0$. Wegen dieser strikten Monotonie existiert eine Umkehrabbildung

$$\tau := l^{-1} \; [0, l(\gamma)] \longrightarrow [a,b].$$

Es gilt nun

$$\begin{aligned}
\|(\gamma \circ \tau)'(t)\|_g &= \|\dot{\gamma}(\tau(t))\|_g |\tau'(t)| \\
&= \|\dot{\gamma}(\tau(t))\|_g \frac{1}{l'(\tau(t))} \\
&= 1
\end{aligned}$$

D.h. $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \tau$ ist nach Bogenlänge parametrisiert.

□

Definition. *Eine Kurve* $\gamma : I = [a, b] \longrightarrow M$ *heißt* <u>*stückweise glatt*</u>*, falls* γ *stetig ist und eine Zerlegung*

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

existiert, sodass die

$$\gamma_i = \gamma_{|[t_i, t_{i+1}]} : [t_i, t_{i+1}] \longrightarrow M$$

für alle $i = 0 \ldots n$ *glatte Kurven sind.*

Die Punkte $\gamma(t_i)$ heißen <u>Ecken von γ</u>.

Dann ist die <u>Länge von γ</u> definiert durch

$$l(\gamma) = \sum_{i=1}^{m} l(\gamma_i).$$

Die Eigenschaften 1-3 bleiben erhalten.

3.2.2 Volumen in semi-Riem. Mannigfaltigkeiten

Im letzten Kapitel haben wir die Integration von k-Formen auf Mannigfaltigkeiten besprochen. Nun wollen wir dies auf den Begriff des Volumens ausdehnen. Wie man aber am Beispiel des $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle_{\mathbb{R}^n})$ sehen kann, ist der Volumenbegriff stark an die Metrik gebunden!

Wir suchen nun eine spezielle, der Metrik g angepaßte positive n-Form auf M^n.

Definition. *Sei* (M^n, g, O_M) *eine orientierte semit-Riem. Mannigfaltigkeit und* $(v_1, \ldots, v_n)$ *eine positiv-orientiete Basis in* T_xM *mit dualer Basis* $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ *aus* T_x^*M*. Dann bezeichnen wir*

$$dM_x := \sqrt{|\det(g_x(v_i, v_j))|}\eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_n$$

Bemerkungen:

- dM_x ist unabhängig von der gewählten Basis. Denn sei $(a_1, \ldots, a_n)$ eine weitere positiv-orientierte Basis mit dualer Basis $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ und Übergangsmatrix $v_i = A_{ik} a_k$, so ist nach Voraussetzung $\det A > 0$. Darüberhinaus gilt

$$\begin{aligned} g_x(v_i, v_j) &= g_x(A_{ik} a_k, A_{jl} a_l) \\ &= A_{ik} A_{jl} g_x(a_k, a_l) \\ &= A_{ik} A^T_{lj} g_x(a_k, a_l) \\ &= \sum_k A_{ik} \sum_l g_x(a_k, a_l) A^T_{lj}. \end{aligned}$$

  In Matrizenschreibweise heißt das

$$\{g_x(v_i, v_j)\}_{ij} = A \cdot \{g_x(a_k, a_l)\}_{k,l} \cdot A^T.$$

  Andererseits ist

$$\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n = (\det A)\, \eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_n.$$

  Für dM_x ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \sqrt{|\det(g_x(v_i, v_j))|}\eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_n &= \sqrt{|\det(A)^2 \cdot \det(g_x(a_k, a_l))|}\,(\det A)^{-1} \sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n \\ &= \sqrt{|\det(g_x(a_k, a_l))|}\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n. \end{aligned}$$

- Die Abbildung $x \mapsto dM_x$ ist ein glatter Schnitt in $\Lambda^n M$, denn sei $(U, \varphi = x_1, \ldots, x_n)$ eine positiv-orientierte Karte, so gilt für deren kanonische Basis

$$dM_x = \underbrace{\sqrt{\left|\det g_x\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(x), \frac{\partial}{\partial x_j}(x)\right)\right|}}_{\in C^\infty(U)} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

- Ist $(e_1, \ldots, e_n)$ eine positiv-orientierte ONB aus $T_x M$ und $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ deren Dual, so gilt

$$dM_x(e_1, \ldots, e_n) = 1 = \sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n(e_1, \ldots, e_n),$$

  d.h.

$$dM_x = \sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n$$

Dies erlaubt nun folgende

Definition. *Die n-Form $dM_g \in \Omega^n(M)$ mit*

$$dM_g : x \longmapsto dM_x \in \Lambda^n(T^*_x M)$$

heißt <u>*Volumenform von (M, g, O_M)*</u>.

Lokale Darstellung der Volumenform:

Ist $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ eine positiv-orientierte Karte und $g_{ij}(x) = g_x\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(x), \frac{\partial}{\partial x_j}(x)\right)$ seien die Koeffizienten der Metrik, dann ist

$$dM|_U = \sqrt{|\det(g_{ij})|}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

Definition. *Sei (M^n, g, O_M) eine orientierte semi-Riem. Mannigfaltigkeit und $A \subset M$ eine meßbare Teilmenge, so heißt die Zahl*

$$Vol_g(A) := \int_A dM_g$$

das <u>*Volumen von A*</u> *in (M^n, g, O_M). (Im Fall $n = 2$ entspricht dies dem 'Flächeninhalt'.)*

Bemerkungen:

- Für $(M, g) = (\mathbb{R}^n, \langle , \rangle_{\mathbb{R}^n})$ ist $Vol_g(A) = \lambda^n(A)$, dem Lebesque-Maß auf $\mathbb{R}^n$.
- Vol_g ist unabhängig von der gewählten Orientierung, denn für $-M = (M, -O_M)$ ist
$$d(M) = -dM$$
und damit
$$\int_{-A} d(-M) = -\int_{-A} dM = \int_A dM$$
- Man kann das Volumen auch für Teilmengen von nichtorientierbaren Mannigfaltigkeiten definieren:

  Sei $A \subset M$ meßbar, so ist
$$A = \dot{\bigcup_\alpha} A_\alpha \qquad \text{wobei } A_\alpha \text{ paarweise disjunkt, und } A_\alpha \subset U_\alpha \text{ Karte}$$
  Dann fixieren wir eine Orientierung auf U_α womit
$$Vol_g(A_\alpha) = \int_{A_\alpha} dU_\alpha$$
  und wir setzen
$$Vol_g(A) = \sum_\alpha Vol_g(A_\alpha)$$

Beispiel 55. OBERFLÄCHEN VON GRAPHEN

Sei $h : U_{offen} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung. Für $M^2 = graph(h) \subset \mathbb{R}^3$ mit induzierter Metrik gilt dann

$$\boxed{Vol_g(M) = \int_U \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial u_2}\right)^2}\, du_1\, du_2}$$

denn in der inversen Karte $f(u_1, u_2) = (u_1, u_2, h(u_1, u_2))$ mit $f(u_1, u_2) = x$ hat man

$$\frac{\partial}{\partial u_1}(x) = df_{(u_1,u_2)}(e_1) = \frac{\partial f}{\partial u_1}(u_1, u_2) = \left(1, 0, \frac{\partial h}{\partial u_1}(u_1, u_2)\right)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial u_2}(x) = df_{(u_1,u_2)}(e_2) = \frac{\partial f}{\partial u_2}(u_1, u_2) = \left(0, 1, \frac{\partial h}{\partial u_2}(u_1, u_2)\right).$$

Für die Koeffizienten der Metrik ergibt sich dann

$$\begin{aligned}(g_{ij}(x)) &= \left(\left\langle \frac{\partial}{\partial u_i}(x), \frac{\partial}{\partial u_j}(x)\right\rangle\right) \\ &= \begin{pmatrix} 1+\left(\frac{\partial h}{\partial u_1}(u_1,u_2)\right)^2 & \frac{\partial h}{\partial u_1}(u_1,u_2)\cdot\frac{\partial h}{\partial u_2}(u_1,u_2) \\ \frac{\partial h}{\partial u_1}(u_1,u_2)\cdot\frac{\partial h}{\partial u_2}(u_1,u_2) & 1+\left(\frac{\partial h}{\partial u_2}(u_1,u_2)\right)^2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

und es folgt

$$\det(g_{ij}(x)) = 1+\left(\frac{\partial h}{\partial u_1}(u_1,u_2)\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial u_2}(u_1,u_2)\right)^2.$$

Setzen wir dies ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}Vol_g(M) &= \int_M dM_g \\ &= \int_{f(U)} \sqrt{\det(g_{ij}(x))}\, du_1\wedge du_2 \\ &= \int_{f^{-1}(f(U))} \sqrt{\det(g_{ij}(f(u_1,u_2)))}\, d\lambda^2 \\ &= \int_U \sqrt{1+\left(\frac{\partial h}{\partial u_1}(u_1,u_2)\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial u_2}(u_1,u_2)\right)^2}\, du_1\, du_2.\end{aligned}$$

Beispiel 56. OBERFLÄCHEN VON ROTATIONSFLÄCHEN

Hier ist bekanntlich[1]

$$M^2 = \{f(u,v) = (\gamma_1(v)\cos u, \gamma_1(v)\sin u, \gamma_2(v))\},$$

wobei $\gamma_1 > 0$ und $\dot\gamma(v) \neq 0$. Für die Metrikkoeffizienten ergibt sich mit $x = f(u,v)$

$$g_{ij}(x) = \begin{pmatrix} \gamma_1^2(v) & 0 \\ 0 & \|\dot\gamma(v)\|^2 \end{pmatrix}$$

und daraus folgt

$$\det(g_{ij}(x)) = \gamma_1^2(v)\cdot\|\dot\gamma(v)\|^2.$$

Für das Volumen erhalten wir nun

$$Vol_g(M) = \int_o^{2\pi}\int_a^b \gamma_1(v)\cdot\|\dot\gamma(v)\| du dv$$

bzw.

$$\boxed{Vol_g(M) = 2\pi\int_a^b \gamma_1(v)\cdot\|\dot\gamma(v)\| du\, dv}$$

[1] siehe Beispiel 52 auf Seite 116

3.2.3 Der Schnittwinkel von Kurven in semi-Riem. Mannigfaltigkeiten

Im Folgenden sei (M, g) eine semi-Riem. Mannigfaltigkeit.

In einem Vektorraum mit Skalarprodukt beliebiger Signatur kann man erklären was 'senkrecht' bedeutet, Winkel existieren aber nur im euklidischen Fall.

Definition. *Seien $v, w \in T_xM$, dann heißt v <u>orthogonal</u> zu w ($v \perp w$) falls*

$$g_x(v, w) = 0$$

Bemerkungen

1. Ist (M, g) eine *Riemannsche MF*, so kann man den Schnittwinkel beliebiger Tangentialvektoren $u, v \in T_xM$ definieren. Für ein positiv-definites Skalarprodukt gilt bekanntlich die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

   $$|g_x(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

   und daraus folgt dann

   $$-1 \leq \frac{g_x(u, v)}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1 \qquad \text{für alle } u, v \neq 0.$$

   Es existiert also ein eindeutig bestimmter Winkel $\alpha \in [0, \pi]$ für den

   $$\cos\alpha = \frac{g_x(u, v)}{\|u\| \cdot \|v\|}.$$

   Dieser Winkel $\alpha =: \angle(v, w)$ heißt <u>Schnittwinkel von u und v</u> in (M, g).

2. Sei (M, g) eine *Lorentz-MF*.

   (a) Sind $v, w \in T_xM$ *zeitartig*, so gilt

   $$|g_x(v, w)| \geq \|v\| \cdot \|w\|$$

   Beweis:
   OBdA seien v und w linear unabhängig und es gelte

   $$w = av + \tilde{w} \qquad \text{wobei } \tilde{w} \perp v.$$

   Damit folgt

   $$g_x(w, w) = g_x(av + \tilde{w}, av + \tilde{w}) = a^2 g_x(v, v) + g_x(\tilde{w}, \tilde{w}). \qquad (*)$$

   Da v zeitartig ist und der Index von g nur 1, muss $\tilde{w}$ raumartig sein, d.h. es gilt

   $$g_x(\tilde{w}, \tilde{w}) > 0.$$

   Wir erhalten nun

   $$\begin{aligned} g_x(v, w)^2 &= a^2 g_x(v, v)^2 \\ &\overset{(*)}{=} (g_x(w, w) - g_x(\tilde{w}, \tilde{w}))\, g_x(v, v) \\ &= \underbrace{g_x(w, w)}_{<0}\underbrace{g_x(v, v)}_{<0} \underbrace{- \underbrace{g_x(\tilde{w}, \tilde{w})}_{>0}\underbrace{g_x(v, v)}_{<0}}_{>0} \\ &\geq g_x(w, w)\, g_x(v, v) \\ &= \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 \end{aligned}$$

□

Damit gilt also

$$\frac{g_x(v,w)}{\|v\| \cdot \|w\|} \geq 1$$

und es existiert genau ein $\alpha \in [0,\infty)$ für das

$$\cosh \alpha = \frac{g_x(v,w)}{\|v\| \cdot \|w\|}.$$

Dieses α heißt <u>hyperbolischer Winkel zwischen u und v</u>.

(b) Ist $v \in T_xM$ isotrop, so gilt $v \perp v$.

Definition. *Zwei reguläre glatte Kurven $\gamma : I \longrightarrow M$ und $\delta : J \longrightarrow M$ <u>schneiden sich</u> in $x_0 \in M$ <u>orthogonal</u>, falls*

$$x_0 = \gamma(t_0) = \delta(t_0) \quad \textit{und} \quad \dot{\gamma}(t_0) \perp \dot{\delta}(t_0)$$

Sei (M,g) Riemannsch. *γ und δ <u>schneiden sich im Winkel</u> $\alpha \in [0,\pi]$, falls*

$$x_0 = \gamma(t_0) = \delta(t_0) \quad \textit{und} \quad \alpha = \angle\left(\dot{\gamma}(t_0), \dot{\delta}(t_0)\right) =: \angle_{x_0}(\gamma,\delta).$$

3.3 Isometrien und konforme Abbildungen

Definition. *Seien* (M, g) *und* $\left(\tilde{M}, \tilde{g}\right)$ *semi-Riem. Mannigfaltigkeiten. Eine Abbildung* $f : M \longrightarrow \tilde{M}$ *heißt* <u>*Isometrie*</u>*, falls*

1. f *ist ein Diffeomorphismus.*
2. $f^*\tilde{g} = g$.

Ist dies der Fall, so nennen wir (M^n, g) *und* $\left(\tilde{M}^n, \tilde{g}\right)$ <u>*isometrisch*</u>.

$f^*\tilde{g} = g$ heißt ausgeschrieben:

$$\tilde{g}_{f(x)}\left(df_x(v), df_x(w)\right) = g_x(v, w) \qquad (*)$$

damit ist also $df_x : T_xM \longrightarrow T_{f(x)}\tilde{M}$ eine lineare Isometrie der Vektorräume.

Definition. *Eine* C^∞*-Abbildung* $f : M^n \longrightarrow \tilde{M}^n$ *heißt* <u>*lokale Isometrie*</u>*, falls*

$$f^*\tilde{g} = g$$

Aus $(*)$ erkennt man unmittelbar, das mit $f^*\tilde{g} = g$ das Differential df injektiv sein muß und aus Dimensionsgründen demnach bijektiv. Der Satz über die Umkehrabbildung liefert dann eine lokale Diffeomorphie.

Definition. *Eine* C^∞*-Abbildung* $f : M^n \longrightarrow \tilde{M}^n$ *heißt* <u>*konform*</u>*, falls*

$$f^*\tilde{g} = \sigma^2 g \qquad \textit{wobei } \sigma \in C^\infty(M),\ \sigma > 0$$

Insbesondere ist f damit ein lokaler Diffeomorphismus.

Es folgen nun einige Beispiele.

Beispiel 57. HOLOMORPHE FUNKTIONEN

Sei $f : U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $g(,) = \langle , \rangle_{\mathbb{R}^2}$.

Behauptung: Ist $f'(z_0) \neq 0$, so ist f lokal konform auf $\tilde{U} = \{z \in U |\ f'(z) \neq 0\}$ mit $\sigma^2 = \det(Df)$.

Der Beweis bleibt als Übungsaufgabe.

Beispiel 58. MÖBIUSTRANSFORMATION

Wir betrachten die 1-Punkt-Kompaktifizierung von $\mathbb{C}$: $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Sei weiterhin

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2; \mathbb{C}),$$

so definieren wir die <u>Möbiustransformation</u>

$$\begin{aligned} F_A : \mathbb{C}_\infty &\longrightarrow \mathbb{C}_\infty \\ z &\longmapsto \frac{az+b}{cz+d} \\ \infty &\longmapsto \frac{a}{c} \end{aligned}$$

Mit

$$H^+ := \{x + iy \in \mathbb{C} \,|\, y > 0\}$$

und der Metrik

$$g_{H^+} \;=\; \frac{1}{y^2}\left(dx^2 + dy^2\right)$$

bezeichenen wir die <u>Poincare-Halbebene</u> (H^+, g_{H^+}).

Behauptung: Sei $A \in SL\,(2;\mathbb{R})$, so ist

$$F_A : \left(H^+, g_{H^+}\right) \longrightarrow \left(H^+, g_{H^+}\right)$$

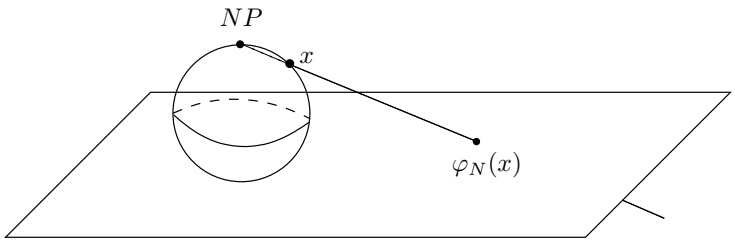
eine Isometrie.

Der Beweis bleibt als Übungsaufgabe.

Beispiel 59. STEREOGRAPHISCHE PROJEKTION

Wir betrachten die Kartenabbildung[2]

$$\begin{aligned} \varphi_N : S^n - \{NP\} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto \text{Schnittpunkt des Graphen durch NP} \\ &\quad\;\; \text{und } x \text{ mit } \mathbb{R}^n = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, x_{n+1} = 0\right\} \end{aligned}$$



Behauptung: φ_N ist ein konformer Diffeomomorphismus mit

$$\varphi_N^* g_{\mathbb{R}^n} = \left(\frac{1 + \|\varphi_N\,(.)\,\|^2_{\mathbb{R}^n}}{2}\right)^2 \cdot \underbrace{g_{S^n}}_{induzierte\,riem.\,Metrik}$$

Der Beweis bleipt als Übungsaufgabe. (Man berechne

$$\varphi_N\,(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_1}\,(x_1, \ldots, x_n)$$

und

$$\varphi_N^{-1}\,(y_1, \ldots, y_n) = \frac{1}{1 + \|y\|^2}\,\left(2y_1, \ldots, 2y_n, \|y\|^2 - 1\right)$$

Definition. *Ein Diffeomorphismus* $f : (M, g) \longrightarrow \left(\tilde{M}, \tilde{g}\right)$ *zwischen zwei semi-Riem. Mannigfaltigkeiten heißt*

- <u>*längentreu*</u> $:\Longleftrightarrow \quad l_g\,(\gamma) = l_{\tilde{g}}\,(f\,(\gamma))$ *für alle Kurven* $\gamma : I \longrightarrow M$,

[2] siehe auch Bsp. 20 auf Seite 20 von Kapitel 1

- <u>*volumentreu*</u> $:\Longleftrightarrow \qquad Vol_g(A) = Vol_{\tilde{g}}(f(A))$ *für alle meßbaren* $A \subset M$
- <u>*orthogonalitätserhalten*</u> $:\Longleftrightarrow \qquad \forall\, v, w \in T_xM$ *mit* $v \perp w$ *gilt* $df_x(v) \perp df_x(w)$.

Seien g *und* $\tilde{g}$ Riemannsch*, so heißt* f

- <u>*winkeltreu*</u> $:\Longleftrightarrow \qquad \angle_x(\gamma, \delta) = \angle_{f(x)}(f(\gamma), f(\delta))$.

Seien g *und* $\tilde{g}$ pseudo-Riemannsch*, so heißt* f

- <u>*typerhaltend*</u> $:\Longleftrightarrow \qquad \forall\, x \in T_xM$ *zeitartig (raumartig) ist* $df_x(v)$ *zeitartig (raumaritg).*

Satz 3.5. *Sei* $f : (M, g) \longrightarrow \left(\tilde{M}, \tilde{g}\right)$ *ein* typerhaltender *Diffeomorphismus zwischen semi-Riem. Mannigfaltigkeiten, dann gilt*

1. f *ist eine Isometrie* $\Longleftrightarrow$ f *ist längentreu,*
2. f *ist konform* $\Longleftrightarrow$ f *ist orthogonalitätserhaltend,*
3. f *ist längentreu* $\Longleftrightarrow$ f *ist konform und volumenerhaltend.*
   Sind g *und* $\tilde{g}$ *Riemansch, so gilt*
4. f *ist konform* $\Longleftrightarrow$ f *ist winkeltreu.*

Beweis:

1. $(\Rightarrow)$:

$$\begin{aligned}
l_{\tilde{g}}(f(\gamma)) &= \int_a^b \| (f(\gamma))'(t) \|_{\tilde{g}} dt \\
&= \int_a^b \| df_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) \|_{\tilde{g}} dt \\
&= \int_a^b \sqrt{|\tilde{g}_{f(\gamma(t))}\left(df_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)), df_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))\right)}\, dt \\
&= \int_a^b \sqrt{(f^*\tilde{g})_{\gamma(t)}(\gamma(t), \gamma(t))}\, dt \\
&\overset{Vor.}{=} \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))}\, dt = \int_a^b \| \dot{\gamma}(t) \|_g dt \\
&= l_g(\gamma)
\end{aligned}$$

   $(\Leftarrow)$: Sei f längentreu. Da g und f^*g symetrische Bilinearformen sind, genügt es zu zeigen, dass

$$(f^*g)_x(v, v) = g_x(v, v) \quad \forall v \in T_xM$$

   da

$$g_x(v, w) = \frac{1}{2}\left(g_x(v, v) + g_x(w, w) - g(v - w, v - w)\right)$$

Sei also $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$ eine Kurve mit $\gamma(0) = x$ und $\dot{\gamma}(0) = v$. Wir setzen

$$L(t) := l_g\left(\gamma|_{[-\epsilon,\epsilon]}\right) = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \|\dot{\gamma}(t)\|_g dt$$

und

$$\tilde{L}(t) := l_g\left(f(\gamma)|_{[-\epsilon,\epsilon]}\right) = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \|(f \circ \gamma)'(t)\|_g dt.$$

Nach Vor. ist $L(t) = \tilde{L}(t)$. Differenziert man nun nach t in $t = 0$, so folgt

$$\|\dot{\gamma}(t)\|_g = \|(f \circ \gamma)'(t)\|_g$$

bzw.

$$|g_x(v, v)| = |(f^* g)_x(v, v)|.$$

Da f typerhaltend ist, folgt daraus die Behauptung.

2. $(\Rightarrow)$: Seien $v, w \in T_x M$ mit $v \perp w$, so gilt

$$g_{f(x)}(df_x(v), df_x(v)) = (f^* g)_x(v, w) = \sigma^2 g_x(v, v) = 0$$

$(\Leftarrow)$: Sei f orthogonalitätserhaltend. Wir fixieren eine ONB $(e_1, \ldots, e_n)$ von $T_x M$. Dann ist

$$\epsilon_i = g_x(e_i, e_i) = \begin{cases} -1 & i = 1, \ldots, p \\ 1 & i = p+1, \ldots, n \end{cases}$$

und wir setzen

$$\begin{aligned} (f^* \tilde{g})_x(e_i, e_j) &= g_{f(x)}(df_x(e_i), df_x(e_j)) \qquad (*) \\ &= \delta_{ij} \epsilon_i \sigma_i^2(x) \text{ mit } \sigma > 0 \end{aligned}$$

Wir zeigen nun

$$\sigma_1(x) = \ldots = \sigma_n(x) =: \sigma(x).$$

Es gilt nämlich

$$g_x(e_i - e_j, \epsilon_j e_i + \epsilon_i e_j) = \epsilon_j \epsilon_i - \epsilon_i \epsilon_j = 0.$$

Demzufolge ist nach Voraussetzung auch

$$df_x(e_i - e_j) \perp df_x(\epsilon_j e_i + \epsilon_i e_j)$$

und damit

$$\begin{aligned} 0 &= (f^* \tilde{g})_x(e_i - e_j, \epsilon_j e_i + \epsilon_i e_j) \\ &= \tilde{g}_{f(x)}(df_x(e_i) - df_x(e_j), \epsilon_j df_x(e_i) + \epsilon_i df_x(e_j)) \\ &= \epsilon_j \epsilon_i \sigma_i^2(x) - \epsilon_i \epsilon_j \sigma_j^2(x) \\ &= \sigma_i^2(x) - \sigma_j^2(x) \end{aligned}$$

Durch lineare Fortsetzung von $(*)$ folgt nun die Behauptung.

3. f längentreu $\Longleftrightarrow$ f ist konform und volumentreu.

(a) Sei $(u.\varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ eine Karte von M mit der durch φ definierten Orientierung O_M und damit $\left(\tilde{U} = f(U), \tilde{\varphi} = \varphi \circ f^{-1} = (y_1, \ldots, y_n)\right)$ eine Karte auf $\tilde{M}$ mit der durch $\tilde{\varphi}$ definierten Orientierung. Dann ist $f : U \longrightarrow \tilde{U}$ ein *orientierungserhaltender* Diffeomorphismus. Nach Definition überführt df die kanonischen Basen ineinander, denn

$$\begin{aligned} df_x\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(x)\right) = df_x\left(d\varphi^{-1}_{\varphi(x)}(e_i)\right) &= d\left(f \circ \varphi^{-1}\right)_{\varphi(x)}(e_i) \\ &\overset{y=f(x)}{=} d\left(\varphi \circ f^{-1}\right)^{-1}_{\tilde{\varphi}(y)}(e_i) \\ &= \frac{\partial}{\partial y_i}(y) \end{aligned}$$

Für die kanonischen n-Formen folgt dann

$$\begin{aligned} 1 &= dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n\left(\frac{\partial}{\partial y_1}(y), \ldots, \frac{\partial}{\partial y_n}(y)\right) \\ &= f^*(dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n)\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}(x)\right). \end{aligned}$$

Damit ist also

$$f^*(dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n) = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \tag{3.1}$$

Behauptung: f ist volumentreu $\Longleftrightarrow f^* d\tilde{U} = dU \qquad \forall\ (U, \varphi)$

i. $(\Leftarrow)$:

$$\begin{aligned} Vol_g(A) &= \int_A dU \\ &\overset{Vor.}{=} \int_A f^* d\tilde{U} \\ &= \int_A \sqrt{\tilde{g}}_{f(x)} f^*(dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n) \\ &\overset{(3.1)}{=} \int_A \sqrt{\tilde{g}}_{f(x)} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \\ &= \int_{\varphi(A)} \sqrt{\tilde{g}}_{f \circ \varphi^{-1}} d\lambda^n \\ &= \int_{\tilde{\varphi}(f(A))} \sqrt{\tilde{g}}_{\tilde{\varphi}^{-1}} d\lambda^n \\ &= \int_{f(A)} \sqrt{\tilde{g}} dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n \\ &= \int_{f(A)} d\tilde{U} = Vol_{\tilde{g}}(f(A)) \end{aligned}$$

ii. $(\Rightarrow)$: Für die n-Formen $f^* d\tilde{U}$ und dU existiert genau ein $\lambda \in C^\infty(M)$ mit

$$f^* d\tilde{U} = \lambda \cdot dU.$$

Für alle $x \in M$ gilt nun aber nach dem Mittelwertsatz der Integralrech-

nung

$$
\begin{aligned}
\lambda(x) &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\int\limits_{K_\epsilon(x)} \lambda dU}{\int\limits_{K_\epsilon(x)} dU} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\int\limits_{K_\epsilon(x)} f^* d\tilde{U}}{\int\limits_{K_\epsilon(x)} dU} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\int\limits_{K_\epsilon(x)} \sqrt{\tilde{g}\circ f}\, f^*\left(dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n\right)}{\int\limits_{K_\epsilon(x)} dU} \\
&\overset{(3.1)}{=} \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\int\limits_{K_\epsilon(x)} \sqrt{\tilde{g}\circ f}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n}{\int\limits_{K_\epsilon(x)} dU} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\int\limits_{\varphi(K_\epsilon(x))} \sqrt{\tilde{g}\circ\left(f\circ\varphi^{-1}\right)}\, d\lambda^n}{\int\limits_{K_\epsilon(x)} dU} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\int\limits_{\tilde{\varphi}(f(K_\epsilon(x)))} \sqrt{\tilde{g}\circ\tilde{\varphi}^{-1}}\, d\lambda^n}{\int\limits_{K_\epsilon(x)} dU} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\int\limits_{f(K_\epsilon(x))} d\tilde{U}}{\int\limits_{K_\epsilon(x)} dU} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{Vol_{\tilde{g}}\left(f\left(K_\epsilon(x)\right)\right)}{Vol_g\left(K_\epsilon(x)\right)} \\
&\overset{Vor.}{=} 1
\end{aligned}
$$

(b) Zum Beweis von 3. :

i. $(\Rightarrow)$: Ist f längentreu so gilt $f^*\tilde{g} = g$ und somit ist f konform. Wählt man nun alle Karten wie in (a), so gilt auch

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\tilde{g}\left(f(x)\right)} &= \sqrt{\det\left\{\tilde{g}_{f(x)}\left(\frac{\partial}{\partial y_i}(y), \frac{\partial}{\partial y_j}(y)\right)\right\}_{ij}} \\
&= \sqrt{\det\left\{\tilde{g}_{f(x)}\left(df_x\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(x)\right), df_x\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(x)\right)\right)\right\}_{ij}} \\
&= \sqrt{\det\left\{f^*\tilde{g}\right\}_{ij}} = \sqrt{\det\left\{g\right\}_{ij}} \\
&= \sqrt{g(x)}
\end{aligned}
$$

Ist A meßbar und liegt oBdA in einer Kartenumgebung U, so folgt

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{f(A)} d\tilde{U} &= \int\limits_{f(A)} \sqrt{\tilde{g}}\, dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n \\
&= \int\limits_{\tilde{\varphi}(f(A))} \sqrt{\tilde{g}\circ\tilde{\varphi}^{-1}} d\lambda^n \\
&= \int\limits_{\varphi(A)} \sqrt{(\tilde{g}\circ f)\circ\varphi^{-1}} d\lambda^n \\
&= \int\limits_{A} dU
\end{aligned}
$$

Also ist f auch volumenerhaltend.

ii. $(\Leftarrow)$: Sei $f^*\tilde{g} = \sigma^2 \cdot g$ und $f^* d\tilde{U} = dU$ für alle Karten (U, φ). Sei weiterhin $(e_1, \ldots, e_n)$ eine positiv-orientierte ONB in $T_x U$ bzgl. g, dann ist

$$\left(\frac{1}{\sigma(x)} df_x(e_1), \ldots, \frac{1}{\sigma(x)} df_x(e_n) \right)$$

eine positiv-orientierte ONB in $T_{f(x)}\tilde{U}$ bzgl. $\tilde{g}$. Und es folgt

$$\begin{aligned} \left(f^* d\tilde{U}\right)_x (e_1, \ldots, e_n) &= d\tilde{U}_{f(x)} (df_x(e_1), \ldots, df_x(e_n)) \\ &= \sigma^n(x) \cdot d\tilde{U}_{f(x)} \left(\frac{1}{\sigma(x)} df_x(e_1), \ldots, \frac{1}{\sigma(x)} df_x(e_n) \right) \\ &= \sigma^n \cdot 1 \\ &= \sigma^n \cdot dU_x(e_1, \ldots, e_n). \end{aligned}$$

Damit ist also

$$f^* d\tilde{U} = \sigma^n \cdot dU$$

Nach Voraussetzung gilt dann jedoch $\sigma^n \equiv 1$.

4. Analog zu 2.

□

Information:

Satz von Nash.[3] Sei (M^n, g) eine *Riemannsche* Mannigfaltigkeit. Dann ist M *isometrisch* zu einer UMF $\tilde{M} \subset \mathbb{R}^N$ mit Induzierter Metrik.

Definition. *Sei $B \in \mathfrak{X}^{(r,0)}(M)$ ein $(r,0)$- Tensorfeld und $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld und $\Phi_t : M \longrightarrow M$ die durch den Fluß von X definierten lokalen Diffeomorphismen, dann heißt das $(r,0)$-Tensorfeld*

$$(L_X B)_x := \frac{d}{dt} (\Phi_t^* B)_x |_{t=0} \in T_x^{(r,0)} M$$

die <u>Lie-Ableitung von B nach X</u>.

[3] Ann. of Math 1956, 63, S.20-63

Definition. *Sei (M,g) eine semi-Riem. Mannigfaltigkeit. Ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ heißt*

- *<u>Killing-Vektorfeld</u>* $:\Longleftrightarrow L_X g = 0$
- *<u>konformes Vektorfeld</u>* $:\Longleftrightarrow L_X g = \lambda \cdot g$

Schreibt man z.B. die Bedingung für ein Killingfeld aus, so erhält man

$$\begin{aligned}
(L_X g)_x (v,w) &= \frac{d}{dt} (\Phi_t^* g)_x |_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} \left(g_{\Phi_t(x)} \left(X(\gamma(t)), X(\delta(t)) \right) \right) |_{t=0} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{g_x \left(X(\gamma(0)), X(\delta(0)) \right) - g_{\Phi_h(x)} \left(X(\gamma(h), X(\delta(h)) \right)}{|h|} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{g_x (v,w) - g_{\Phi_h(x)} \left(X(\gamma(h), X(\delta(h)) \right)}{|h|} \\
&= 0
\end{aligned}$$

für alle $v = [\gamma]$ und $w = [\delta]$ aus $T_x M$.

Satz 3.6. *Sei (M,g) eine semi-Riem. Mannigfaltigkeit und $X \in \mathfrak{X}(M)$ mit Fluß $\{\Phi_t\}$, dann gilt*

1. *X ist ein Killingfeld. $\Longleftrightarrow \Phi_t : U_t \subset M \longrightarrow \Phi_t(U_t) \subset M$ sind Isometrien.*
2. *X ist ein konformes Vektorfeld $\Longleftrightarrow \Phi_t : U_t \subset M \longrightarrow \Phi_t(U_t) \subset M$ sind konforme Abbildungen.*

Beweis:

1. $(\Leftarrow)$: Sei $x \in M$. Für alle $|t| < \epsilon$ ist $x \in U_t$. Nach Voraussetzung ist dann

   $$(\Phi_t^* g)_x = g_x \qquad \forall\ |t| < \epsilon$$

   und damit

   $$(L_X g)_x = \frac{d}{dt} (\Phi_t^* g)_x |_{t=0} = 0$$

   $(\Rightarrow)$: Sei $x \in U_t$. Zu zeigen ist $(\Phi_t^* g)_x = g_x$. Dazu nutzen wir die Eigenschaft

   $$\Phi_{s+t} = \Phi_s \circ \Phi_t$$

   und betrachten die Abbildung

   $$\begin{aligned}
   (\Phi_t^*)_x : T_{\Phi_t}^{(2,0)} M &\longrightarrow T_x^{(2,0)} M \qquad (*) \\
   B_{\Phi_t(x)} &\longmapsto (\Phi_t^* B)_x
   \end{aligned}$$

   Nach Voraussetzung ist

   $$0 = (L_X g)_{\Phi_t(x)} = \frac{d}{ds} \left((\Phi_s^* g)_{\Phi_t(x)} \right) |_{s=0}.$$

Wenden wir darauf $(*)$ an , so folgt

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \frac{d}{ds}(\underbrace{(\Phi_t^*)_x \circ (\Phi_s^* g)_{\Phi_t(x)}}_{(\Phi_{t+s}^* g)_x})|_{s=0} \\ &= \frac{d}{d\tau}(\Phi_\tau^* g)_x|_\tau \end{aligned}$$

d.h. $(\Phi_\tau^* g)_x$ ist konstant auf $(-\epsilon, t)$ und damit folgt

$$(\Phi_\tau^* g)_x = g_x$$

2. $(\Leftarrow)$: Es ist $(\Phi_t^* g)_x = \sigma_t^2(x)\, g_x$ für alle t für die Φ_t definiert ist. Damit folgt

$$(L_X g)_x = \frac{d}{dt}(\Phi_t^* g)_x|_{t=0} = \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\sigma_t^2(x)\right)|_{t=0}}_{\lambda(x)} \cdot g_x$$

$(\Rightarrow)$: Sei x im Definitionsbereich von Φ_t und gelte

$$(L_X g)_{\Phi_t(x)} = \frac{d}{ds}(\Phi_s^* g)_{\Phi_t(x)}|_{s=0} = \lambda(\Phi_t(x)) \cdot g_{\Phi_t(x)}$$

Wir benutzen wieder die Abbildung von $(*)$:

$$\frac{d}{ds}(\underbrace{(\Phi_t^*)_x \circ (\Phi_s^* g)_{\Phi_t(x)}}_{(\Phi_{t+s}^* g)_x})|_{t=0} = \lambda(\Phi_t(s)) \cdot (\Phi_t^*)_x\, g_{\Phi_t(x)}$$

Damit ist

$$\frac{d}{dt}((\Phi_t^* g)_x) = \lambda(\Phi_t(x)) \cdot \underbrace{(\Phi_t^* g)_x}_{h(t)}.$$

Aus der DGL $h'(t) = \lambda(t)\, h(t)$ folgt dann

$$(\Phi_t^* g)_x = \underbrace{e^{\int_0^t \lambda(\Phi_s(x))\, ds}}_{:=\sigma_t^2(x)} \cdot \underbrace{(\Phi_0^* g)_x}_{g_x}$$

und somit ist Φ_t konform.

□

Satz 3.7 (Eigenschaften der Lie-Ableitung von Tensorfeldern)**.** *Seien* $B_i, B \in \mathfrak{X}^{(r,0)}(M)$ *Tensorfelder,* $f \in C^\infty(M)$ *und* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$*, so gilt*

1. $L_X(f \cdot B) = X(f) \cdot B + f \cdot L_X B$
2. $L_X(B_1 \otimes B_2) = (L_X B_1) \otimes B_2 + B_1 \otimes (L_X B_2)$
3. $(L_X B)(X_1, \ldots, X_r) = X(B(X_1, \ldots, X_r)) - \sum_{i=1}^r B(X_1, \ldots, [X, X_i], \ldots, X_r)$
4. $[L_X, L_Y] = L_{[X,Y]}$

Den Beweis überlassen wir als Übungsaufgabe.

Folgerung

Sind X, Y Killing-VF (konforme VF), so ist $[X, Y]$ auch ein Killing-VF (konformes VF).

Beweis: Es sei $L_X g = \lambda \cdot g$ und $L_Y g = \mu \cdot g$. Aus Satz3.7 folgt dann

$$\begin{aligned}
L_{[X,Y]} g &\overset{4.)}{=} [L_X, L_Y]\, g \\
&= L_X (L_Y g) - L_Y (L_X g) \\
&= L_X (\mu \cdot g) - L_Y (\lambda \cdot g) \\
&\overset{1.)}{=} X(\mu) \cdot g + \mu \cdot L_X g - X(\lambda) \cdot g + \lambda \cdot L_Y g \\
&= (X(\mu) + \mu \cdot \lambda - X(\lambda) - \lambda \cdot \mu) \cdot g \\
&= \underbrace{(X(\mu) - X(\lambda))}_{\in C^\infty M} \cdot g
\end{aligned}$$

□

Bemerkungen

- $\mathfrak{Kill}(M, g) = \{X \in \mathfrak{X}(M) \mid X \text{ ist Killing-Vektorfeld}\}$ ist eine Lie-Algebra.
  $Isom(M, g) = \{f \in Diff(M) \mid f \text{ ist Isometrie}\}$ ist eine Liesche Gruppe mit Lie-Algebra
  $$\mathfrak{Kill}_c(M, g) = \{X \in \mathfrak{Kill}(M, g) \mid X \text{ ist vollständig}\}$$
- $conf(M, g) = \{X \in \mathfrak{X}(M) \mid X \text{ ist ein konformes VF}\}$ ist eine Lie-Algebra
  $Conf(M, g) = \{f \in Diff(M) \mid f \text{ ist konform}\}$ ist eine Liesche Gruppe mit Lie-Algebra
  $$conf_c(M, g) = \{X \in conf(M, g) \mid X \text{ ist vollständig}\}$$

und es gilt

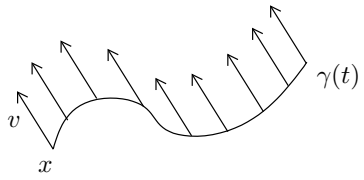
$$\dim \mathfrak{Kill}_c(M^n, g) \leq \frac{1}{2} n(n+1)$$

$$\dim conf_c(M^n, g) \leq \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

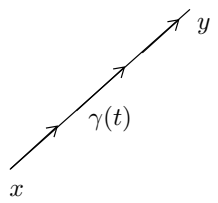
3.4 Kovariante Ableitungen und der Levi-Civita-Zusammenhang einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit

Im Euklidischen Raum weiß man, wie man Vektoren entlang von Kurven parallel verschieben kann. Wir wollen dies jetzt auf Mannigfaltigkeiten verallgemeinern. Dazu benötigt man ein Konzept, mit dem man erklären kann, was die Parallelverschiebung von Tangentialvektoren sein soll.

Betrachten wir dazu zunächst die Parallelverschiebung im $\mathbb{R}^n$ nochmals genauer:



- $v(Z) \in T_{\gamma(t)}\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ Parallelverschiebung von $v \in T_x\mathbb{R}^n$ entlang $\gamma \iff v(t) \equiv v =$ const. $\iff v'(t) = 0$



- $\gamma(t)$ kürzeste Kurve zwischen x und y im $\mathbb{R}^n \iff \gamma'(t)$ parallel verschieben entlang $\gamma(t)$

Wir müssen allgemein erklären, was die Ableitung von VF entlang Kurven ist. Dazu verallgemeinern wir zunächst die Richtungsableitung im $\mathbb{R}^n$ und betrachten dazu die Menge der Vektorfelder $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) = C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) = \Gamma(T\mathbb{R}^n)$ mit der Abbildung

$$\begin{aligned} \nabla : \ \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \times \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n), \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X Y := X(Y) \\ &\qquad \text{Richtungsableitung von } Y : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ &\qquad \text{nach } VF\ X. \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist

- additiv in Y,

- erfüllt die Produktregel in Y, d.h. $\nabla_X (fY) = X(f)Y + f \cdot (\nabla_X Y)$,
- und sie ist tensoriell in X, d.h. $\nabla_{f \cdot X_1 + g \cdot X_2} Y = f \cdot \nabla_{X_1} Y + g \cdot \nabla_{X_2} Y$ für alle $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ und $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Desweiteren hat sie die Eigenschaften:

- $X(\langle Y_1, Y_2 \rangle_{\mathbb{R}^n}) = \langle \nabla_X Y_1, Y_2 \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle Y_1, \nabla_X Y_2 \rangle_{\mathbb{R}^n}$
- $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$

Definition. *Sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine Zuordnung*

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

heißt <u>kovariante Ableitung</u> (=<u>affiner Zusammenhang</u>) von Y nach X (auf M) , falls

1. $\nabla_X (Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$ *(additiv in Y)*
2. $\nabla_X (fY) = X(f)Y + f \nabla_X Y$ *(Produktregel)*
3. $\nabla_X Y$ *tensoriell in X, d.h.* $\nabla_{f \cdot X_1 + g \cdot X_2} Y = f \cdot \nabla_{X_1} Y + g \cdot \nabla_{X_2} Y$ *für alle* $Y \in \mathfrak{X}(M)$ *und* $f, g \in C^\infty(M)$.

Beispiel 60. KOVARIANTE ABLEITUNGEN

1. Für $\mathbb{R}^n = M^n$ ist wie oben gesehen $\nabla_X Y = X(Y)$ eine kovariante Ableitung.
2. Sei $M^n \subset \mathbb{R}^n$ eine UMF, dann ist $(\nabla_X Y)(x) := \mathrm{proj}_{T_X M} \underbrace{X(Y)(x)}_{\in \mathbb{R}^N}$ eine kov. Ableitung auf M.
3. Sei ∇ eine kov. Ableitung und $B \in \mathfrak{X}^{(2,1)}(M)$, dann ist $\tilde{\nabla} = \nabla + B$ mit
$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X, Y)$$
ebenfalls eine kov. Ableitung.

Da eine glatte Mannigfaltigkeit M^n diffeomorph ist zu einer UMF $\tilde{M} \subset \mathbb{R}^N$ existieren also immer ∞ viele kov. Ableitungen.

Lemma 3.1. *Sei ∇ eine kov. Ableitung, $U \subset M$ offen und $Y_1, Y_2, X \in \mathfrak{X}(M)$ mit $Y_1|_U \equiv Y_2|_U$, so ist*

$$\nabla_X, Y_1 = \nabla_X Y_2$$

auf U.

Beweis: Sei $x \in U$ fix und $f \in C^\infty(M)$ mit $f(x) = 1$ und $supp\, f \subset U$. Dann ist $f \cdot (Y_1 - Y_2) \equiv 0$ auf M und mit der Produktregel folgt

$$0 = \nabla_X f \cdot (Y_1 - Y_2) = X(f)(Y_1 - Y_2) + f \cdot (\nabla_X Y_1 - \nabla_X Y_2)$$

Im Punkt x gilt nun aber $f(x) = 1$ und $Y_1(x) = Y_2(x)$, sodass

$$0 = (\nabla_X Y_1)(x) - (\nabla_X Y_2)(x).$$

Daraus folgt aber die Behauptung.

□

Folgerungen

1. $(\nabla_X Y)$ ist eindeutig durch $X(x)$ und $Y|_U$ bestimmt, und zwar für beliebig kleine offene Umgebung $U(x) \subset M$. Wir setzen damit

$$(\nabla_X Y)(x) := \nabla_{X(x)} Y.$$

2. Man kann die kov. Ableitung ∇^M auf M zu einer kov. Ableitung auf offenen Teilmengen $U \subset M$ einschränken:

$$\begin{aligned} \nabla^U : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) &\longrightarrow \mathfrak{X}(U) \\ (X, Y) &\longmapsto \left(\nabla^U_X Y\right)(x) := \left(\nabla^M_{\tilde{X}} \tilde{Y}\right)(x) \end{aligned}$$

wobei $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(M)$ mit $\tilde{X}|_U = X$ und $\tilde{Y}|_U = Y$.

Wir bezeichnen im Folgenden ∇^U und ∇^M mit dem gleichen Symbol ∇.

Definition. *Sei $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ eine zulässige Karte auf M, dann heißen die Funktionen $\Gamma^k_{ij} \in C^\infty(U)$, für die*

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x_k}$$

<u>lokale Koeffizienten von ∇</u> bez. (U, φ).

Wegen der Eigenschaften 1.) - 3.) ist ∇ eindeutig bestimmt, wenn man die $\{\Gamma^k_{ij}\}$ für einen Atlas A_M kennt. Sei nämlich $X = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ und $Y = \sum \psi^j \frac{\partial}{\partial x_j}$ für eine Karte $(U, \varphi = (x_1, \ldots x_n))$, so folgt dann

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \sum_{i=1}^n \xi^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} Y \\ &= \sum_{i,j=1}^n \xi^i \eta^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} + \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i}(\eta_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i,j=1}^n \xi^i \eta^j \Gamma^k_{ij} + \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i}(\eta^k) \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \end{aligned}$$

Beispiel 61. KOVARIANTE ABLEITUNG IM $\mathbb{R}^n$

Sei $M = \mathbb{R}^n$ und $\nabla_X Y = X(Y)$. Für die Karte $(\mathbb{R}^n, \varphi = \mathrm{id})$ mit $\frac{\partial}{\partial x_i} = e_i$ folgt

$$\nabla_{e_i} e_j = e_i(e_j) \equiv 0,$$

da e_j ein konstantes VF ist. Es gilt also $\Gamma^k_{ij} = 0$.

Definition. *Sei $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ eine C^∞-Kurve. Ein <u>VF entlang γ</u> ist eine Abbildung*

$$\begin{aligned} X : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow TM \\ t &\longmapsto X(t) \in T_{\gamma(t)}M \end{aligned}$$

die 'glatt' ist, d.h. für jede Karte (U, φ) mit $U \cap \gamma(I) \neq \emptyset$ sind die Koeffizienten $\xi^i(t)$ in der Basisdarstellung

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} \xi^i(t) \frac{\partial}{\partial x_i}(\gamma(t)) \qquad \gamma(t) \in U$$

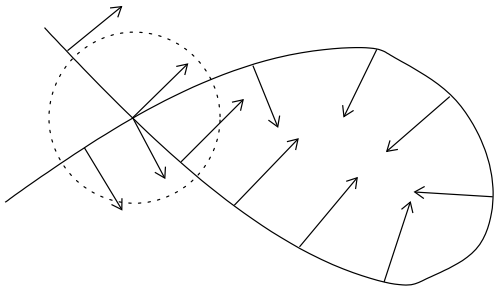
glatte Funktion in t.

Wir setzen

$$\mathfrak{X}_\gamma(M) := \textit{Menge der Vektorfelder entlang } \gamma$$

Bemerkung

$X(t)$ ist i.A. nicht zu einem VF auf M fortsetzbar.



Behauptung: Sei $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ *regulär* und $X \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$, dann existiert für alle $t_0 \in I$ ein $\epsilon_{t_0} > 0$ und Vektorfeld $\tilde{X}_{t_0} \in \mathfrak{X}(M)$ so dass

$$\tilde{X}_{t_0}(\gamma(t)) = X(t) \qquad \forall |t - t_0| < \epsilon_{t_0}, t \in I.$$

D.h. man kann X in diesem Fall lokal zu einem Vektorfeld auf M fortsetzen.

Beweis: Nach Voraussetzung ist γ eine Immersion, und damit lokal eine Einbettung. Es existiert also eine Teilmenge $\hat{I}_{t_0} \subset I$ so dass

$$\gamma : \hat{I}_{t_0} \simeq \gamma(\hat{I}_{t_0}) = K \subset M$$

ein Diffeomorphismus zur UMF $K \subset M$ ist. Damit existiert auch eine Karte (U, φ) von M mit $\varphi(K \cap U) = (x_1, 0, \ldots, 0)$ und wir setzen

$$\tilde{X}\left(\varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_n)\right) := X\left(\varphi^{-1}(x_1, 0, \ldots, 0)\right).$$

□

Satz 3.8. *Sei (M, ∇) eine glatte Mannigfaltigkeit mit kov. Ableitung und $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ eine C^∞-Kurve in M. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Zuordnung*

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{dt} : \mathfrak{X}_\gamma(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}_\gamma(M) \\ X &\longmapsto \frac{\nabla X}{dt} \end{aligned}$$

mit folgenden Eigenschaften:

1. $\frac{\nabla}{dt}(X_1 + X_2) = \frac{\nabla X_1}{dt} + \frac{\nabla X_2}{dt}$
2. $\frac{\nabla}{dt}(f \cdot X) = f'X + f \cdot \frac{\nabla X}{dt}$ *für alle* $f \in C^\infty(I)$.
3. *Ist* $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(M)$ *mit* $\tilde{X}(\gamma(t)) = X(t) \quad \forall t \in \tilde{I} \subset I$ *dann ist*

$$\frac{\nabla X}{dt}(t) = \nabla_{\gamma(t)}\tilde{X} \qquad \forall t \in \tilde{I}$$

$\frac{\nabla X}{dt} \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$ *heißt* <u>*kovariante Ableitung von* $X \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$ *entlang* γ</u>

Beweis:

1. *Eindeutigkeit:* Angenommen $\frac{\nabla}{dt}$ und 1.) - 3.) sind gegeben. Sei $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ zulässige Karte mit $U \cap \gamma(I) \neq \emptyset$, und $\tilde{I} \subset I$ ein Teilintervall mit $\gamma(\tilde{I}) \subset U$, dann ist

$$X(t) = \sum_{i=1}^n \xi_i(t) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}(\gamma(t))}_{=:X_i(t)} \quad t \in \tilde{I}$$

Aus 1.) und 2.) folgt nun

$$\frac{\nabla X}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\xi_i' \cdot X_i + \xi_i \frac{\nabla X_i}{dt} \right).$$

und mit 3.) folgt weiter

$$\frac{\nabla X_i}{dt}(t) = \nabla_{\dot\gamma(t)} \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad \forall t \in \tilde{I}$$

Setzen wir nun $\varphi \circ \gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ auf $\tilde{I}$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\dot\gamma(t) &= \sum_{j=1}^n \gamma_j'(t) \frac{\partial}{\partial x_j}(\gamma(t)) \\
\Rightarrow \frac{\nabla X_i}{dt}(t) &= \sum_{k,,j=1}^n \gamma_j'(t) \Gamma_{ji}^k(\gamma(t)) \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}(\gamma(t)) \qquad t \in \tilde{I} \\
\Rightarrow \frac{\nabla X}{dt}(t) &= \sum_{k=1}^n \left(\xi_k'(t) + \sum_{i,j} \xi_i(t) \gamma_j'(t) \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \right) \frac{\partial}{\partial x_k}(\gamma(t)) \quad \forall t \in \tilde{I} \quad (*)
\end{aligned}$$

und damit ist $\frac{\nabla X}{dt}$ ist eindeutig durch die lokalen Koeffizienten $\{\Gamma_{ij}^k\}$von ∇ bestimmt.

2. *Existenz:* Sei $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ Karte mit $\gamma(I) \cap U \neq \emptyset$. Wir definieren $\frac{\nabla X}{dt}(t) \quad \forall t \in I$ durch $(*)$

$$\frac{\nabla X}{dt}(t) = \sum_{k=1}^n \left(\xi_k'(t) + \sum_{i,j} \xi_i(t) \gamma_j'(t) \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \right) \frac{\partial}{\partial x_k}(\gamma(t)).$$

Direktes Nachrechnen zeigt, dass $\frac{\nabla X}{dt}(t)$ die Eigenschaften 1.) - 3.) erfüllt. $(*)$ ist damit auch die Lokale Darstellung von $\frac{\nabla X}{dt}(t)$.

$\square$

Beispiel 62. KOVARIANTE ABLEITUNG ENTLANG KURVEN IM $\mathbb{R}^n$

Sei $M = \mathbb{R}^n$ und $\nabla_X Y = X(Y)$. Für $X \in \mathfrak{X}_\gamma(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$X(t) = \sum_{i-1}^{n} \xi_i(t) e_i$$

und damit ist

$$\begin{aligned} \frac{\nabla X}{dt}(t) &= \sum_{k=1}^{n} \xi_k'(t) e_k \qquad (\text{da } \Gamma_{ij}^k \equiv 0) \\ &= X'(t) \end{aligned}$$

Definition. *Sei (M, ∇) eine glatte Mannigfaltigkeit mit kov. Ableitung und $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ eine glatte Kurve. Ein VF $X \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$ heißt <u>parallel verschoben entlang γ</u>, falls*

$$\frac{\nabla X}{dt} \equiv 0$$

In lokalen Koordinaten ist diese Bedingung äquivalent zu

$$\left(\xi_k' + \sum_{i,j} \left(\gamma' - i\xi_j \Gamma_{ij}^k \gamma \right) \right) \equiv 0 \quad k = 1, \ldots, n$$

Beispiel 63. PARALLELVERSCHIEBUNG IM $\mathbb{R}^n$

Sei $M = \mathbb{R}^n$ und $\nabla_X Y = X(Y)$. $Z \in \mathfrak{X}_\gamma(\mathbb{R}^n)$ist genau dann parallel verschoben, falls

$$\frac{\nabla Z}{dt} = Z'(t) = 0 \Longleftrightarrow Z(t) = const.$$

Satz 3.9. *Sei(M, ∇) eine glatte Mannigfaltigkeit mit kov. Ableitung und $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ eine glatte Kurve, dann gilt*

1. *Ist $v \in T_{\gamma(a)}M$, so existiert genau ein entlang γ parallelverschobenes VF $X_v \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$ mit $X_v(a) = v$.*
2. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\gamma^\nabla : T_{\gamma(a)}M &\longrightarrow T_{\gamma(b)}M \\ v &\longmapsto X_v(b) \end{aligned}$$

heißt <u>Parallelverschiebung entlang γ</u>, ist ein linear Isomorphismus der Tangentialäume und unabhängig von der Parametrisierung von γ.

Beweis:

1. Die DGL $\frac{\nabla X}{dt} \equiv 0$ hat in lokalen Koordinaten die Form

$$\xi'(t) = B(t) \cdot \xi(t),$$

wobei $\xi(t) = (\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t))^\top$ und $B(t) \in M_\mathbb{R}(n, n)$. Sei $\xi(a)$ vorgegeben, dann existiert (lokal) genau eine Lösung des AWP auf dem ganzenDefinitionsbereich von B[4]. Überdeckt man durch Karten $\gamma([a, b])$, so erhält man sukzessive die Lösung des AWP auf den Teilintervallen. Und damit folgt die Behauptung.

[4] siehe Analyis 3: Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöff

2. $\mathcal{P}_\gamma^\nabla$ ist

   - *linear*, da DGL linear:
   $$X_{\alpha v+\beta w}(t) = \alpha X_v(t) + \beta X_w(t)$$
   erfüllt DGL und AWP
   - *bijektiv*: Wir lassen γ rückwärts durchlaufen:
   $$\gamma^-(t) = \gamma(b - t(b-a)) \quad t \in [0,1].$$
   Dann ist $X^-(t) := X(b - t(b-a))$ parallel entlang γ^-und es gilt
   $$X^-(1) = X(a) \text{ und } X^-(0) = X(b)$$
   sodass
   $$\begin{aligned} \mathcal{P}_\gamma^\nabla \cdot \mathcal{P}_{\gamma^-}^\nabla &= \mathrm{id}_{T_{\gamma(b)}M} \\ \mathcal{P}_{\gamma^-}^\nabla \circ \mathcal{P}_\gamma^\nabla &= \mathrm{id}_{T_{\gamma(a)}M} \end{aligned}$$
   - Mit
   $$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(\tau(s)) \qquad \tau(s_0) = a, \qquad \tau(s_1) = b$$
   ist $\tilde{X}(s) := X(\tau(s))$ Parellverschiebung von $v \in T_{\gamma(a)}M$ entlang $\tilde{\gamma}$.

□

Satz 3.10. *Sei $M^n \subset \mathbb{R}^N$eine UMF mit kanonischen kov. Ableitung $\nabla_X Y = proj_{TM}(X(Y))$ und $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ eine Kurve. Dann gilt:*

Ein Vektorfeld $Z : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ auf M entlang γ ist parallelverschoben. $\Longleftrightarrow Z'(t) \in N_{\gamma(t)}M^n \subset \mathbb{R}^N \ \forall t \in I$.

Beweis: Sei $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ Karte mit $\gamma(t) \in U$, dann ist in einer Umgebung von $\gamma(t)$
$$Z(t) = \sum_{i=1}^n \xi_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i}(\gamma(t))$$
und damit
$$\begin{aligned} \frac{\nabla Z}{dt}(t) &= \sum_i \xi_i'(t) \frac{\partial}{\partial x}(\gamma(t)) + \xi_i(t) \nabla_{\gamma(t)} \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &\overset{Def.}{=} \sum_{i=1}^n \xi_i'(t) \frac{\partial}{\partial x_i}(\gamma(t)) + \xi_i(t) \,\mathrm{proj}_{T_{\gamma(t)}M}\left(\dot{\gamma}(t)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right) \\ &= \mathrm{proj}_{TM_{\gamma(t)}}\left(\sum_i \xi_i'(t) \frac{\partial}{\partial x_i}(\gamma(t)) + \xi_i(t) \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\gamma(t)\right)\right) \\ &= \mathrm{proj}_{T_{\gamma(t)}M}\left(\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\sum_i \xi_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i}(\gamma(t))\right)}_{Z(t)}\right) \\ &= \mathrm{proj}_{T_{\gamma(t)}M} Z'(t). \end{aligned}$$
Und daraus folgt
$$\begin{aligned} Z'(t) = 0 &\Longleftrightarrow \mathrm{proj}_{T_{\gamma(t)}M}(Z'(t)) = 0 \quad \forall t \in I \\ &\Longleftrightarrow Z'(t) \in N_{\gamma(t)}M^n \subset \mathbb{R} \quad \forall t \in I. \end{aligned}$$

□

Beispiel 64. PARALLELVERSCHIEBUNG AUF DER S^2

Betrachten S^2 mit kanonischer kov. Ableitung $\nabla_X Y = \text{proj}_{TS^2} X(Y)$.

Wir betrachten die halben Großkreise. Für $t \in [0, \pi]$ sei

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= \cos(t)\, e_3 + \sin(t)\, e_1 \\ \gamma_2(t) &= \cos(t)\, e_3 + \sin(t)\, e_2 \end{aligned}$$

Für die Parallelverschiebungen $\mathcal{P}^{\nabla}_{\gamma_i} : T_{e_3} S^2 \longrightarrow T_{-e_3} S^2$, $j \in \{1, 2\}$, folgt dann

$$\boxed{\mathcal{P}^{\nabla}_{\gamma_1}(v) = -\mathcal{P}^{\nabla}_{\gamma_2}(v) \quad \text{mit } v \in T_\xi S^2}$$

wobei $T_\xi S^2 = \text{span}(e_1, e_2)$. Denn es gilt

- $\gamma_1'(t) = -\sin(t)\, e_3 + \cos(t)\, e_1$ ist parallel entlang γ_1 mit $\gamma_1'(0) = e_1$, da $\gamma_1''(t) = -\gamma_1(t) \perp T_{\gamma_1(t)} S^2$
- $\gamma_2'(t) = -\sin(t)\, e_3 + \cos(t)\, e_2$ ist parallel entlang γ_2 mit $\gamma_2'(0) = e_2$.
- $X_1(t) \equiv e_2$ ist $\parallel$ VF entlang γ_1 und $X_1(0) = e_2$, da $X_1(t) \perp \gamma_1(t)$ und $X_1'(t) \equiv 0$.
- $X_2(t) \equiv e_1$ ist $\parallel$ VF entlang γ_2 mit $X_2(0) = e_1$.

Sei dann $v = v_1 e_1 + v_2 e_2 \in T_\xi S^2$, so folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{\nabla}_{\gamma_1}(v) &= v_1 \mathcal{P}^{\nabla}_{\gamma_1}(e_1) + v_2 \mathcal{P}^{\nabla}_{\gamma_1}(e_2) \\ &= -v_1 e_1 + v_2 e_2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{\nabla}_{\gamma_2}(v) &= v_1 \mathcal{P}^{\nabla}_{\gamma_2}(e_1) + v_2 \mathcal{P}^{\nabla}_{\gamma_2}(e_2) \\ &= v_1 e_1 - v_2 e_2 \end{aligned}$$

Hierbei hängt die Parallelverschiebung also vom Weg ab!

Bemerkung

Der Begriff der kov. Ableitung und der $\parallel$-Verschiebung sind äquivalent: Seien $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und γ Integralkurve von X durch x, sodass

$$\gamma(0) = x, \qquad \gamma(t) = X(\gamma(t)).$$

Dann ist

$$(\nabla_X Y)(x) = \frac{d}{dt} \underbrace{\left(\mathcal{P}^{\nabla}_{\gamma|_{[0,t]}}(Y(\gamma(t)))\right)|_{t=0}}_{\in T_x M}$$

Sei (M^n, g) semi-Riemannsche MF, dann existieren verschiedene kov. Ableitungen. Wollen wir solche kov. Ableitung ∇ finden, für die die Parallelverschiebungen

$$\mathcal{P}^{\nabla}_{\gamma} : T_{\gamma(a)} M^n \longrightarrow T_{\gamma(b)} M^n$$

(pseudo)-orthogonale Abbildungen sind, d.h. Längen und Winkel von Vektoren bleiben invariant.

Satz 3.11. [Fundamentallemma der Riemannschen Geometrie]

Sei (M^n, g) semi-Riemannsche MF. Dann existiert genau eine kor. Ableitung ∇ auf M^n mit

1. $X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ *(metrisch)*
2. $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$ *(torsionsfrei).*

Diese kov. Ableitung ∇ heißt Levi-Civita-Zusammenhang von (M^n, g) und ist gegeben durch die Koszul-Formel*:*

$$(*) \qquad 2g(\nabla_X Y, Y) = X(g(Y,Z)) + Y(g(X,Z)) - Z(g(X,Y)) + g([X,Y],Z) + g([Z,X],Y) + g([Z,Y],X).$$

Beweis:

1. *Existenz*: Die Formel $(*)$ definiert eine metrische und torsionsfreie kov. Ableitung. ÜA.
2. *Eindeutigkeit*: Sei ∇ metrisch und torsionsfrei, dann gilt
   (a) $X(g(Y,Z)) \overset{metr.}{=} g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$
   (b) $Y(g(X,Z)) \overset{metr.}{=} g(\nabla_Y X, Z) + g(X, \nabla_Y Z) \overset{tor.}{=} g(\nabla_X Y, Z) + g([Y,X],Z) + g(X, \nabla_Y Z)$
   (c) $Z(g(X,Y)) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) \overset{tor.}{=} g(\nabla_X Z, Y) + g([Z,X],Y) + g(X, \nabla_Y Z) + g(X,[Z,Y])$

   Daraus folgt dann aber die *Koszul-Formel* $(*)$.

□

Satz 3.12. *Sei ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang einer semi-Riemannschen MF (M^n, g) und seien $\{\Gamma_{ij}^k\}$ die lokalen Koeffizienten von ∇*

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Dann gilt: Γ_{ij}^k ist symmetrisch in (i,j) und

$$(**) \qquad \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^n g^{k\ell} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(g_{j\ell}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(g_{i\ell}) - \frac{\partial}{\partial x_\ell}(g_{ij}) \right),$$

wobei $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$ die lokale Koeffizienten der Metrik sind und $g^{k\ell}$ inverse Matrix zu g_{ij}.

Beweis: Wir setzen $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$ in die *Koszul-Formel* $(*)$ ein und benutzen $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0$. Dann ist

$$2g \underbrace{\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_p} \right)}_{\sum_{k=1}^n 2\Gamma_{ij}^k g_{kp}} = \frac{\partial}{\partial x_i}(g_{ip}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(g_{ip}) - \frac{\partial}{\partial x_p}(g_{ij})$$

Multiplizieren wir dies mit $\sum_p g^{p\ell}$, so folgt

$$2\Gamma_{ij}^{\ell} = \sum_p g^{\ell p}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(g_{jp}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(g_{ip}) - \frac{\partial}{\partial x_p}(g_{ij})\right).$$

□

Definition. *Die* $\{\Gamma_{ij}^k\}$ *aus* $(**)$ *heißen* <u>*Christoffel-Symbole*</u> *von* (M^n, g).

Satz 3.13. *Sei* ∇ *der Levi-Civita-Zusammenhang der semi-Riemannschen MF* (M^n, g) *,* $\gamma : [a,b] \in \mathbb{R} \longrightarrow M$ *eine glatte Kurve und* $X, Y \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$ *parallelverschiebende VF entlang* γ*, dann gilt*

$$g_{\gamma(t)}(X(t), Y(t)) \equiv g_{\gamma(a)}(X(a), Y(a)) \qquad \forall t \in [a,b]$$

Insbesondere ist $\mathcal{P}_\gamma^\nabla : T_{\gamma(a)}M \longrightarrow T_{\gamma(b)}M$ *eine (pseudo)-orthogonale Abbildung, d.h. Längen und Winkel von Vektoren bleiben invariant.*

Beweis: ∇ ist eine *metrische* kov. Ableitung, und mit der Definition von $\frac{\nabla X}{dt}$ folgt

$$\frac{d}{dt}\left(g_{\gamma(t)}(X(t), Y(t))\right) = g_{\gamma(t)}\left(\frac{\nabla X}{dt}(t), Y(t)\right) + g_{\gamma(t)}\left(X(t), \frac{\nabla Y}{dt}(t)\right) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}_\gamma(M).$$

Da nach Voraussetzung X und Y parralele Vektorfelder sind, verschwindet die rechte Seite der Gleichung.

□

Satz 3.14. *Sei* $M^n \subset \mathbb{R}^N$ *eine UMF mit induzierter Riemannscher Metrik* g*. Der Levi-Civita-Zusammenhang von* M^n *ist dann gegeben durch*

$$\nabla_X Y = \mathit{proj}_{TM} X(Y)$$

Beweis: Die Richtungsableitung im $\mathbb{R}^n$ ist bekanntlich metrisch und torsionsfrei. Für $Y, Z \in \mathfrak{X}(M^n)$ mit $X(Y) = \text{proj}_{TM} X(Y) + \text{proj}_{NM} X(Y)$ folgt dann aber aus $TM \perp_{\langle,\rangle_{\mathbb{R}^n}} NM$

$$\begin{aligned} X(g(Y,Z)) &= \langle \text{proj}_{TM} X(Y), Z\rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle Y, \text{proj}_{TM} X(Z)\rangle \\ &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \nabla_X Y - \nabla_Y X &= \text{proj}_{TM}(X(Y) - Y(X)) \\ &= \text{proj}_{TM}\left(\underbrace{[X,Y]}_{tangential}\right) \\ &= [X,Y] \end{aligned}$$

□

Eine kovariante Ableitung ∇ auf M kann man auch auf Tensorfelder fortsetzen.

Definition. *Sei* $B \in \mathfrak{X}^{(r,0)}(M)$ *ein* $(r,0)$*-Tensorfeld und* $X \in \mathfrak{X}(M)$*. Das Tensorfeld* $\nabla_X B \in \mathfrak{X}^{(r,0)}(M)$ *mit*

$$(\nabla_X B)(X_1, \ldots, X_r) := X(B(X_1, \ldots, X_r)) - \sum_{i=1}^{r} B(X_1, \ldots, \nabla_X X_i, \ldots, X_r)$$

heißt <u>*kovariante Ableitung von* B *nach* X</u>*.*

Damit ergeben sich folgende Eigenschaften:

1. $\nabla_X (B_1 + B_2) = \nabla_X B_1 + \nabla_X B_2$
2. $\nabla_X (fB) = X(f) B + f \cdot \nabla_X B$
3. $\nabla_X (B_1 \otimes B_2) = \nabla_X B_1 \otimes B_2 + B_1 \otimes \nabla_X B_2$

Satz 3.15. *Sei* (M, g) *eine semi-Riem. Mannigfaltigkeit, dann gilt:*

1. ∇ *ist ein metrische kovariante Ableitung auf* $M \iff \nabla_g = 0$
2. *Ist* ∇ *torsionsfreie kov. Ableitung auf* M*, dann gilt*

$$(L_X g)(Y, Z) = (\nabla_X g)(Y, Z) + g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X)$$

3. *Ist* ∇^{LC} *der Levi-Civita-Zusammenhang auf* (M, g)*, so folgt*

$$(L_X g)(Y, Z) = g\left(\nabla_Y^{LC} X, Z\right) + g\left(Y, \nabla_Z^{LC} X\right).$$

Insbesondere gilt:

$$X \text{ ist Killing-VF} \iff g\left(\nabla_Y^{LC} X, Z\right) + g\left(Y, \nabla_Z^{LC} X\right) = 0 \quad \forall Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$$

und

$$X \text{ ist ein konformes VF} \iff \exists \lambda \in C^\infty(M) \text{ mit } g\left(\nabla_Y^{LC} X, Z\right) + g\left(Y, \nabla_Z^{LC} X\right) = \lambda \cdot g(Y, Z) \ \forall Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$$

Beweis: Nachrechnen mit Definition von ∇_g und ÜA über Lie-Ableitung.

□

3.5 Die Krümmungen einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit den Krümmungsgrößen einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit befassen. Dazu führen wir im erten Teilabschitt die grundlegenden Definitionen ein. Danach wollen wir uns mit zwei speziellen Klassen von Mannigfaltigkeiten beschäftigen, den Mannigfaltigkeiten mit konstanter *Schnittkrümmung* und danach mit den sogenannten *Einstein-Mannigfaltigkeiten.* Am Ende dieses Teilabschnitts wollen wir dann eine kleine Einführung in das mathematische Modell der *Allgemeinen Relativitätstheorie* (ART) geben.

3.5.1 Definitionen

Sei M^n eine C^∞-Mannigfaltigkeit mit kov. Ableitung ∇. Auf (M^n, ∇) betrachtet man 2 Tensorfelder:

Definition. *Das (2,1)-Tensorfeld $T^\nabla \in \mathfrak{X}^{(2,1)}(M)$*

$$T^\nabla(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

heißt <u>*Torsion von ∇*</u>.

Das (3,1)-Tensorfeld $\mathcal{R}^\nabla \in \mathfrak{X}^{(3,1)}(M)$

$$\mathcal{R}^\nabla(X,Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

heißt <u>*Krümmung von ∇*</u>.

Die Abbildung $\mathcal{R}^\nabla(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ heißt <u>*Krümmungsendormorphismus*</u>.

Bemerkung

1. Die tensoriellen Eigenschaften rechnet man leicht nach (aus jeder Komp. kann man Funktionen herausziehen).
2. T^∇ und $\mathcal{R}^\nabla(\cdot,\cdot)Z$ sind schiefsymmetrisch.
3. Ist ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit, dann ist $T^\nabla = 0$ (torsionsfrei).

Definition. *Sei (M^n, g) eine semi-Riemannsche MF, ∇ Levi-Civita-Zsh. Der* <u>*Krümmungstensor von (M^n, g)*</u> *ist das (4,0)-Tensorfeld $\mathcal{R} \in \mathfrak{X}^{(4,0)}(M)$:*

$$\mathcal{R}(X,Y,Z,W) := g(\mathcal{R}(X,Y)Z, W)$$

Später werden wir feststellen, dass $\mathcal{R}$ ein Maß für die Abweichung von der Geometrie des $\mathbb{R}^n$ist.

Satz 3.16. *Der Krümmungstensor einer semi-Riem. MF hat folgende Eigenschaften:*

1. *$\mathcal{R}$ ist schiefsymmetrisch in der 1. und 2. und in der 3. und 4. Komponente:*

$$\mathcal{R}(X,Y,Z,W) = -\mathcal{R}(Y,X,Z,W) = -\mathcal{R}(X,Y,W,Z)$$

2. $\mathcal{R}(X,Y,Z,W) = \mathcal{R}(Z,W,X,Y)$

3. *Es gilt die* <u>*1. Bianchi-Identität:*</u>

$$\mathcal{R}(X,Y,Z,W) + \mathcal{R}(Y,Z,X,W) + \mathcal{R}(Z,X,Y,W) = 0$$

4. *Es gilt auch die* <u>*2. Bianchi-Identität:*</u>

$$(\nabla_X \mathcal{R})(Y,Z,U,V) + (\nabla_Y \mathcal{R})(Z,X,U,V) + (\nabla_Z \mathcal{R})(X,Y,U,V) = 0$$

Beweis:

1. Die Schiefsymmetrie in der 1. und 2. Komponente ergibt sich aus der Def., da $\mathcal{R}^\nabla(X,Y)$ schiefsymmetrisch ist.

$$\mathcal{R}(X,Y,Z,W) = -\mathcal{R}(X,Y,W,Z) \Longleftrightarrow \mathcal{R}(X,Y,Z,Z) = 0 \quad VZ$$

(da $b(z,w) + b(w,z) = \frac{1}{2}(b(z+w,z+w) - b(z-w,z-w))$)

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(X,Y,Z,Z) &= g(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z, Z) \\
&\overset{\nabla_{metr.}}{=} X(g(\nabla_Y Z, Z)) - g(\nabla_Y Z, \nabla_X Z) - Y(g(\nabla_X Z, Z)) + g(\nabla_X Z, \nabla_Y Z) \\
&\quad -[X,Y](g(Z,Z)) + g(Z, \nabla_{[X,Y]}Z) \\
&= XY(g(Z,Z)) - X(g(Z,\nabla_Y Z) - YX(g(Z,Z)) \\
&\quad +Y(g(Z,\nabla_X Z)) - [X,Y](g(Z,Z)) + g(Z,\nabla_{[X,Y]}Z) \\
&= -g(\nabla_X Z, \nabla_Y Z) - g(Z, \nabla_X\nabla_Y Z) \\
&\quad +g(\nabla_Y Z, \nabla_X Z) + g(Z, \nabla_Y\nabla_X Z) = g(Z, \nabla_{[X,Y]}Z) \\
&= -\mathcal{R}(X,Y,Z,Z) \qquad \curvearrowright 1).
\end{aligned}$$

2. $\mathcal{R}(X,Y,Z,W) = \mathcal{R}(Z,W,X,Y) \qquad \forall X,Y,Z,W \in \mathfrak{X}(M)$: Benutzen Schiefsymmetrie und 1. Bianchi-Identität

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(X,Y,Z,W) + \mathcal{R}(Y,Z,X,W) = \mathcal{R}(Z,X,Y,W) &= 0 \\
\mathcal{R}(Y,Z,W,X) + \mathcal{R}(Z,W,Y,X) = \mathcal{R}(W,Y,Z,X) &= 0 \\
\mathcal{R}(Z,W,X,Y) + \mathcal{R}(W,X,Z,Y) + \mathcal{R}(X,Z,W,Y) &= 0 \\
\mathcal{R}(W,X,Y,Z) + \mathcal{R}(X,Y,W,Z) + \mathcal{R}(Y,W,X,Z) &= 0
\end{aligned}$$

Summiert man diese Gleichungen, dann folgt

$$2(\mathcal{R}(X,Z,W,Y) + \mathcal{R}(W,Y,Z,X)) = 0 \Longrightarrow \mathcal{R}(X,Z,W,Y) = \mathcal{R}(W,Y,X,Z)$$

3. *1. Bianchi-Identität:*

$$\begin{aligned}
&\mathcal{R}^\nabla(X,Y)Z + \mathcal{R}^\nabla(Y,Z)X = \mathcal{R}^\nabla(Z,X)Y = \\
&= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z + \nabla_Y\nabla_Z X - \nabla_Z\nabla_Y X - \nabla_{[Y,Z]}X \\
&\quad +\nabla_Z\nabla_X Y - \nabla_X\nabla_Z Y - \nabla_{[ZX]}Y \\
&\underset{T^\nabla = 0}{=} \nabla_X([Y,Z]) - \nabla_{[Y,Z]}X + \nabla - Y[Z,X] - \nabla_{[Z,X]}Y \\
&\quad +\nabla_Z([X,Y]) - \nabla_{[X,Y]}Z \\
&\underset{T^\nabla = 0}{=} [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] \\
&= 0
\end{aligned}$$

(Jacobi-Identität für den Kommutator von VF $\nearrow$ Satz 2.11, Kapitel 2).

4. *2. Bianchi-Identität:* ÜA. (direkte Rechnung)

□

Sei nun (M^n, g) eine semi-Riem. MF, $x \in M$ und $v, w \in T_xM$ linear unabhängig, dann definieren wir

$$\begin{aligned} Q_x(v,w) &:= g_x(v,v)g_x(w,w) - g_x(v,w)^2 \\ &= \det \begin{pmatrix} g_x(v,v) & g_x(v,w) \\ g_x(w,v) & g_x(w,w) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt

1. Sei $\nu = (v_1, v_2), \omega = (w_1, w_2)$ eine Basis eines 2-dim UR $E \subset T_xM$ und $M = \{\mathcal{M}\}_{\nu,\omega}$, dann ist

$$(*) \qquad Q_x(v_1, v_2) = \mathrm{Det}(M)^2 Q_x(w_1, w_2)$$

   (Trafo-Formel für BLF)

2. $E \subset T_xM$ ist bez. g_x nichtausgearteter 2-dim UR $\iff Q_x(v_1, v_2) \neq 0 \quad \forall$ Basen (v_1, v_2) von E.

Definition. *(M^n, g) semi-Riemannsche MF, $\mathcal{R} \in \mathfrak{X}^{(k,0)}(M)$ Krümmungstensor von (M, g) $x \in M$ und $E \subset T_xM$ nichtausgearteter 2-dim UR.*

$$K_E(x) := \frac{\mathcal{R}_x(v,w,w,v)}{Q_x(v,w)}$$

wobei $E = span(v, w)$ heißt <u>Schnittkrümmung von (M, g)</u> in $x \in M$ in Richtung $E \subset T_xM$.

Bemerkung:

1. $K_E(x)$ ist korrekt definiert (d.h. unabhängig von Wahl der Basis (v, w) von E)
   Dies folgt aus (*) und da $\mathcal{R}$ in (1,2) und (3,4) schiefsymmetrisch ist, d.h. Zähler und Nenner transformieren sich mit $\det(M^2)$.

2. Ist (e_1, e_2) ONB von (E, g_x) und $g_x(e_i, e_j) = \delta_{ij}\epsilon_i = \pm 1$, dann ist

$$K_E(x) = \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 \cdot \mathcal{R}_x(e_1, e_2, e_2, e_1)$$

Satz 3.17. *Sei (M^n, g) eine semi-Riem. Mannigfaltigkeit.*
Der Krümmungstensor $\mathcal{R}$ von (M^n, g) ist durch die Schnittkrümmungen $K_E(x)$ mit $x \in M$ und $E \subset T_xM$ 2-dim. nichtausgeartet, eindeutig bestimmt.

Beweis: Wir führen folgende Bezeichnung ein: Sei V reeller VR mit $\dim V \geq 2$, dann sei

$$\begin{aligned} S^2\left(\Lambda^2 V^*\right) &:= \{B \in T^{(4,0)}V \mid B \text{ schiefsymmetrisch in (1,2) und (3,4)}, \\ &\quad \text{und} \quad B(v,w,x,y) = B(x,y,v,w)\} \end{aligned}$$

Sei $\langle , \rangle$ nichtausgeartete BLF auf V. Da $\mathcal{R}$ ein (4,0)-Tensorfeld ist, das die 1. Bianchi-Identität erfüllt und $\mathcal{R}_x \in S^2(\Lambda^2 T_x^* M)\ \forall x \in M$, genügt es, folgendes zu zeigen:

Seien $R, \hat{R} \in S^2(\Lambda^2 V^*)$ (4,0)-Tensoren, die die 1. Bianchi-Identität erfüllen und gelte

$$K_E := \frac{R(x,y,y,x)}{Q(x,y)} = \hat{K}_E := \frac{\hat{R}(x,y,y,x)}{Q(x,y)}$$

für alle nichtausgearteten UR $E = \text{span}(x,y) \subset V$. Dann ist $R = \hat{R}$.

1. Nach Voraussetzung gilt $R(X,Y,Y,X) = \hat{R}(x,y,y,x)$, falls x, y linear unabhängig und $E = \text{span}(x,y)$ nichtausgearteter UR.
   $R(x,y,y,x) = \hat{R}(x,y,y,x) \quad \forall y, y \in V$:
   Da $R(x,y,\cdot,\cdot)$ schiefsymmetrisch, kann man oBdA annehmen, dass x, y linear unabhängig sind (sonst $0 = 0$). Sei $E = \text{span}(x,y)$ 2-dim und ausgeartet. Wir zeigen: es existiert Folge $y_n \in V, y_n \longrightarrow y$, so dass $E_n = \text{span}(x, y_n)$ 2-dim, <u>nicht</u> ausgeartet: $E = \text{span}(x,y)$ ausgeartet $\Longrightarrow \langle , \rangle$ ist definiert. Wähle ein $v \in V$ mit folgender Eigenschaft:

$$\begin{aligned}
&\langle x,x\rangle = 0: \ v \in V \ \text{ so dass} \langle x,v\rangle \neq 0 \\
&\langle x,x\rangle < 0: \ v \in V \ \text{ mit} \langle v,v\rangle > 0 \\
&\langle x,x\rangle > 0: \ v \in V \ \text{ mit} \langle v,v\rangle < 0.
\end{aligned}$$

   In allen 3 Fällen gilt dann $Q(x,v) < 0$. Sei $y_n := y + \frac{1}{n} v, \ n \in \mathbb{N}$, dann folgt

$$\begin{aligned}
Q(x,y_n) &= \langle x,x\rangle\langle y_n,y_n\rangle - \langle x,y_n\rangle \\
&= \langle x,x\rangle \left(\langle y,y\rangle + \frac{1}{n^2}\langle v,v\rangle + \frac{2}{n}\langle y,v\rangle \right) \\
&\quad - \left(\langle x,y\rangle + \frac{1}{n}\langle x,v\rangle \right)^2 \\
&= Q(x,y) + \frac{2}{n}\left(\langle x,x\rangle\langle y,v\rangle - \langle x,y\rangle\langle x,v\rangle \right) \\
&\quad - \frac{1}{n^2}\langle x,v\rangle^2 + \frac{1}{n^2}\langle v,v\rangle\langle x,x\rangle \\
&= Q(x,y) + \frac{1}{n^2}Q(x,v) + \frac{2}{n}\left(\underbrace{\langle x,x\rangle\langle y,v\rangle - \langle x,y\rangle\langle x,v\rangle}_{b} \right) \\
&\overset{Q(x,y)=0}{=} \frac{1}{n^2}Q(x,v) + \frac{2}{n}\cdot b \neq 0
\end{aligned}$$

   für n hinreichend groß. Damit ist $\text{span}(x,y_n) = E_n$ nichtausgeartet falls $u \geq v$. Und nach Voraussetzung folgt dann

$$R(x,y_n,y_n,x) = \hat{R}(x,y_n,y_n,x)$$

   bzw. für $y_n \to y$

$$R(x,y,y,x) = \hat{R}(x,y,y,x)$$

2. $R(x,y,y,z) = \hat{R}(x,y,y,z) \qquad \forall x,y,z \in V$:

Mit 1. folgt

$$\begin{aligned} R(x+z,y,y,x+z) &= \hat{R}(x+z,y,y,x+z) \\ R(x,y,y,x)+R(x,y,y,z) &= R(z,y,y,x) \\ &= R(z,y,y,z) \\ &= \hat{R}(x,y,y,x)+\hat{R}(x,y,y,z) \\ &= \hat{R}(x,y,y,z)+\hat{R}(z,y,y,x)+\hat{R}(z,y,y,z) \end{aligned}$$

Da $R, \hat{R} \in S^2(\Lambda^2 V^*)$ folgt dann aber

$$R(x,y,y,z) = \hat{R}(x,y.y,z) \quad \forall x,y,z$$

3. $R = \hat{R}$:
   Mit 2. ist

$$R(x,y+w,y+w,z) = \hat{R}(x,y+w,y+w,z)$$

   und damit

$$\begin{aligned} R(x,y,y,z)+R(x,y,w,z) &= R(x,w,w,z)+R(x,w,y,z) \\ &= \hat{R}(x.y,y,z) \\ &= \hat{R}(x,y,w,z)+\hat{R}(x,\ddot{w},v,z)+\hat{R}(x,w,y,z). \end{aligned}$$

   Jetzt setzen wir

$$\begin{aligned} f(x,y,w,z) &:= R(x,y,w,z)-\hat{R}(x,y,w,z) \\ &= R(w,x,y,z)-\hat{R}(w,x,y,z) \\ &= f(w,x,y,z) \end{aligned}$$

   und erhalten weiter

$$f(x,y,w,\cdot) = f(w,x,y,\cdot) = f(y,w,x,\cdot)$$

   Damit ist f invariant gegen zyklische Vertauschungen der vorderen 3 Einträge. Aus der 1. Bianchi-Identität folgt dann

$$3f(x,y,w,z) = f(x,y,w,z)+f(y,w,x,z)+f(w,x,y,z) = 0$$

   und daraus ergibt sich

$$R(x,y,w,z) = \hat{R}(x,y,w,z) \quad \forall x,y,w,z \in V.$$

□

Satz 3.18. *Sei $F : (M,g) \longrightarrow (\tilde{M},\tilde{g})$ eine Isometrie zwischen semi-Riem. MF, $\nabla, \tilde{\nabla}$ Levi-Civita-Zsh. von (M,g) bzw. $(\tilde{M},\tilde{g})$ und $\mathcal{R}, \tilde{\mathcal{R}}$ die Krümmungstensoren, dann gilt:*

1. $\tilde{\nabla}_{dF(X)} dF(Y) = dF(\nabla_X Y) \quad X,Y \in \mathfrak{X}(M)$
2. $F^*\tilde{\mathcal{R}} = \mathcal{R}$
3. *Für die Schnittkrümmungen auf M bzw. $\tilde{M}$ gilt: $E \subset T_xM$ nichtausgeartet 2-dim. gilt*

$$\tilde{K}_{dF(E)}(F(x)) = K_E(x).$$

Den Beweis überlassen wir als ÜA.

3.5.2 Räume mit konstanter Schnittkrümmung

In der Riem. Geometrie spielen MF mit konstanter Schnittkrümmung eine besondere Rolle.

Definition. *Eine semi-Riem. MF* (M^n, g) *heißt MF* <u>*konstanter Schnittkrümmung*</u> $K_0 \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow$

$$\begin{aligned} K_E(x) \equiv K_0 \quad & \forall x \in M \\ & \forall E \subset T_xM \text{ nichtausgeartet}, \dim E = 2. \end{aligned}$$

Satz 3.19. *Sei* (M^n, g) *eine semi-Riemannsche MF, dann gilt*

(M, g) *hat konst. Schnittkrümmung* $K_o \Longleftrightarrow \mathcal{R}(X, Y, Z, W) = K_0 \left(g(X, W)\, g(Y, Z) - g(X, Z) g(Y, W)\right)$

Beweis: $(\Leftarrow)$: Sei $E \subset T_xM$ nichtausgeartet mit $\dim E = 2$ und (e_1, e_2) ONB von E mit $g(e_i, e_i) = \epsilon_i = \pm 1$, dann gilt

$$\begin{aligned} K_E(x) &= \epsilon_1\epsilon_2 \mathcal{R}_x(e_1, e_2, e_2, e_1) \\ &\overset{Vor.}{=} \epsilon_1\epsilon_2 K_0 \left(g(e_1, e_1)g(e_2, e_2) - g(e_1, e_2)^2\right) \\ &= K_0 \end{aligned}$$

$(\Rightarrow)$: Sei $k_E(x) \equiv K_0 \quad \forall x \in M,\ E^2 \subset T_xM$ nichtausgeartet. Wir betrachten den (4,0)-Tensor

$$\hat{R}(X, Y, Z, W) = (K_0 g(X, W)g(Y, Z) - g(X, Z) - g(Y, W))$$

Dann ist $\hat{R}_x \in S^2(\lambda^2 T_x^* M) \quad \forall x \in M$ und erfüllt die 1. Bianchi-Identität (nachrechnen). Für die zu $\hat{R}$ gehörende Schnittkrümmung gilt

$$\begin{aligned} \hat{K}_E(x) &= \epsilon_1\epsilon_2 \hat{R}(e_1, e_2, e_2, e_1) \quad (e_1, e_2) \text{ ONB in } E \\ &= K_0. \end{aligned}$$

Der Beweis von Satz 3.17 liefert dann $R = \hat{R}$.

□

Es folgen nun Beispiele für Mannigfaltigkeiten konstanter Schnittkrümmung.

Beispiel 65. DER $\mathbb{R}^n$ MIT EUKLIDISCHEM SKALARPRODUKT

Behauptung: $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle_{\mathbb{R}^n})$ hat konst. Schnittkrümmung $K_0 = 0$.

Beweis:

Nach Satz 3.19 ist $\mathcal{R} = 0$ zu zeigen. Der Levi-Civita-Zsh. ist hier $\nabla_X Y = X(Y)$ und für den Krümmungsendomorphismus fogt dann

$$\begin{aligned} R^\nabla(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \\ &= X\left(Y(Z)\right) - Y\left(X(Z)\right) - [X, Y](Z) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich dann $\mathcal{R} \equiv 0$ bzw. $K_0 = 0$.

□

Beispiel 66. DIE SPHÄRE S_r^n MIT INDUZIERTER METRIK

Wir betrachten die Sphäre $S_r^n \subset \mathbb{R}^{n+2}$

$$S_r^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x\rangle = r^2\}$$

mit induzierter Riem. Metrik g.

Behauptung:(S_r^n, g) hat konstante Schnittkrümmung $K_0 = \frac{1}{r^2}$.

Beweis: Für den Levi-Civita-Zsh. ergibt sich aus Satz 3.14:

$$\nabla_X Y = \text{proj}_{TS_r^n} X(Y).$$

Da $T_X S_r^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle v, x\rangle = 0\}$ ist

$$\begin{aligned} M:\ S_r^n &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \quad \text{Einheitsnormalenfeld von } S_r^n \\ x &\longmapsto \tfrac{1}{r}\cdot x. \end{aligned}$$

Sei $Z \in \mathbb{R}^{n+1}$, dann folgt

$$\text{proj}_{T_X S^n r} Z = Z - \underbrace{\langle Z, u(x)\langle n(x)}_{\text{Normalenkomp. von } Z}$$

$\Longrightarrow \nabla_X Y = X(Y) - \langle X(Y), n\langle n, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(S_r^n)$.

Aus der Produktregel für $\langle,\rangle$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \langle X(Y), n\rangle &= X\underbrace{\langle Y, n\rangle}_{dny\perp n} - \langle Y, \underbrace{X(n)}_{dn(x)=\frac{1}{n}X}\rangle \\ &= -\frac{1}{r}\langle Y, X\rangle \end{aligned}$$

Für den LC-Zsh. auf S_r^n gilt also

$$\nabla_X y = X(Y) + \frac{1}{r}\langle X, Y\rangle n; X, Y \in \mathfrak{X}(S_r^n)$$

und damit folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^\nabla(X,Y)Z &= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \\ &= X(\nabla_Y Z) = \frac{1}{r}\langle X, \nabla_Y Z\rangle n \\ &\quad -Y(\nabla_X Z) - \frac{1}{r}\langle Y, \nabla_X Z\rangle n \\ &\quad -[X,Y](Z) - \frac{1}{r}\langle [X,Y], Z\rangle n \\ &= XY(Z) + \frac{1}{r}X(\langle Y, Z\rangle n) + \frac{1}{r}\langle X, \nabla - YZ\rangle n \\ &\quad -YX(Z) - \frac{1}{r}Y(\rangle X, Z\rangle n) - \frac{1}{r}\langle Y, \nabla_X Z\rangle n \\ &\quad -[X,Y](Z) - \frac{1}{r}\langle \nabla_X Y, Z\rangle n + \frac{1}{r}\langle \nabla_Y X, Z\rangle n \\ &= \frac{1}{r}\{\langle Y, Z\rangle X(n) - \langle X, Z\rangle Y(n)\} \\ &= \frac{1}{r^2}\{\langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y\} \end{aligned}$$

Für den Krümmungstensor ergibt sich dann:

$$\mathcal{R}(X,Y,Z,W) = \frac{1}{r^2}\{\langle Y,Z\rangle\langle X,W\rangle - \langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle\}.$$

Aus Satz 3.19 folgt nun $K_0 \equiv \frac{1}{r^2}$.

□

Beispiel 67. DER OBERE HALBRAUM MIT HYPERBOLISCHER METRIK

Betrachten den oberen Halbraum

$$H^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$$

mit hyperbolischer Metrik

$$g_r := \frac{r^2}{x_n^2}(dx_1^2 + \ldots dx_n^2) \quad r > 0$$

und setzen

$$H_r^n := (H^n, g_r).$$

Behauptung: Die RMF (H_r^n, g_r) hat konst. Schnittkrümmung $-\frac{1}{r^2}$.

Beweis:

Wir berechnen zunächst die den Krümmungstensor ganz allgemein in lokalen Koordinaten bez. einer Karte:

Sei $(\varphi, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ eine zul. Karte, $\left\{\partial_j := \frac{\partial}{\partial x_j}{}_{i=1\ldots n}\right\}$ deren kanonische Basis und $\{g_{ij}\}$die Koeffizientenmatrix der Metrik mit Inverser $\left\{g^{ij}\right\}$. Für die Christoffelsymbole von (M,g) gilt

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^n g^{k\ell}\left(\partial_i(g_{j\ell}) + \partial_j(g_{i\ell}) - \partial_\ell(g_{ij})\right),$$

für den Krümmungsendomorphismus

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^\nabla(\partial_i,\partial_j)\partial_k &= \nabla_{\partial_i} - \nabla_{\partial_j}\partial_k - \nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_i}\partial_k - \nabla_{[\partial_i,\partial_j]}\partial_k \\ &= \partial_i(\Gamma_{jk}^P)\partial_p + \Gamma_{jk}^P\Gamma_{ip}^r\partial_r \\ &\quad -\partial_j(\Gamma_{ik}^P)\partial_p - \Gamma_{ik}^P\Gamma_{jp}^r\partial_r.\end{aligned}$$

und für den Krümmungstensor

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= R_{ijk\ell}dx_i \otimes dx_j \otimes dx_k \otimes dx_l, \text{ wobei} \\ (*) \qquad R_{ijk\ell} &= \mathcal{R}(\partial_i,\partial_j,\partial_k,\partial_\ell) = \\ &= \left(\partial_i(\Gamma_{jk}^r) - \partial - j(\Gamma_{ik}^r) + \Gamma_{jk}^P\Gamma_{ip}^r - \Gamma_{ik}^p\Gamma_{jp}^r\right) g_{r\ell}\end{aligned}$$

(In allen Fällen gilt die Summenkonvention: Summiert über gleichen Indizes.)

Nun leiten wir daraus die Formel für den Krümmungstensor für H_r^n ab:

Für H_r^n betrachten wir die Karte $(H_r^n, \varphi(x) = Id = (x_1, \ldots, x_n))$. Dann ist $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \equiv e_j$ und

$$\{g_{ij}(x)\} = \frac{r^2}{x_n^2} E \quad \text{bzw.} \quad \left\{g^{ij}(x)\right\} = \frac{x_n^2}{r^2} E.$$

Für die Christoffelsymbole folgt

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \frac{x_n^2}{r^2} \left(\partial_i(g_{jk}) + \partial_j(g_{ik}) - \partial_k(g_{ij})\right) \Longrightarrow \Gamma_{ij}^k = 0,$$

außer für die Indizes:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ii}^n &= \frac{1}{x_n} \qquad i < n \\ \Gamma_{nn}^n &= -\frac{1}{x_n} = \Gamma_{in}^i = \Gamma_{ni}^i. \end{aligned}$$

Setzt man dies in $(*)$ ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} R_{ijk\ell} &= -\frac{r^2}{x_n^4} \left(\partial_{i\ell}\partial_{jk} - \partial_{ik}\partial_{j\ell}\right) \\ &= -\frac{1}{r^2} \left(g_{H_r^n}(\partial_i, \partial_\ell) g_{H_r^n}(\partial_j, \partial_k) - g_{H_r^n}(\partial_i, \partial_k) g_{H_r^n}(\partial_j, \partial_\ell)\right). \end{aligned}$$

Aus Satz 3.19 folgt nun wieder $K_0 \equiv -\frac{1}{r^2}$

□

Information:

Für Modellräume mit Riemannscher Metrik gilt:[5]

- Sei (M^n, g) zsh., *vollständige* Riem. MF mit konst. Schnittkrümmung K_0, dann ist (M^n, g) isometrisch zu einer der folgenden Riem. MF

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n|_\Gamma &\text{ für } K_0 = 0 \\ S_r^n|_\Gamma &\text{ für } K_0 = \frac{1}{r^2} > 0 \\ H_r^n|_\Gamma &\text{ für } K_0 = -\frac{1}{r^2} < 0 \end{aligned}$$

  wobei Γ eine diskrete UG der Isometriegruppe von $\mathbb{R}^n, S_r^n$ bzw. H_r^n ist, die eigentlich diskontinuierlich wirkt.

- Ist die universelle Riem. Überlagerung von (M^n, g) gleich $\mathbb{R}^n, S_r^n$ bzw. H_r^n, dann ist (M^n, g) ist lokal isometrisch zu $\mathbb{R}^n, S_r^n$ bzw. H_r^n.

Analoge Eigenschaften gelten auch im pseudo-Riem. Fall für Modellräume konstanter Schnittkrümmung für Metriken vom Index k:[6]

1. Für $\mathbb{R}^{n,k} = (\mathbb{R}^n, \langle,\rangle_{n,k} = -dx_1^2 - \ldots - dx_k^2 + dx_{k+1}^2 + \ldots + dx_n^2)$ ist $\mathcal{R} = 0$ und damit auch

$$K_0 = 0.$$

[5] siehe Kapitel 4 Satz 4.9 und J.A. Wolf: Spaces of constant curvature

[6] siehe O'Neill: Semi-Riemannsche Geometrie, S. 110 ff

2. Sei $S^n_{k(r)} := \{x \in \mathbb{R}^{n+1,k} \mid \langle x,x\rangle_{n+1,k} = r^2\}$ mit der durch $\langle,\rangle_{n+1,k}$ induzierten Metrik die 'Pseudosphäre vom Radius r'.

   $S^n_k(r)$ hat Dimension n, Index k und konstante Schnittkrümmung
$$K_0 = \frac{1}{r^2}.$$
   ($S^n_k(r)$ ist diffeomorph zu $\mathbb{R}^k \times S^{n-k}$.)

3. Sei $H^n_k(r) := \{x \in \mathbb{R}^{n+1,k+1} \mid \langle x,x\rangle_{n+1,k+1} = -r^2\}$ mit der durch $\langle,\rangle_{n+1,k+1}$ induzierten Metrik "Pseudohyperbolischer Raum".

   $H^n_k(r)$ hat Dimension n, Index k und konstante Schnittkrümmung
$$K_0 = -\frac{1}{r^2}.$$
   ($H^n_k(r)$ ist diffeomorph $S^k \times \mathbb{R}^{n-k}$.)

Es gilt allgemeiner: Ist $(M^{n,k}, g)$ zsh. *geodätisch vollständige*[7] pseudo-Riem. MF vom Index k $(1 \le k \le n-1)$ mit konst. Schnittkrümmung K_0, so ist $(M^{n,k}, g)$ isometrisch zu
$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{n,k}|_\Gamma &\text{ für } K_0 = 0 \\ \widetilde{S^n_k}(r)|_\Gamma &\text{ für } K_0 = \frac{1}{r^2} > 0 \\ \widetilde{H^n_k}(r)|_\Gamma &\text{ für } K_0 = -\frac{1}{r^2} < 0 \end{aligned}$$
wobei
$$\begin{aligned} \widetilde{S^n_k}(r) &= \text{univ. Überlagerung von } S^n_k(r) \quad k = n-1 \\ \widetilde{H^n_k}(r) &= \text{univ. Überlagerung von } H^n_k(r) \quad k = n-1 \end{aligned}$$
Γ diskrete UG der Isometriegruppe der Totalräume, die eigentlich diskontinuierlich wirkt.

Insbesondere gilt:

- Seien $(M,g), (\tilde{M},\tilde{g})$ semi-Riem. MF, vollständig, gleiche Dimension und gleicher Index.
  Wenn (M,g) und $(\tilde{M},\tilde{g})$ gleiche konst. Schnittkrümmung haben, so sind sie lokal isometrisch.[8]
- $\mathcal{R} \equiv 0$ für vollst. zsh. semi-Riem. MF $(M,g) \Longleftrightarrow (M,g)$ lokal isometrisch zu $\mathbb{R}^{n,k}$.

Definition. (M^n, g) *semi-Riem. MF mit Krümmungstensor* $\mathcal{R}$. *Das (2,0)-Tensorfeld Ric* $\in \mathfrak{X}^{2,0)}(M)$
$$\begin{aligned} \textit{Ric}(X,Y)(x) &= \sum_{i=1}^n \epsilon_i \mathcal{R}_x(X(x), e_i, e_i, Y(x)) \\ &\quad \textit{wobei } (e_1,\dots,e_n) \textit{ ONB in } T_xM \epsilon_i = g_x(e_i,e_i) = \pm 1 \\ &= \textit{Tr}_{g_x}(\mathcal{R}^\nabla(\cdot, X(x))Y(x)) \end{aligned}$$

[7] siehe Definition auf Seite 176
[8] siehe Folgerung von Satz 4.6 aus Kapitel 4

heißt <u>*Ricci-Krümmung von* (M,g)</u>. ***Die Funktion*** $R \in C^\infty(M)$

$$\begin{aligned} R(x) &= \sum_{i,j=1}^{n} \epsilon_i \epsilon_j \mathcal{R}_x(e_i, e_j, e_j, e_i) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \epsilon_j \boldsymbol{Ric}_x(e_j, e_j) \end{aligned}$$

heißt <u>*Skalarkrümmung von* (M,g)</u>

Bemerkung:

- Beide Krümmungen sind korrekt def. (, dh. unabhängig von Wahl der ONB)
- 'Ric' ist ein <u>symmetrisch</u> (2,0)-Tensor
- $R(x) = 2 \sum\limits_{i<j} K_{E_{ij}}(x)$, dabei sei $K_{E_{ij}}$ die Schnittkrümmung auf

$$E_{ij} = \text{span}\,(e_i, e_j) \subset T_x M$$

Satz 3.20. *Sei* (M^n, g) *n-dim. semi-Riem. MF konst. Schnittkrümmung* K_0*, so gilt*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Ric} &= (n-1)K_0 \cdot g \\ R &= n(n-1) \cdot K_0 \end{aligned}$$

Beweis: Aus Satz 3.19 folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_x(v, e_i, e_i, w) &= K_o\left(g(v,w)g(e_i,e_i) - g(v,e_i)g(e_i,w)\right) \\ &= K_0\left(\epsilon_i g(v,w) - g(v,e_i)g(e_i,w)\right) \\ \Longrightarrow \text{Ric}_x(v,w) &= \sum_{j=1}^{n} \epsilon_i \mathcal{R}_x(v, e_i, e_i, w) \\ &= K_o\left(n \cdot g(v,w) - g(v, \underbrace{\sum \epsilon_i g(e_i,w) e_i}_{w})\right) \\ &= K_0(n-1)g(v,w). \\ R(x) &= \sum_{i<j} \underbrace{K_{E_{ij}}(x)}_{K_0} = n(n-1)K_0. \end{aligned}$$

□

3.5.3 Einstein-Mannigfaltigkeiten

Definition. *Eine semi-Riemannsche MF* (M, g) *heißt* <u>*Einstein-MF*</u>*:* $\Longleftrightarrow$ *es existiert Funktion* $f \in C^\infty(M)$ *so dass Ric* $= f \cdot g$.

Beispiele:

- Jede MF konst. Schnittkrümmung ist Einstein (Satz 3.20)
- Jede 2-dim MF ist Einstein:

$$T_xM = \text{span}(e_1, e_2) \quad e_1, e_2 ONB$$

$$\begin{aligned}
\text{Ric}_x(e_i, e_j) &= \sum_{k=1}^{2} \epsilon_k \mathcal{R}_x(e_i, e_k, e_k, e_j) \\
&= \begin{cases} 0 & i \neq j \qquad \text{(schiefraum)} \\ \epsilon_2 \mathcal{R}_x(e_1, e_2, e_2, e_1) & i = j = 1 \\ \epsilon_1 \mathcal{R}_x(e_2, e_1, e_1, e_2) & i = j - 2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} K(x) \cdot \epsilon_1 & i = j = 1 \\ K(x) \cdot \epsilon_2 & i = j = 2 \\ 0 & i \neq j \end{cases}
\end{aligned}$$

wobei $K(x) = K_{T_xM}(x)$ Schnittkrümmung von m^2. Und damit ist Ric $= K \cdot g$.

Wir wollen nun einige Eigenschaften von Einstein-Räumen behandeln. Zunächst jedoch eine Definition:

Definition. *Sei* (M^n, g) *eine semi-Riem. mit LC-Zsh.* ∇ *und* $(e_1, \ldots, e_n) \in T_xM$ *eine ONB.*

- *Für ein* $(r, 0)$*- Tensorfeld* $B \in \mathfrak{X}^{(r,0)}(M)$ *bezeichne* $\delta B \in \mathfrak{X}^{(r-1,0)}(M)$ *das Tensorfeld*

$$\delta B(X_1, \ldots, X_{r-1}) := -\sum_{i=1}^{n} \epsilon_1 (\nabla_{e_i} B)(e_i, X_1, \ldots, X_{r-1})$$

  δB *heißt* <u>*Divergenz von* B</u>.

- *Seien* B *und* S *aus* $\mathfrak{X}^{(r,s)}(M)$. *Wir definieren* $\langle B, S \rangle_g \in C^\infty(M)$ *durch*

$$\langle B, S \rangle_g (x) := \sum_{i_1, \ldots, i_r = 1}^{n} \epsilon_{i_1} \ldots \epsilon_{i_r} B(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}) \cdot S(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}).$$

  $\langle B, S \rangle_g$ *heißt* <u>*Skalarprodukt von* B *und* S</u> *bzw.* <u>*Bündelmetrik*</u> *auf* $T^{(r,0)}M$.

- *Sei* $B \in \mathfrak{X}^{(r,0)}(M)$. *Dann heißt*

$$Tr_g B_{(k,l)} := \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \cdot B\left(\ldots, \overset{k.\ Stelle}{e_i}, \ldots, \overset{l.\ Stelle}{e_i}, \ldots\right)$$

  die <u>*Spur von* B</u> *in der* (k, l)*- Komponente.*

Bemergungen

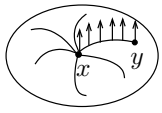
1. $\delta g = 0$, $Tr_g g = n$ und $Tr_g \mathrm{Ric} = R$.
2. Ist B symmetrisch (schiefsymmetrisch) so auch δB
3. Ist $B \in \mathfrak{X}^{(2,0)}(M)$, dann gilt $\langle g, B \rangle_g = Tr_g B$.
4. Ist $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld, dann ist $div(X) \in C^\infty(M)$ mit
$$div(X) = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i g(\nabla_{e_i} X, e_i)$$
die Divergenz von X.
Ist weiterhin ω_X die zu X duale 1-Form, d.h. es gilt
$$\omega_X(Y) = g(X, Y) \quad \forall Y \in \mathfrak{X}(M)$$
so folgt
$$\boxed{\delta \omega_X = -div(X)}$$
(denn
$$\begin{aligned} \delta\omega &= -\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i (\nabla_{e_i}\omega)(e_i) \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i (\omega(e_i) - \omega(\nabla_{e_i} e_i)) e_i \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i (g(e_i, X) - g(\nabla_{e_i} e_i, X)) e_i \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i g(e_i, \nabla_{e_i} X) \\ &= -div(X) \qquad) \end{aligned}$$
5. Sei $f \in C^\infty(M)$ und $Hess\, f \in S^{(2,0)}(M)$ die *Hessische Form* von f:
$$Hess\, f := (\nabla_X (df))(Y) := XY(f) - df(\nabla_X Y)$$
dann wird durch
$$\boxed{Tr_g(Hess\, f) = -\delta df = div(grad\, f)\, 0 =: -\triangle_g f}$$
der Laplace-Operator von f definiert.

Eine Methode um Tensorrechnung zu vereinfachen: x-synchrone Vektorfelder

Sei $x \in M$ fixiert. Dann existiert eine Umgebung $U(x)$ mit den folgenden Eigenschaften:

Zu jedem $y \in U(x)$ existiert[9] eine *eindeutig* bestimmte Kurve
$$\gamma_{xy} : [0, 1] \longrightarrow U(x)$$
mit $\gamma_{xy}(0) = x$, $\gamma_{xy}(1) = y$ und $\frac{\nabla \gamma_{xy}}{dt} \equiv 0$. Dabei heißt $U(x)$ Normalenumgebung von x und γ_{xy} radiale Geodäte.

[9] Beweis im nächsten Abschnitt



Dann kann man jedem Tangentialvektor $v \in T_xM$ durch Parallelverschiebung von v entlang γ_{xy} zu einem Vektorfeld V auf $U(x)$ fortsetzen:

$$V(y) := \mathcal{P}^{\nabla}_{\gamma_{xy}}(v) \in T_yM.$$

Ein solches VF $V \in \mathfrak{X}(M)$ heißt <u>synchron bzgl. x</u> und erfüllt

$$\boxed{\nabla V(x) \equiv 0}$$

d.h. *im Punkt* x gilt $(\nabla_Y V)(x) = 0$ für alle $Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Insbesondere erfüllen alle x-synchronen Vektorfelder V, W die Eigenschaften

1. $\nabla V(x) = \nabla W(x) = 0$
2. $[V, W](x) = 0$
3. $(div\, V)(x) = 0 = (div\, W)(x)$

Wenn man die Gleichheit von Tensoren überprüfen will, so geht man wiefolgt vor:

$$\textbf{zz. } (B_1)_x = (B_2)_x \qquad \forall x$$

Dazu wählen wir uns $v_1, \ldots, v_r$ aus T_xM und setzen diese x- synchron zu $V_1, \ldots, V_r$ fort, und zeigen

$$\begin{aligned}(B_1)(v_1, \ldots, v_r) &= B_1(V_1, \ldots, V_r)(x) \\ &= B_2(V_1, \ldots, V_r)(x) \\ &= (B_2)(v_1, \ldots, v_r)\end{aligned}$$

und verwenden dabei die Eigenschaften 1.-3.

Satz 3.21. *Für den Ricci-Tenso einer semi-Riem. MF.* (M, g) *gilt:*

$$\delta \boldsymbol{Ric} = -\frac{1}{2} dR$$

Dabei ist R die Skalarkrümmung.

Beweis: Sei $x \in M$, $v \in T_xM$, $(e_1, \ldots, e_n)$ eine ONB von (T_xM, g_x) und V, $(E_1, \ldots, E_n)$ x-synchrone Fortsetzungen von v und $(e_1, \ldots, e_n)$.

Aus der 2. Bianchi-Identität für $\mathcal{R}$ folgt dann

$$0 = (\nabla_V \mathcal{R})(E_i, E_j, E_j, E_i) + (\nabla_{E_i} \mathcal{R})(E_j, V, E_j, E_i) + \left(\nabla_{E_j} \mathcal{R}\right)(V, E_i, E_j, E_i)$$

auf $U(x)$. Und im Punkt x gilt nun speziell wegen der x-Synchronität

$$0 = v(\mathcal{R}(E_i, E_j, E_j, E_i)) + e_i(\mathcal{R}(E_j, V, E_j, E_i)) + e_j(\mathcal{R}(V, E_i, E_j, E_i))$$

Jetzt summieren wir dies über $\sum\limits_{i,j=1}^{n} \epsilon_i \epsilon_j$ und erhalten in x:

$$0 = v(R) - 2\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i e_i \left(\mathrm{Ric}\left(V, E_i\right)\right)$$

und daraus folgt

$$\underbrace{2\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \left(\nabla_{e_i}\mathrm{Ric}\right)_x (v, e_i)}_{-(\delta\mathrm{Ric})_x(v)} = dR_x(v)$$

und damit auch die Behauptung.

□

Satz 3.22. *Es gilt:*

1. *Ist (M^n, g) ein Einstein-Raum, so gilt Ric $= \frac{R}{n} \cdot g$.*
2. *Sei (M^n, g) ein zsh. Einstein-Raum der Dimension $n \geq 3$. Dann ist die Skalarkrümmung konstant.*

Beweis:

1. Sei Ric $= f \cdot g$ und seien $(e_1, \ldots, e_n)$ eine ONB in T_xM, dann folgt

$$\begin{aligned} R(x) &= \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \mathrm{Ric}_x(e_i, e_i) = f(x) \sum_i \epsilon_i \underbrace{g(e_i, e_i)}_{\epsilon_i} \\ &= n \cdot f(x). \end{aligned}$$

2. Sei Ric $= f \cdot g$, dann gilt

$$\begin{aligned} \delta\mathrm{Ric} &= \delta(f \cdot g) = -\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \nabla_{e_i} (f \cdot g)(e_i, .) \\ &= -\sum_i \epsilon_i e_i(f) \cdot g(e_i, .) + f \cdot \underbrace{(\nabla_{e_i} g)}_{=0}(e_i, .) \\ &= -g\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i e_i(f)\, e_i}_{grad\, f}, .\right) \\ &= -df \overset{1.}{=} -\frac{1}{n} dR \\ &\overset{Satz\,3.21}{=} -\frac{1}{2} dR \end{aligned}$$

Damit ist also

$$dR \cdot \left(\frac{2-n}{2n}\right) = 0$$

und für $n \geq 3$ die Aussage bewiesen.

□

Man erhält also folgende Inklusionen:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{MF. konst.} \\ \text{Schnittkrümmung} \end{array} \right\} \subset \left\{ \begin{array}{c} \text{Einstein-} \\ \text{Räume} \end{array} \right\} \overset{n \geq 3}{\subset} \left\{ \begin{array}{c} \text{MF. konst.} \\ \text{Skalarkrümmung} \end{array} \right\}$$

Beispiele für Einstein-Räume[10]

- $\mathbb{R}^{3,1}$mit Schwartzschild-Metrik
- Sei G eine Halbeinfache Lie-Gruppe, mit der durch die Killingform erzeugten Metrik g, dann ist (G, g) ein Einstein-Raum.
- $\mathbb{C}P^n$mit der 'Fubini-Studi-Metrik'

3.5.4 Mathematische Modelle der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART):

Die Idee dieser Theorie ist die Beschreibung der Gravitation durch eine Krümmungen des Raumes. Bevor wir uns jedoch genauer mit diesem Thema beschäftigen, müssen wir nch etwas auf den Sogenannten *Lagrange-Formalismus* eingehen.

Der Lagrange-Formalismus in der Klassischen Mechanik

Der Lagrange-Formalismus dient i.A. zur Beschreibung eines physikalischen Systemes. Ähnlich wie in der Newton-Mechanik, bei der die Bewegung eines Teichens q beschrieben wird durch dessen Bewegungsgleichung

$$m\ddot{q} - F(q) = 0,$$

gibt es bei Lagrange Bewegungsgleichungen, deren Lösung die Bewegung eines Teilchens darstellen, dass sich in diesem System mit gewissen Anfangsbedingungen bewegt.

Definition. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine* <u>*Lagrangefunktion*</u> *ist eine glatte Abbildung*

$$L : TM \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Das Paar (TM, L) heißt <u>*Lagrange-System*</u> *mit* Konfigurationsraum M *und* Phasenraum TM.

Das Integral

$$S(\gamma) := \int_\gamma L(\dot{\gamma}(t))\, dt \quad \textit{mit } \gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$$

nennt man <u>*Wirkung*</u>.

Wie die Lagrangefunktion im speziellen aussieht, hängt vom System ab.

[10] ↗ A.Besse: Einstein-manifolds, Springer 87

Beispiel 68. NATÜRLICHE SYSTEME

Angenommen eine Punktmasse q bewegt sich im 'leeren' Raum $\left(\mathbb{R}^2, \langle , \rangle\right)$ in dem keine äußeren Kräfte wirken, dann hat die Lagrange-Funktion die Gestalt

$$L\left(q\left(t\right), \dot{q}\left(t\right)\right) = \underbrace{\frac{1}{2}\|\dot{q}\left(t\right)\|^2}_{kinetische\ Energie} \quad . \tag{3.2}$$

Fügt man dem System jedoch einen massiven Körper hinzu, so wirkt zusätzlich auf q ein Gravitationspotential U. Für das Lagrange-Funktional ergibt sich dann

$$L\left(q\left(t\right), \dot{q}\left(t\right)\right) = \underbrace{\frac{1}{2}\|\dot{q}\left(t\right)\|^2}_{kinetische\ Energie} - \underbrace{U\left(q\left(t\right)\right)}_{potentielle\ Energie} \quad . \tag{3.3}$$

Definition. *Sei (M, g) eine semi-Riem. Mannigfaltigkeit. Ein Lagrange-System (TM, L) heißt* <u>*natürliches System*</u>*, falls die Lagrangefunktion die Gestalt*

$$L\left(q, \dot{q}\right) = T\left(q, \dot{q}\right) - U\left(q\right)$$

hat. Dabei ist $U \in C^\infty\left(M\right)$ und heißt Potential. *T hat die Form*

$$T\left(q, \dot{q}\right) = \frac{1}{2} g_q\left(\dot{q}, \dot{q}\right).$$

Tatsächlich lassen sich sehr viele klassische Bespiele in solch eine Form bringen.

Wir kommen nun zu den Bewegungen in einem Lagrange-System.

Definition. *Sei $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ eine glatte Kurve. Unter einer* <u>*Variation von γ*</u> *verstehen wir eine glatte Abbildung*

$$\begin{aligned} \Gamma\ [a, b] \times (-1, 1) &\longrightarrow M \\ (t, \epsilon) &\longmapsto \Gamma\left(t, \epsilon\right) =: \gamma_\epsilon\left(t\right) \end{aligned}$$

mit $\Gamma\left(t.0\right) = \gamma\left(t\right)$, $\Gamma\left(a, \epsilon\right) = \gamma\left(a\right)$ und $\Gamma\left(b, \epsilon\right) = \gamma\left(b\right)$ für alle $\epsilon \in (-1, 1)$.

Definition. *Sei (TM, L) ein Lagrange-System. Eine* <u>*Bewegung*</u> *in (TM, L) ist eine Kurve $\gamma :\ I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$, für die die Wirkung*

$$S\left(\gamma\right) = \int\limits_\gamma L\left(\dot{\gamma}\right)\ dt$$

stationär wird, d.h.

$$\frac{d}{d\epsilon} S\left(\gamma_\epsilon\right)|_{\epsilon=0} = 0$$

für alle Variationen γ_ϵ von γ.

Bemerkung

- Sei (TM, L) ein natürliches Lagrange-System mit Funktional

  $$L\left(q, \dot{q}\right) = \frac{1}{2} g_q\left(\dot{q}, \dot{q}\right)$$

  so folgt für dessen Wirkung S offensichtlich

  $$S\left(\gamma\right) = \int\limits_\gamma \frac{1}{2} g_\gamma\left(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}\right)\ dt = \frac{1}{2}\int\limits_\gamma \|\dot{\gamma}\|_g\ dt = \frac{1}{2} l\left(\gamma\right).$$

Es gilt nun folgende Aussage:

Satz 3.23. *Sei* (TM, L) *ein Lagrange-System. Eine Kurve* $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M^n$ *ist* genau dann *eine Bewegung, wenn* γ *für alle Karten die* Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial \hat{L}}{\partial q}$$

erfüllt. Dabei ist

$$\hat{L}(q, \dot{q}) := L\left(d\varphi_q^{-1}(\dot{q})\right) = \left(\left(\varphi^{-1}\right)^* L\right)(q, \dot{q})$$

für eine Karte $(U, \varphi = (q_1, \ldots, q_n))$.

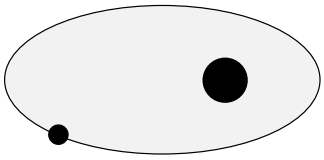
Diese Gleichungen werden deshalb auch Bewegungsgleichungen *des Systems genannt.*

Für den Beweis dieses Satzes sei auf M. Schottenloher 'Geometrie und Symmetrie in der Physik', Vierweg 95, S. 119, verwiesen.

Die Einstein-Gleichung der ART

Dazu betrachten wir die Bahn eines Teilchens in einem Gravitationsfeld.

Die Bahn eines Trabanten.



Bewegt er sich nicht auch auf einer scheinbaren Oberfläche?

Die Idee ist nun, die Ablenkung als eine Krümmung des Raumes zu betrachten und eine Metrik g zu finden, für die sich das Teilchen auf einer Geodäte bewegt. Diese Metrik erhält man aus der *Einstein-Gleichung,* die nun im weiteren Verlauf erläutert werden soll.

Sei $(M^{4,1}, g)$ eine 4-dim Lorentz-MF.

Wir betrachten nun den <u>Einsteinscher Gravitationstensor</u>

$$G = \mathrm{Ric} - \frac{R}{2} g$$

und einen sogennanten <u>Energie-Impuls-Tensor</u>

$$T \in \mathfrak{X}^{(2,0)}(M) \quad \text{symmtrisch und } \delta T = 0$$

Letzterer beschreibt die Energie-Verteilung der Materie in der speziellen physikalischen Situation.
Dann lautet <u>Einstein-Gleichung der ART</u>

$$\boxed{G = \mathrm{Ric} - \frac{R}{2} g = T}$$

Eine Lösung dieser Partielle Differentialgleichung in g liefert uns nun eine Metrik, in der sich die Teilchen auf Geodäten bewegen.

Die Einstein-Geleichungen im Vakuum als Variationsproblem

Im Vakuum ist keine Materie vorhanden, d.h. $T = 0$ und damit haben wir für die Einstein-Gleichungen

$$G = \text{Ric} - \frac{R}{2} g = 0. \qquad (*)$$

Wir wollen nun ein Lagrangefunktional $\mathcal{L}$ finden, dessen kritische Punkte, und damit meinen wir die *stationären* Punkte der Wirkung von $\mathcal{L}$ gerade die Lösungen von $(*)$ sind.

Dazu sei erwähnt, das es sich hierbei nicht um ein klassisches Lagrangefunktional aus dem vorletzten Abschnitt handelt, da $(*)$ eine Gleichung für eine Metrik ist. Das Funktional $\mathcal{L}$ muß dadurch auf den symmetrischen $(2,0)$- Tensorfeldern mit Signatur (p,q) der definiert sein. Solche Langrangefunktionale, die auf Feldern diefiniert sind, bezeichnet man auch als Lagrangedichten.

Sei

$$\mathcal{M}_{p,q}(M) := \left\{ g \mid g \text{ Metrik der Sign. } (p,q) \text{ und } \int_M R_g \, dM_g < \infty \right\},$$

dann setzen wir als Lagrangedichte $\mathcal{L}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \mathcal{M}_{p,q}(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ g &\longmapsto R_g \end{aligned}$$

die Wirkung ergibt sich daraus als

$$\begin{aligned} S : \mathcal{M}_{p,q}(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ g &\longmapsto \int_M \mathcal{L}(g) \, dM_g = \int_M R_g \, dM_g \end{aligned}$$

Dieses Funktional heißt Einstein-Hilbert-Funktional.

Für die Variation betrachten wir nun ein $g \in \mathcal{M}_{p,q}(M)$ und ein $h \in S_0^{(2,0)}(M)$, dies sind die symmetrischen $(2,0)$-Tensorfelder mit *kompaktem* Träger. Dann ist

$$g + t\,h \in \mathcal{M}_{p,q}(M) \qquad \text{für } |t| < \epsilon.$$

$g \in \mathcal{M}_{p,q}(M)$ heißt nun kritischer (o. stationärer) Punkt von S, falls

$$\frac{d}{dt}\left(S(g + t\,h)\right)|_{t=0} = 0 \qquad \forall\, h \in S_0^{(2,0)}(M).$$

Satz 3.24. *Eine Metrik g auf M. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *g ist kritischer Punkt des Einstein-Hilbert-Funktionals.*
2. *$Ric_g - \frac{1}{2} R_g = 0$.*
3. *$Ric = 0$*

Zum Beweis benutzen wir folgende Variationsformeln für die Krümmungstensoren:

Lemma 3.2. *Sei g eine Metrik, $h \in S_0^{(2,0)}(M)$, dann gelten die folgenden Variationsformeln*

1. *Für die* Volumenform:
$$\begin{aligned} d\dot{M} := \frac{d}{dt}\left(dM_{g+th}\right)|_{t=0} &= \frac{1}{2}\langle g,h\rangle_g \, dM_g \\ &= \frac{1}{2} Tr_g(h) \, dM_g \end{aligned}$$

2. *Für den* Levi-Civita-Zsh:
$$\nabla := \frac{d}{dt}\left(\dot{\nabla^{g+th}}\right)|_{t=0}$$
ist ein $(2,1)$- *Tensorfeld und*
$$g\left(\dot{\nabla}(X,Y),Z\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\nabla^g_Y h\right)(Y,Z) + \left(\nabla^g_Y h\right)(X,Z) - \left(\nabla^g_Z h\right)(X,Y)\right)$$

3. *Für den* $(3,1)$-Krümmungstensor:
Sei $\mathcal{R} := \frac{d}{dt}\left(\dot{\mathcal{R}^{\nabla^{g+th}}}\right)|_{t=0}$, *dann ist*
$$\dot{\mathcal{R}}(X,Y)Z = \nabla^g_X\left(\dot{\nabla}\right)(Y,Z) - \nabla^g_Y(X,Z)$$

4. *Für den* Ricci-Tensor:
Sei $\dot{Ric} := \frac{d}{dt}\left(Ric_{g+th}\right)_{|t=0}$, *dann ist*
$$\dot{Ric}(X,Y) = \sum_{i=1}^n \epsilon_i \left[g\left(\nabla e_j\left(\dot{\nabla}\right)(X,Y),e_i\right) - g\left(\nabla_X\left(\dot{\nabla}\right)(e_i,Y),e_i\right)\right]$$

5. *Für die* Skalarkrümmung:
$$\dot{R} = \frac{d}{dt}\left(R_{g+th}\right)|_{t=0} = \triangle_g\left(tr_g(h)\right) + \delta_g\left(\delta_g h\right) - \langle \mathrm{Ric}, h\rangle_g$$

Beweis:

1. Nach Definition ist $dM_g = \sqrt{|\det(g(a_i,a_j))|}\sigma^1 \wedge \ldots \wedge \sigma^n$ für eine Basis $(a_1,\ldots,a_n)$ und deren Dualbasis $\left(\sigma^1,\ldots,\sigma^n\right)$. Sei nun $(a_1,\ldots,a_n)$ eine ONB für g mit Index p. Dann ist
$$|\det(g(a_i,a_j))| = |(-1^p)| = 1$$
und damit
$$dM_g = \sigma^1 \wedge \ldots \wedge \sigma^n$$
und daraus folgt
$$\begin{aligned} dM_{g+th} &= \sqrt{(-1)^p \det((g+th)(a_i,a_j))}\sigma^1 \wedge \ldots \wedge \sigma^n \\ &= \sqrt{(-1)^p \det(A+t\,B)}\sigma^1 \wedge \ldots \wedge \sigma^n \end{aligned}$$
wobei
$$A = \begin{pmatrix} -1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & -1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und } B = (h(a_i,a_j)).$$

Behauptung:

$$\frac{d}{dt}\left((-1)^p \det\left(A+t\,B\right)\right)|_{t=0} = \det A \cdot Tr\left(A^{-1}B\right)$$

Es gilt $\det\left(e^{sX}\right) = e^{Tr\,sX}$, dies rechnent man mithilfe der Jordanform aus. Nun entwickeln wir dies für s:

$$\det\left(E+sX\right) = 1 + s\,TrX + O\left(s^2\right)$$

und daraus folgt nun

$$\begin{aligned}\det\left(A+sB\right) &= \det\left(A^{-1}\right)\left(E+sA^{-1}B\right)\\ &= \det\left(A^{-1}\right)\left(1+s\cdot Tr\left(A^{-1}B\right)+O\left(s^2\right)\right)\end{aligned}$$

und das heißt dass

$$\frac{d}{ds}\left(\det\left(A+sB\right)\right) = \det\left(A^{-1}\right)\cdot Tr\left(A^{-1}B\right).$$

Mit dieser Tatsache ergibt sich nun

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(dM_{g+th}\right)|_{t=0} &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1}}(-1)^p\cdot\det\left(A\right)\cdot Tr\left(A^{-1}B\right)\cdot\sigma^1\wedge\ldots\wedge\sigma^n\\ &= \frac{1}{2}\cdot Tr\left(\left(\begin{pmatrix}-1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & -1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & 0 & & & \ddots & & \\ & & & & & & 1\end{pmatrix}\circ\left(h\left(a_i,a_j\right)\right)\right)\cdot\sigma^1\wedge\ldots\wedge\sigma^n\right.\\ &= \frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\epsilon_j h\left(a_i,a_j\right)\;dM_g\\ &= \frac{1}{2}Tr_g h\cdot dM_g = \frac{1}{2}\left\langle g,h\right\rangle_g\;dM_g\end{aligned}$$

2. Hier benutzen wir die Kozulformel für den LC-Zsh. Aus

$$\begin{aligned}2\left(g+th\right)\left(\nabla_X^{g+th}Y,Z\right) &= X\left(\left(g+th\right)\left(Y,Z\right)\right)+Y\left(\left(g+th\right)\left(X,Z\right)\right)\\ &\quad -Z\left(\left(g+th\right)\left(X,Y\right)\right)+\left(g+th\right)\left(\left[X,Y\right],Z\right)\\ &\quad +\left(g+th\right)\left(\left[Z,X\right],Y\right)+\left(g+th\right)\left(\left[Z,Y\right],X\right)\end{aligned}$$

mit $\frac{d}{dt}|_{t=0}$ folgt

$$\begin{aligned}2\cdot g\left(\dot{\nabla}\left(X,Y\right),Z\right)+2h\left(\nabla_X^g Y,Z\right) &= X\left(h\left(Y,Z\right)\right)+Y\left(h\left(X.Z\right)\right)-Z\left(h\left(X,Y\right)\right)\\ &\quad +h\left(\left[X,Y\right],Z\right)+h\left(\left[Z,X\right],Y\right)+h\left(\left[Z,Y\right],X\right)\\ &= \left(\nabla_X h\right)\left(Y,Z\right)+\left(\nabla_Y h\right)\left(X,Z\right)-\left(\nabla_Z h\right)\left(X,Y\right)\\ &\quad +h\left(\nabla_X Y,Z\right)+h\left(Y,\nabla_X Z\right)+h\left(\nabla_Y X,Z\right)\\ &\quad +h\left(X,\nabla_Y Z\right)-h\left(\nabla_Z X,Y\right)-h\left(X,\nabla_Z Y\right)\\ &\quad +h\left(\nabla_X Y,Z\right)-h\left(\nabla_Y X,Z\right)+h\left(\nabla_Z X,Y\right)\\ &\quad -h\left(\nabla_X Z,Y\right)+h\left(\nabla_Z Y,X\right)-h\left(\nabla_Y Z,X\right)\end{aligned}$$

und daraus ergibt sich dann

$$\boxed{g\left(\dot{\nabla}\left(X,Y\right),Z\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\nabla_X h\right)\left(Y,Z\right)+\left(\nabla_Y h\right)\left(X,Z\right)-\left(\nabla_Z h\right)\left(Z,Y\right)\right)}$$

3. Hierbei sei nochmals auf die Definition der Kovarianten Ableitung für Tensorfelder verwiesen. Mit der Produktregel folgt dann

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{R}}(X,Y)Z &= \dot{\nabla}(X,\nabla_Y Z)+\nabla_X\left(\dot{\nabla}(Y,Z)\right)-\dot{\nabla}(Y,\nabla_X Z)\\ &\quad -\nabla_Y\left(\dot{\nabla}(X,Z)\right)-\dot{\nabla}([X,Y],Z)\\ &\overset{Def}{=} \nabla_X\left(\dot{\nabla}\right)(Y,Z)-\nabla_Y\left(\dot{\nabla}\right)(X,Z)\end{aligned}$$

4. Da die Spur einer lin. Abbildung und die Ableitung nach t vertaschbar sind, folgt

$$\begin{aligned}\dot{\mathrm{Ric}}(X,Y) &= \frac{d}{dt}\left(\mathrm{Ric}_{g+th}(X,Y)\right)|_{t=0}\\ &= Tr\left(Z\mapsto\dot{\mathcal{R}}(X,Y)Z\right)\end{aligned}$$

und daraus ergibt sich

$$\boxed{\dot{\mathrm{Ric}}(X,Y)=\sum_{i=1}^{n}\epsilon_i\left(g\left(\nabla_{e_i}\left(\dot{\nabla}\right)(X,Y),e_i\right)-g\left(\nabla_X\left(\dot{\nabla}\right)(e_i,Y),e_i\right)\right)}$$

5. Es gilt

$$R_{g+th}=\sum_{i=1}^{n}\epsilon_i\mathrm{Ric}_{g+th}(a_i(t),a_i(t))$$

wobei $a_i(t)$ eine ONB von $g+th$ ist. Sei $a_i(0)=a_i$ und $\dot{a}_i=\dot{a}_i(0)$, dann ist

$$\begin{aligned}\dot{R} &= \frac{d}{dt}\left(R_{g+th}\right)|_{t=0}\\ &= \sum_i\left(\epsilon_i\dot{\mathrm{Ric}}(a_i,a_i)+2\epsilon_i\mathrm{Ric}_g(\dot{a}_i,a_i)\right)\\ &= Tr_g\dot{\mathrm{Ric}}+2\sum_i\epsilon_i\mathrm{Ric}_g(\dot{a}_i,a_i) \qquad (*)\end{aligned}$$

Behauptung:

$$2\sum_i\epsilon_i\mathrm{Ric}_g(\dot{a}_i,a_i)=-\langle\mathrm{Ric}_g,h\rangle_g$$

Aus $(g+th)(a_i(t),a_j(t))=\epsilon_i\delta_{ij}$ folgt

$$h(a_i,a_j)+g(\dot{a}_i,a_j)+g(a_i,\dot{a}_j)=0$$

und mit Basisdarstellung ergibt sich

$$\begin{aligned}\dot{a}_i &= \sum_k g(\dot{a}_i,a_k)\epsilon_k a_k\\ &= \sum_k -h(a_i,a_k)\epsilon_k a_k-g(a_i,\dot{a}_k)\epsilon_k a_k\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir dann

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\epsilon_i\mathrm{Ric}_g(\dot{a}_i,a_i) &= -\sum_{k,i}\epsilon_i\epsilon_k\left(h(a_i,a_k)\mathrm{Ric}_g(a_k,a_i)+g(a_i,\dot{a}_k)\mathrm{Ric}_g(a_k,a_i)\right)\\ &= -\langle h,\mathrm{Ric}_g\rangle_g-\sum_k\epsilon_k\mathrm{Ric}(a_k,\dot{a}_k)\\ \Longleftrightarrow 2\sum_i\epsilon_i\mathrm{Ric}_g(\dot{a}_i,a_i) &= -\langle h,\mathrm{Ric}_g\rangle_g\end{aligned}$$

Wenden wir dies auf $(*)$ an, dann bleibt die
Behauptung:

$$Tr_g\dot{\mathbf{Ric}} = \triangle_g (Tr\, h) + \delta_g\delta_g (h)$$

Es ist

$$\begin{aligned} Tr_g\dot{\mathbf{Ric}} &= \sum_i \epsilon_i \dot{\mathbf{Ric}} (e_i, e_j) \\ &= \sum_{i,j} \epsilon_i\epsilon_j \left(g\left(\nabla_{e_j}\left(\dot{\nabla}\right)(e_i,e_i), e_j\right) - g\left(\nabla_{e_i}\left(\dot{\nabla}\right)(e_j,e_j), e_i\right)\right) \end{aligned}$$

nun rechnen wir im Punkt $x \in M$ in einer x-synchronen ONB. Dann folgt

$$\begin{aligned} Tr_g\dot{\mathbf{Ric}} &\overset{x}{=} \sum_{i,j} \epsilon_i\epsilon_j \left(g\left(\nabla_{e_j}\left(\dot{\nabla}\right)(e_i,e_i), e_j\right) - g\left(\nabla_{e_i}\left(\dot{\nabla}\right)(e_j,e_j), e_i\right)\right) \\ &\overset{\nabla_g=0}{=} \sum_{i,j} \epsilon_i\epsilon_j \left(e_j\left(g\left(\dot{\nabla}(e_i,e_i), e_j\right)\right) - e_i\left(g\left(\dot{\nabla}(e_j,e_i), e_j\right)\right)\right) \\ &\overset{2.}{=} \frac{1}{2}\sum_{i,j} \epsilon_i\epsilon_j \{ e_j\left(\nabla_{e_i}h(e_i,e_j) + \nabla_{e_i}h(e_i,e_j) - \nabla_{e_j}h(e_i,e_i)\right) \\ &\quad - e_i\left(\nabla_{e_j}h(e_i,e_j) + \nabla_{e_i}h(e_j,e_j) - \nabla_{e_j}h(e_j,e_i)\right) \\ &= \sum_{i,j} \epsilon_i\epsilon_j (e_j(\underbrace{\nabla_{e_i}h(e_i,e_j)}_{-\delta h(e_j)}) - e_j(\nabla_{e_j}h(e_i,e_i))) \\ &= \delta_g\delta_g h - \sum_{i,j} \epsilon_i\epsilon_j e_j\left(e_j\left(h(e_i,e_i) - 2h\left(\nabla_{e_j}e_i, e_i\right)\right)\right) \\ &= \delta_g\delta_g h + \triangle_g (Tr_g h) + 2\sum_{i,j} \epsilon_i\epsilon_j h\left(\nabla_{e_i}\nabla_{e_j}e_i, e_i\right) \end{aligned}$$

Wir zeigen nun

$$2\sum_{i,j} \epsilon_i\epsilon_j h\left(\nabla_{e_i}\nabla_{e_j}e_i, e_i\right) = 0$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \nabla_{e_i}\nabla_{e_j}e_i &= \sum_k \epsilon_k g\left(\nabla_{e_i}\nabla_{e_j}e_i, e_k\right) e_k \\ &= \sum_k \epsilon_k \left(e_j\left(g\left(\nabla_{e_j}e_i, e_k\right)\right) - 0\right) e_k \\ &= \sum_k \epsilon_k \left(e_j\left(\underbrace{e_j\left(g\left(e_i,e_k\right)\right)}_{0}\right) - g\left(e_i, \nabla_{e_j}e_k\right)\right) e_k \\ &= -\sum_k \epsilon_k g\left(e_i, \nabla_{e_i}\nabla_{e_j}e_k\right) e_k \end{aligned}$$

und daraus folgt

$$\begin{aligned} \sum_{i.j} \epsilon_i\epsilon_j h\left(\nabla_{e_i}\nabla_{e_j}e_i, e_i\right) &= \sum_{i,j,k} \epsilon_i\epsilon_j\epsilon_k g\left(e_i, \nabla_{e_j}\nabla_{e_j}e_k\right)\cdot h\left(e_k,e_k\right) \\ &= -\sum_{j.k} \epsilon_k\epsilon_j h\left(\nabla_{e_j}\nabla_{e_j}e_k, e_k\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich damit

$$\boxed{\dot{R} = \delta_g\delta_g h + \triangle_g (Tr_g h) - \langle \mathbf{Ric}_g, h\rangle_g}$$

Und das Lemma ist bewiesen.

□

Wir kommen nun zum Beweis von Satz 3.24.

Beweis: Für die Variation des Einstein-Hilbert-Funktionals gilt nun

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(S\left(g+t\,h\right)\right)|_{t=0} &= \int\limits_M \frac{d}{dt}\left(R_{g+th}\cdot dM_{g+th}\right)|_{t=0} \\
&= \int\limits_M \dot{R}\cdot dM_g + R_g\cdot d\dot{M} \\
&\overset{Lemma}{=} \int\limits_M \left(\triangle_g\left(Tr_g h\right)+\delta_g\delta_g h-\left\langle \mathrm{Ric}_g,h\right\rangle_g+\frac{1}{2}\left\langle R_g g,h\right\rangle\right) dM_g \\
&= \int\limits_M \left\langle \frac{1}{2}R_g g-\mathrm{Ric}_g,h\right\rangle dM_g \\
&\quad + \int\limits_M \left(\triangle_g\left(Tr_g h\right)+\delta_g\delta_g h\right) dM_g
\end{aligned}$$

der 2. Term verschwindet jedoch nach dem Satz von Stokes bzw. dem Divergenzsatz für Vektorfelder mit kompaktem Träger auf Mannigfaltigkeiten ohne Rand. Aus

$$0=\frac{d}{dt}\left(S\left(g+t\,h\right)\right)|_{t=0}=\int\limits_M \left\langle \frac{1}{2}R_g g-\mathrm{Ric}_g,h\right\rangle_g dM_g \quad \forall h\in S_0^{(2,0)}\left(M\right)$$

folgt dann also

$$\boxed{\mathrm{Ric}-\frac{1}{2}R_g\cdot g=0}$$

□

Bemerkung:

- Es gilt

$$T=0\Leftarrow\frac{d}{dt}\left(S\left(g+t\,h\right)\right)|_{t=0}=\int\limits_M \left\langle T,h\right\rangle_g dM_g=0 \quad \forall h\in S_0^{(2,0)}\left(M\right)$$

  Sei $x\in M$, $(e_1,\ldots,e_n)$eine ONB in T_xM und *angenommen* $T_x\left(e_i,e_j\right)\neq 0$. Wir betrachten h mit $h_x=\underbrace{h_x\left(e_i,e_j\right)}_{\neq 0}\sigma^i\circ\sigma^j$und

$$\underbrace{T_x\left(e_i,e_j\right)h_x\left(e_i,e_j\right)}_{=:f(x)}>0.$$

  Sei $\varphi\in C^\infty\left(M\right)$ mit $\varphi>0$,$\varphi\left(x\right)=1$ und $supp\,\varphi\subset\{f>0\}$ dann ist

$$\frac{d}{dt}\left(S\left(g+t\,\varphi h\right)\right)|_{t=0}=\int\limits_M \left\langle T,\varphi h\right\rangle_g dM_g=\int\limits_M \varphi f\,dM_g>0.$$

Satz 3.25. *Sei (M,g) eine orientierte semi-Riem. MF mit $Vol\,(M,g)=1$. Sei*

$$F:\mathcal{M}_{(p,g)}\longrightarrow\mathbb{R}$$

das normierte Einstein-Hilbert-Funktional

$$F\,(g)=\frac{1}{Vol\,(M,g)^{\frac{n-2}{n}}}\int\limits_M R_g\,dM_g,$$

dann gilt

$$(M,g)\text{ ist Einstein-Raum}\Longleftrightarrow g\text{ ist kritischer Punkt von }F$$

Beweis:

Bemergung: Verhalten der Funktionale bei Umskalierung der Metrik

Sei $\tilde{g}=\lambda\cdot g$, dann ist

- $\mathrm{Ric}_{\tilde{g}}=\mathrm{Ric}_g$
- $R_{\tilde{g}}=\lambda^{-1}R_g$
- $dM_{\tilde{g}}=\lambda^{\frac{n}{2}}dM_g$

Somit folgt also

$$S\,(\lambda g)=\int\limits_M R_{\lambda g}\,dM_{\lambda g}=\lambda^{\frac{n-2}{2}}S\,(g)$$

bzw.

$$F\,(\lambda g)=\frac{1}{Vol\,(M,\lambda g)^{\frac{n-2}{2}}}\,S\,(\lambda g)=\lambda^{-\frac{n}{2}\cdot\frac{n-2}{2}}\cdot\lambda^{\frac{n-2}{2}}\cdot F\,(g)=F\,(g)\,.$$

Für die Variationen ergibt sich damit

$$\frac{d}{dt}\left(F\,(g+th)\right)|_{t=0}=\frac{d}{dt}\left(S\,(g+th)\right)|_{t=0}\cdot\underbrace{Vol\,(M,g)}_{1}+S\,(g)\cdot\left(-\frac{n-2}{n}\cdot\underbrace{\frac{d}{dt}\left(Vol\,(M,g+th)\right)|_{t=0}}_{\dot{Vol}}\right)$$

wobei nach dem Lemma

$$\dot{Vol}=\int\limits_M d\dot{M}=\int\limits_M\frac{1}{2}\left\langle g,h\right\rangle_g\,dM,$$

und nach Satz 3.24

$$\frac{d}{dt}\left(S\,(g+th)\right)|_{t=0}=\int\limits_M-\left\langle\mathrm{Ric}-\frac{1}{2}R_g\cdot g,h\right\rangle_g\,dM.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(F\,(g+th)\right)|_{t=0}&=\int\limits_M\left\langle-\mathrm{Ric}+\frac{1}{2}R_g\cdot g-\frac{n-2}{2n}R_g\cdot g,h\right\rangle_g\,dM_g\\&=\int\limits_M\left\langle-\mathrm{Ric}+\frac{1}{n}R_g\cdot g,h\right\rangle_g\,dM_g\\&=0\qquad\forall h\\\Rightarrow\qquad\mathrm{Ric}&=\frac{R}{n}\cdot g.\end{aligned}$$

Und somit ist (M,g) ein Einstein-Raum.

□

3.6 Geodätische Linien auf semi-Riemannschen Mannigfaltigkeiten

Ziel: Verallgemeinerung der Geraden im $\mathbb{R}^n$ = kürzeste Verbindung zwischen 2 Punkten in $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle_{\mathbb{R}^n})$.

Definition. *Sei (M^n, g) semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit und ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang. Sei weiterhin $I \subset \mathbb{R}$ sei ein Intervall.*
Eine C^∞-Kurve $\gamma : I \to M$ heißt geodätische Linie auf (M^n, g), falls

$$\frac{\nabla \dot{\gamma}}{dt} \equiv 0$$

auf I, (d.h. $\dot{\gamma}$ ist $\|$-verschoben entlang γ).

Eigenschaften von Geodäten:

1. *Lokale Formel für geodätische Linien γ*

   Aus der lokalen Formel für parallele Vektorfelder folgt: Sei $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ zul. Karte um $\gamma(t)$ und $\varphi \circ \gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, so folgt

   $$\dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i'(t) \frac{\partial}{\partial x_i}(\gamma(t))$$

   und damit

   $$\boxed{\gamma_k''(t) + \sum_{i,j=1}^{n} \gamma_i'(t)\gamma_j'(t)\Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \equiv 0 \quad k = 1, \ldots, n}$$

   wobei (Γ_{ij}^k) die Christoffelsymbole von (M, g) bezüglich (U, φ) sind.

   Beispiel 69. GEODÄTEN IM FLACHEN RAUM

   Sei $(M, g) = (\mathbb{R}^n, \langle , \rangle_{\mathbb{R}^n})$, dann ist $\Gamma_{ij}^k \equiv 0$. Damit gilt:

   $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ geodätische $\Leftrightarrow \gamma_k''(t) = 0 \quad k = 1, \ldots, n \Leftrightarrow \gamma(t) = at+b \quad a, b \in \mathbb{R}^n$

2. Sei $\gamma : I \to M$ geodätische, dann ist

   $$\|\gamma'(t)\| = const.$$

   Da die $\|$-Verschiebung bezüglich Levi-Civita-Zusammenhang die Längen erhält[11].

3. Sei $\gamma : I \to M$ eine nicht-konstante geodätische und $\tau : J \to I$ eine Parametertransformation. Dann gilt:

   Die umparametrisierte Kurve $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \tau : J \to M$ ist eine geodätische $\Leftrightarrow \tau(t) = at+b$ (d.h. τ ist eine affine Parametertransformation).

   Denn:

   $$\tilde{\gamma}'(t) = \gamma'(\tau(t)) \cdot \tau'(t)$$

   Aus der Produktregel für kovariante Ableitung von VF folgt dann

   $$\begin{aligned} \frac{\nabla \tilde{\gamma}'}{dt}(t) &= \frac{\nabla \gamma'}{d\tau}(\tau(t)) \cdot (\tau'(t))^2 + \gamma'(\tau(t)) \cdot \tau''(t) \\ &\overset{\gamma \text{ Geodte}}{=} \gamma'(\tau(t)) \cdot \tau''(t) \end{aligned}$$

   Da γ nicht konstant und $\gamma' \|$-verschoben ist, folgt$\gamma'(\tau(t)) \neq 0 \ \forall t \in I \backslash$Nullmenge.

[11] siehe Satz 3.13 auf Seite 146

Definition. *Eine C^∞-Kurve $\gamma : I \to M$ heißt* <u>*Prägeodäte*</u> *$\Leftrightarrow$ es existiert eine beliebige Parametertransformation $\tau : J \to I$ derart, dass $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \tau : J \subset \mathbb{R} \to M$ eine Geodäte ist.*

Satz 3.26. *Sei (M, g) semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, $x \in M$ und $v \in T_xM$. Dann existiert genau eine maximale Geodätische $\gamma_v : I_v \subset \mathbb{R} \to M$ mit*

$$\begin{aligned} \gamma_v(0) &= x \\ \gamma_v'(0) &= v \quad \text{“Durchlaufgeschwindigkeit”} \end{aligned}$$

(maximal = maximaler Definitionsbereich)

Beweis:

1. Wir zeigen zuerst: es existiert eine Geodätische $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \to M$ mit $\gamma(0) = x, \gamma'(0) = v$.
   Dazu wählen wir Karte $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ um x. Sei dann $v = \sum v^k \frac{\partial}{\partial x_k}(x)$, so betrachten wir das lineare DGS auf $\varphi(U)$:
   $$\left.\begin{aligned} &\gamma''(t) + \sum_{i,j=1}^{n} \gamma_i'(t)\gamma_j'(t)\ \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \equiv 0 \\ &\gamma_k(0) = X_k(x) \\ &\gamma_k'(0) = v^k \end{aligned}\right\} \quad k = 1, \ldots, n$$
   Dies ist gewöhnliche DGLS 2. Ordnung mit AW $\Rightarrow$ es existiert lokal eine Lösung um $t = 0$
   $$\gamma(t) := \varphi^{-1}(\gamma_1(t), \ldots, x_n(t)) \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$
2. Maximalität und Eindeutigkeit: Standardschluss wie im $\mathbb{R}^n$: Seien $\gamma_i : I_i \subset \mathbb{R} \to M$ Geodätische mit $\gamma_i(0) = x, \gamma'(0) = v, I_1 \cap I_2$ zusammenhängend, $0 \in I_1 \cap I_2$ $\Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2$ auf $I_1 \cap I_2$ denn: Sei
   $$A = \{t \in I_1 \cap I_2 |\ \gamma_1(t) = \gamma_2(t), \gamma_1'(t) = \gamma_2'(t)\}$$
   dann ist $A \neq \phi$ da $0 \in A$. Darüberhinaus ist A abgeschlossen, da γ_i, γ_i' stetig und T_2-Räume, und offen nach lokalem Existenzsatz für $t_0 \in A$. Da $I_1 \cap I_2$ zusammenhängend ist, folgt $A = I_1 \cap I_2$.
   Wir betrachten alle Lösungen $\gamma : (a_\gamma, b_\gamma) \to M$, $a = \inf_\gamma a_\gamma, b = \sup_\gamma b_\gamma$. Dann gilt:
   $$\gamma_v : (a, b) = I_v \subset \mathbb{R} \to M$$
   ist eindeutige maximale Lösung: $\gamma_v(t) := \gamma(t)$ falls $t \in (a_\gamma, b_\gamma)$.

$\square$

Folgerung:

Sei $\gamma_v : I_v \subset \mathbb{R} \to M$ die maximale Geodäte mit Anfangspunkt $\gamma_v(0) = x$ und Anfangsrichtung $\gamma_v'(0) = v$. Dann gilt:

$$ts \in I_v \Rightarrow s \in I_{tv}$$

und

$$\gamma_{tv}(s) = \gamma_v(ts).$$

Insbesondere ist mit $1 \in I_v$ auch $1 \in I_{tv} \forall 0 \leq t \leq 1$.

Beweis: Sei $\delta(\tau) := \gamma_v(t \cdot \tau)$ für $0 \leq \tau \leq s$, t fix. Dann gilt: δ ist Geodäte, da affine Parametertransformation

$$\delta(0) = \gamma_v(0) = x \quad , \quad \delta'(0) = t \cdot v$$

Nach Definition ist dann $\delta(\tau) = \gamma_{tv}(\tau)$ und damit

$$\delta(s) \overset{def}{=} \gamma_v(ts) = \gamma_{tv}(s) \Rightarrow s \in I_{tv}, \text{ da } ts \in I_v.$$

Für $s = 1$ folgt dann $t \cdot 1 \in I_v \, \forall 0 \leq t \leq 1$ und demnach

$$1 \in I_{tv} \, \forall 0 \leq t \leq 1.$$

□

Satz 3.27. *Sei $f : (M, g) \to (\tilde{M}, \tilde{g})$ eine Isometrie zwischen semi-Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Dann gilt:*

$\gamma : I \to M$ *ist eine Geodätische in* $(M, g) \iff f \circ \gamma : I \to \tilde{M}$ *ist eine Geodätische in* $\left(\tilde{M}, \tilde{g}\right)$

Beweis: Eine Geodätische γ ist stückweise entweder regulär $(\gamma'(t) \neq 0)$ oder konstant, da $\|\gamma'(t)\| =$ const. und γ' $\|$-verschoben. Für einen Diffeomorphismus f gilt dann

$$\begin{aligned} \gamma \text{ konstant} &\Leftrightarrow f \circ \gamma \text{ konstant} \qquad \text{und} \\ \gamma \text{ regulär} &\Leftrightarrow f \circ \gamma \text{ regulär.} \end{aligned}$$

Sei nun γ regulär und $t_0 \in I$, dann existiert $\tilde{I} = (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ und ein VF $\tilde{X}_{t_0} \in \mathfrak{X}(M)$ mit $\tilde{X}_{t_0}(\gamma(t)) = \gamma'(t) \forall t \in \tilde{I}$. Betrachten das VF $df(\tilde{X}_{t_0}) \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$, (dies existiert, da f ein Diffeomorphismus ist):

$$\begin{aligned} df(\tilde{X}_{t_0})(f\gamma(t)) &\overset{def}{=} df_{\gamma(t)}(\tilde{X}_{t_0}(\gamma(t))) \\ &= df_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = (f\gamma)'(t) \quad \forall t \in \tilde{I} \end{aligned}$$

D.h. $df(\tilde{X}_{t_0})$ setzt $(f\gamma)'$ um $(f\gamma)'(t_0)$ fort. Und damit folgt

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\nabla}((f\gamma)')}{dt}(t) &= \tilde{\nabla}_{(f\gamma)'(t)} df(\tilde{X}_{t_0}) \\ &= df_{\gamma(t)}(\nabla_{\gamma'(t)} \tilde{X}_{t_0}) \\ &\overset{S.3.8}{=} df_{\gamma(t)}(\frac{\nabla \gamma'}{dt}(t)) \quad \forall t \in \tilde{I} \end{aligned}$$

Da $df_{\gamma(t)}$ eine Isometrie ist, folgt $(f\gamma')(t) \parallel \Leftrightarrow \gamma'(t) \parallel \forall t \in \tilde{I}$. Da $t_0 \in I$ beliebig ist, gilt die Behauptung $\forall t \in I$.

□

Satz 3.28. *Sei $M^n \subset \mathbb{R}^n$ eine Mannigfaltigkeit mit induzierter Riemannscher Metrik und bezeichne*

$$N_x M := (T_x M)^{\perp}$$

den Normalenraum in $x \in M$. Dann gilt: $\gamma : I \to M^n$ ist eine Geodätische

$$\Leftrightarrow \gamma''(t) \in N_{\gamma(t)} M$$

Beweis: Dies folgt aus Satz 3.10: Sei $Z \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$, dann ist $Z(t)$ ist parallelverschoben entlang $\gamma \Leftrightarrow Z'(t) \in N_{\gamma(t)}M$. Es gilt also

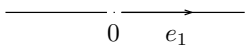
$$\gamma \text{ ist Geodätische} \iff \gamma'(t) \parallel \text{entlang}\, \gamma \iff \gamma''(t) \in N_{\gamma(t)}M$$

□

Definition. *Eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) heißt* <u>*geodätisch vollständig*</u> *(kurz: vollständig)* $:\Leftrightarrow$ *Jede maximale Geodätische $\gamma : I \to M$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.*

Beispiel 70. VOLLSTÄNDIGKEIT IM FLACHEN RAUM

1. $(\mathbb{R}^{n,k}, g_k)$ ist geodätisch vollständig.
   maximale Geodätische: $\gamma(t) = at + b \quad t \in \mathbb{R}$
2. $(\mathbb{R}^{n,k} \backslash \{0\}, g_k)$ nicht geodätisch vollständig.



$\gamma(t) = te_1$ ist nur definiert auf $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$.

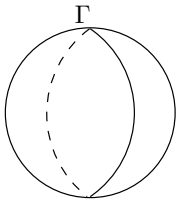
Beispiel 71. GEODÄTISCHE LINIEN AUF $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ MIT IND. METRIK

Wir betrachten einen Großkreis auf S^n:

$$E^2 \subset \mathbb{R}^{n+1} \text{ wobei } \dim E = 2$$

und setzen

$$\Gamma := E^2 \cap S^n \quad \text{'Großkreis'}$$



Sei $E = \mathrm{span}(v_1, v_2)$ mit ON-Vektoren (v_1, v_2) aus $\mathbb{R}^{n+1}$. Wir parametrisieren Γ mittels Bogenlänge.

$$\gamma(t) := \cos t v_1 + \sin t v_2 \ , \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \Gamma = \mathrm{Im} \quad , \quad \|\gamma'(t)\| \equiv 1$$

$\gamma(t)$ ist eine Geodätische auf S^n, denn

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= -\sin v_1 + \cos v_2 \\ \gamma''(t) &= \cos v_1 - \sin t v_2 = -\gamma(t) \end{aligned}$$

Da $N_{\gamma(t)}S^n = \mathbb{R}\gamma(t)$, ist

$$\gamma''(t) \in N_{\gamma(t)}S^n$$

Da durch jeden Punkt $x \in S^n$ und in jeder Richtung genau ein Großkreis geht, sind das alle Geodätischen Linien. Insbesondere gilt: Die Sphäre S^n ist eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit.

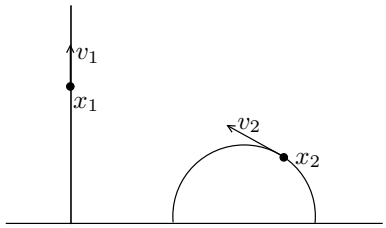
Beispiel 72. DIE GEODTISCHEN LINIEN DER POINCARE-HALBEBENE

Sei

$$\begin{aligned} H^+ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ y > 0\} \\ g_{H^+} &= \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2) \end{aligned}$$

die Poincare-Halbebene[12].

Behauptung: Die senkrechten Geraden und alle Halbkreise mit MP auf der reellen Achse sind (bei geeigneter Parametrisierung) alle Geodätischen von (H^+, g_{H^+}). Insbesondere ist $(H^+.g_{H^+})$ vollständig.



Beweis: Da durch jeden Punkt $x \in H^+$ und in jede Richtung $v \in T_xH^+$ genau ein Halbkreis oder eine senkrechte Gerade steht, g.z.z. man kann diese Mengen durch Geodätische Linien parametrisieren.

Parametrisierung des Halbkreises (MP $(\beta, 0)$, Raduis α):

$$(*) \qquad \gamma(t) = (\alpha \tan h(t) + \beta, \frac{\alpha}{\cos h(t)}) \quad t \in \mathbb{R}$$

Parametrisierung der Geraden:

$$(**) \qquad \gamma(t) = (\beta, e^t) \quad t \in \mathbb{R}$$

Wir berechnen nun die Christoffel-Symbole von (H^+, g_{H^+}) in Karte $\varphi(x,y) = (x,y)$:

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{11} &= \Gamma^1_{22} = \Gamma^2_{21} = 0 \\ \Gamma^2_{22} &= \Gamma^1_{21} = \Gamma^1_{12} = -\frac{1}{y} \quad , \quad \Gamma^2_{11} = \frac{1}{y} \end{aligned}$$

Demnach sind die Geodätengleichungen: $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ Geodäte $\Leftrightarrow$

$$\gamma''(t) - \frac{2}{\gamma_2(t)}\gamma_1'(t)\gamma_2'(t) = 0$$

$$\gamma''(t) - \frac{1}{\gamma_2'(t)}\gamma_2'(t)\gamma_2'(t) + \frac{1}{\gamma_2(t)}\gamma_1'(t)\gamma_1'(t) = 0$$

Diese Gleichungen sind für die Kurven $(*)$ und $(**)$ erfüllt.

[12]Siehe hierzu auch Bsp.58 zur Möbiustransformation

□

Bemerkung zu den Modellen der nicht-Euklidischen Geometrie

Euklidische Geoemtrie wird durch Axiomsysteme beschrieben.

Grundbegriffe:

- Punkt
- Gerade
- + Axiome der "synthetischen Geometrie"

Sreitpunkt: *Parallelenaxiom*:

L Gerade, x Punkt, $x \notin L$. Es existiert genau eine Gerade druch x, die L nicht schneidet, "parallele" Gerade.
Kann man dies aus den Axiomen der synthetischen Geometrie folgern oder muss man es zusätzlich fordern?

$\Rightarrow$ Entwicklung der nicht-Euklidischen Geoemtrie (Gauß, Lobatschewski, Bolay ...)
$\Rightarrow$ man muss Parallelaxion zusätzlich fordern. Es existieren auch andere Geometrien, wo es nicht gilt!

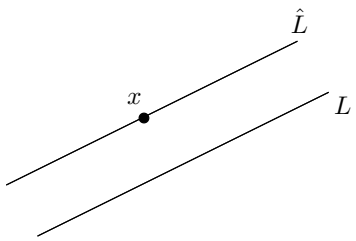
Modelle:

vollständige einfach-zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit (M^2, g) mit konstanter Schnittkrümmung $K \equiv 0, 1, -1$

"Punkte" $\hat{=}$ Elemente $x \in M$
"Geraden" $\hat{=}$ Geodätische Linien in (M^2, g)

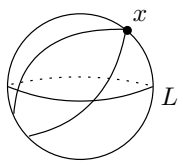
Dann sind alle Axiome der synthetischen Geometrie erfüllt, aber:

$K = 0:$ $\quad (\mathbb{R}^2, \langle , \rangle_{\mathbb{R}^2})$ *Euklidische Geometrie*



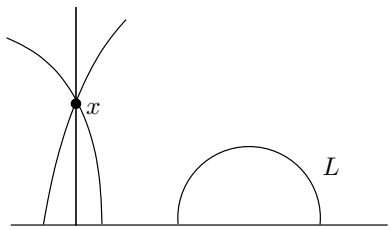
$x \notin L, \exists! \hat{L}$ und $x \in \hat{L}$ und $L \cap \hat{L} = \phi$

$K = 1:$ S^2 mit ind. Metrik. *Sphärische Geometrie*



<u>Alle</u> "Geraden" durch x schneiden L.

$K = -1:$ (H^+, g_{H^+}) *Hyperbolische Geometrie*



Es existieren unendlich viele "Geraden" durch x, die L nicht schneiden.

Beispiel 73. GEODTISCHE LINIEN AUF ROTATIONSFLÄCHEN

Wir betrachten die *Rotationsfläche*[13] mit induzierter Metrik:

$$M^2 = \{f(u,v) = (\gamma_1(v)\cos u, \gamma_1(v)\sin u, \gamma_2(v)) \mid v \in (a,b), u \in \mathbb{R}\}$$

mit einer Kurve

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : (a,b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

mit den Eigenschaften $\gamma_1(v) > 0$ und $\dot{\gamma} \neq 0$.

Wegen $(*)$ ist $f : \mathbb{R} \times (a,b) \to \mathbb{R}^3$ eine Immersion. Wählt man $\gamma(v)$ geeignet, (z.B. ohne Doppelpunkt), so ist $M^2 = \mathrm{Im} f \subset \mathbb{R}^3$ eine UMF und *inverse* Kartenabbildungen auf M sind gegeben durch

$$f = \varphi^{-1} : (u,v) \in (u_1 - \pi, u_0 + \pi) \times (v_0, v_1) \to f(u,v) \in M$$

Für die kanonische Basis dieser Karte gilt:

$$\frac{\partial}{\partial u}(f(u,v)) = \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) = (-\gamma_1 \sin u, \gamma_1 \cos u, 0)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial v}(f(u,v)) = \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = (\dot{\gamma}_1(v)\cos u, \dot{\gamma}_1(v)\sin u, \dot{\gamma}_2(v)).$$

[13] siehe hierzu Bsp. auf Seite 116

Berechnet man die Christoffelsymbole, so erhält man folgende Geodätengleichungen:

$$\begin{aligned} &\delta(t) = f(u\,(t)\,, v\,(t)) \text{ ist Geodätische} \\ \Leftrightarrow\ &\left(u'' + 2\frac{\gamma_1'}{\gamma_1}u'v' = 0\right) \text{ und } \left(v'' - \frac{\gamma_1\gamma_1'}{\gamma_1' + (\gamma_2')^2}u'^2 + \frac{\gamma_1'\gamma_1'' + \gamma_2'\gamma_2''}{(\gamma_2')^2 + (\gamma_2')^2}\,(v')^2 = 0\right) \quad (**) \end{aligned}$$

wobei $\gamma_i' = \gamma_i'(v(t))$.

Die Kurve $\delta(t)$ ist auf Bogenlänge parametrisiert, falls

$$\gamma_1^2\,(u')^2 + \left((\gamma_1')^2 + (\gamma_2')^2\right)(v')^2 = 1 \quad (***)$$

Die Punktmengen

$$\{f(u, v_0)|\ u \in \mathbb{R}\}$$

heißen *Breitenkreis* von M und die

$$\{f(u_0, v)|\ v \in (a, b)\}$$

heißen *Meridian* von M.

Wir parametrisieren die Breitenkreise durch die Bogenlänge. d.h. durch Kurven $\delta_b(t) = f(u(t), v_0)$. Mit $(***)$ folgt dann

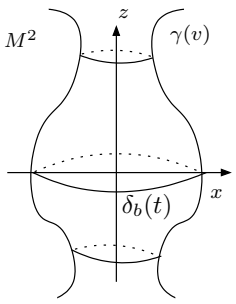
$$\gamma_1^2(v_0)\,(u')^2 = 1$$

Für die Meridiane schließt man mit $\delta_m(t) = f(u_0, v(t))$ analog, dass hierfür

$$\left((\gamma_1')^2 + (\gamma_2')^2\right)(v')^2 = 1$$

Dann gilt:

1. <u>Alle</u> (auf BL parameter) Meridiane $\delta_m(t) = f(u_0, v(t))$ sind Geodätische Linien.
2. ein (auf BL parameter) Breitenkreis $\delta_b(t) = f(u(t), v_0)$ ist Geodätische Linie $\Leftrightarrow \gamma_1'(v_0) = 0$ (d.h. $\gamma'(v_0)$ ist parallel zur z-Achse.

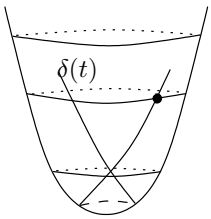


sind die einzigen geodätischen unter den Breitenkreisen.

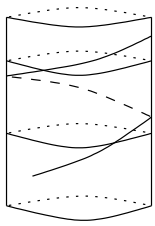
3. Sei $\delta(t) = f(u(t), v(t))$ auf BL parametrisiert, $\beta(t) :=$ Schnittwinkel zwischen δ und dem Breitenkreis durch $\delta(t)$ im Punkte $\delta(t)$.

   Es gelte $0 < \beta(t) < \pi$ (d.h. δ verläuft nirgends <u>auf</u> einem Breitenkreis)
   $r(t) :=$ Radius des Breitenkreises durch $\delta(t)$. Dann gilt die <u>Clairantsche Regel</u>:

$$\boxed{\delta\,(t) \text{ ist Geodätische } \Leftrightarrow r\,(t) \cdot \cos\beta\,(t) \equiv const}$$



<u>Paraboloid</u>, kein Breitenkreis ist geodätisch



<u>Zylinder</u>, $r(t) = r = \text{const} \Rightarrow \beta(t) = \text{const} \Rightarrow \delta(t)$ Schraubenkreis

3.7 Exponentialabbildung und Normalkoordinaten, konvexe Umgebungen

Sei (M^n, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, $x \in M$ und $v \in T_xM$.

$$\gamma_v : \ I_v \subset \mathbb{R} \to M$$

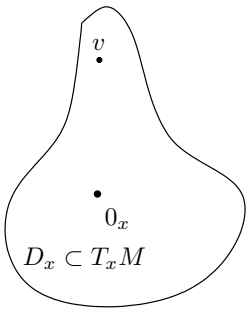
Sei eindeutig bestimmte maximale Geodätische mit $\gamma_v(0) = x, \ \gamma_v'(0) = v$. Nach Folgerung aus Satz 3.26 gilt

$$1 \in I_v \Rightarrow 1 \in I_{tv} \quad \forall 0 \leq t \leq 1 \quad \text{und} \quad \gamma_{tv}(1) = \gamma_v(t)$$

Dann ist die Menge

$$D_x := \{v \in T_xM \mid \quad 1 \in I_v\} \subset T_xM$$

sternförmig bzgl. $0_x \in T_xM$ und offen (folgt aus allgemeiner Theorie der Differentialgleichungen)

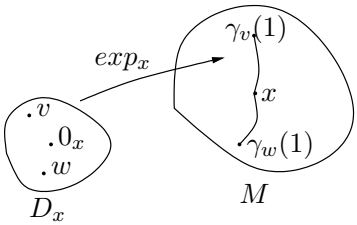


Nach Def. ist $D_x \subset T_xM$. Ist (M^n, g) geodätisch vollständig, so gilt $D_x = T_xM$.

Definition. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \exp_x : D_x \subset T_xM &\to M \\ v &\mapsto \gamma_v(1) \end{aligned}$$

heißt <u>*Exponentialabbildung von* (M, g) *im Punkt* $x \in M$</u>.



$\exp_x$ bildet Geradenstücke $\{tv|\ t \in \Gamma_0, I\}$ auf Geradenstücke im M ab

$$\exp_x(tv) = \gamma_{tv}(1) = \gamma_v(t)$$

Die Abbildung $\exp_x$ ist C^∞, denn Lösungen von Differentialgleichungen mit C^∞-Koeffizienten hängen glatt von den Anfangsbedingungen $(v, \pi(v))$ ab.

Satz 3.29. *Die Exponentialabbildung* $\exp_x : D_x \subset T_xM \to M$ *ist ein lokaler Diffeomorphismus um* $0_x \in D_x$.

Beweis: Es gilt: bei Identifizierung $T_0(T_xM) \simeq T_xM$

$$(d\exp_x)_0 = \mathrm{id}_{T_xM}$$

da

$$\begin{aligned}(d\exp_x)_0(w) &= \frac{d}{dt}(\exp_x(0+tw))|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(\exp_x(tw))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\gamma_w(t))|_{t=0} \\ &= w\end{aligned}$$

□

Definition. *Sei* $\tilde{U} \subset T_xM$ *eine bzgl.* $\delta_x \in T_xM$ *sternförmige Umgebung von* $\delta_x \in T_xM$, *so dass*

$$\exp_x : \tilde{U} \to U(x) \subset M$$

ein Diffeomorphismus ist. Dann heißt $U(x) = \exp_x(\tilde{U})$ *<u>Normalenumgebung von</u>* $x \in M$.

Aus Satz 3.29 erhält man:

(M^n, g) semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann besitzt *jeder* Punkt $x \in M$ eine Normalenumgebung.

Normalenumgebungen haben folgende spezielle Eigenschaft:

Satz 3.30. *Sei* $U(x)$ *Normalenumgebung von* $x \in M$. *Dann existiert für jeden Punkt* $y \in U(x)$ *eine* eindeutig bestimmte Geodäte $\gamma : [0,1] \to U(x)$, *die* x *und* y innerhalb *von* $U(x)$ *verbindet* $(\gamma(0) = x, \gamma(1) = y)$. *Dabei gilt: Ist* $v = \exp_x^{-1}(y)$, *so ist*

$$\gamma(t) = \exp_x(tv) = \gamma_v(t) \quad t \in [0,1]$$

und

$$l(\gamma_v|_{[0,1]}) = \|v\|$$

$\gamma_v : [0,1] \to U(x)$ *heißt <u>radiale Geodäte von</u>* x *<u>nach</u>* y

$$t \mapsto \gamma_v(t) = \exp_x(tv).$$

Beweis:

1. *Existenz:*

   $v = \exp_x^{-1}(y) \in \tilde{U}$. Da $\tilde{U}$ sternförmig, ist $tv \in \tilde{U} \quad \forall 0 \le t \le 1$. Und damit ist

   $$\gamma_v(t) = \exp_x(tv) \in U(x)$$

   eine Geodäte in $U(x)$, die x und y verbindet.

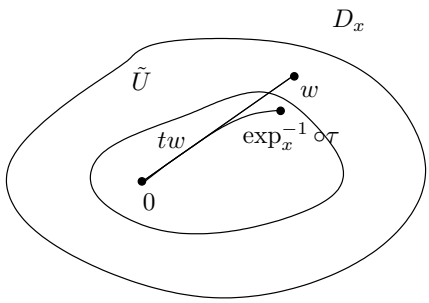
2. *Eindeutigkeit:*

   Sei $\tau : [0,1] \to U(x)$ weitere Geodäte mit $\tau(0) = x, \tau(1) = y$. Wir setzen $w := \tau'(0) \in T_xM$ und betrachten die durch w definierte *maximale* Geodäte $\gamma_w : I_w \to M$. Da τ und γ_w gleichen AP und Anfangsvektor, folgt:

   $$\tau = \gamma_w|_{[0,1]} \quad (*)$$

   und damit ist $w \in D_x \subset T_xM$.

   Dann ist $w \in \tilde{U}$, denn angenommen, $w \notin \tilde{U}$.
   Dann verläßt der Strahl $\{tw | t \in [0,1]\}$ $\tilde{U}$.



   Es existiert also ein $t_0 \in (0,1)$ so dass $t_0 w \in \tilde{U} \setminus \exp_x^{-1}(\tau[0,1])$ kompakt. Damit ist aber

   $$\gamma_w(t_0) \in U(x) \setminus \tau[0,1]$$

   Das ist aber ein Widerspruch zu $(*)$.

   Es gilt nun

   $$y = \gamma_w(1) = \gamma_v(1) \quad \text{und } v, w \in \tilde{U} \text{ mit } \exp_x(w) = \exp_x(v)$$

   Da $\exp_x : \tilde{U} \to U(x)$ ein Diffeomorphismus ist, folgt

   $$w = v \Rightarrow \gamma_v = \gamma_w = \tau$$

   auf $[0,1]$.

3. Die Länge ist nun

   $$l(\gamma_v|_{[0,1]}) = \int_0^1 \|\gamma_v'(0)\| dt = \|v\|.$$

$\square$

Folgerung: Sei (M^n, g) zusammenhängende semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann kann man beliebige Punkte $x, y \in M$ durch eine gebrochene Geodäte verbinden.

γ 'gebrochene Geodäte' $\Leftrightarrow$ γ stückweis C^∞ und die glatten Stücke sind Geodäten.

Beweis: Sei $x \in M$ fix. Und

$$\mathcal{C} := \{y \in M \mid \text{es existiert eine gebr. Geodäte von } x \to y\}$$

Dann ist $M = \mathcal{C}$, denn $\mathcal{C} \neq \emptyset$, da $x \in \mathcal{C}$. $\mathcal{C}$ ist offen:

Sei $y \in \mathcal{C}$ und $U(y)$ die Normalenumgebung von y. Für jedes $z \in U(y)$ existiert nun eine radiale Geodäte von $y \to z$, somit ist

$$U(y) \subset \mathcal{C}.$$

$\mathcal{C}$ ist abgeschlossen, d.h. $M \backslash \mathcal{C}$ ist offen:

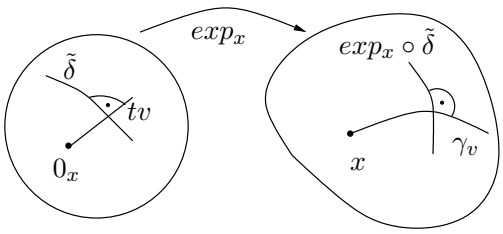
$y \in M \backslash \mathcal{C}$ und $U(y)$ dessen Normalenumgebung. Für $z \in U(y)$ ist $z \in M \backslash \mathcal{C}$ und damit $U(y) \subset M \backslash \mathcal{C}$.

Da M zusammenhängend ist, folgt$M = \mathcal{C}$.

$\square$

Ziel: Die Exponentialabbildung hat folgende geometrische Eigenschaft:

$$\begin{aligned} \exp_x : \tilde{U} \subset T_x M &\to U(x) \subset M \\ \text{Strahl } tv &\to \text{radiale Geodäte } \gamma_v(t) = \exp_x(tv) \end{aligned}$$



$\exp_x$ erhält die Orthogonalität zu den radialen Richtungen, d.h. sie ist eine "Radiale Isometrie" (schneidet $\tilde{\delta}$ den Strahl tv $\perp$, so schneidet $\delta = \exp_x \circ \tilde{\delta}$ die radiale Geodäte γ_v $\perp$).

Dazu zunächst ein Hilfsmittel:

Definition. *Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ eine zusammenhängende Menge, so dass $U \subset A \subset cl\,(U)$ $(*)$ für eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^2$. Eine parametrisierte Fläche in einer Mannigfaltigkeit M^n ist eine glatte Abbildung*

$$f : A \subset \mathbb{R}^2 \to M$$

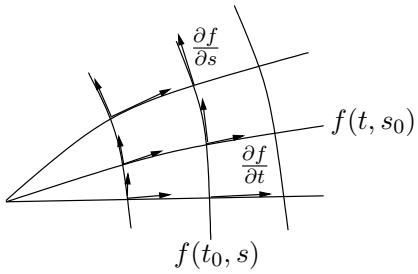
(Dabei heißt f glatt, falls es eine offene Menge $V \supset A$ und eine C^∞-Abbildung $F : V \subset \mathbb{R}^2 \to M$ mit $F|_A = f$ gibt. Bedingung $(*)$ sichert, dass das Differential $df_a := dF_a, a \in A$, unabhängig von der Fortsetzung F ist.)

Definition. *Ein Vektorfeld X entlang einer parametrisierten Fläche $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to M$ ist eine Abbildung*

$$\begin{aligned} X : A \subset \mathbb{R}^2 &\to TM \\ (t,s) &\mapsto X(t,s) \in T_{f(t,s)}M, \end{aligned}$$

die C^∞ ist (im üblichen Sinne wie für Vektorfelder entlang Kurven).

Sei $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to M$ eine parametrisierte Fläche



Die Kurven $t \to f(t, s_0)$ bzw. $s \to f(t_0, s)$ heißen Koordinatenlinien von f (s_0, t_0 fix). Leitet man die Koordinatenlinien nach ihrem jeweiligen Parameter ab, so erhält man Vektorfelder $\frac{\partial f}{\partial t}$ bzw. $\frac{\partial f}{\partial s}$ entlang f:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, s_0) &:= \frac{d}{dt}(f(t, s_0)_{t=t_0} df_{(t_0,s_0)}(\frac{\partial}{\partial t}(t_0, s_0)) \\ \frac{\partial f}{\partial s}(t_0, s_0) &:= \frac{d}{ds}(f(t_0, s)_{s=s_0} df_{(t_0,s_0)}(\frac{\partial}{\partial s}(t_0, s_0)) \end{aligned}$$

Sei ∇ eine kovariante Ableitung auf M und X ein Vektorfeld entlang f. Dann sind die partiellen kovarianten Ableitungen $\frac{\nabla X}{\partial t}$ und $\frac{\nabla X}{\partial s}$ die folgendermaßen definierten Vektorfelder entlang f:

$\frac{\nabla X}{\partial t}(t_0, s_0)$ ist die kovariante Ableitung des Vektorfeldes $X(\cdot, s_0)$ entlang der Koordinatenlinie $f(\cdot, s_0)$ im Punkt t.

$\frac{\nabla X}{\partial s}(t_0, s_0)$ ist die kovariante Ableitung des Vektorfeldes $X(t_0, \cdot)$ entlang der Koordinatenlinie $f(t_0, \cdot)$ im Punkt s_0.

Lemma 3.3. *(Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen bei parametrischen Flächen ($\hat{=}$ Schwarz-Lemma der Analysis))*
Sei M^n eine C^∞-Mannigfaltigkeit mit torsionsfreier *kovarianten Ableitung ∇ und $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to M$ eine parametrisierte Fläche, dann ist*

$$\frac{\nabla}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\nabla}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t}$$

Beweis: Sei (U, φ) Karte um $f(t, s)$ und $\varphi(f(t, s)) = (x_1(t, s), \ldots, x_n(t, s))$, so folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_i}(f(\cdot, \cdot)) \\ \frac{\partial f}{\partial s} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x_i}(f(\cdot, \cdot)) \end{aligned}$$

für $f(t,s) \in U$. Aus der lokalen Formel für die kovariante Ableitung folgt:

$$\frac{\nabla}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_i \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial s \partial k} + \sum_{k,l} \frac{\partial x_k}{\partial t}\frac{\partial x_l}{\partial s}\Gamma^i_{lk}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}(f(\cdot,\cdot))$$

$$\frac{\nabla}{\partial k}\frac{\partial f}{\partial s} = \sum_i \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial s} + \sum_{k,l} \frac{\partial x_k}{\partial s}\frac{\partial x_l}{\partial k}\Gamma^i_{lk}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}(f(\cdot,\cdot))$$

Da ∇ torsionsfrei ist, folgt $\Gamma^i_{lk} = \Gamma^i_{kl}$ und damit die Behauptung.

□

Satz 3.31. [Gauß-Lemma]

Sei (M^n, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, $x \in M$und $v \in D_x \subset T_xM$.
Sei $\sigma_v(t) = tv \subset T_xM$ der von v erzeugte Strahl in T_xM. Sei weiterhin $X \in T_v(T_xM)$ ein "radialer" *Tangentialvektor (d.h. X tangential an σ_v) und $Y \in T_v(T_xM)$ beliebig. Dann gilt bei Identifizierung $T_v(T_xM) = T_xM$:*

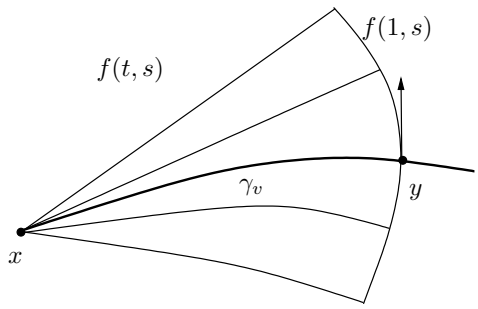
$$g_y((d\exp_x)_v(X), (d\exp_x)_v(Y)) = g_x(X,Y)$$

wobei $y = \exp_x(v)$.

(Insbesondere gilt: schneidet eine Kurve $\tilde{\delta}(t)$ in T_xM den Strahl $\sigma_v(t)$ in v orthogonal, so schneidet die Bildkurve $\delta(t) = \exp_x(\tilde{\delta}(t))$ die radiale Geodäte $\gamma_v(t)$ in $y = \exp_x(v)$ orthogonal.)

Beweis: Sei $X \in T_v(T_xM)$ ein radial Vektor, so ist $X = dv$. Da $(d\exp_x)_v$ linear ist, genügt es die Behauptung für $X = v$ zu beweisen. Betrachten die parametrisierte Fläche

$$\begin{aligned} f : [0,1] \times (-\varepsilon, \varepsilon) &\to M \\ (t,s) &\mapsto f(t,s) := \exp_x(t(v + sY)) \end{aligned}$$



Aus $f(t,s) = \exp_x(t(v+sY))$ und $\gamma_v(t) = f(t,0)$ folgt dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t}(1,0) &= \frac{d}{dt}(\gamma_v(t))|_{t=1} = \frac{d}{dt}(\exp_x(tv))|_{t=1} \\ &\overset{KR}{=} (d\exp_x)_v(v) \\ \frac{\partial f}{\partial s}(1,0) &= \frac{d}{ds}(f(1,s)|_{s=0} = \frac{d}{ds}(\exp_x(v+sy))|_{s=0}) \\ &= (d\exp_x)_v(y) \end{aligned}$$

Zu zeigen ist also:

$$g_y(\frac{\partial f}{\partial t}(1,0), \frac{\partial f}{\partial s}(1,0)) = g_x(v,y) \qquad (*)$$

Da der Levi-Civita-Zusammenhang ∇ metrisch ist, gilt

$$\frac{\partial}{\partial t}(g(\frac{\partial f}{\partial t}(t,s), \frac{\partial f}{\partial s}(t,s))) = g(\frac{\nabla}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t}(t,s), \frac{\partial f}{\partial s}(t,s)) + g(\frac{\partial f}{\partial t}(t,s), \frac{\nabla}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s}(t,s))$$

$f(t,s) = \exp_x(t(v+sy))$ ist für ein fix. s eine radiale Geodäte und $\frac{\partial f}{\partial t}(t,s)$ ihr Tangentialvektor, d.h. $\frac{\nabla}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t}(t,s) = 0$. Mit dem Symmetrie-Lemma folgt nun

$$\frac{\partial}{\partial t}(g(\frac{\partial f}{\partial t}(t,s)), \frac{\partial f}{\partial s}(t,s)) = g(\frac{\partial f}{\partial t}(t,s), \frac{\nabla}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t}(t,s)) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}(g(\frac{\partial f}{\partial t}(t,s), \frac{\partial f}{\partial t}(t,s)).$$

Da $\frac{\partial f}{\partial t}(t,s)$ Tangentialvektor an die radiale Geodäte $\exp_x(t(v+sy))$ mit Anfangsvektor $(v+sy)$, folgt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(g(\frac{\partial f}{\partial t}(t,s), \frac{\partial f}{\partial s}(t,s)) &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}(g_x(v+sy, v+sy)) \\ &= s \cdot g_x(y,y) + g_x(v,y)\end{aligned}$$

(da Länge des Tangentialvektors konstant).

Für den Parameter $s = 0$ folgt

$$\frac{d}{dt}\underbrace{g(\frac{\partial f}{\partial t}(t,0), \frac{\partial f}{\partial s}(t,0))}_{h(t)} = g_x(v,y) \quad \forall t \in [0,1]$$

mit $h(0) = 0$ da $\frac{\partial f}{\partial s}(0,0) = \frac{d}{ds}(\underbrace{\exp_x(0)}_{\equiv x}) = 0$. Es ist also

$$h(t) = t \cdot g_x(v,y)$$

und damit

$$h(1) = g_y(\frac{\partial f}{\partial t}(1,0), \frac{\partial f}{\partial s}(1,0)) = g_x(v,y)$$

und daraus folgt $(*)$

$\square$

.

Definition. (M^n, g) *semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit,* $x \in M$ *und* $n = (\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$ *eine ONB in* T_xM, g_x. *Es gilt also*

$$(g_x(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j)) = \begin{pmatrix} -1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Sei weiterhin $U(x)$ Normalenumgebung von $x \in M$. Wir definieren

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathfrak{a}} : U(x) &\to \mathbb{R}^n \\ y &\mapsto (x_1, \ldots, x_n) \qquad y = \exp_x(\sum_{i=1}^n x_i \mathfrak{a}_i) \end{aligned}$$

$\varphi_{\mathfrak{a}}$ heißen <u>Normalkoordinaten auf $U(x)$</u>

Bemerkung:

- Sei $\gamma_v(t) = \exp_x(tv)$ die von $v \in D_x \subset T_xM$ erzeugte radiale Geodäte und sei $v = \sum_{i=1}^n v_i \mathfrak{a}_i$. Dann gilt: $\varphi_{\mathfrak{a}}(\gamma_v(t)) = (tv_1, \ldots, tv_n)$. In der kanonischen Basis bezgl. $(U(x), \varphi_{\mathfrak{a}})$ gilt damit:
$$\gamma_v^{'}(t) = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\gamma_v(t)).$$
- Sei $y \in U(x)$ und $v = \exp_x^{-1}(y) = \sum v_i \mathfrak{a}_i$, dann ist
$$x_i(y) = v_i$$
und damit
$$\begin{aligned} l(\gamma_v|_{[0,1]}) &= (|-x_1^2(y) - \ldots - x_k^2(y) + x^2(y) + \ldots + x_n^2|^{\frac{1}{2}}) \\ &= (k = \mathrm{index}(g)) \end{aligned}$$
- Für die kanonische Basis der Normalkoordinaten $\varphi_{\mathfrak{a}}$ gilt:
$$\frac{\partial}{\partial x_i}(y) = (d\exp_x)_v(\mathfrak{a}_i) : v = \exp_x^{-1}(y)$$
da
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}(y) &= \frac{d}{dt}(\varphi_{\mathfrak{a}}^{-1}(\varphi_{\mathfrak{a}}(y) + t\mathfrak{a}_i))|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(\exp_x(x_1(y)\mathfrak{a}_1 + \ldots + (x_i(y) + t)\mathfrak{a} + \ldots + x_n(y)\mathfrak{a}_n))_{t=0} \\ &= (d\exp_x)_v(\mathfrak{a}) \ . \end{aligned}$$

Die Normalkkordinaten um x verhalten sich *im Punkt* x in 1. Näherung so wie die Euklidischen Koordinaten von $\mathbb{R}^{n,k} \simeq T_xM$:

Satz 3.32. *Sei (M^n, g) semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit und $(U(x), \varphi_{\mathfrak{a}})$ Normalkoordinaten um $x \in M$, dann gilt*

1. $g_{ij}(x) = \delta_{ij}\varepsilon_j$ *mit* $\varepsilon = \{-1 \ j \leq k, 1 \ j > k\}$
2. $\Gamma_{ij}^k(x) = 0$

Beweis:

1. Es gilt

$$\begin{aligned} g_{ij}(x) &= g_x(\frac{\partial}{\partial x_i}(x), \frac{\partial}{\partial x_j}(x)) \\ &= g_x((d\exp_x)_0(\mathfrak{a}), (d\exp_x)_0(\mathfrak{a}_j)) \\ &\overset{Satz\,3.29}{=} g_x(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j) = \delta_{ij}\varepsilon_j \end{aligned}$$

2. Betrachten die Geodätengleichung für radiale Geodäte $\gamma_v(t)$ in Normalkoordinaten:

$$y = \exp_x(v), \varphi_{\mathfrak{a}}(y) = (x_1(y), \ldots, x_n(y)) = (v_1, \ldots, v_n)$$

dann ist

$$\varphi_{\mathfrak{a}}(\gamma_v(t)) = (tx_1(y), \ldots, tx_n(y)) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$$

und damit

$$\gamma_i'(t) \equiv x_i(y) \qquad \text{bzw. } \gamma''(t) = 0.$$

Daraus folgt nun

$$\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(\gamma_v(t))x_i(y)x_j(y) = 0 \quad t \in [0, \varepsilon), k = 1, \ldots, n$$

Wir betrachten nun speziell den Vektor $v = (\mathfrak{a}_r + \mathfrak{a}_s)$. Sei $0 < \alpha \in \tilde{U}$ fixiert, dann ist

$$x_i(y) = \begin{cases} \alpha & \text{für } i = r \text{ oder } i = s \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt also

$$\Gamma_{rs}^k(\gamma_v(t)) + \Gamma_{sr}^k(\gamma_v(t)) = 0 \quad \forall\, t \in [0, \varepsilon)$$

und insbesondere für $t = 0$

$$\Gamma_{rs}^k(x) + \Gamma_{sr}^k(x) = 0$$

D.h. $\Gamma_{rs}^k(x)$ ist schiefsymmetrisch in (r, s). Da aber $\Gamma_{r,s}^k(x)$ immer *symmetrisch* in (r, s) folgt

$$\Gamma_{r,s}^k(x) = 0 \quad \forall r, s, k.$$

□

Definition. *Sei (M^n, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit.*

Eine offene Menge $W \subset M$ heißt <u>*konvex*</u> $\Leftrightarrow$ *W ist Normalenumgebung* für jeden *ihrer Punkte.*

Aus Satz 3.30 folgt: Ist $W \subset M$ konvex, so existiert für je 2 Punkte $x, y \in W$ eine *eindeutig bestimmte* Geodäte, die x und y *in* W verbindet.

Ziel: Jeder Punkt von M besitzt eine konvexe Umgebung.

Dazu betrachten wir die C^∞-Abbildung

$$\begin{aligned} E:\ D \subset TM &\to M \times M \\ v &\mapsto (\pi(v), \exp_{TM(v)}(v)) \end{aligned}$$

Dabei sei $\pi(v)$ der Fußpunkt von v im Tangentialbündel TM und

$$D := \{v \in TM |\ 1 \in I_v\}.$$

$D \subset TM$ ist offen (Theorie der Differentialgleichungen) und es gilt

$$D_x = D \cap T_xM \quad \forall x \in M.$$

Lemma 3.4. *Sei $x \in M$ und $v \in T_xM$, so folgt: Ist*

$$(d\exp_x)_v : T_v(T_xM) \to T_{\exp_x(v)}M$$

ein Isomorphismus, so ist

$$dE_v : T_v(TM) \to T_{(x,\exp_x(v))}(M \times M)$$

ein Isomorphismus. Insbesondere ist $E : D \subset TM \to M \times M$ ein lokaler Diffeomorphismus um $\sigma_x \in T_xM \subset TM$.

Beweis: Sei $v \in T_xM$ ein Vektor für den $(d\exp_x)_v$ ein Isomorphismus ist. Aus Dimensionsgründen genügt es zu zeigen, dass dE_v injektiv ist. Sei $X \in T_v(TM)$ und $dE_v(X) = 0$. Da $pr_1 \circ E = \pi =$ Projektion im Tangentialbündel, und damit

$$d\pi_v(X) = dpr_1 \circ dE_v(X) = 0$$

folgt

$$X \in \underbrace{\ker d\pi_v}_{n\text{-dim}} = \underbrace{T_v(T_xM)}_{n\text{-dim}}$$

d.h. X ist ein "vertikaler Vektor". Und damit

$$(dE_v)(X) = (0, (d\exp_x)_v(X)) = 0$$

sodaß

$$(d\exp_x)_v(X) = 0 = \vec{Ver}X = 0$$

□

Satz 3.33. *(M^n, g) semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Jeder Punkt $x \in M$ besitzt eine konvexe Umgebung.*

Beweis: Sei $U(x)$ eine Normalenumgebung von x und $\varphi_{\mathfrak{a}} = (x_1, \ldots, x_n)$ Normalenkoordinaten um x auf $U(x)$.

Wir betrachten die Funktion (unabhängig von $\operatorname{sign}(g)$)

$$\begin{aligned} N : U(x) &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto x_1^2(y) + \ldots + x_n^2(y) \end{aligned}$$

Für hinreichend kleines $\delta > 0$ gilt

$$V_\delta(x) := \{y \in U(x) |\ N(y) < \delta^2\} \subset U(x)$$

($V_\delta(x)$ wird bei $\varphi_{\mathfrak{a}}$ auf die *Euklidische* Kugel im $\mathbb{R}^n$ und Radius δ abgebildet).

1. Sei B das folgende symmetrische $(2,0)$-Tensorfeld auf $U(x)$:

$$B = \sum_{i,j}(\delta_{ij} - \sum_k \underbrace{\Gamma^k_{ij} x_k}_{\text{bzgl. Normalkoordinaten}})dx_i \otimes dx_j$$

Im Punkt $x \in U(x)$ gilt nach Satz 3.32

$$B_x = \sum_{i,j} \delta_{ij}(dx_i \otimes dx_j)_x = \sum_{i=1}^n (dx_i^2)_x,$$

d.h. B_x ist positiv-definit. Wählen δ zusätzlich so klein, dass B auf $V_\delta(x) \subset U(x)$ positiv definit ist. Da

$$\begin{aligned} \phi \ : \ & [0,1] \times D \subset [0,1] \times TM \to M \\ & (t,v) \mapsto \exp_{\pi(v)}(tv) \end{aligned}$$

stetig ist, existiert eine Umgebung $[0,\varepsilon) \times \tilde{V} \subset [0,1] \times \infty$ von $(0,\sigma_x)$ so dass

$$\phi(t,v) = \exp_{\pi(v)}(tv) \in V_\delta(x)$$

$\forall (t,v) \in [0,\varepsilon) \times \tilde{\mathcal{V}}$.

Betrachten $\tilde{\mathcal{V}}' := \{\overbrace{\frac{\varepsilon}{2}V}^{\tilde{V}} \,|v \in \tilde{V}\} \subset D$ (Umnormierbar), dann ist

$$\exp_{\pi(\tilde{V})}(t\tilde{V}) = \exp_{pi(v)}(t \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot v) \in V_\delta(x)$$

mit $\tilde{v} = \frac{\varepsilon}{2} \cdot v \ \forall t \in [0,1]$ und $\tilde{v} \in \tilde{\mathcal{V}}'$.

Es existiert Umgebung $\tilde{\mathcal{V}}'$ von $\delta_x \in TM$, so dass $exp_{\pi(v)}(tv) \in V_\delta(x)$ für alle $0 \leq t \leq 1$ und $v \in \tilde{\mathcal{V}}'$. Nach dem Lemma ist $E : D \subset TM \to M \times M$ ein lokaler Diffeomorphismus um δ_x. Wählen $0 \leq \epsilon \leq \delta$ so klein, dass

$$E : \tilde{\mathcal{W}} \subset TM \to V_c(x) \times V_c(x)$$

ein Diffeomorphismus und $\exp_{\pi(w)}(tw) \in V_\delta(x)$ für alle $0 \leq t \leq 1$ und $w \in \tilde{\mathcal{W}}$ ($\tilde{\mathcal{W}} \subset \tilde{\mathcal{V}}'$ wählen).

2. *Behauptung:* Für jedes $0 < a \leq c$ gilt: $V_a(x)$ ist Normalenumgebung für jeden seiner Punkte $y \in V_a(x)$.

Seien $y, z \in V_a(x)$ und $v := E^{-1}(y,z) \in \tilde{\mathcal{W}}$. Dann gilt $y = \pi(v)$ $z = \exp_y(v)$. Dann gilt nach 1.) die radiale Geodäte $\gamma_v(t) = \exp_y(tv)$, die y und z verbindet: $\gamma_v(t) \in V_\delta(x)$ $(t \in [0,1])$. Wir zeigen, dass sogar gilt:

$$\gamma_v(t) \in V_a(x) \quad \forall t \in [0,1] \ .$$

Betrachten die Geodäte $\gamma_v(t)$ in den Normalkoordinaten bezgl. x

$$\gamma_v(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$$

Sei $N(t) := N(\gamma_v(t)) = \sum_{i=1}^n x_i(t)^2$. Nach 1.) folgt dann $N(t) < \delta^2$.

Angenommen γ_v verläßt $V_a(x)$. Da $y, z \in V_a(x) \Rightarrow N(\delta), N(1) < a^2 \Rightarrow N(t)$ hat einen <u>maximalen</u> Wert in einem $t_0 \in (0,1)$.

$$\begin{aligned} N'(t_0) &= 2\sum_i x_i(t_0)x_i'(t_0) \\ N''(t_0) &= 2\sum_i (x_i'(t_0)^2 + x_i(t_0)x_i''(t_0)) \quad (*) \end{aligned}$$

Die Geodätengleichung in Normalkoordinaten lautet

$$x_i''(t_0) + \sum_{k,l} x_k' x_l' \Gamma_{kl}'(\gamma_v(t)) = 0$$

sodaß

$$\begin{aligned} N''(t_0) &= 2\sum_{k,l} (\delta_{kl} - \Gamma_{kl}^i(\gamma(t_0))x_i(t_0))x_k'(t_0)x_l'(t_0) \\ &= 2B_{\gamma(t_0)}(\gamma'(t_0), \gamma'(t_0)) > 0 \end{aligned}$$

da B auf $V_\delta(x)$ positiv-definit und $\gamma'(t_0) \neq 0$.

N hat also in t_0 ein lokales Mimimum. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass N in t_0 <u>maximal</u> ist.

$$\Rightarrow \gamma_v([0,1]) \subset V_a(x). \quad 0 < a \leq c$$

3. $V_a(x)$ ist Normalenumgebung von $y \in V_a(x)$: Sei

$$\tilde{W}' = E^{-1}(V_a(x) \times V_a(x)) \subset \tilde{W}.$$

und

$$\tilde{W}_y = \tilde{W}' \cap T_yM \subset T_yM$$

offen. Da $E|_{\tilde{W}'}$ Diffeomorphismus ist folgt

$$\exp_y : \tilde{W}_y \subset T_yM \to V_a(x)$$

Diffeomorphismus. Noch zu zeigen: $\tilde{W}_y$ ist sternförmig bezgl. σ_y:

$$v \in \tilde{W}_y \Rightarrow z = \exp_y(v) \in V_a(x)$$

$\overset{\Rightarrow}{2)}$ Die radiale Geodäte $\gamma_v(t) \in V_a(x)\ \forall 0 \leq t \leq 1$

$$\Rightarrow t \cdot v = \exp_y^{-1}(\underbrace{\gamma_v(t)}_{\gamma_{tv(1)}}) \in \tilde{W}_y \quad \forall t \in [0,1]$$

□

Folgerung

Sei (M^n, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit.
Ist $\gamma : [0,b) \subset \mathbb{R} \to M$ eine Geodäte und existiere eine <u>stetige</u> Fortsetzung $\tilde{\gamma} : [0,b) \subset \mathbb{R} \to M$ von γ, dann existiert eine Fortsetzung von γ zu einer Geodäten auf $[0, b+\varepsilon)$ (für ein $\varepsilon > 0$).

Beweis: Sei $V \subset M$ eine konvexe Umgebung von $\tilde{\gamma}$. Dann existiert $0 < a < b$ so dass

$$\tilde{\gamma}|_{[a,b]} \subset V.$$

V ist Normalenumgebung von $\gamma(a) \Rightarrow \gamma|_{[a,b)}$ ist ein Anfangsstück einer radialen Geodäten. Setzen diese radiale Geodäte bis zum Rand von V fort. Da $\tilde{\gamma}(b) \notin \partial V$, ist die radiale Geodäte auf $[0, b+a)$ für ein $\varepsilon > 0$ definiert.

□

3.8 Geodäten und Abstände in Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Der Satz von Hopf und Rinow

Wir betrachten in diesem Abschnitt nur **Riemannsche** Mannigfaltigkeit (M^n, g) und studieren die Abstands-minimierenden Eigenschaften von Geodäten in Riemannschen Mannigfaltigkeiten.

Sei (M^n, g) eine *zusammenhängende* Riemannsche Mannigfaltigkeit und $x, y \in M$.

$$\Omega(x,y) := \text{Menge der stückweise glatten Kurven, die } x \text{ und } y \text{ verbinden.}$$

Definition. $d(x,y) := \inf\{l(\gamma) |\ \gamma \in \Omega(x,y)\}$ *heißt* <u>*Abstand von x und y*</u> *in* (M, g).

Bemerkung:

1. $d : M \times M \to \mathbb{R}$ ist offensichtlich ≥ 0 , symmetrisch und erfüllt die Δ-Ungleichung

   $$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y).$$

   Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\alpha \in \Omega(x,z),\ \beta \in \Omega(z,y)$ mit

   $$l(\alpha) < d(x,z) + \varepsilon \quad , \quad l(\beta) < d(z,y) + \varepsilon$$

   dann ist $\alpha * \beta \in \Omega\,(x,y)$[14] und es gilt

   $$l(\alpha * \beta) = l(\alpha) + l(\beta)$$

   $$d(x,y) \leq l(\alpha * \beta) < d(x,z) + d(z,y) + 2\varepsilon.$$

   Mit $\varepsilon \to 0$ folgt Behauptung.
   Zeigen später, dass d eine Metrik auf M ist (noch zu zeigen: $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$)

2. In pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeiten kann man zwar d ebenfalls definieren, dies ist aber *keine* Metrik:

   Für $(\mathbb{R}^2, g = -dx^2 + dy^2)$ ist $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^{2,1} \quad \gamma(t) := (t,t)$ isotrop, und damit gilt

   $$l(\gamma) = 0 \quad \Rightarrow d\,(\gamma(0), \gamma(1)) = 0$$

3. Es muss keine Kurve geben, deren Länge gleich dem Abstand ist

   $$\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \quad g = dx^2 + dy^2$$

   $$\overset{\bullet}{a} \qquad \overset{\circ}{0} \qquad \overset{\bullet}{b}$$

[14] Hierbei bezeichne $\alpha * \beta$ die Verknüpfung von Wegen.

Definition. *Eine Kurve* $\gamma \in \Omega(x,y)$ *heißt* <u>*minimierend*</u> $:\leftrightarrow l(\gamma) = d(x,y)$.

Sei (M^n, g) *ein Riemannsche Mannigfaltigkeit und* $x \in M$. *Sei* $U(x)$ *eine Normalenumgebung von* x *und*

$$\exp_x : \tilde{U}(0) \subset T_xM \to U(x) \subset M$$

Diffeomorphismus. Sei $\varepsilon > 0$ *so dass* $\underbrace{cl\,(K_\epsilon\,(0))}_{abg.\ Kugel\ in\ (T_xM, g_x)} \subset \tilde{U}(0)$. *Dann heißt*

$$B_\varepsilon(x) := \exp_x\,(K_\epsilon\,(0)) \subset U(x)$$

<u>*geodätische Kugel um* x</u>[15] *und*

$$S_\varepsilon\,(x) := \exp_x\,(\partial\,(K_\epsilon\,(0))) = \exp_x\Big(\{v \in \tilde{U} |\ \|v\| = \varepsilon\}\Big)$$

<u>*geodätische Sphäre um* x</u>.

Seien $\varphi_{\mathfrak{a}} = (x_1, \ldots, x_n)$ Normalkoordinaten um auf $U(x)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} y \in B_\varepsilon \ &\Leftrightarrow\ \|\exp_x^{-1}(y)\|^2 < \varepsilon^2 \\ &\Leftrightarrow\ x_1(y)^2 + \ldots + x_n(y)^2 < \varepsilon^2 \end{aligned}$$

Aus dem Beweis von Satz 3.33 erhält man

Satz 3.34. *Sei* (M^n, g) *eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Für jeden Punkt* $x \in M$ *existiert eine geodätische Kugel* $B_c(x)$ *so dass für jedes* $0 < a \leq c$ *die geodätischen Kugeln* $B_a(x)$ *um* x konvex *sind.*

Satz 3.35. *Sei* (M^n, g) *eine* zusammenhängende *Riemannsche Mannigfaltigkeit,* $x \in M$ *und* $U(x)$ *eine Normalenumgebung um* x. *Sei* $y \in U(x)$ *und* $\gamma_v : [0,1] \subset \mathbb{R} \to U(x)$, *die radiale Geodäte von* x *nach* y $(v = \exp_x^{-1}(y))$. *Dann ist* γ_v *die* eindeutig bestimmte *kürzeste Kurve von* x *nach* y in $U(x)$, *d.h.*

$$\begin{aligned} l(\alpha) \ &\geq\ l(\gamma_v) \qquad \forall\, \alpha \in \Omega\,(x,y) \\ l(\alpha) \ &=\ l(\gamma_v) \Leftrightarrow \alpha = \gamma_v \circ \tau \end{aligned}$$

Dabei ist τ *eine monotone, wachsende Umparametrisierung von* γ_v.

Beweis: Sei $\alpha \in \Omega(x,y),\ \alpha : [0,1] \to U(x)$ (d.h. evtl. umparametrisiert auf das Intervall $[0,1]$). $\exp_x : \tilde{U}(0) \subset T_xM \to U(x)$ ist ein Diffeomorphismus. Sei

$$\tilde{v}(t) = \exp_x^{-1}(\alpha(t)) \in \tilde{U}(0) \subset T_xM$$

OBdA gelte $\tilde{v}(t) \neq 0 \quad \forall\, t \in (0,1]$ (sonst läßt man Anfangsintervall weg, mit dem man x mit x verbindet.)

Dann ist $\tilde{v}(t) = r(t) \cdot v(t)$, wobei $\|v(t)\| \equiv 1$ und $r :\ (0,1] \to \mathbb{R}^+$ stückweise glatt ist. (Damit ist auch $\|\tilde{v}\,(t)\,\| = r\,(t)$). Aus $\alpha(t) = \exp_x(r(t) \cdot v(t))$ und mit Ausnahme der endlich vielen "Ecken" von $\alpha(t)$ gilt dann:

$$\alpha'(t) = (d\exp_x)_{\tilde{v}(t)}(\underbrace{r'(t)v(t)}_{tangential\ an\ den\ Strahl\ \sigma_{v(t)}} + \underbrace{r(t) \cdot v'(t)}_{y\ (orthogonal\ an\ den\ Strahl\ \sigma_{v(t)})})$$

[15] $B_\epsilon\,(x)$ ist ebenfalls eine Normalenumgebung von x.

Aus dem Gauß-Lemma (Satz 3.31) folgt

$$\begin{aligned} g(\alpha'(t),\alpha'(t)) &= r'(t)^2 \underbrace{g_x(v(t),v(t))}_{\equiv 1} + g(\hat{y},\hat{y}) \quad \text{mit } \hat{y} = (d\exp_x(y)) \\ &\overset{Riem.MF}{\geq} r'(t)^2 \qquad (*) \end{aligned}$$

Damit ist dann

$$\|\alpha'(t)\| \geq |r'(t)| \geq r'(t).$$

Wir betrachten nun $\int\limits_{\varepsilon}^{1} \|\alpha'(t)\| dt \geq \int\limits_{\varepsilon}^{1} r'(t) dt = r(1) - r(\varepsilon)$. Für $\epsilon \to 0$ folgt $r(\varepsilon) \to 0$, da $\tilde{v}(0) = 0_x$. Desweiteren ist

$$r(1) = \|\tilde{v}(1)\| = \|\exp^{-1}(y)\| = \|v\| = l(\gamma_v),$$

sodass insgesamt

$$l(\alpha) \geq l(\gamma_v).$$

Die Gleichheit kann nur auftreten, wenn in $(*)$ die Gleichheit eintritt, d.h.

$$l(\alpha) = l(\gamma_v) \;\Rightarrow\; g(\hat{y},\hat{y}) \equiv 0 \quad \text{d.h. } \hat{y} = 0,$$

da aber nach Konstruktion $r(t) \geq 0$, muß $v'(t) \equiv 0$ sein, sodass

$$v(t) \equiv v_0.$$

Wir erhalten dann

$$\tilde{v}(t) = r(t) \cdot v_0 \quad \text{mit } r'(t) \geq 0 \quad (**)$$

$r(t)$ ist also monoton wachsend. Aus $\tilde{v}(1) = v = r(1)v_0$, bzw. $v_0 = \frac{1}{r(1)} v$ folgt mit $(**)$

$$\begin{aligned} \tilde{v}(t) &= \frac{r(t)}{r(1)} \cdot v \qquad \text{und damit} \\ \alpha(t) &= \exp_x\left(\frac{r(t)}{r(1)} \cdot v\right) \end{aligned}$$

D.h. $\alpha(t)$ ist eine monoton wachsende Umparametrisierung von $\gamma_v(s) = \exp_x(s \cdot v)$, mit

$$\tau(t) = \frac{r(t)}{r(1)}.$$

□

Für die geodätischen Kugeln um x gilt sogar noch mehr:

Satz 3.36. *Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $x \in M$ und $B_\varepsilon(x)$ eine geodätische Kugel um $x, y \in B_\varepsilon(x)$. Dann ist die radiale Geodäte $\gamma_v : [0,1] \to B_\varepsilon(x)$ von x nach y die kürzeste Kurve zwischen x und y in* ganz *M. Insbesondere gilt: Ist α eine stückweis C^∞-Kurve, die in x beginnt und $B_\varepsilon(x)$ verläßt, dann gilt*

$$l(\alpha) \geq \epsilon.$$

Beweis: Nach Satz 3.35 ist γ_v die kürzeste Kurve von x nach y *innerhalb* von $B_\varepsilon(x)$. Nach Definition von $B_\varepsilon(x)$ gilt $l(\gamma_v) = \|v\| < \varepsilon$. Es genügt also zu zeigen: Ist $\alpha : [0, b) \to U(x)$ eine stückweis C^∞-Kurve mit $\alpha(0) = x$, die $B_\varepsilon(x)$ verläßt, dann gilt $l(\alpha) \geq \varepsilon$.

Also angenommen α verläßt $B_\varepsilon(x)$, dann schneidet α jede geodätische Sphäre $S_a(x)$ für $0 < a < \varepsilon$.
Sei nun a fix und $t_0 \in (0, b)$ der kleinste Parameter mit $\alpha(t_0) \in S_a(x)$, dann ist

$$\alpha|_{[0,t_0]} \subset cl\,(B_a(x)) \subset B_\varepsilon(x)$$

Für die radiale Geodäte γ von x nach $\alpha(t_0)$ gilt $l(\gamma) = a$ und nach Satz 3.35 folgt also

$$l(\alpha) \geq l(\alpha|_{[0,t_0]}) \geq l(\gamma) = a \quad \forall a < \varepsilon$$

bzw.

$$l(\alpha) \geq \varepsilon.$$

□

Folgerung

Sei $B_\varepsilon(x)$ eine geodätische Kugel um x und $S_\varepsilon(x)$ die geodätische Sphäre vom Radius ε. Dann gilt

1. $\forall y \in B_\varepsilon(x)$ gilt
$$d(x, y) = l(\gamma_v) = \|v\|,$$
wobei $\gamma_v : [0, 1] \to M$ die radiale Geodäte von $x \to y = \exp_x(v)$

2. Weiter ist
$$\begin{aligned} B_\varepsilon(x) &= \{y \in M |\ d(x, y) < \varepsilon\} \\ S_\varepsilon(x) &= \{y \in M |\ d(x, y) = \varepsilon\} \end{aligned}$$

Aus dem soeben bewiesenen folgt insbesondere, dass Geodäten lokal minimierende Kurven sind:

Satz 3.37. *Sei $\gamma : I \to M$ eine Geodäte in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit.*

Dann ist γ lokal minimierend, d.h. zu jedem Kurvenpunkt $\gamma(t_0)$ existiert eine Umgebung $V(\gamma(t_0))$, so dass für je zwei Kurvenpunkte $\gamma(s_0), \gamma(s_1) \in V(\gamma(t_0))$ das Geodätenstück $\gamma|_{[s_0,s_1]}$ minimierend ist:

$$d(\gamma(s_0), \gamma(s_1)) = l(\gamma|_{[s_0,s_1]})$$

Beweis:

Sei $x = \gamma(t_0)$ und $B_a(x)$ eine geodätische Kugel um x und $J(t_0) \subset I$ ein Parameterbereich um t_0, die so klein gewählt sind, dass die Kurve $\gamma|_J$ die Kugel $B_a(x)$ in einem zusammenhängenden Parameterbereich schneidet. Seien nun $x_0 = \gamma(s_0), x_1 = \gamma(s_1) \in B_a(x)$. Dann ist $\mathrm{Im}\gamma|_{[s_0,s_1]} \subset B_a(x)$ und $\gamma|_{[s_0,s_1]}$ ist eine radiale Geodäte aus $\gamma(s_0)$ in der Normalenumgebung $B_a(x)$ von $\gamma(s_0)$. Nach Satz 3.35 ist dann

$$d(x_0, x_1) = l(\gamma)_{[s_0,s_1]}$$

□

Andererseits gilt

Satz 3.38. *Sei (M^n, g) eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, $x, y \in M$. Sei $\alpha \in \Omega(x, y)$ eine* minimierende *Kurve, die proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist. Dann ist α eine Geodäte (also insbesondere auch C^∞).*

Beweis:

Sei $\alpha : I \to M$ eine minimierende Kurve, $t \in I$ und $B_\varepsilon(\alpha(t))$ eine *konvexe* geodätische Kugel um $\alpha(t)$. Dann gilt für ein Teilintervall $t \in [t_1, t_2] \subset I$ dass

$$\alpha([t_1, t_2]) \subset B_\varepsilon(\alpha(t)).$$

Da α minimierend ist, folgt

$$l(\alpha|_{[t_1,t_2]}) = d(\alpha(t_1), \alpha(t_2))$$

(Δ-Ungleichung).

Nun ist $B_\varepsilon(\alpha(t))$ eine Normalenumgebung von $\alpha(t_1)$. Nach Satz 3.35 ist $\alpha|_{[t_1,t_2]}$ eine monoton wachsende Umparametrisierung der radialen Geodäten γ von $\alpha(t_1)$ nach $\alpha(t_2)$. Sei $\tau : [t_1, t_2] \to [0, 1]$ die Umparametrisierung:

$$\alpha(t) = \gamma(\tau(t))$$

Da α proportional zur Bogenlänge parametrisiert, folgt

$$\|\alpha'(t)\| = \text{const} = \underbrace{\|\gamma'(\tau(t))\|}_{\text{konst}} \cdot |\underbrace{\tau'(t)}_{\geq 0}|$$

und damit ist

$$\tau'(t) \equiv \text{const} \geq 0$$

Somit muß τ eine *affine* Transformation sein:

$$\tau(t) = at + b$$

Aus Stetigkeitsgründen gilt dies auch in den "Ecken" von α.

Da γ eine Geodäte ist, ist die affine Umparametrisierung $\alpha|_{[t_1,t_2]}$ auch eine Geodäte. Da dies für jedes $t \in I$ gilt, ist α insgesamt eine Geodäte.

□

Satz 3.39. *Sei (M^n, g) eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit und $d : M \times M \to \mathbb{R}$ der Abstand auf (M, g). Dann ist (M, d) ein metrischer Raum. Die von der Metrik d induzierte Topologie auf M stimmt mit der MF-Topologie überein.*

Beweis:

1. *d ist Metrik auf M*:

   Es ist nur noch zu zeigen, dass gilt:

   $$d(x,y) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y:$$

   Sei $x \neq y$. Da M T_2-Raum, existiert eine geodätische Kugel $B_\varepsilon(x)$, die y *nicht* enthält. Nach Satz 3.35 ist jede Kurve $\alpha \in \Omega(x,y)$ länger als ε, da sie $B_\varepsilon(x)$ verläßt, d.h.

   $$d(x,y) \geq \varepsilon > 0.$$

2. Für die geodätischen Kugeln in (M,g) gilt

   $$B_\varepsilon(x) = \{y \in M |\ d(x,y) < \varepsilon\}$$

   Da $\exp_x$ ein Diffeomorphismus ist, sind die geodätischen Kugeln $B_\varepsilon(x)$ sowohl in der MF-Topologie von M als auch im metrischen Raum (M,d) offen, die Topologie stimmt damit überein:

- Sei $V \subset M$ offen in (M,d) $\Rightarrow \forall x \in V$ existiert Kugel $B_{\varepsilon(x)}(x) \subset V$, sodass

  $$V = \underbrace{\bigcup_{x \in V} B_{\varepsilon(x)}(x)}_{\text{offen in } M}$$

- $U \subset M$ offen in M (MF-Topologie). Nach Satz 3.34 $\Rightarrow \forall x \in U$ existiert geodätische Kugel $B_{\varepsilon(x)}(x) \subset U$, d.h.

  $$U = \underbrace{\bigcup_{x \in V} B_{\varepsilon(x)}(x)}_{\text{offen in } (M,d)}$$

□

Bevor wir nun zum *Satz von Hopf und Rinow* kommen, noch ein wichtiges Lemma:

Lemma 3.5. *Ist $x \in M$ ein Punkt für den $\exp_x$ auf T_xM definiert ist, so existiert für jeden Punkt $y \in M$ eine minimierende Geodäte von x nach y.*

Beweis:

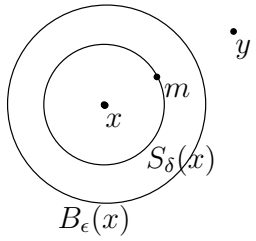
Sei $B_\varepsilon(x)$ eine geodätische Kugel um x mit $y \notin B_\varepsilon(x)$ (sonst Behauptung trivial). Sei $0 < \delta < \varepsilon$. Betrachten die geodätische Sphäre $S_\delta(x)$.

$S_\delta(x)$ ist nach Definition kompakt (da $\exp_x$ stetig). Die Metrik definiert eine stetige Funktion

$$\begin{aligned} d_yM &\to \mathbb{R} \\ z &\mapsto d(y,z) \end{aligned}$$

d_y nimmt dann auf $S_\delta(x)$ ein Minimum an. Sei $m \in S_\delta(x)$ mit $d(y,m) = \min d(y,z) \quad z \in S_\delta(x)$, dann gilt

$$d(x,m) + d(m,y) = d(x,y), \qquad (*)$$



Sei nämlich $\alpha \in [0,b] \to M$ Kurve von x nach y und sei $0 < a < b$ der kleinste Parameter mit $\alpha(a) \in S_\delta(x)$. Sei nun

$$\alpha_1 = \alpha|_{[0,a)} \quad , \quad \alpha_2 = \alpha|_{[a,b]},$$

dann ist

$$l(\alpha) = l(\alpha_1) + l(\alpha_2) \geq \delta + l(\alpha_2),$$

da α_1 Kurve *in* $B_\delta(x)$ ist, deren Länge ist nach Satz 3.35 $\geq$ (Länge der radialen Geodäten von $x \to \alpha(a)$) $= \delta = d(x,m)$. Nach Wahl von m gilt nun

$$d(m,y) \leq d(\alpha(a),y) \leq l(\alpha_2),$$

und daraus folgt

$$l(\alpha) \geq d(x,m) + d(m,y) \quad \forall \alpha \in \Omega(x,y),$$

und damit

$$d(x,y) \geq d(x,m) + d(m,x).$$

Aus Δ-Ungleichung erhält man dann die Behauptung $(*)$.

Sei nun $\gamma[0,\infty) \to M$ die *auf BL* parametrisierte radiale Geodäte ($B_\epsilon(x)$ ist eine Normalenumgebung) von x aus, auf der m liegt:

$$\exp_x^{-1}(m) = \delta v \qquad \text{für ein } v \in T_xM \text{ mit } \|v\| = 1,$$

und

$$\gamma(t) = \exp_x(tv).$$

(Nach Voraussetzung ist $\gamma(t)$ $\forall t \in [0,\infty)$ definiert.)

Behauptung: Sei $d_0 = d(x,y)$, dann gilt:

$$\gamma(d_0) = y. \qquad (**)$$

Sei nämlich

$$T := \{t \in [0,d_0] |\ t + d(\gamma(t),y) = d_0\} \qquad \text{beachte } t = l\left(\gamma|_{[0,t]}\right) = d\left(x,\gamma(t)\right)$$

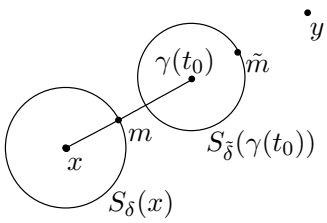
Nach $(*)$ ist $\delta \in T$. T ist abgeschlossen in $[0,d_0]$ aus Stetigkeitsgründen. Sei dann $t_0 = \max\{t \in T\} \in [0,d_0]$, dann ist

$$t_0 \geq \delta > 0$$

Wir zeigen, dass $t_0 = d_0$, damit wäre

$$d_0 + d(\gamma(d_0),y) = d_0 \Rightarrow \gamma(d_0) = y.$$

Angenommen $t_0 < d_0$:



Dann findet man eine geodätische Sphäre $S_\gamma(\gamma(t_0))$, sodass

$$\underbrace{\tilde{\delta}}_{=d(\gamma(t_0),\tilde{m})} + d(\underbrace{\tilde{\gamma}\left(\tilde{\delta}\right)}_{\tilde{m}}, y) = d(\gamma(t_0), y).$$

Dann ist

$$t_0 + \tilde{\delta} + d(\tilde{m}, y) = d(\gamma(t_0), y) + t_0 = d\,(x, y) \qquad \text{, da } t_0 \in T, \quad d(x, y) = d_0$$

und damit

$$t_0 + \tilde{\delta} + d(\tilde{m}, y) = d\,(x, y) \leq d(x, \tilde{m}) + d(\tilde{m}, y) \;\Rightarrow t_0 + \tilde{\delta} \leq d(x, \tilde{m}).$$

Aus der $\Delta-$Ungleichung folgt aber

$$d\,(x, \tilde{m}) \leq \underbrace{d\,(x, \gamma\,(t_0))}_{t_0} + \underbrace{d\,(\gamma\,(t_0)\,, \tilde{m})}_{\tilde{\delta}}$$

d.h. es tritt eine Gleichheit ein:

$$t_0 + \tilde{\delta} = d\,(x, \tilde{m})\,.$$

Wir setzen nun $\gamma_1 = \gamma|_{[0,t_0]}$ und $\tilde{\gamma}_1 = \tilde{\gamma}|_{[0,\tilde{\delta}]}$. Dann ist

$$t_0 = l\,(\gamma_1) \quad \text{, und} \quad \tilde{\delta} = l\,(\tilde{\gamma}_1)\,.$$

Die stückweise C^∞-Kurve $\gamma_1 * \tilde{\gamma}_1$ von x nach $\tilde{m}$ ist nach bogenlänge parametrisiert, hat die Länge $t_0 + \tilde{\delta}$ und es gilt

$$l(\gamma_1 * \tilde{\gamma}_1) = d(x, \tilde{m}),$$

sie ist somit *minimierend* ! Satz 3.38 liefert nun, das $\gamma_1 * \gamma_1'$ sogar eine Geodäte ist, also insbesondere glatt, d.h. es liegt in $\gamma(t_0)$ keine "Ecke" vor, und damit ist zwangsläufig

$$\gamma(t_0 + \tilde{\delta}) = \tilde{m}.$$

Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Maximalität von $t_0 \neq d_0$, da

$$\begin{array}{rcl} d\,(\gamma\,(t_0)\,, \tilde{m}) + d\,(\tilde{m}, y) & \overset{(*)}{=} & d\,(\gamma\,(t_0)\,, y) \\ \Rightarrow\; t_0 + d\,(\gamma\,(t_0)\,, \tilde{m}) + d\,(\tilde{m}, y) & \overset{t_0 \in T}{=} & d_0 \\ \Rightarrow\; t_0 + \tilde{\delta} + d(\gamma(t_0 + \tilde{\delta}), y) & = & d_0 \end{array}$$

Und damit wäre $t_0 < t_0 + \delta' \in T$. Widerspruch! D.h. $t_0 = d_0$.

□

Satz 3.40. [Theorem von Hopf und Rinow]

Sei (M^n, g) zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. *(M^n, g) ist geodätisch vollständig.*
2. *Der metrische Raum (M, d) ist vollständig.*
3. *Jede abgeschlossene beschränkte Teilmenge von M ist kompakt.*
4. *Es existiert ein Punkt $x \in M$ so dass $\exp_x$ auf ganz T_xM definiert ist.*

Ist (M^n, g) vollständig, so *existiert* für je 2 beliebige Punkte $x, y \in M$ eine minimierende Geodäte γ von x nach y: $d(x, y) = l(\gamma)$.

Bemerkung: Es folgt

1. Jede *kompakte* Riemannsche Mannigfaltgkeit ist vollständig.
2. In einer vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit kann man Abstände berechnen, in dem man *alle* Geodäten von $x \to y$ bestimmt und deren Länge berechnet.

Beweis:

- 4.$\to$ 3. *Behauptung:* Existiert ein $x \in M$, sodass $\exp_x$ auf ganz T_xM definiert ist, und sei $A \subset M$ abgeschlossen und beschränkt. Dann ist A ist kompakt.

  Aus Lemma 3.5 folgt: Ist $y \in A$, so existiert eine minimierende Geodäte $\gamma_y : [0, 1] \to M$ von x nach y:
  $$d(x, y) = l(\gamma_y) = \|\gamma_y'(0)\|.$$
  Da A beschränkt ist $\Rightarrow$ es existiert ein konstantes $C > 0$, so dass
  $$d(x, y) \leq C \quad \forall y \in A \quad (A \in \overline{K_C(x)}).$$
  Und so ist
  $$\gamma_y'(0) \in \{v \in T_xM |\ \|v\| \leq C\} := \tilde{K}_c \subset T_xM$$
  $\tilde{K}_c$ ist kompakt, $\exp_x : T_xM \to M$ stetig, und damit ist $\exp_x(\tilde{K}_c)$ kompakt in M und enthält A. Jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ist jedoch kompakt.

- 3. $\to$ 2. *Behauptung:* Jede abgeschlossene und beschränkte Teilmenge ist kompakt. Dann ist (M, d) vollständig.

  Sei $\{x_n\}$ eine CF in (M, d), dann ist $A = \{x_n\}$eine beschränkte Menge. $cl\,(A)$ ist somit beschränkt und abgeschlossen und nach Voraussetzung kompakt bzw. folgenkompakt. D.h. jede Folge in $cl\,(A)$ hat konvexe Teilfolge. Da $\{x_n\}$ eine CF ist, die eine konvergente Teilfolge enthält, ist $\{x_n\}$ konvergent.

- 2. $\to$ 1. *Behauptung:* Sei (M, d) vollständig. Dann ist *jede* Geodäte ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

  Sei $\gamma : (a, b) \to M$ eine auf BL parametrisierte maximale Geodäte. Dann läßt sich γ über b hinaus als Geodäte fortsetzen:

  Sei $t_n \to b < \infty$. Dann ist $\{\gamma(t_n)\}$eine CF in M, da

  $$d(\gamma(t_n), \gamma(t_m)) \leq l(\gamma|_{[t_n,t_m]}) = |t_n - t_m| \quad (n, m \geq n_0).$$

  Nach Vor. konvergiert nun$\{\gamma(t_n)\}$ in M gegen ein $q \in M$. Ist $s_n \to b$ eine andere Folge, dann gilt ebenfalls

  $$d(\gamma(t_n), \gamma(s_n)) \leq l(\gamma|_{[s_n,t_n]}) = |t_n - s_n| \to 0$$

  D.h.$\{\gamma(s_n)\}$ konvergiert ebenfalls gegen $q \in M$. Dann definiert

  $$\tilde{\gamma}(b) := \lim_{t_n \to b} \gamma(t_n) = q$$

  stetige Fortsetzung von γ n den Punkt b. Nach Folgerung aus Satz 3.33 ist γ auf $(a, b + \varepsilon)$ mit $\varepsilon > 0$ *als Geodäte* fortsetzbar . Damit γ ist nicht maximal und $(a, b) = \mathbb{R}$.

- 1. $\to$ 4. *Behauptung:* Ist (M, g) geodätisch vollständig, dann ex. $x \in M$, sodass $\exp_x$ auf ganz T_xM definiert ist.

  Dies folgt trivialerweise aus der Definition.

$\square$

Die Aussagen des Satzes von Hopf und Rinow gelten *nicht* in pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeiten.

1. Beispiel einer *kompakten* pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit, die *nicht* geodätisch vollständig ist.

   Wir betrachten den $\mathbb{R}^2$ mit der Lorentz-Metrik

   $$g_{(x,y)} = (\cos^4 y - 1)dx^2 - 2dxdy$$

   Diese Metrik ist 2π-periodisch, definiert also eine Lorentz-Metrik auf dem *kompakten* Torus $T^2 = \mathbb{R}^2/2\pi \cdot \mathbb{Z} \times 2\pi \cdot \mathbb{Z}$. (T^2, g) ist *nicht* geodätisch vollständig, da sich die Geodäte

   $$\begin{aligned} \gamma : (0, \infty) &\longrightarrow T^2 = \pi(\mathbb{R}^2) \\ t &\longmapsto \pi(\frac{1}{t} - t, \arctan(t)) \end{aligned}$$

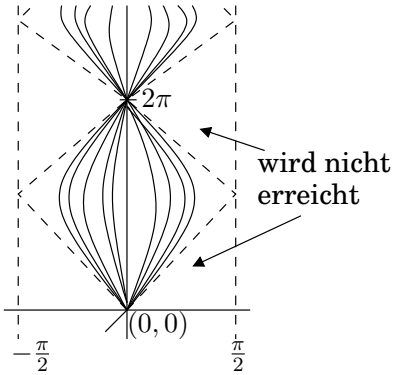
   nicht über 0 nach links fortsetzen läßt.

2. Beispiel einer geodätisch *vollständigen* pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit, in der es Punkte gibt, die man *nicht* durch Geodäten verbinden kann: <u>Anti-De Sitter-Raum</u>

   $$M^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\}$$

   $$g_{(x,y)} = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot (-dx^2 + dy^2)$$

   Man kann zeigen, dass die Geodäten durch den Punkt $(0, 0)$ folgenden Verlauf haben und dass <u>alle</u> maximalen Geodäten auf $\mathbb{R}$ definiert sind.



3. In pseudo-Riemannschen Räumen muss man den kausalen Charakter von Geodäten unterscheiden:

   $\mathbb{R}^2$ mit Koordinaten (x, y). Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ Funktion mit $f \equiv 1$ auf $\{(x, y)|\ |x| \geq 1\}$, f symmetrisch der y-Achse, $\int\limits_g^\infty f(0, y)dy < \infty$. Dann ist die Lorentzmetrik

   $$g = f^2(dx^2 - dy^2)$$

   raum- und lichtartig geodätisch vollständig, aber zeitartig geodätisch unvollständig. Insbesondere geht die Vollständigkeit von $(dx^2 - dy^2)$ bei konformer Änderung der Metrik verloren[16].

[16] Siehe O'Neill: Semi-Riemannsche Geometrie, Seite 154, Beem, Ehrlich: Global Lorentzian Geometry

3.9 Jacobifelder, konjugierte Punkte und Schnittort

Sei (M^n, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, $x \in M$ und $\exp_x : T_xM \to M$ die Exponentialabbildung. Wir wissen bereits, dass für das Differential von $\exp_x$ im Nullvektor $o \in T_xM$

$$(d\exp_x)_o = \mathrm{id}_{T_xM}$$

gilt. Insbesondere ist $\exp_x$ ein lokaler Diffeomorphismus um $o \in T_xM$.

Wir wollen nun wissen, wie gross der Diffeomorphiebereich von $\exp_x$ ist. Dazu müssen folgende Fragen beantwortet werden:

1. Wie kann man
$$(d\exp_x)_v : T_v(T_xM) = T_xM \to T_{\exp_x(v)}M$$
bestimmen für $v \neq o$? Für welche $v \in T_xM$ ist diese Abbildung ein Isomorphismus?
2. Für welchen Bereich $U_x \subset T_xM$ ist $\exp_x : U_x \subset T_xM \to M$ injektiv?
3. Wir suchen eine Menge $\mathrm{Cut}(x) \subset M$, so dass
$$\exp_x : U_x \subset T_xM \to M \backslash \mathrm{Cut}(x)$$
ein Diffeomorphismus ist.

Als technisches Hilfsmittel benutzen wir *Jacobifelder*.

Definition. *Sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\gamma : [0, a] \to M$ eine Geodäte in (M, g). Ein Vektorfeld $Y \in \mathfrak{X}(M)$ entlang γ heißt* <u>*Jacobifeld*</u>*, falls*

$$Y'' + \mathcal{R}(Y, \gamma')\gamma' \equiv 0$$

auf $[0, a]$, wobei $Y' = \frac{\nabla Y}{dt}, Y'' = \frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla}{dt}Y$ für den Levi-Civita-Zusammenhang ∇.

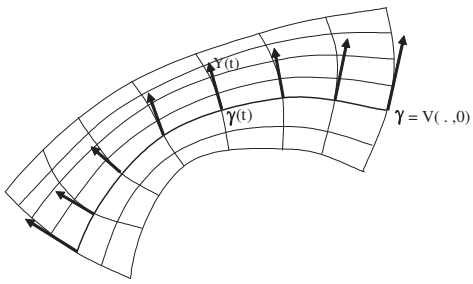
Beispiel 74. EINFACHE JACOBIFELDER

$Y = \gamma'$ und $\hat{Y} \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$ mit $\hat{Y}(t) := t\gamma'(t)$ sind Jacobifelder entlang γ.

Jacobifelder treten bei Variation von Geodäten auf:

Definition. *Sei $\gamma : [0, a] \to M$ eine Geodäte. Eine* Variation *von γ ist eine parametrisierte Fläche $V : [0, a] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit*

$$V(t, 0) = \gamma(t)$$



Das Vektorfeld $Y \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$ mit $Y(t) := \frac{\partial V}{\partial s}(t,0)$ heißt <u>*Variationsvektorfeld*</u> *von V.*

Satz 3.41. *Ist V eine Variation der Geodäten $\gamma : [0,a] \to M$, die nur aus Geodäten besteht, d.h. $V(\cdot,s) : [0,a] \to M$ ist eine Geodäte für jedes $s \in (-\varepsilon,\varepsilon)$, so ist das Variationsvektorfeld $Y = \frac{\partial V}{\partial s}(\cdot,0)$ ein Jacobifeld entlang γ.*

Beweis: Nach dem Symmetrielemma gilt

$$\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial V}{\partial s} = \frac{\nabla}{ds}\frac{\partial V}{\partial t} \quad \text{(da } \nabla \text{ metrisch).}$$

Da ∇ torsionsfrei ist, folgt $[\frac{\partial V}{\partial s}, \frac{\partial V}{\partial t}] = 0$. Es ist $\gamma'(t) = \frac{\partial V}{\partial t}(t,0) \quad , \quad Y(t) = \frac{\partial V}{\partial s}(t,0)$.

Daraus folgt im Punkt $(t,0)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(Y,\gamma')\gamma' &= (\nabla_{\frac{\partial V}{\partial s}}\nabla_{\frac{\partial V}{\partial t}} - \nabla_{\frac{\partial V}{\partial t}}\nabla_{\frac{\partial V}{\partial s}} - \nabla_{[\frac{\partial V}{\partial s},\frac{\partial V}{\partial t}]})\frac{\partial V}{\partial t} \\ &= (\nabla_{\frac{\partial V}{\partial s}}\nabla_{\frac{\partial V}{\partial t}} - \nabla_{\frac{\partial V}{\partial t}}\nabla_{\frac{\partial V}{\partial s}})\frac{\partial V}{\partial t}\end{aligned}$$

Da V eine Variation aus Geodäten ist, ist $t \to V(t,s)$ eine Geodäte für jedes $s \in (-\varepsilon,\varepsilon)$, d.h.

$$\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial V}{\partial t}(\cdot,s) = 0 \quad \forall s \in (-\varepsilon,\varepsilon)$$

Unter Benutzung des Symmetrielemmas folgt dann

$$\mathcal{R}(Y,\gamma')\gamma' = -\nabla_{\frac{\partial V}{\partial t}}\nabla_{\frac{\partial V}{\partial s}}\frac{\partial V}{\partial t} = -\nabla_{\frac{\partial V}{\partial t}}\nabla_{\frac{\partial V}{\partial t}}\frac{\partial V}{\partial s} = -\frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla}{dt}Y = -Y''.$$

□

Beispiel 75. JACOBI- UND KILLINGFELDER

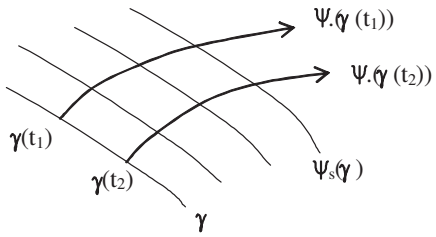
Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein Killingfeld und $\gamma : [0,a] \to M$ eine Geodäte. Dann ist $X(t) := X(\gamma(t))$ ein Jacobifeld entlang γ.

Beweis: Sei $\{\psi_s\}$ der lokale Fluß von X. Da X ein Killingfeld ist, ist

$$\psi_s : U \subset M \to \psi_s(U) \subset M$$

eine Isometrie. Wir betrachten nun die Variation

$$\begin{aligned}V : [0,a] \times (-\varepsilon,\varepsilon) &\to M \\ V(t,s) &= \psi_s(\gamma(t))\end{aligned}$$



V ist eine Variation durch Geodäten, folglich ist das Variationsvektorfeld $\frac{\partial V}{\partial s}(t,0)$ ein Jacobifeld. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial s}(t_0,0) &= \frac{d}{ds}(\psi_s(\gamma(t_0)))|_{s=0} \\ &= X(\gamma(t_0)) = X(t_0),\end{aligned}$$

denn $s \to \psi_s(\gamma(t_0))$ ist die Integralkurve von X durch den Punkt $\gamma(t_0)$.

□

Satz 3.42. *Sei $\gamma : [0,l] \to M$ eine Geodäte, $u, w \in T_xM, \gamma(0) = x$ und $\gamma'(0) = v$. Dann gilt*

1. *Es existiert genau ein Jacobifeld $Y \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$, so dass $Y(0) = u, Y'(0) = w$.*
2. *Sei $Y \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$ das Jacobifeld entlang γ und $Y(0) = 0, Y'(0) = w \in T_xM$. Dann gilt*
$$Y(t) = t \cdot (d\exp_x)_{tv}(w) \in T_{\gamma(t)}M$$

Beweis:

1. Die Jacobi-Gleichung $Y'' + \mathcal{R}(Y,\gamma')\gamma' \equiv 0$ ist eine Differentialgleichung 2. Ordnung. Die Lösung ist deshalb eindeutig bestimmt durch die Anfangsbedingungen $Y(0)$ und $Y'(0)$.
2. Wir betrachten die folgende geodätische Variation von γ:
$$V(t,s) := \exp_x(t(v+sw)).$$
Dann gilt
$$\begin{aligned}V(t,0) &= \exp_x(tv) = \gamma_v(t) \\ V(t,s_0) &= \exp_x(t(v+s_0w)) = \gamma_{v+s_0w}(t)\end{aligned}$$
und aus der Kettenregel folgt
$$Y(t) = \frac{\partial V}{\partial s}(t,0) = (d\exp_x)_{tv}(tw).$$
Aus Satz 3.41 weiss man, dass Y ein Jacobifeld entlang γ ist. Ausserdem gilt
$$\begin{aligned}Y(0) &= 0 \\ Y'(0) &= \frac{\nabla}{dt}\frac{\partial V}{\partial s}(0,0) = \frac{\nabla}{ds}\frac{\partial V}{\partial t}(0,0)\end{aligned}$$
$\frac{\partial V}{\partial t}(\cdot, s_0)$ ist das tangentiale Vektorfeld an die Geodäte $V(t,s_0) = \gamma_{v+s_0w}(t)$, d.h. es ist
$\frac{\partial V}{\partial t}(0,s_0) = \gamma'_{v+s_0w}(0) = v + s_0w$. Also gilt:
$$Y'(0) = \frac{d}{ds}(v+sw)|_{s=0} = w.$$
Damit ist $Y(t) := (d\exp_x)_{tv}(tw)$ das eindeutig bestimmte Jacobifeld mit $Y(0) = 0, Y'(0) = w$.

□

Beispiel 76. JACOBIFELDER AUF MF KONST. SCHNITTKRÜMMUNG

Sei $M^n = M^n(K_0)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung K_0 und $\gamma : [0, l] \to M^n(K_0)$ eine auf Bogenlänge parametrisierte Geodäte mit $\gamma(0) = x, \gamma'(0) = v$. Seien $u, w \in T_xM^n$ gegeben und bezeichne $U, W \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$ die Parallelverschiebung von $u - \langle u, v\rangle v$ bzw. $w - \langle w, v\rangle v$ entlang γ. Dann ist das Jacobifeld $Y \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$ mit $Y(0) = u$ und $Y'(0) = w$ gegeben durch

$$Y(t) = \hat{Y}(t) + \langle w, u\rangle t \cdot \gamma' + \langle v, u\rangle \gamma'$$

wobei

$$\hat{Y}(t) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{K_0}} \Big(\sin(\sqrt{K_0}t) \cdot W(t) + \cos(\sqrt{K_0} \cdot t) \cdot U(t)\Big)\right.$$

Zum Beweis benutzt man

$$\mathcal{R}(X, Y, T, Z) = K_0\Big(g(X, Z)g(Y, T) - g(X, T)g(Y, Z)\Big)$$

und berechnet $Y'' + \mathcal{R}(Y, \gamma')\gamma' = 0$.

Satz 3.43. *Bezeichne* $\mathrm{Jac}_\gamma M$ *den Vektorraum der Jacobifelder entlang* γ. *Dann gilt:*

1. $\mathrm{Jac}_\gamma M$ *ist ein* $2n$*-dimensionaler Vektorraum.*
2. $\{Y \in \mathrm{Jac}_\gamma M |\ Y \perp \gamma'\}$ *ist ein* $(2n-2)$*-dimensionaler Vektorraum.*
3. $\{Y \in \mathrm{Jac}_\gamma M |\ Y(0) = 0, Y \perp \gamma'\}$ *ist ein* $(n-1)$*-dimensionaler Vektorraum.*

Insbesondere gilt für $Y \in \mathrm{Jac}_\gamma M$

$$\langle Y(t), \gamma'(t)\rangle = \alpha t + \beta$$

(wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *die Metrik bezeichnet).*

Beweis: Sei $Y \in \mathrm{Jac}_\gamma M$. Wir zeigen, dass die Funktion $t \to \langle Y(t), \gamma'(t)\rangle$ linear ist:

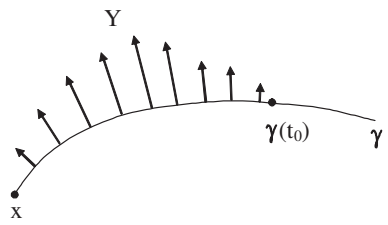
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle Y, \gamma'\rangle &= \langle \frac{\nabla}{dt} Y, \gamma'\rangle + \langle Y, \frac{\nabla}{dt}\gamma'\rangle = \langle Y', \gamma'\rangle \\
\frac{d^2}{dt^2}\langle Y, \gamma'\rangle &= \langle Y'', \gamma'\rangle + \langle Y', \frac{\nabla}{dt}\gamma'\rangle \\
&= -\langle \mathcal{R}(Y, \gamma')\gamma', \gamma'\rangle = \mathcal{R}(\gamma', Y, \gamma', \gamma') = 0\ .
\end{aligned}$$

Folglich gilt $\langle Y(t), \gamma'(t)\rangle = \alpha t + \beta$ mit $\beta = \langle Y(0), \gamma'(0)\rangle$ und $\alpha = \langle Y'(0), \gamma'(0)\rangle$.

Die Bedingung $\langle Y, \gamma'\rangle \equiv 0$ liefert $\alpha = \beta = 0$, also einen Unterraum der Codimension 2 im $2n$-dimensionalen Raum aller Anfangsbedingungen $(Y(0), Y'(0))$. Ist zusätzlich $Y(0) = 0$, so ist bereits $\beta = 0$ und man hat einen Unterraum der Kodimension 1 im n-dimensionalen Raum der Anfangsbedingungen $Y'(0)$.

□

Definition. *Sei $x \in M, \gamma : [0,a] \to M$ eine Geodäte mit $\gamma(0) = x$ und $t_0 \in (0,a]$. Der Punkt $\gamma(t_0)$ heißt <u>konjugiert</u> zu x entlang γ, falls ein Jacobifeld $Y \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$ existiert mit $Y \not\equiv 0$ und $Y(0) = Y(t_0) = 0$.*



Bemerkung: Für dieses Jacobifeld gilt $Y \perp \gamma'$, denn nach Satz 3.43 ist $\langle Y(t), \gamma'(t)\rangle = \alpha t$ und somit $\alpha = 0$ wegen $Y(t_0) = 0$.

Satz 3.44. *Sei $x \in M$ und $v \in T_xM$. Das Differential der Exponentialabbildung*

$$(d\exp_x)_{tv} : T_xM \to T_{\gamma_{v(t)}}M$$

ist genau dann ausgeartet, wenn die Punkte x und $\gamma_v(t)$ zueinander konjugiert entlang der radialen Geodäten γ_v sind.

Beweis: Wir wissen, dass das Vektorfeld $Y_w(t) = t(d\exp_x)_{tv}(w)$ das Jacobifeld entlang γ_r mit $Y_w(0) = 0$ und $Y_w'(0) = w$ ist. Folglich gilt:

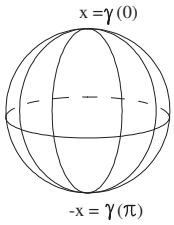
$$\begin{aligned}(d\exp_x)_{tv} \text{ ist ausgeartet } &\Leftrightarrow \exists\, w \in T_xM,\ w \neq 0 : (d\exp_x)_{tv}(w) = 0\\ &\Leftrightarrow Y_w(t) = 0,\ Y_w(0) = 0\\ &\Leftrightarrow x \text{ und } \gamma_v(t) \text{ sind konjugiert entlang } \gamma_v\end{aligned}$$

□

Beispiel 77. KONJUGIERTE PUNKTE VON RIEMANNSCHEN MF

1. Auf den Riemannschen Mannigfaltigkeiten $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^n})$ existieren *keine* konjugierten Punkte:
   Für $\mathbb{R}^n$ ist die Schnittkrümmung $K_0 \equiv 0$. Das Jacobifeld $Y \in \mathfrak{X}_{\gamma_v}(\mathbb{R}^n)$ mit $Y(0) = 0$ und $Y'(0) = w \perp v$ ist gegeben durch $Y(t) = tW(t)$, wobei $W(t)$ die Parallelverschiebung von $w \neq 0$ entlang γ_v ist. Folglich ist $Y(t) = t \cdot W(t) \neq 0$ für alle $t > 0$.
2. Auf $(\mathbb{H}^n, g_{\mathbb{H}^n} = \frac{1}{x_n^2}(dx_1^2 + \ldots + dx_n^2))$ existieren keine konjugierten Punkte:
   $\mathbb{H}^n$ hat konstante Schnittkrümmung $K_0 = -1$. Das Jacobifeld $Y \in \mathfrak{X}_{\gamma_v}(\mathbb{H}^n)$ mit $Y(0) = 0$ und $Y'(0) = w \perp v$ ist gegeben durch $Y(t) = \sinh(t) \cdot W(t) \neq 0$ für $t > 0$.

3. Auf der Riemannschen Sphäre S^n sind zwei Punkte x und y genau dann konjugiert, wenn $y = -x$ gilt:
   S^n hat konstante Schnittkrümmung $K_0 = 1$. Das Jacobifeld $Y \in \mathfrak{X}_{\gamma_v}(S^n)$ mit $Y(0) = 0$ und $Y'(0) = w \perp v$ ist gegeben durch $Y(t) = \sin t \cdot W(t)$, wobei $W(t)$ die Parallelverschiebung von $w \in T_xM$ entlang γ_v ist. Folglich gilt $Y(t) = 0$ genau dann, wenn $t \in \pi \cdot \mathbb{Z}$. D.h. die Punkte $x, -x \in S^n$ sind konjugiert entlang jeder Geodäten.



Als nächstes werden wir zeigen, dass die Schnittkrümmung eine Aussage über den Verlauf von Geodäten macht. Dazu benutzen wir den folgenden Satz über Jacobifelder:

Satz 3.45. *Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\gamma : [0, a] \to M$ eine Geodäte mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma'(0) = v$. Sei weiterhin $w \in T_xM$ ein Vektor mit $\langle v, v\rangle = \langle w, w\rangle = 1$ und $\langle v, w\rangle = 0$. Bezeichne Y das Jacobifeld entlang γ mit $Y(0) = 0$ und $Y'(0) = w$. Dann gilt*

$$\|Y(t)\| = t - \frac{1}{6}K_{\mathrm{span}(v,w)}(x)t^3 + o(t^3)$$

Beweis: Wir betrachten die Taylorentwicklung der Funktion $h(t) = \langle Y(t), Y(t)\rangle$ im Punkt $t = 0$:

$$h(t) = h(0) + h'(0)t + \frac{1}{2}h''(0)t^2 + \frac{1}{6}h'''(0)t^3 + \frac{1}{4!}h^{(4)}(0)t^4 + o(t^4)$$

Dabei gilt:

$$\begin{aligned}
h(0) &= \langle Y(0), Y(0)\rangle = 0 \\
h'(0) &= 2\langle Y'(0), Y(0)\rangle = 0 \\
h''(0) &= 2\langle Y''(0), Y(0)\rangle + 2\langle Y'(0), Y'(0)\rangle = 2\langle Y'(0), Y'(0)\rangle = 2\langle w, w\rangle = 2 \\
h'''(0) &= 2\langle Y'''(0), Y(0)\rangle + 6\langle Y''(0), Y'(0)\rangle = -6\langle \mathcal{R}(Y(0), \gamma'(0))\gamma'(0), Y'(0)\rangle = 0 \\
h^{(4)}(0) &= 8\langle Y'''(0), Y'(0)\rangle + 6\langle Y''(0), Y''(0)\rangle \ .
\end{aligned}$$

Da $Y''(t) = -\mathcal{R}(Y(t), \gamma'(t))\gamma'(t)$ folgt

$$Y''' = -\nabla_{\gamma'}(\mathcal{R}(Y, \gamma')\gamma') = -(\nabla_{\gamma'}, \mathcal{R})(Y, \gamma')\gamma' - \mathcal{R}(Y', \gamma')\gamma' \ .$$

Folglich gilt in $t = 0$:

$$Y'''(0) = -\mathcal{R}(w, v)v \ .$$

Damit folgt $h^{(4)}(0) = -8K_{\mathrm{span}(v,w)}(x)$. Wir erhalten

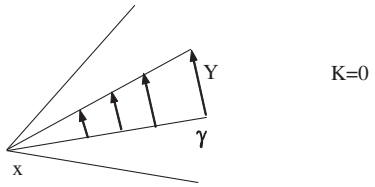
$$\|Y(t)\|^2 = t^2 - \frac{1}{3}K_{\mathrm{span}(v,w)}(x)t^4 + o(t^4)$$

Für die Wurzel erhält man durch Multiplizieren und Koeffizientenvergleich

$$\|Y(t)\| = t - \frac{1}{6}K_{\mathrm{span}(v,w)}(x)t^3 + o(t^3)$$

□

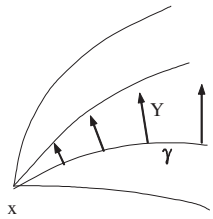
Bemerkung: Da für den flachen Raum $\mathcal{R} \equiv 0$ gilt, folgt aus dem Beweis des vorigen Satzes in diesem Fall $h^{(k)}(0) = 0\ \forall k > 2$. Also $\|Y(t)\| = t$.



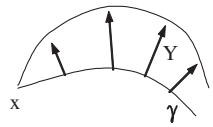
Für die gekrümmten Fälle gilt:

$$\|Y(t)\| = t - \underbrace{\frac{1}{6}K_{\mathrm{span}(v,w)}(x)t^3}_{\text{Abweichung vom flachen Verhalten}} + o(t^3)$$

1. $a = K_{\mathrm{span}(v,w)}(x) < 0$. Dann ist $\|Y(t)\| \cong t + |a|t^3$ monoton wachsend. In diesem Fall laufen die Geodäten auseinander.



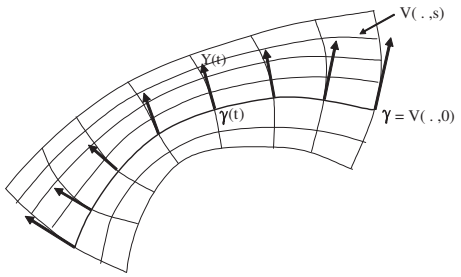
2. $a = K_{\mathrm{span}(v,w)} > 0$. Dann hat $\|Y(t)\| \cong t - |a|t^3$ ein lokales Maximum. In diesem Fall laufen die Geodäten zusammen.



Als nächstes wollen wir zeigen, dass eine Geodäte in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit, auf der ein konjugierter Punkt liegt, nicht minimierend sein kann.

Satz 3.46. *Sei (M^n, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\gamma : [0, l] \to M$ eine auf Bogenlänge parametrisierte Geodäte. Sei $V : [0, l] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ eine Variation von γ mit dem Variationsvektorfeld $Y = \frac{\partial V}{\partial s}(\cdot, 0)$. Bezeichne $L : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ die Länge der variierenden Kurven*

$$L(s) := l(V(\cdot, s)).$$



Dann gilt für die 1. und 2. Variation von L:

$$\begin{aligned} L'(0) &= \langle Y(l), \gamma'(l)\rangle - \langle Y(0), \gamma'(0)\rangle \\ L''(0) &= \int_0^l \Big(\|\tilde{Y}'(t)\|^2 - \mathcal{R}(\tilde{Y}, \gamma', \gamma', \tilde{Y})\Big)dt + \Big\langle \frac{\nabla}{ds}\frac{\partial V}{\partial s}(l, 0), \gamma'(l)\Big\rangle - \Big\langle \frac{\nabla}{ds}\frac{\partial V}{\partial s}(0, 0), \gamma'(0)\Big\rangle \ , \end{aligned}$$

wobei $\tilde{Y}$ die Normalprojektion des Variationsvektorfeldes Y ist:

$$\tilde{Y} = Y - \langle Y, \gamma'\rangle\gamma'.$$

(Sind die Randkurven $s \to V(0, s)$ und $s \to V(l, s)$ Geodäten, so fallen die letzten beiden Summanden von $L''(0)$ weg.)

Beweis:

1. Wegen

$$L(s) = \int_0^l \Big\|\frac{\partial V}{\partial t}(t, s)\Big\| dt = \int_0^l \Big\langle \frac{\partial V}{\partial t}(t, s), \frac{\partial V}{\partial t}(t, s)\Big\rangle^{\frac{1}{2}} dt$$

folgt

$$L'(s) = \int_0^l \frac{1}{\|\frac{\partial V}{\partial t}(t, s)\|}\Big\langle \frac{\nabla}{ds}\frac{\partial V}{\partial t}(t, s), \frac{\partial V}{\partial t}(t, s)\Big\rangle dt \ .$$

Wir wissen:

$$\Big\|\frac{\partial V}{\partial t}(t, 0)\Big\| = \|\gamma'(t)\| \equiv 1$$

und

$$\frac{\nabla}{ds}\frac{\nabla V}{dt}(t, 0) = \frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla V}{ds}(t, 0) = Y'(t) \ .$$

Daraus folgt

$$L'(0) = \int_0^l \langle Y'(t), \gamma'(t)\rangle dt = \int_0^l \frac{d}{dt}\langle Y(t), \gamma'(t)\rangle dt = \langle Y(l), \gamma'(l)\rangle - \langle Y(0), \gamma'(0)\rangle.$$

2. Wir leiten die Formel für $L'(s)$ nochmals ab und erhalten in $s = 0$

$$\begin{aligned}
L''(0) &= \int_0^l \Big[\frac{1}{\|\gamma'(t)\|}\Big\{\Big\langle \frac{\nabla}{ds}\frac{\nabla}{ds}\frac{\partial V}{\partial t}(t,0), \gamma'(t)\Big\rangle + \Big\langle \frac{\nabla}{ds}\frac{\partial V}{\partial t}(t,0), \frac{\nabla}{ds}\frac{\partial V}{\partial t}(t,0)\Big\rangle\Big\} \\
&\quad - \frac{1}{\|\frac{\partial V}{\partial t}(t,0)\|^3}\Big\langle \frac{\nabla}{ds}\frac{\partial V}{ds}(t,0), \gamma'(t)\Big\rangle^2\Big]dt \\
&= \int_0^l \Big\{\Big\langle \frac{\nabla}{ds}\frac{\nabla}{dt}\frac{\partial V}{\partial s}(t,0), \gamma'(t)\Big\rangle + \langle Y'(t), Y'(t)\rangle - \langle Y'(t), \gamma'(t)\rangle^2\Big\}dt \\
&= \int_0^l \Big\{\Big\langle \mathcal{R}(\frac{\partial V}{\partial s}, \frac{\partial V}{\partial t})\frac{\partial V}{\partial s}, \gamma'(t)\Big\rangle|_{s=0} + \Big\langle \frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla}{ds}\frac{\partial V}{\partial s}(t,s), \gamma'(t)\Big\rangle|_{s=0} + \langle Y'(t), Y'(t)\rangle \\
&\quad - \langle Y'(t), \gamma'(t)\rangle^2\}dt \\
&= \int_0^l \Big(\mathcal{R}(Y, \gamma', Y, \gamma') + \frac{d}{dt}\Big\langle \frac{\nabla}{ds}\frac{\partial V}{\partial s}(t,0), \gamma'(t)\Big\rangle + \langle \tilde{Y}(t), \tilde{Y}'(t)\Big)dt\ .
\end{aligned}$$

Die letzte Identität folgt wegen

$$\begin{aligned}
\tilde{Y}(t) &= Y(t) - \langle Y(t), \gamma'(t)\rangle\gamma'(t), \\
\tilde{Y}'(t) &= Y'(t) - \langle Y'(t), \gamma'(t)\rangle\gamma'(t)
\end{aligned}$$

und somit

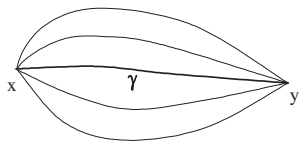
$$\langle \tilde{Y}'(t), \tilde{Y}'(t)\rangle = \langle Y'(t), Y'(t)\rangle - \langle Y'(t), \gamma'(t)\rangle^2.$$

□

Bemerkungen:

1. Analoge Formeln gelten für stückweis glatte Variationen (werden entlang der Stücke summiert)

2. Ist V eine Variation mit festem Endpunkt und festem Anfangspunkt (= eigentliche Variation)



so gilt für das Variationsvektorfeld $Y(0) = Y(l) = 0$ und folglich

$$\begin{aligned}
L'(0) &= 0 \\
L''(0) &= \int_0^l (\|\tilde{Y}'(t)\| - \mathcal{R}(\tilde{Y}, \gamma', \gamma', \tilde{Y}))dt\ .
\end{aligned}$$

3. Sei $\gamma : [0,l] \to M$ eine auf Bogenlänge parametrisierte Geodäte und $X, Y \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$ Vektorfelder entlang γ mit $X(0) = X(l) = 0$ und $Y(0) = Y(l) = 0$.
   Dann heißt die symmetrische Bilinearform

$$I_\gamma(X,Y) := -\int_0^l \langle X, Y'' + \mathcal{R}(Y,\gamma')\gamma' \rangle dt$$

   die <u>Indexform von γ</u>.

Da für Vektorfelder $Y \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$ gilt

$$\langle Y, Y'' \rangle = \frac{d}{dt}(\langle Y, Y' \rangle - \langle Y', Y' \rangle) \ ,$$

erhält man folgende Beziehung zwischen der Indexform von γ und der 2. Variation der Bogenlänge:

Satz 3.47. *Sei $\gamma : [0,l] \to M$ eine auf Bogenlänge parametrisierte Geodäte und $Y \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$ ein Vektorfeld mit $Y(0) = Y(l) = 0$ und $Y \perp \gamma'$. Dann definiert Y die eigentliche Variation $V : [0,l] \times (\varepsilon, \varepsilon) \to M$*

$$V(t,s) := \exp_{\gamma(t)}(sY(t))$$

mit dem Variationsvektorfeld Y. Für die Indexform gilt

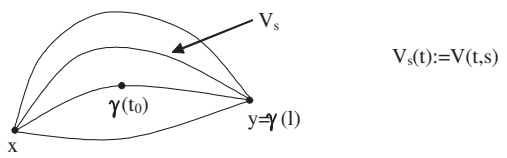
$$\begin{aligned} I_\gamma(Y,Y) &= \int_0^l \Big(\|Y'\|^2 - \mathcal{R}(Y,\gamma',\gamma',Y) \Big) dt \\ &= L''(0) \end{aligned}$$

wobei $L(s) = l(V(\cdot, s))$.

Wir erhalten nun die folgende Aussage über die Länge von Geodäten, auf denen ein konjugierter Punkt liegt:

Satz 3.48. *Sei $\gamma : [0,l] \to M$ eine auf Bogenlänge parametrisierte Geodäte und $\gamma(0) = x$. Sei $t_0 \in (0,l)$ und $\gamma(t_0)$ konjugiert zu $\gamma(0) = x$ entlang γ. Dann existiert eine eigentliche Variation V von γ so dass*

$$L(V_s) < L(\gamma) \quad \forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon) \backslash \{0\}$$



Insbesondere ist γ nicht minimierend zwischen x und y.

Beweis: $\gamma(t_0)$ ist konjugiert zu x entlang γ. Folglich existiert ein Jacobifeld $Y \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$ mit $Y(0) = 0$ und $Y(t_0) = 0$. Nach Satz 3.43 ist dann $Y \perp \gamma'$ und $Y'(t_0) \neq 0$. Bezeichne nun $Z_0 \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$ die Parallelverschiebung von $-Y'(t_0)$ entlang γ und $\theta \in C^\infty([0,l])$ eine Funktion mit $\theta(0) = \theta(l) = 0$, $\theta(t_0) = 1$. Wir betrachten das Vektorfeld $Z \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$ definiert durch $Z(t) := \theta(t) \cdot Z_0(t)$. Dafür gilt

$$Z(0) = Z(l) = 0 \quad , \quad Z(t_0) = -Y'(t_0) \ .$$

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$Y_\alpha(t) := \begin{cases} Y(t) + \alpha Z(t) & t \in [0, t_0] \\ \alpha \cdot Z(t) & t \in [t_0, l] \end{cases}$$

Y_α ist stetig und stückweis C^∞. Außerdem gilt $Y_\alpha(0) = Y_\alpha(l) = 0$. Benutzt man $Y_\alpha \perp \gamma'$ und $\langle Y'(t_0), \gamma'(t_0)\rangle = \frac{d}{dt}(\langle Y(t), \gamma'(t)\rangle)|_{t=0} = 0$, so folgst aus der Definition von Z, dass $Y_\alpha \perp \gamma'$. Sei nun V_α die durch Y_α definierte stückweis glatte Variation

$$V_\alpha(t,s) = \exp_{\gamma(t)}(s \cdot Y_\alpha(t))$$

Nach Satz 3.45 und 3.46 gilt für die Bogenlänge $L_\alpha(s) = l(V_\alpha(\cdot, s))$

$$\begin{aligned} L'_\alpha(0) &= 0 \\ L''_\alpha(0) &= I_\gamma(Y_\alpha, Y_\alpha) \ . \end{aligned}$$

Nach Definition von $I_\gamma(Y_\alpha, Y_\alpha)$ gilt $I_\gamma(Y_\alpha, Y_\alpha) = I_1 + I_2 + I_3$, wobei

$$\begin{aligned} I_1 &= -\int_0^{t_0} \langle Y, Y'' + \mathcal{R}(Y,\gamma')\gamma'\rangle dt \\ I_2 &= -\alpha \int_0^{t_0} \langle Z, Y'' + \mathcal{R}(Y,\gamma')\gamma'\rangle dt - \alpha \int_0^{t_0} \langle Y, Z'' + \mathcal{R}(Z,\gamma')\gamma'\rangle dt \\ &= -2\alpha \int_0^{t_0} \langle Z, Y'' + \mathcal{R}(Y,\gamma')\gamma'\rangle dt + \alpha \int_0^{t_0} (\langle Z, Y'\rangle - \langle Y, Z'\rangle)' dt \\ &= -2\alpha \int_0^{t_0} \langle Z, Y'' + \mathcal{R}(Y,\gamma')\gamma'\rangle dt \ + \ \alpha(\langle Z(t_0), Y'(t_0)\rangle - \langle Y(t_0), Z'(t_0)\rangle) \\ &= -2\alpha \int_0^{t_0} \langle Z, Y'' + \mathcal{R}(Y,\gamma')\gamma'\rangle dt \ - \ \alpha\|Y'(t_0)\|^2 \\ &= -\alpha\|Y'(t_0)\|^2 \quad \text{(da } Y \text{ ein Jacobifeld ist)} \\ I_3 &= \alpha^2 I_\gamma(Z,Z). \end{aligned}$$

Dann gilt für die Variation der Bogenlänge

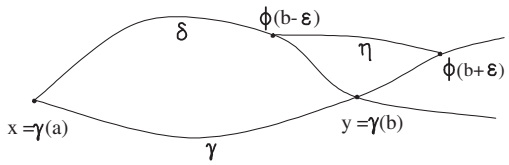
$$\begin{aligned} L'_\alpha(0) &= 0 \\ L''_\alpha(0) &= I_\gamma(Y_\alpha, Y_\alpha) = \alpha^2 I_\gamma(Z,Z) - \alpha\|Y'(t_0)\|^2 \\ &= -\alpha(\|Y'(t_0)\|^2 - \alpha I_\gamma(Z,Z)) \end{aligned}$$

Ist α hinreichend klein, so ist $\|Y'(t_0)\| - \alpha I_\gamma(Z,Z) > 0$, also $L''_\alpha(0) < 0$. Für diese α ist V_α eine Variation von γ, für die $l(\gamma)$ ein striktes lokales Minimum von $L(V_\alpha(\cdot, s))$ ist. Also gilt

$$L(V_\alpha(\cdot, s)) < L(\gamma) \quad \forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon)\backslash\{0\}.$$

□

Satz 3.49. *Sei (M, g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit. Seien $\gamma, \delta : [a, b] \to M$ zwei verschiedene gleichlange Geodäten, die zwei Punkte x und y verbinden.*



Dann ist $\gamma : [a, b + \varepsilon] \to M$ nicht *minimierend (für beliebige $\varepsilon > 0$).*

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ und bezeichne $\phi : [a, b + \varepsilon] \to M$ die Kurve

$$\phi(t) = \begin{cases} \delta(t) & t \leq b \\ \gamma(t) & t \geq b. \end{cases}$$

Da (M, g) vollständig ist, existiert nach dem Satz von Hopf und Rinow eine minimierende Geodäte η von $\phi(b - \varepsilon')$ nach $\phi(b + \varepsilon')$, wobei $0 < \varepsilon' < \varepsilon$. Da ϕ in $\phi(b)$ eine "Ecke" hat, ist $\phi|_{[b-\varepsilon', b+\varepsilon']}$ nicht minimierend zwischen $\phi(b-\varepsilon')$ und $\phi(b+\varepsilon') = \gamma(b+\varepsilon')$. Folglich gilt

$$l(\phi_{[b-\varepsilon', b+\varepsilon']}) > d(\phi(b - \varepsilon'), \phi(b + \varepsilon')).$$

Folglich existiert eine Kurve zwischen $x = \gamma(a)$ und $z = \gamma(b + \varepsilon')$, die kürzer ist als $\phi|_{[a,b+\varepsilon']}$. Da $l(\delta|_{[a,b]}) = l(\phi|_{[a,b]}) = l(\gamma|_{[a,b]})$ und $\phi|_{[b,b+\varepsilon']} = \gamma|_{[b,b+\varepsilon']}$, existiert eine Kurve von x nach z, die kürzer ist als $\gamma|_{[a,b+\varepsilon']}$. Folglich ist $\gamma|_{[a,b+\varepsilon']}$ *nicht* mimimierend zwischen x und z.

□

Im folgenden sei (M, g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit, $x \in M$ und $\exp_x : T_xM \to M$ die Exponentialabbildung. Wir wollen nun den Diffeomorphiebereich von $\exp_x$ studieren.

Sei $v \in T_xM$ und $\gamma_v : \mathbb{R} \to M$ die eindeutig bestimmte Geodäte mit $\gamma_v(0) = x$ und $\gamma_v'(0) = v$. Bezeichne

$$J_v := \{t \in \mathbb{R} \mid \gamma_v \quad \text{ist minimierend auf } [0, t]\} \subset \mathbb{R}.$$

Dann gilt:

- $t_0 \in J_v \Rightarrow [0, t_0] \subset J_v$ (Dreiecksungleichung)
- J_v ist abgeschlossen:

  Seien $t_n \in J_v$ und konvergiere $t_n \to t \in \mathbb{R}$. Dann gilt

  $$d(\gamma_v(t_n), x) = t_n \cdot \|v\| \to t \cdot \|v\|$$

  und da d stetig ist, folgt

  $$d(\gamma_v(t), x) = t \cdot \|v\| = l(\gamma_v|_{[0,t]}),$$

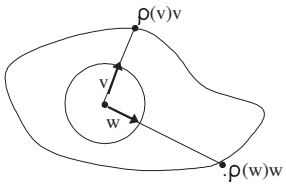
  d.h. $t \in J_v$.

Sei nun $\rho(v) = \max J_v \leq \infty$, d.h. $J_v = [0, \rho(v)]$. Dann gilt:

- $\rho(v)$ ist der größte Parameter t, für den $\gamma|_{[0,t]}$ noch minimierend ist.
- $\rho(v) = \lambda\rho(\lambda v) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$, da $\gamma_{\lambda v}(t) = \gamma_v(\lambda t)$.
- $\rho : \{v \in T_xM \mid \|v\| = 1\} \to \mathbb{R}$ ist stetig und von unten beschränkt durch $c > 0$ (siehe Kobayashi / Nomizu, Teil II, S. 98).

Wir betrachten nun die offene Menge $U_x \subset T_xM$

$$U_x := \{t \cdot v |\ v \in T_xM, \|v\| = 1, 0 \leq t < \rho(v)\}$$



Nach Umnormierung kann man U_x auch in der folgenden Form schreiben

$$\begin{aligned} U_x &= \Big\{w \in T_xM \mid \|w\| < \rho\Big(\frac{w}{\|w\|}\Big)\Big\} \\ &= \{w \in T_xM \mid 1 < \rho(w)\} \\ &= \{w \in T_xM \mid \text{es existiert ein } \varepsilon > 0, \text{ so dass} \gamma_w|_{[0,1+\varepsilon]} \text{ minimierend ist.}\} \end{aligned}$$

Definition. *Die Menge*

$$\mathrm{Cut}(x) \ := \ \exp_x(\partial U_x) = \{\gamma_v(\rho(v))|\ v \in T_xM, \|v\| = 1\}$$

heißt der Schnittort von x.

Satz 3.50. *Sei (M, g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann gilt für jedes $x \in M$:*

1. $M = \exp_x(U_x) \dot\cup \mathrm{Cut}(x)$
2. $\exp_x : U_x \to M \backslash \mathrm{Cut}(x)$ *ist ein Diffeomorphismus.*
3. $y \in \mathrm{Cut}(x)$ *genau dann, wenn es 2 verschiedene minimierende Geodäten von x nach y gibt oder y zu x entlang einer Geodäten konjugiert ist. Insbesondere gilt:*

$$x \in \mathrm{Cut}(y) \Leftrightarrow y \in \mathrm{Cut}(x).$$

Beweis:

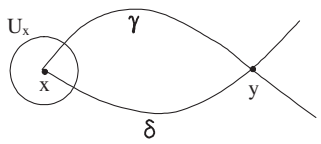
1. Behauptung: $M = \exp_x(U_x) \cup \exp_x(\partial U_x)$:

   Sei $y \in M$. Dann existiert nach dem Satz von Hopf / Rinow eine Geodäte γ von x nach y und $d(x, y) = l(\gamma)$. Sei $\gamma : [0, 1] \to M, \gamma(0) = x, \gamma(1) = y$ und bezeichne $v := \gamma'(0)$. Dann ist $\rho(v) \geq 1$, also $v \in U_x \cup \partial U_x$ und somit $y \in \exp_x(U_x) \cup \exp_x(\partial U_x)$.

2. Die Vereinigung $\exp_x(U_x) \cup \exp_x(\partial U_x)$ ist disjunkt:

   Sei $y \in \exp_x(U_x) \cap \mathrm{Cut}(x)$. Da $y \in \exp_x(U_x)$, existiert eine Geodäte $\gamma : \mathbb{R} \to M$ mit $\gamma(0) = x, \gamma(l) = y$ und $\gamma|_{[0,l+\varepsilon]}$ ist minimierend für ein $\varepsilon > 0$.

   Da $y \in \mathrm{Cut}(x) = \exp_x(\partial U_x)$, existiert eine Geodäte δ mit $\delta(0) = x$ und $\delta(b) = y$, die bis b minimierend ist und danach nicht mehr. Dann müssen die Geodäten γ und δ verschieden sein.



   Dann kann aber γ nicht minimierend auf $[0, l + \varepsilon]$ sein (Satz 3.49). Dies ist ein Widerspruch, d.h. $M = \exp_x(U_x) \dot\cup \mathrm{Cut}(x)$ ist eine disjunkte Vereinigung.

   Insbesondere ist $\exp_x : U_x \to M \setminus \mathrm{Cut}(x)$ surjektiv.

3. Wir zeigen, dass $\exp_x : U_x \to M \setminus \mathrm{Cut}(x)$ ein Diffeomorphismus ist:

   Nach Satz 3.49 und der Definition von U_x ist $\exp_x : U_x \to \mathrm{Cut}(x)$ injektiv. Nach Satz 3.48 gilt: Ist $v \in U_x$, so sind x und $\exp_x(v) = y$ nicht zueinander konjugiert entlang $\gamma_v(t) = \exp_x(tv)$. Nach Satz 3.44 ist dann $(d \exp_x)_v : T_v(T_xM) \to T_yM$ ein Isomorphismus, also ein lokaler Diffeomorphismus. Da $\exp_x : U_x \to M \setminus \mathrm{Cut}(x)$ auch bijektiv ist, ist $\exp_x : U_x \to M \setminus \mathrm{Cut}(x)$ ein Diffeomorphismus.

□

Wir haben also einen Diffeomorphismus $\exp_x : U_x \to M \setminus \mathrm{Cut}(x)$ und für den Schnittort $\mathrm{Cut}(x)$ gilt

$\mathrm{Cut}(x) = \{y \in M|$ es existiert eine minimale Geodäte von x nach y, die danach nicht mehr minimierend ist.$\}$

Definition. *Sei (M, g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann heißt*

$$r_{\mathrm{inj}}(x) := d(x, \mathrm{Cut}(x))$$

Injektivitätsradius von (M, g) in $x \in M$.

$$r_{\mathrm{inj}}(M) = \inf_{x \in M} r_{\mathrm{inj}}(x)$$

heißt <u>Injektivitätsradius</u> von (M, g).

Nach Definition von $\mathrm{Cut}(x)$ gilt dann

$$\exp_x(K(0, r_{\mathrm{inj}}(x)) = B_{r_{\mathrm{inj}}(x)}(x)$$

$B_{r_{\mathrm{inj}}(x)}(x)$ ist die maximale geodätische Kugel um x, auf der $\exp_x$ ein Diffeomorphismus ist.