Teil II

Lineare Algebra

B - 1 Einführung

Der Grundbegriff der linearen Algebra ist der des **Vektorraumes**, mit dessen Hilfe sich eine Vielzahl von mathematischen Objekten und Anwendungsmodellen beschreiben läßt.

Teil II

Lineare Algebra

Definition B.1 (Vektorraum $\mathcal{V}$ bzw. linearer Raum)

Zwei Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ werden addiert und ergeben dabei einen neuen Vektor $\mathbf{w} \in \mathcal{V}$:

$$\mathbf{w} \;=\; \mathbf{u} + \mathbf{v} \;\in \mathcal{V}\,.$$

Die Addition muß so definiert sein, daß für beliebige $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$ gilt:

- $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} \;=\; \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ **Assoziativität**
- $\mathbf{u} + \mathbf{v} \;=\; \mathbf{v} + \mathbf{u}$ **Kommutativität**
- $\mathbf{u} + \mathbf{0} \;=\; \mathbf{u}$ **Neutrales Element**
- $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) \;=\; \mathbf{0}$ **Inverses Element**

Weiterhin muß für die Multiplikation von Vektoren mit beliebigen Skalaren $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$ gelten:

- $\lambda(\gamma\mathbf{u}) \;=\; (\lambda\gamma)\mathbf{u}$
- $1\,\mathbf{u} = \mathbf{u}$
- $\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \;=\; \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$
- $(\lambda + \gamma)\mathbf{u} \;=\; \lambda\mathbf{u} + \gamma\mathbf{u}$

Beispiel: Euklidischer Raum

Für beliebiges aber festes n kann man geordnete Mengen von jeweils n reellen Zahlen ν_i für $i = 1 \dots n$ als Vektoren $\mathbf{v}$ definieren. Man schreibt dann

$$\mathbf{v} \;=\; (\nu_1, \nu_2, \dots \nu_n)^T \quad \text{oder} \quad \mathbf{v} \;=\; (\nu_i)_{i=1}^n \,.$$

Beispiel: Funktionenräume

Für je zwei reellwertige Funktionen f, g mit gemeinsamen Definitionsbereich $\mathcal{D}$ kann man die Summe $h = f + g$ als die Funktion mit den Werten

$$h(x) = f(x) + g(x) \quad \text{für} \quad x \in \mathcal{D}$$

definieren. Entsprechend erhält man $h = \lambda f$ als die Funktion mit den Werten

$$h(x) = \lambda\, f(x) \quad \text{für} \quad x \in \mathcal{D}\,.$$

Grundproblem

Die meisten Untersuchungen und Ergebnisse der linearen Algebra beschäftigen sich mit Variationen der folgende Frage :

Problem B.2

Gegeben seien eine Familie von r Vektoren $\mathbf{v}_i (i = 1, \dots, r)$ und ein spezieller Vektor $\mathbf{v}$ aus einem gemeinsamen Vektorraum $\mathcal{V}$.
Gibt es nun eine Familie von Skalaren $\lambda_i (i = 1, \dots, r)$, so daß

$$\mathbf{v} \;=\; \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_r \mathbf{v}_r \;=\; \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{v}_i$$

gilt, und wenn ja, wie kann man geeignete Koeffizienten λ_i möglicherweise eindeutig berechnen.

Unter anderem lassen sich Fragen nach Basisdarstellungen sowie die Suche nach den Lösungen linearer Gleichungen in dieser Art formulieren.

Beispiel: Formale Potenzreihen

Für $x_0 = 0$ oder sonst einen gemeinsamen Entwicklungspunkt bilden die Potenzreihen

$$\mathbf{u} \;=\; \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i x^i, \quad \mathbf{v} \;=\; \sum_{i=0}^{\infty} \nu_i x^i,$$

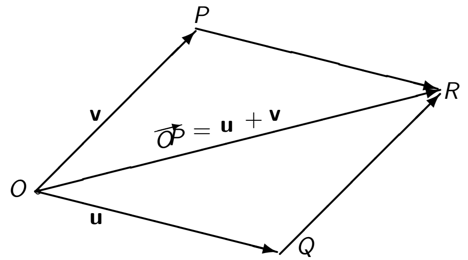
einen reellen Vektorraum bezüglich der Operationen

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} \;=\; \sum_{i=0}^{\infty} (\mu_i + \nu_i) x^i, \quad \gamma \mathbf{v} \;=\; \sum_{i=0}^{\infty} (\gamma \nu_i) x^i \,.$$

Wenn die Potenzreihen für bestimmte Werte von x konvergieren, so entsprechen Addition und Multiplikation der analogen Operationen auf den Summenwerten, die man dann als Funktionen von x interpretieren kann. Das ist aber für die Vektorraumeigenschaft nicht nötig, weshalb man auch vom Raum der formalen Potenzreihen spricht.

B - 2 Vektoren im Anschauungsraum

Für $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$ und $\mathbf{u} = \overrightarrow{OQ}$ ergibt sich $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ als $\mathbf{w} = \overrightarrow{OR}$, wobei der Vektor $\mathbf{v}$, wenn man seinen Anfang in den Punkt Q legt, mit seiner Spitze den Punkt R erreicht. Umgekehrt kann man auch zu R gelangen, indem man $\mathbf{u}$ an der Spitze von $\mathbf{v}$ ansetzt. Diese Beliebigkeit in der Reihenfolge der Ausführung ist gleichbedeutend mit der Kommutativität der Vektoraddition.

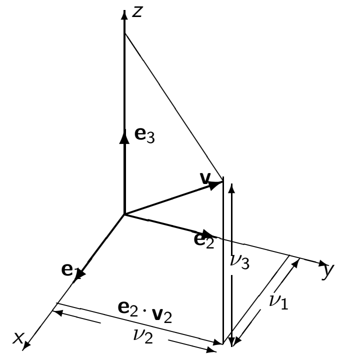


Legt man den Ursprungspunkt O fest, so lassen sich alle **Raumpunkte** P mit ihren sogenannten **Ortsvektoren** $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$ identifizieren und man schreibt auch $P = P(\mathbf{v})$.
Vereinbart man weiterhin ein System von *drei rechtwinkligen Koordinatenachsen* mit geeigneter Skalierung, so läßt sich jeder Vektor $\mathbf{v}$ mit Hilfe von drei Koordinaten $\nu_1, \nu_2, \nu_3 \in \mathbb{R}$ wie folgt darstellen:

$$\mathbf{v} \;=\; \nu_1 \mathbf{e}_1 + \nu_2 \mathbf{e}_2 + \nu_3 \mathbf{e}_3$$

Hierbei verlaufen die drei **Einheitsvektoren** $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{e}_3$ entlang der x-, y- bzw. z-Achse. Sie bilden eine sogenannte **Basis** des Anschauungsraumes und werden zuweilen auch mit $\vec{i}, \vec{j}$ und $\vec{k}$ bezeichnet.
Hat man sich auf ein bestimmtes Koordinatensystem festgelegt, so kann man die Vektoren mit ihren entsprechenden **Koordinatentripeln** identifizieren und schreibt dann einfach

$$\mathbf{v} \;=\; (\nu_1, \nu_2, \nu_3)^T \in \mathbb{R}^3 \;.$$



Inbesondere erhält man die **Basisvektoren** selbst als

$$\mathbf{e}_1 = (1,0,0)^T, \quad \mathbf{e}_2 = (0,1,0)^T, \quad \mathbf{e}_3 = (0,0,1)^T \;.$$

Addition, Subtraktion und Multiplikation erfolgen nun komponentenweise, z.B. für

$$\mathbf{u} \;=\; (3,-1,2)^T \quad \text{und} \quad \mathbf{v} \;=\; (0,2,4)^T$$

ergibt sich

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} \;=\; (3,1,6)^T, \quad \mathbf{u}-\mathbf{v} \;=\; (3,-3,-2)^T \quad \text{und} \quad 3\mathbf{u} \;=\; (9,-3,6)^T \;,$$

wobei der Faktor 3 in der letzten Gleichung die Rolle eines Skalars spielt.

Länge und Richtungskosinus

Wegen der vorausgesetzten Rechtwinkligkeit der Koordinatenachsen ergibt sich aus dem Satz des Pythagoras

Definition B.3 (Länge eines Vektors, Euklidische Norm)

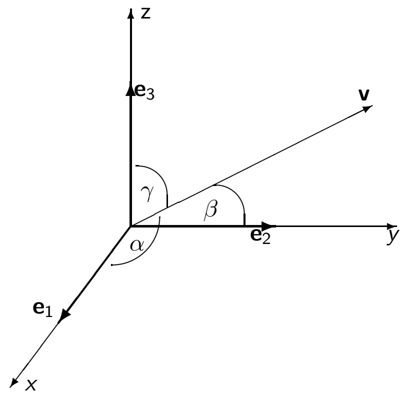
Der Vektor $\mathbf{v} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ hat die **Länge**

$$|\mathbf{v}| \;=\; \left(\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2\right)^{\frac{1}{2}} \;.$$

Diese nichtnegative reelle Zahl ist eine Verallgemeinerung des Betrages von reellen oder komplexen Zahlen und wird auch die **euklidische Norm** des Vektors $\mathbf{v}$ genannt.

Dividiert man nun einen Vektor $\mathbf{v} \neq 0$ durch seinen Betrag, so erhält man einen Vektor der Länge 1, dessen Komponenten als Kosinusse von drei Winkeln $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi]$ dargestellt werden können. Es gilt also

$$\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \;=\; \left(\frac{\nu_1}{|\mathbf{v}|}, \frac{\nu_2}{|\mathbf{v}|}, \frac{\nu_3}{|\mathbf{v}|}\right)^T \;=\; (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)^T$$



Wie aus der Zeichnung ersichtlich ist, bilden α, β und γ die Winkel zwischen $\mathbf{v}$ und den Basisvektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ und $\mathbf{e}_3$. Man kann also einen Vektor eindeutig durch diese drei Winkel und seine Länge definieren.

Interpretation inneres Produkt im Anschauungsraum

Man betrachte das Dreieck mit den Kanten $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ und $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, deren Längen nach dem Kosinussatz die Gleichung

$$|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos(\varphi)$$

erfüllen. Hierbei ist φ der von $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ eingeschlossene Winkel. Andererseits gilt für $|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2$ nach den oben aufgeführten Regeln

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 &= (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \\ &= (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} + (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (-1\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \\ &= |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\ . \end{aligned}$$

Vergleicht man nun die beiden rechten Seiten, so folgt für φ notwendigerweise

$$\cos(\varphi) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} \in [-1, 1]\ .$$

Skalar- oder inneres Produkt

Definition B.4 (Skalar- oder inneres Produkt)

Für zwei beliebige Vektoren $\mathbf{u} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)^T$ und $\mathbf{v} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)^T$ nennt man den Skalar

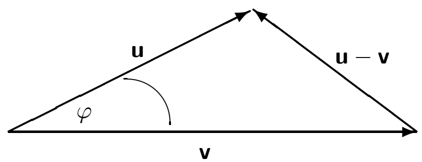
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mu_1\nu_1 + \mu_2\nu_2 + \mu_3\nu_3$$

das Skalar- oder innere Produkt von $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$.

Lemma B.5 (Eigenschaften Skalarprodukt)

Es läßt sich nun leicht nachprüfen, daß für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \\ \lambda(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) &= (\lambda\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (\lambda\mathbf{v}) \\ \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} &= |\mathbf{u}|^2 \geq 0 \end{aligned}$$



Hierbei haben wir natürlich vorausgesetzt, daß weder $\mathbf{u}$ noch $\mathbf{v}$ gleich dem Nullvektor ist.

Auch ohne diese Voraussetzung folgt aus $|\cos(\varphi)| \leq 1$ die sogenannte

Lemma B.6 (Schwarzsche Ungleichung)

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$$

Bemerkung:

Die beiden Seiten sind nur dann genau gleich, wenn $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{u}$ oder $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$ sind für ein λ, das auch Null sein kann.

Definition B.7 (Orthogonale Vektoren)

Man bezeichnet zwei Vektoren u und $\mathbf{v}$ als orthogonal zueinander, wenn der von ihnen eingeschlossene Winkel $\pi/2$ ist, oder wenn einer von ihnen verschwindet, d.h. gleich Null ist. Formelmäßig schreibt man

$$\mathbf{u} \perp \mathbf{v}\,, \quad \text{falls} \quad \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0 \quad .$$

Beispiel B.8

Die Einheitsvektoren $\mathbf{e}_i$ bilden ein Orthogonalsystem in dem Sinne, daß

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0 \quad \text{falls} \quad i \neq j \quad .$$

Es gibt aber auch noch andere Vektortripel mit dieser Eigenschaft. Das innere Produkt läßt sich entsprechend auf allen endlich dimensionalen Räumen definieren, es gibt dazu sogar mehrere Möglichkeiten.

Rechtssystem

Zeigt man mit dem Daumen und dem Zeigefinger längs der Vektoren $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$, so muß $\mathbf{w}$ in die Richtung des nach innen abgeknickten Mittelfingers zeigen.
In diesem Sinne sind auch die drei Basisvektoren $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ rechtshändig orientiert.
Gemäß den oben genannten Anforderungen gilt nun insbesondere:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_3\,, & \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 &= -\mathbf{e}_2\\
\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 &= -\mathbf{e}_3\,, & \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_1\\
\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_2\,, & \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 &= -\mathbf{e}_1 \quad .
\end{aligned}$$

Vektor- oder Kreuzprodukt

Dieses Produkt ist nur im dreidimensionalen Anschauungsraum eindeutig definiert.

Definition B.9 (Vektor- oder Kreuzprodukt)

Zu je zwei nicht verschwindenden Vektoren $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ bezeichnet man als **Vektor- oder Kreuzprodukt** den Vektor $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$, dessen Richtung zu $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ orthogonal ist und dessen Länge $|\mathbf{w}|$ gleich der Fläche des von $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ aufgespannten Parallelogramms ist.

Es soll also gelten:
$$\begin{aligned}
|\mathbf{w}| &= |\mathbf{u}||\mathbf{v}||\sin(\varphi)|\\
&= |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\left(1-\cos^2(\varphi)\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \left[|\mathbf{u}|^2\,|\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad .
\end{aligned}$$

Bemerkung:

Man beachte, daß auf der letzten rechten Seite der Ausdruck unter der Wurzel nach der Schwarzschen Ungleichung im allgemeinen nicht negativ sein kann.