Bemerkung:

Im folgenden geht es darum nachzuweisen, dass der Dimensionsbegriff eindeutig ist und dass jede Menge linear unabhängiger Vektoren zu einer Basis (d.h. Menge von $\dim \mathcal{V}$ linear unabhängigen Vektoren) erweitert werden kann.

Lemma B.27 (Eindeutige Koeffizientendarstellung)

Sei $\{v_i\}_{i=1\ldots m}$ eine Familie linear unabhängiger Vektoren irgendeines linearen Raumes $\mathcal{V}$. Dann besitzt jeder Vektor $v \in \mathcal{V}$, der zusammen mit den $\{v_i\}_{i=1\ldots m}$ keine linear unabhängige Menge bildet, eine eindeutige Darstellung

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i * \mathbf{v}_i$$

Hierbei verschwinden alle λ_i genau dann wenn $\mathbf{v} = 0$.

Lemma B.28 (Austauschsatz)

Sei $\{v_i\}_{i=1\ldots m}$ eine Familie linear unabhängiger Vektoren irgendeines linearen Raumes $\mathcal{V}$.
Dann gilt für jeden nichtverschwindenden Vektor $v \neq 0$
entweder

- *Die Vereinigung $\{v_i\}_{i=1\ldots m+1}$ ist mit $v_{m+1} \equiv v$ auch linear unabhängig.*

oder

- *Es gibt einen Index $j \leq m$, so dass $\{v_i\}_{i=1\ldots m}$, mit v_j durch v ersetzt, weiterhin linear unabhängig ist.*

Bemerkung:

Wir nennen eine Familie von Vektoren **maximal linear unabhängig** wenn die Hinzunahme irgendeines anderen Vektors die lineare Unabhängigkeit zerstört. Man nennt eine solche Menge dann auch **Basis des Raumes**. Der folgende Satz zeigt, dass alle Basen dieselbe Anzahl von Elementen haben: die Dimension des Raumes.

Satz B.29 (Eindeutigkeit der Dimension)

Seien $\{v_i\}_{i=1\ldots m}$ und $\{w_i\}_{i=1\ldots n}$ zwei maximal unabhängige Familien von Vektoren.
Dann gilt $m = n = \dim(\mathcal{V})$ und für jeden Vektor $u \in \mathcal{V}$ gibt es eindeutige Koeffizienten $\{\alpha_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$ und $\{\beta_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$ so dass

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \;=\; u \;=\; \sum_{i=1}^{n} \beta_i w_i \,.$$

Unterräume und Linearkombinationen

Gerade in unendlich dimensionalen Räumen muß man oft praktische Untersuchungen auf einen endlich dimensionalen Unterraum beschränken (z.B. indem man den Grad von Polynomen mehr oder minder willkürlich beschränkt).

Definition B.30 (Unterraum)

Ein **Unterraum** ist eine **Menge** $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$, die bezüglich der Addition von Vektoren und deren Multiplikation mit Skalaren **abgeschlossen** ist, d.h. es gilt für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ die Implikation

$$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{U} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{U}, \quad \lambda \mathbf{u} \in \mathcal{U} \,.$$

Beispiel B.31

Triviale Beispiele von Unterräumen sind $\mathcal{V}$ selbst und der nur aus dem Nullvektor bestehende Raum $\{\mathbf{0}\}$, den man als nulldimensional betrachtet.

Beispiel B.32 (Orthogonales Komplement)

Ein interessanteres Beispiel ist das **orthogonale Komplement**

$$v^{\perp} \;\equiv\; \mathcal{U} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{V} \mid \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0\}$$

eines fest vorgegebenen Vektors $\mathbf{v}$.
Die Abgeschlossenheit und damit Unterraumeigenschaft ersieht man aus der Tatsache, daß für alle $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathcal{U}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{w}) = 0 = \mathbf{v} \cdot (\lambda \mathbf{u}) \; .$$

Mit anderen Worten: Gehören $\mathbf{u}$ und $\mathbf{w}$ zum orthogonalen Komplement von $\mathbf{v}$, so gilt dies auch für die Summe $\mathbf{u} + \mathbf{w}$ und das Produkt $\lambda \mathbf{u}$.

Satz B.33 (Schnittprinzip, siehe auch Lemma A.14)

Für zwei Unterräume $\mathcal{U}, \mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ bildet deren Durchschnitt

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{W} \;\equiv\; \{\mathbf{v} \in \mathcal{V} \mid \mathbf{v} \in \mathcal{U},\; \mathbf{v} \in \mathcal{W}\}$$

einen Unterraum.

Satz B.34

Der Schnitt mehrerer und sogar unendlich vieler Unterräume bildet einen Unterraum.

Beispiel B.35

Für eine beliebige Menge von Vektoren $\mathcal{M} \subset \mathcal{V}$ ergibt sich das orthogonale Komplement als

$$\mathcal{M}^{\perp} \;\equiv\; \bigcap_{\mathbf{v} \in \mathcal{M}} \mathbf{v}^{\perp} \quad = \quad \{\mathbf{u} \in \mathcal{V} \mid \mathbf{v} \in \mathcal{M} \Rightarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0\} \; .$$

Bemerkung:

Im Gegensatz zum Durchschnitt ist die mengentheoretische Vereinigung von zwei Unterräumen $\mathcal{U}, \mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ nur dann selbst ein Unterraum, wenn $\mathcal{U}$ schon in $\mathcal{W}$ oder $\mathcal{W}$ schon in $\mathcal{U}$ enthalten ist (siehe Warnung in **A-2**).
Es gibt jedoch einen kleinsten Unterraum von $\mathcal{V}$, der sowohl $\mathcal{U}$ als auch $\mathcal{W}$ enthält und mit $\mathcal{U} + \mathcal{W}$ bezeichnet wird.

Diese Bezeichnung ist sinnvoll, denn es gilt:

$$\mathcal{U} + \mathcal{W} \;=\; \{\mathbf{u} + \mathbf{w} | \mathbf{u} \in \mathcal{U}, \mathbf{w} \in \mathcal{W}\} \; .$$

Man sagt dann auch, daß die Summe $\mathcal{U} + \mathcal{W}$ von $\mathcal{U}$ und $\mathcal{W}$ aufgespannt wird.

Natürlich kann man auch die Summe mehrerer Unterräume bilden, was besonders dann von Interesse ist, wenn diese jeweils eindimensional sind.

Definition B.36 (Linearkombination der Vektoren)

Für eine Familie $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^{r} \subset \mathcal{V}$ bezeichnet man jeden Vektor der Form

$$\mathbf{v} \;=\; \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{v}_i$$

als eine **Linearkombination der Vektoren $\mathbf{v}_i$**.

Definition B.37 (Lineare Hülle, vergleiche A.22)

Die Menge aller möglichen Linearkombinationen von Vektoren $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^{r} = \mathcal{U}$ aus einer Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ bezeichnet man als deren **lineare Hülle**

$$\mathbf{span}(\mathcal{U}) \;=\; \left\{ \mathbf{v} \;=\; \sum\nolimits_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{v}_i \;\middle|\; \lambda_i \in \mathbb{R}, v_i \in \mathcal{U} \right\} \; .$$

Die lineare Hülle ist abgeschlossen. Man bezeichnet sie deshalb auch als den von $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^{r} = \mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ **aufgespannten Unterraum**.

Definition B.38 (Basis eines Unterraumes)

Falls die Vektoren $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^r$ linear unabhängig sind, bezeichnet man sie als eine **Basis** des von ihnen aufgespannten Unterraumes.

Folgerung B.39

Aus der vorausgesetzten linearen Unabhängigkeit folgt die Eindeutigkeit der Darstellung eines beliebigen Vektors $\mathbf{v}$ *als Linearkombination.*

Lemma B.40

Bezüglich einer bestimmten Basis $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^r$ *hat jeder Vektor* $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ *eine eindeutige Darstellung*

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{v}_i$$

Beweis.

Aus

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{v}_i = \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{r} \gamma_i \mathbf{v}_i$$

erhält man durch Abzug der rechten Seite von der linken

$$0 = \sum_{i=1}^{r} (\lambda_i \mathbf{v}_i - \gamma_i \mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^{r} (\lambda_i - \gamma_i) \mathbf{v}_i \ ,$$

so daß wegen der linearen Unabhängigkeit der Basisvektoren notwendigerweise alle $\lambda_i - \gamma_i = 0$ sind. Also sind die Koeffizienten $\lambda_i = \gamma_i$ von $\mathbf{v}$ bezüglich der gewählten Basis eindeutig bestimmt. □

Beispiel B.41

Es sei

$$\mathcal{P}_n \equiv \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i x^i \,\middle|\, \gamma_i \in \mathbb{R} \right\}$$

die Menge aller Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grade kleiner n. Bezüglich der üblichen Addition von Polynomen und ihrer Multiplikation mit reellen Skalaren ist $\mathcal{P}_n$ ein Vektorraum.

Beweisidee:

Die lineare Unabhängigkeit zeigt man wie üblich, indem man annimmt, daß eine Linearkombination der Vektorfamilie verschwindet, d.h.

$$P(x) \equiv \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x^{i-1} = 0 \ .$$

Die Null repräsentiert hierbei das Nullpolynom, daß für alle x den Wert $0 \in \mathbb{R}$ hat. Jedes $x \in \mathbb{R}$ muß also eine Nullstelle von $P(x)$ sein. Dies ist nur möglich wenn alle Koeffizienten λ_i von $P(x)$ gleich Null sind (siehe Folgerung aus Korollar A.117), da $P(x)$ sich sonst als Produkt von Linearfaktoren $x - x_j$ darstellen ließe und deshalb nur höchstens $n-1$ Nullstellen hätte. Die Monome $\{v_i = x^{i-1}\}_{i=1}^n$ bilden also eine Basis des Vektorraumes $\mathcal{P}_n$, der deshalb n-dimensional ist. □

Bemerkung:

Obwohl die monomiale Basis von $\mathcal{P}_n$ sehr natürlich erscheint, ist sie keineswegs für alle im Zusammenhang mit Polynomen auftretenden mathematischen Aufgaben geeignet.

Allgemein kommen in linearen Räumen oftmals verschiedene Basen zur Anwendung, je nachdem welche Art von Berechnung oder Untersuchung durchgeführt werden soll. Das Umrechnen der Koeffizienten eines Vektors von einer Basis auf eine andere nennt man Basistransformation. Diese verlangt normalerweise die Lösung eines linearen Gleichungssystems wie sie in entsprechenden Abschnitt weiter unten behandelt wird.

Bemerkung: Orthogonalitätsbedingung, orthonormale Basis

Rechnerisch besonders angenehm sind Basen, welche die **Orthogonalitätsbedingung**

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j \; = \; \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

erfüllen. Bei solchen sogenannten **orthonormalen** Basen lassen sich die Koeffizienten λ_i eines beliebigen Vektors $\mathbf{v}$ leicht berechnen:

Aus dem Ansatz $$\mathbf{v} \; = \; \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{v}_j$$

folgt durch die Bildung des inneren Produktes mit einem bestimmten Basisvektor $\mathbf{v}_i$ sofort

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v} \; = \; \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j \; = \; \lambda_i \; ,$$

da alle Summanden mit $j \neq i$ verschwinden.

Beispiel B.42

In einem gewissen verallgemeinerten Sinne bilden die trigonometrischen Funktionen

$$\mathbf{v}_{2i} \; \equiv \; \sin(i\,x) \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_{2i+1} \; \equiv \; \cos(i\,x) \qquad \text{für } i \; = \; 1, 2, \ldots$$

zusammen mit der konstanten Funktion $\mathbf{v_1} \equiv 1$ eine Basis des unendlich dimensionalen Raumes aller Funktionen $f(x)$, die auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ periodisch und quadratisch integrierbar sind.

Letzteres bedeutet, daß $f^2(x)$ ein endliches Integral auf $[-\pi, \pi]$ hat, was zum Beispiel dann der Fall ist, wenn $f(x)$ bis auf endlich viele Sprungstellen stetig ist. Das innere Produkt, bezüglich dessen die trigonometrischen Funktionen eine orthogonale Basis bilden, ist nun das Integral

$$f \cdot g \; = \; \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx \; .$$

Fortsetzung Beispiel

Die Orthogonalitätseigenschaften lassen sich hier mittels wiederholter partieller Integration oder mit Hilfe geeigneter trigonometrischer Umformungen leicht nachweisen. Allerdings müssen die Funktionen $\mathbf{v}_i$ noch geeignet skaliert werden, so daß dann $||\mathbf{v}_i|| = 1$ gilt. Auf jeden Fall lassen sich die Koeffizienten einer beliebigen Funktion $f(x)$ bezüglich der Basisfunktion $\sin(i\,x)$ aus dem inneren Produkt

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(i\,x) dx$$

berechnen.

Warnung:

Da sich diese Integrale im allgemeinen nicht formelmäßig auswerten lassen, kommen hierbei in der Praxis oft Quadraturen, d.h. numerische Integrationsverfahren, zur Anwendung.

Streng genommen besteht der Vektorraum nicht aus den Funktionen selbst, sondern seine Elemente bilden Äquivalenzklassen von Funktionen, die sich nur an endlich vielen Punkten unterscheiden, so daß das Integral des Quadrates ihrer Differenz Null ergibt.

Die genauere Untersuchung und Beschreibung von Funktionenräumen und ihrer Basen ist der Ausgangspunkt der mathematischen Disziplin **Funktionalanalysis**.