Artikel in *Mathematik in der Schule*, 32 (1994), 10, S. 539-552

Tangenten an Kreise und Tangentialebenen an Kugeln

Ein Unterrichtsvorschlag für Leistungskurse in der S II

ANDREAS FILLER

In dem Artikel werden Wege zur Behandlung von Kreistangenten und Tangentialebenen an Kugeln in Grund- und vor allem Leistungskursen der Sekundarstufe II aufgezeigt. Besonderer Wert wird dabei auf das Sichtbarmachen von Zusammenhängen zwischen der Analysis und der analytischen Geometrie gelegt.

Stichworte: *Analytische Geometrie, Sekundastufe II, Unterrichtspraxis*

Die Analysis und die analytische Geometrie stellen die beiden Hauptschwerpunkte des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe II dar. Bedauerlich ist dabei, daß für die Schülerinnen und Schüler kaum Bezugspunkte zwischen diesen beiden Gebieten sichtbar werden und sie daher den Eindruck gewinnen müssen, daß die Mathematik aus voneinander isolierten Gebieten besteht. Da die Entwicklung eines ganzheitlichen Verständnisses der Mathematik ein wichtiges Anliegen des Mathematikunterrichts darstellen sollte, ist es eine lohnende Aufgabe, nach Anknüpfungspunkten zwischen Analysis und analytischer Geometrie im Unterricht der Sekundarstufe II zu suchen. Hierfür eignet sich sehr gut die Behandlung von Tangentialebenen an Kugeln - ein Thema, welches in vielen Rahmenplänen für Leistungskurse der Sekundarstufe II vorgesehen ist. Prinzipiell die gleichen Überlegungen können bei der Herleitung der Tangentengleichung an einen Kreis zum Tragen kommen, weshalb es im Sinne eines besseren Verständnisses des Vorgehens bei den Tangentialebenen sinnvoll sein kann, zunächst die Gleichung der Kreistangenten zu behandeln. Letzteres erscheint zudem auch im Rahmen von Grundkursen realistisch, für welche die Behandlung der Tangentialebenen aufgrund ihres Schwierigkeitsgrades nicht in Frage kommen dürfte.

1 Möglichkeiten für die Einführung von Tangentialebenen an Kugeln

Um eine Gleichung für die Tangentialebene E an eine Kugel k in einem Punkt $P_0(x_0|y_0|z_0)$ dieser Kugel herzuleiten, erscheinen folgende drei Möglichkeiten naheliegend:

(1) Allgemeine Untersuchung der Lage zwischen einer Kugel und einer (beliebigen) Ebene. Die Gleichung der Tangentialebene ergibt sich als Spezialfall.

(2) Nutzung der Eigenschaft der Tangentialebene, senkrecht auf dem Radiusvektor $\overrightarrow{MP_0}$ zu stehen. Daraus ergibt sich sofort die Normalform der Gleichung der Tangentialebene.

(3) Auffassung der (Halb-)Kugel als Graph einer Funktion zweier Variabler und Herleitung der Gleichung der Tangentialebene mittels partieller Ableitung dieser Funktionen nach den Variablen x und y.

Die erste Variante dürfte für eine Behandlung im Unterricht (auch in einem Leistungskurs) kaum in Frage kommen, da eine recht komplizierte Koordinatentransformation auszuführen wäre. Die zweite Variante beschreibt den Weg, auf dem Tangentialebenen in Leistungskursen zumeist behandelt werden und der auch in den meisten Schulbüchern beschritten wird (siehe u.a. [1] und [2]). Dieser Weg ist sicherlich der einfachste, falls die Schülerinnen und Schüler über solide Kenntnisse bezüglich der Normalform von Ebenengleichungen verfügen. Ein Zusammenhang zwischen der Tangentialebene an eine Kugel und den in der Analysis behandelten Tangenten an Funktionsgraphen wird hierbei jedoch nicht sichtbar.

Die dritte Variante verdeutlicht als einzige den Zusammenhang zwischen der ana1ytischen Geometrie und der Analysis und ist somit geeignet, einen Beitrag zur Integration beider Gebiete zu leisten. Da jedoch Funktionen zweier Variabler und partielle Ableitungen den Schülerinnen und Schülern nicht bekannt sind, kann diese Vorgehensweise nicht unmittelbar zur Anwendung kommen. Ein Ausweg besteht darin, die Gleichungen der Tangenten an die, (Halb-)Kreise der Kugel mit $x=x_0$ sowie $y=y_0$ durch Ableitung der entsprechenden Funktionsgleichungen zu bestimmen und daraus die Gleichung der Tangentialebene zu gewinnen. Dies setzt jedoch einige für die Schülerinnen und Schüler neue Gedankengänge voraus. Vor allem muß nach einem Weg gesucht werden, die Reduzierung einer Funktion zweier Variabler auf eine Funktion einer Variablen durch Annahme der Konstanz der anderen Variablen plausibel zu machen. Des weiteren sollten bei einem Vorgehen nach der (recht anspruchsvollen) dritten Variante alle möglichen Vereinfachungen genutzt werden. So erscheint es sinnvoll, eine Kugel in Mittelpunktslage zu betrachten (M=0) und die Herleitung eventuell anhand eines konkreten (zahlenmäßigen) Beispiels zu führen. Sehr wichtig ist die Benutzung einer verständlichen, dabei aber auch eindeutigen und exakten Terminologie und Symbolik für die auftretenden partiellen Ableitungen, welche die Schülerinnen und Schüler erstmals kennenlernen.

Das Verständnis der Betrachtungen zu Tangentialebenen an Kugeln kann dadurch erleichtert werden, daß zunächst der ebene Fall (Tangenten an Kreise) behandelt wird. Gleichungen für Tangenten an Kreise lassen sich prinzipiell nach denselben Vorgehensweisen herleiten, wie unter (1) - (3) beschrieben, wobei sich die Herleitungen jedoch einfacher gestalten. Die wichtigste Erleichterung besteht hierbei darin, daß bei einem Vorgehen nach Variante (3) ein Halbkreis als Graph einer Funktion nur einer Variablen dargestellt werden kann, welche die Schülerinnen und Schüler ohne weiteres mit den ihnen aus der Analysis zur Verfügung stehenden Kenntnissen ableiten können.

2 Herleitung der Gleichung der Tangenten an einen Kreis

Die einfachste (mit Variante (2) vergleichbare) Möglichkeit, eine Gleichung für die Tangente an einen Kreis herzuleiten, besteht darin, die den Schülerinnen und Schülern bekannte Tatsache zu nutzen, daß die Tangente an einen Kreis in einem Punkt P_0 senkrecht auf dem Radiusvektor $\overrightarrow{MP_0}$ steht (Fig. 1).

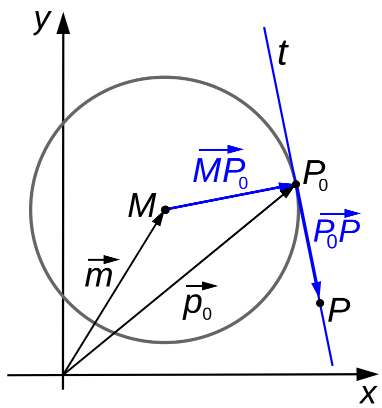

Fig. 1

Unter Nutzung der Normalenform einer Geradengleichung

$\langle \overrightarrow{P_0P}, \overrightarrow{MP_0} \rangle = 0$ [1]

---

[1]Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ wird hier mit $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ bezeichnet.

ergibt sich mit den Koordinaten $M(x_M|y_M)$, $P_0(x_0|y_0)$ und $P(x|y)$:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_0 - x_M \\ y_0 - y_M \end{pmatrix} \right\rangle = x\left(x_0 - x_M\right) + y\left(y_0 - y_M\right) - \left(x_0^{\ 2} + y_0^{\ 2} - x_0 x_M - y_0 y_M\right) = 0$$

beziehungsweise (wegen $x_0^{\ 2} + y_0^{\ 2} = r^2$)

$$x\left(x_0 - x_M\right) + y\left(y_0 - y_M\right) - \left(r^2 - x_0 x_M - y_0 y_M\right) = 0 \ .$$

als Gleichung der Tangenten an den Kreis im Punkt $P_0(x_0|y_0)$.

Für den Spezialfall, daß der Mittelpunkt des Kreises der Koordinatenursprung ist (also x_0=0 und y_0=0 gilt, wird daraus die Gleichung

$$x\,x_0 + y\,y_0 = r^2 .$$

Diese Vorgehensweise der Herleitung benötigt nur Kenntnisse aus der analytischen Geometrie und könnte eine Anwendungsaufgabe zu Geradengleichungen in Normalenform sein. Aber auch mit den Mitteln der Differentialrechnung läßt sich leicht eine Gleichung der Kreistangenten herleiten. Die den Schülerinnen und Schülern bekannte Kreisgleichung

$$x^2 + y^2 = r^2$$

läßt sich, je nachdem, ob *y* positiv oder negativ ist (also Punkte ober- bzw. unterhalb der *x*-Achse betrachtet werden), zu einer der Funktionsgleichungen

$$y = f\left(x\right) = \sqrt{r^2 - x^2} \qquad \text{bzw.} \qquad y = f\left(x\right) = -\sqrt{r^2 - x^2}$$

umstellen. Durch Ableiten nach *x* ergibt sich daraus

$$f'\left(x\right) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \qquad \text{bzw.} \qquad f'\left(x\right) = \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \ .$$

Im Punkt $P_0(x_0|y_0)$ hat die Tangente daher den Anstieg

$$f'\left(x_0\right) = -\frac{x_0}{\sqrt{r^2 - x_0^{\ 2}}} = -\frac{x_0}{y_0} \quad \text{(für } y_0>0\text{)} \quad \text{bzw.}$$

$$f'\left(x_0\right) = \frac{x_0}{\sqrt{r^2 - x_0^{\ 2}}} = -\frac{x_0}{y_0} \quad \text{(für } y_0<0\text{).}$$

Ein Richtungsvektor der Tangente ist demnach in beiden Fällen der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{x_0}{y_0} \end{pmatrix}$ und als Parameterdarstellung der Tangente ergibt sich daraus

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{x_0}{y_0} \end{pmatrix} .$$

Durch Umformen dieser Parametergleichung in eine parameterfreie Geradengleichung erhalten wir mit

$$x\,x_0 + y\,y_0 = x_0^{\ 2} + y_0^{\ 2} = r^2$$

dieselbe Tangentengleichung, die wir bereits auf rein vektoriellem Wege durch Anwendung der Normalenform der Geradengleichung hergeleitet haben.

3 Vorschlag für eine Unterrichtseinheit zur Einführung von Tangentialebenen

Im folgenden wird die Gestaltung einer Doppelstunde zur Einführung der Tangentialebenen an Kugeln umrissen, bei der die oben angestellten Überlegungen zum Tragen kommen. Eine Doppelstunde erscheint für die Einführung in diese Thematik besonders gut geeignet, wenngleich natürlich auch eine Aufteilung auf zwei Einzelstunden möglich ist.

Um einen Lernerfolg aller Schülerinnen und Schüler zu sichern und unmittelbar an das Vorwissen aus der analytischen Geometrie anzuknüpfen, erfolgt die Einführung zunächst nach der unter 1. beschriebenen, vergleichsweise einfachen, Variante (2) unter Nutzung der Kenntnisse über Normalengleichungen von Ebenen, die am Anfang der Stunde kurz reaktiviert werden sollten. Gegebenenfalls unter Nutzung der Analogie zur Eigenschaft der Tangenten an Kreise, senkrecht auf den entsprechenden Radien zu stehen, wird herausgearbeitet, daß (analog zu den Kreistangenten jede Tangentialebene senkrecht zu dem betreffenden Radiusvektor der Kugel k ist (siehe Fig. 2) und somit für jeden Punkt P der Tangentialebene E gilt:

$$\left\langle \overrightarrow{P_0P}, \overrightarrow{MP_0} \right\rangle = 0. \qquad (1)$$

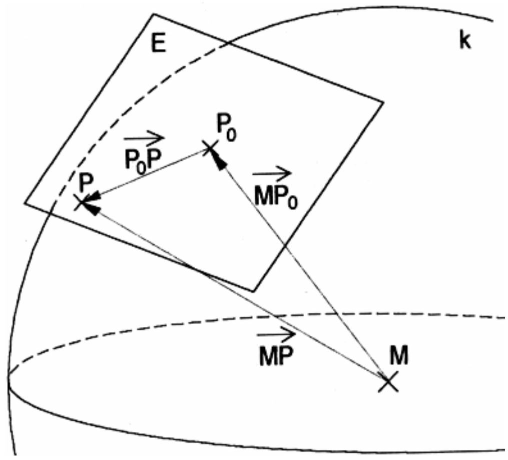

Fig. 2

Für die Koordinaten $(x|y|z)$ des Punktes P ergibt sich dann bezüglich der Koordinaten $(x_0|y_0|z_0)$ des Berührungspunktes P_0 sowie $(x_M|y_M|z_M)$ des Mittelpunktes M die parameterfreie Gleichung

$$x(x_0 - x_M) + y(y_0 - y_M) + z(z_0 - z_M) - \left(x_0{}^2 + y_0{}^2 + z_0{}^2 - x_0x_M - y_0y_M - z_0z_M\right) = 0\ , \qquad (2)$$

beziehungsweise, wenn der Kugelmittelpunkt M mit dem Koordinatenursprung O identisch ist,

$$x\,x_0 + y\,y_0 + z\,z_0 = x_0{}^2 + y_0{}^2 + z_0{}^2 = r^2. \qquad (3)$$

Für diesen Spezialfall (der in den nachfolgenden Betrachtungen ausschließlich behandelt wird) können die Schülerinnen und Schüler leicht die Parameterdarstellung der Tangentialebene herleiten:

$$E\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\dfrac{x_0}{z_0} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\dfrac{y_0}{z_0} \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Nach dieser Herleitung sollte eine Beispielaufgabe bearbeitet werden. Anhand dieses Beispiels kann danach auch die Herleitung der Gleichung der Tangentialebene mittels der Ableitung zweier Funktionen erfolgen, daher empfiehlt sich die Wahl einer recht einfachen Aufgabe, die sich auf den Spezialfall $O = M$ bezieht und in selbständiger Schülerarbeit gelöst werden kann. Folgende Aufgabe käme in Frage:

Aufgabe: Gegeben ist eine Kugel k in Mittelpunktslage mit dem Radius $r = \sqrt{50}$. Bestimmen Sie eine parameterfreie Gleichung und eine Parameterdarstellung der Tangentialebene an diese Kugel im Punkt $P_0(3|-5|4)$!

Nachdem die Schülerinnen und Schüler die Aufgabe gelöst haben, wird die Frage aufgeworfen, ob ein Zusammenhang zwischen den hier behandelten Tangentialebenen und den aus der Analysis bekannten Tangenten an Funktionsgraphen besteht. Es dürfte leicht zu motivieren sein, daß es dazu notwendig ist, die Kugel (oder zumindest eine Halbkugel, ähnlich wie beim Kreis, wo Halbkreise als Funktionsgraphen dargestellt werden können) als Graphen einer Funktion darzustellen und die zugehörige Funktionsgleichung abzuleiten. Da die Kugelgleichung $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ mit x, y und z drei Variable enthält, wird die entsprechende Funktionsgleichung jedoch eine Variable in Abhängigkeit von *zwei* Variablen ausdrücken müssen zum Beispiel x in Abhängigkeit von y und z. Nachdem dies diskutiert wurde, wird die Herleitung der Funktionsgleichung

$$z = f(x,y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \qquad (5)$$

für die obere Halbkugel (auf die wir uns im folgenden beschränken) aus der Kugelgleichung den Schülerinnen und Schülern nicht schwerfallen. Dabei sollte erörtert werden, daß es sich um die Gleichung einer Funktion zweier Variabler handelt und daß die Ableitung einer derartigen Funktion mit den zur Verfügung stehenden Mitteln nicht ohne weiteres möglich ist.

Bei der Diskussion der Frage, wie diese Funktion dennoch genutzt werden könnte, um zu einer Gleichung für die Tangentialebene zu gelangen, sollte im Unterrichtsgespräch eine Rolle spielen, daß jede der Tangenten an eine Kugel k in einem Punkt P_0 innerhalb der Tangentialebene E an die Kugel in diesem Punkt liegt. Eine Tangente an k in P_0 ist jedoch gleichzeitig Tangente an einen Kreis dieser Kugel (der sich wiederum als Durchschnitt der Kugel mit einer Ebene darstellen läßt – siehe Fig. 3).

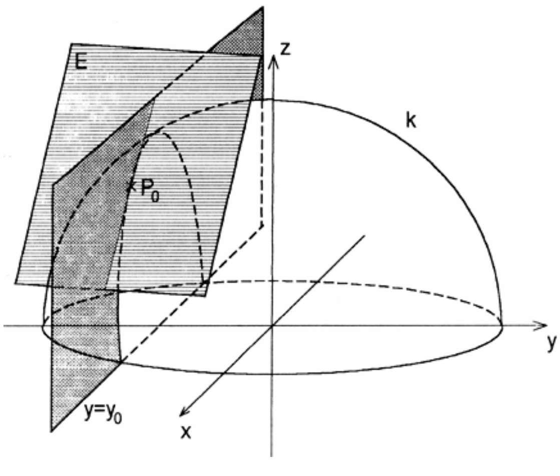

Fig. 3

Durch zwei verschiedene Tangenten an k in P_0 wird die Tangentialebene bestimmt („aufgespannt"). Gelingt es nun also, mittels Ableitung die Gleichungen bzw. Richtungsvektoren von zwei solcher Tangenten zu bestimmen, so ist die Aufstellung einer Gleichung für die Tangentialebene leicht möglich. Der Kernpunkt der Herleitung besteht nun darin, herauszuarbeiten, daß durch das Konstanthalten jeweils einer Variablen in (5) Gleichungen für die Halbkreise der Halbkugel entstehen, die durch den Punkt P_0 verlaufen und in einer Ebene parallel zur x-z-Ebene bzw. zur y-z-Ebene liegen (Abbildung 3 zeigt diese Ebene für y=y_0). Diese Halbkreise werden demnach durch folgende Funktionsgleichungen (die hier sowohl allgemein als auch in Bezug auf das Beispiel aus der genannten Aufgabe aufgeführt sind) beschrieben:

$$f_1(x) = \sqrt{r^2 - {y_0}^2 - x^2} \quad \text{bzw.} \quad f_1(x) = \sqrt{25 - x^2} \quad \text{und} \qquad (6)$$

$$f_2(y)=\sqrt{r^2-{x_0}^2-y^2} \qquad \text{bzw.} \qquad f_2(y)=\sqrt{41-y^2}\,. \tag{7}$$

Die Verwendung der Bezeichnungen f_1 und f_2 ermöglicht es, bei der Ableitung die den Schülerinnen und Schülern vertraute Bezeichnungsweise zu verwenden und umgeht somit das Einführen neuer Symbole für partielle Ableitungen. Die Ableitung und die Aufstellung der Tangentengleichungen kann problemlos in selbständiger Schülerarbeit erfolgen, es ergibt sich:

$$f_1'(x)=-\frac{x}{\sqrt{r^2-{y_0}^2-x^2}} \qquad \text{bzw.} \qquad f_1'(x)=-\frac{x}{\sqrt{25-x^2}} \qquad \text{sowie} \tag{8}$$

$$f_2'(y)=-\frac{y}{\sqrt{r^2-{x_0}^2-y^2}} \qquad \text{bzw.} \qquad f_2'(y)=-\frac{x}{\sqrt{41-y^2}}\,. \tag{9}$$

Im Punkt P_0 entsteht aus (8) bzw. (9) durch Einsetzen von x_0 bzw. y_0:

$$f_1'(x_0)=-\frac{x_0}{\sqrt{r^2-{y_0}^2-{x_0}^2}}=-\frac{x_0}{z_0}\,, \qquad f_2'(y_0)=-\frac{y_0}{\sqrt{r^2-{x_0}^2-{y_0}^2}}=-\frac{y_0}{z_0} \tag{10}$$

beziehungsweise für das betrachtete Beispiel $f_1'(x_0)=-\frac{3}{4}$ und $f_2'(y_0)=\frac{5}{4}$. Um nun hieraus die Richtungsvektoren der beiden Tangenten zu erhalten, sollten mit den Schülerinnen und Schülern folgende Überlegungen angestellt werden:

- Für $y=y_0$ haben alle Punkte der Tangente t_1 die y-Koordinate y_0, die y-Komponente des Richtungsvektors ist demnach Null. Dasselbe gilt für die x-Komponente der Tangente t_2 mit $x=x_0$.
- Die ermittelten Ableitungen beschreiben den Anstieg der Tangenten t_1 und t_2 innerhalb der Parallelebenen zur x-z-Ebene (mit $y=y_0$) bzw. zur y-z-Ebene (mit $x=x_0$). Der Quotient zwischen der z- und der x-Komponente der Tangente t_1 ist somit $f_1'(x_0)$, der zwischen der z- und der y-Komponente der Tangente t_2 entspricht $f_2'(y_0)$.

Anhand dieser Überlegungen ergibt sich für die Richtungsvektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ der Tangenten t_1 und t_2:

$$\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-\frac{x_0}{z_0}\end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-\frac{3}{4}\end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad \vec{a}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-\frac{y_0}{z_0}\end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{a}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{5}{4}\end{pmatrix}. \tag{11}$$

Für die Tangentialebene führt dies wegen

$$E:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}+\lambda\vec{a}_1+\mu\vec{a}_2 \tag{12}$$

gerade zu der Gleichung (4), die von den Schülerinnen und Schülern bereits auf völlig anderem Wege (nach der unter 1. beschriebenen Variante (1))hergeleitet wurde. Für das Beispiel ergibt sich mit

$$E:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-5\\4\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\-\frac{3}{4}\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{5}{4}\end{pmatrix}$$

dieselbe Lösung, welche die Schülerinnen und Schüler bereits bei der Lösung der oben vorgestellten Aufgabe erhalten haben.

4 Konkrete Unterrichtserfahrungen

Aus den Erfahrungen des Autors mit der hier beschriebenen Einführung des Begriffs der Tangentialebene an eine Kugel in einem recht leistungsstarken und interessierten Leistungskurs eines Berliner Gymnasiums seien die folgenden hervorgehoben:

- Die Verbindung von Betrachtungsweisen der Analysis und der analytischen Geometrie war für die Schülerinnen und Schüler neu und forderte ihr Vermögen zum Transfer vorhandenen Wissens voll heraus. Da die Herstellung dieser Verbindung für sie aber eine sehr reizvolle Herausforderung darstellte, waren sie bereit, sehr engagiert am Unterrichtsgeschehen teilzunehmen, den Herleitungen zu folgen und Beiträge einzubringen. Die wichtigsten Grundideen wurden von den Schülerinnen und Schülern entwickelt, die konkrete Herleitung mußte der Lehrer mit gezielten Hinweisen unterstützen.
- Da die oben dargelegte Vorgehensweise der Herleitung der Gleichung der Tangentialebene mittels partieller Ableitungen das Leistungsvermögen der Schülerinnen und Schüler bis an seine Grenzen fordert, sollten alle unnötigen Schwierigkeiten vermieden werden. Eine Herleitung anhand eines konkreten Beispiels erscheint sinnvoll, da auch hierbei alle relevanten Überlegungen zum Tragen kommen und der Vorteil einer größeren Übersichtlichkeit gegeben ist. Die Verallgemeinerung kann dann durch die Schülerinnen und Schüler selbständig vorgenommen werden (eventuell als Hausaufgabe). Falls mehr Zeit aufgewendet werden kann, ist auch eine parallele Herleitung (z.B. allgemein an der einen, Beispiel an der anderen Tafelhälfte) in Erwägung zu ziehen. Zudem bieten sich Ansatzpunkte für eine innere Differenzierung, die darin bestehen kann, daß besonders leistungsstarke Schülerinnen und Schüler die allgemeine, der andere Teil des Kurses die beispielbezogene Herleitung führt.
- Auf eine Herleitung der Gleichungen von Tangenten an Kreise wurde aus Zeitgründen verzichtet. Falls die dafür notwendige Zeit aufgewendet werden kann, empfiehlt sich diese jedoch, da wesentliche Vorgehensweisen bei der Behandlung der Tangentialebenen dadurch vorbereitet werden. Vor allem für leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler wird so ein besseres Verständnis ermöglicht.
- Größter Wert ist auf eine sorgfältige Veranschaulichung aller geführten Betrachtungen zu legen. Es bietet sich dabei an, mit Overlay-Folien zu arbeiten, wobei sich auf der Grundfolie die Kugel und die Tangentialebene, auf den Deckfolien die Ebenen, die parallel zur x-z-Ebene bzw. zur y-z-Ebene durch den Punkt P_0 verlaufen, sowie die entsprechenden Schnittkreise mit der Kugel befinden. Dadurch daß die Folien je nach Stand der Herleitung ergänzt werden, ist es für die Schülerinnen und Schüler wesentlich leichter, die Übersicht zu behalten und den Herleitungen zu folgen.

Obwohl (oder gerade weil) die Schülerinnen und Schüler durch das beschriebene Vorgehen stark gefordert wurden, bereitete ihnen die derartige Behandlung der Tangentialebene Freude. Insbesondere die Feststellung, daß die Herleitung auf völlig unterschiedlichen Wegen unter Nutzung verschiedener Gebiete der Mathematik zu haargenau demselben Ergebnis führte, löste einen „aha-Effekt“ aus und dürfte einen Beitrag zur Erkenntnis der Ganzheitlichkeit der Mathematik geleistet haben. Auch wenn nur eine Betrachtung von Tangenten an Kreise in der beschriebenen Weise erfolgt - was vor allem in weniger starken Leistungskursen oder in Grundkursen naheliegt - kann ein solcher Beitrag geleistet werden.

Literatur

[1] *Lambacher Schweizer*: *Analytische Geometrie - Leistungskurs.* Klett, Stuttgart, 1992

[2] *Hahn/Dzewas*: *Lineare Algebra / Analytische Geometrie*. Westermann, Braunschweig, 1992.