Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik und Finanzmathematik

Prof. Dr. Dirk Becherer
Dipl. Math. Alexander Fromm

Blatt 5
WS 2010/11
17. November 2010

Übungen zur Stochastik 2

Aufgabe 1 (3+2 Punkte).
Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Filtration in $\mathcal{F}$ und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

a) Sei $(\mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine weitere Filtration mit $\mathcal{G}_n \subseteq \mathcal{F}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass der Prozess $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $Y_n := \mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}_n]$ ein Martingal bzgl. $(\mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist.

b) Sei $\mathcal{G}_n := \sigma(X_0, \dots, X_n)$. Zeigen Sie, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal bzgl. $(\mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist. Gibt es eine noch kleinere Filtration mit dieser Eigenschaft?

Aufgabe 2 (3+2 Punkte).
Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Filtration in $\mathcal{F}$ und $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein adaptierter Prozess mit $X_n \in L^1(\mathbb{P})$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

a) Beweisen Sie, dass X eine Darstellung

$$X_n = X_0 + M_n + A_n, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

mit folgenden Eigenschaften besitzt:

(i) $A_0 = M_0 = 0$,

(ii) $M = (M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$,

(iii) $A = (A_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist vorhersehbar, d.h. A_{n+1} ist $\mathcal{F}_n$-messbar für $n \in \mathbb{N}_0$.

Zeigen Sie, dass diese Darstellung eindeutig ist, in dem Sinne, dass für jedes Paar von Prozessen (M', A') mit den gleichen Eigenschaften gilt: $M'_n = M_n$, $A'_n = A_n$ $\mathbb{P}$-f.s. für $n \in \mathbb{N}_0$.

b) Zeigen Sie, dass X genau dann ein Submartingal ist, wenn A $\mathbb{P}$-f.s. monoton steigt, d.h. $A_{n+1} \geq A_n$ $\mathbb{P}$-f.s. für $n \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 3 (3+2 Punkte).
Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Filtration in $\mathcal{F}$. Es sei ferner $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine adaptierte Folge integrierbarer reellwertiger Zufallsvariablen.
Es ist bekannt: Wenn $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal ist, so gilt für jede beschränkte Stoppzeit τ

$$\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0] \ .$$

a) Zeigen Sie, dass diese Eigenschaft auch hinreichend ist, damit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal ist.

b) Finden Sie ein Martingal $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und eine Stoppzeit τ mit $\mathbb{E}[\tau] < \infty$, so dass $\mathbb{E}[X_\tau] \neq \mathbb{E}[X_0]$.

Aufgabe 4 (3+2+2 Punkte).
Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger identisch verteilter $\{-1, 1\}$-wertiger Zufallsvariablen, so dass $\mathbb{E}[Z_1] = 0$ und $\mathrm{Var}(Z_1) = 1$. Sei $M_n := \sum_{k=1}^{n} Z_k$ mit $M_0 = 0$. Wir setzen für $c \in \mathbb{Z}$:

$$\tau_c := \inf\{n \in \mathbb{N}_0 | M_n = c\}$$

Es seien $a, b \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie für $\tau := \tau_a \wedge \tau_{-b}$, dass $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$.

b) Bestimmen Sie $\mathbb{P}(\tau_a < \tau_{-b})$ explizit als Funktion von a und b.

c) Ein Spieler wirft immer wieder eine faire Münze mit dem Einsatz 1 Euro je Spielschritt. Das Startkapital des Spielers beträgt 10 Euro. Das Spiel wird beendet, wenn der Spieler entweder kein Geld mehr hat oder wenn er zum ersten Mal den Betrag von 42 Euro erreicht.
Wie hoch ist der erwartete Gewinn/Verlust des Spiels? Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler sein ganzes Geld verspielt?

Abgabe: Donnerstag, 25.11.2010 in der Übung