B - 5 Lineare Abbildungen

Definition B.43 (Lineare Abbildung)

Eine Abbildung $\mathbf{F} : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{W}$ zwischen zwei reellen Vektorräumen $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ heißt linear, falls für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{F}(\mathbf{u}) + \mathbf{F}(\mathbf{v}) \qquad \textbf{Additivität}$$

$$\mathbf{F}(\lambda \mathbf{u}) = \lambda \mathbf{F}(\mathbf{u}) \qquad \textbf{Homogenität}$$

Bemerkung

Mit anderen Worten F ist ein Vektorraumhomomorphismus im Sinne der auf Gruppen und Ringe zugeschnittenen algebraischen Definition A.62.

Lemma B.45 (Restklassen bezüglich Untergruppe)

$\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ linearer Unterraum impliziert, dass

$$\mathbf{u} \sim w \iff \mathbf{u} - \mathbf{w} \in \mathcal{U} \iff \exists \mathbf{v} \in \mathcal{U} : \mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$$

eine Äquivalenzrelation ist.

Die entsprechenden Äquivalenzklassen

$$[\mathbf{u}] \equiv \{\mathbf{w} \in \mathcal{V} : \mathbf{w} \sim \mathbf{u}\}$$

bilden einen Vektorraum bezüglich der Operationen

$$[\mathbf{u}] + [\mathbf{w}] = [\mathbf{u} + \mathbf{w}] \quad \textit{und} \quad \lambda[\mathbf{u}] = [\lambda \mathbf{u}]\,.$$

Folgerung

Entsprechend zum Lemma A.68 ergibt sich nun auch folgende Aussage über Null, Bild und Kern.

Lemma B.44

(i) *Jede lineare Abbildung bildet die Null von $\mathcal{V}$ in die Null von $\mathcal{W}$ ab.*

(ii) *Die linearen Bilder $F(\mathcal{U}) \subset \mathcal{W}$ von Unterräumen $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ bilden Unterräume von $\mathcal{W}$.*

(iii) *Das* **Kern** *von* **F** *genannte Urbild*

$$Kern(F) = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{u} \in \mathcal{V} : F(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \in \mathcal{W}\}$$

ist ein linearer Unterraum von $\mathcal{V}$.
Die mit $\mathcal{V}/Kern(F)$ bezeichnete Quotientenraum von $\mathcal{W}$ bezüglich der durch den Kern definierten Äquivalenz ist isomorph zum Bild $F(\mathcal{V}) \subset \mathcal{W}$.

Beispiel B.46

Betrachte $\mathcal{V} = \mathcal{W} = \mathcal{P}_n$, den Raum der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad kleiner $n = \dim(\mathcal{P}_n)$ in einer Variablen x. Dann ist die **Differentiation**

$$\mathbf{w} = \mathbf{F}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}' = d\mathbf{v}/dx$$

eine lineare Operation, deren Ergebnis wiederum ein Polynom $\mathbf{w} \in \mathcal{V}$ ist. Mit den Koeffizientendarstellungen

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \nu_i x^{i-1} \quad \text{und} \quad \mathbf{w} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i x^{i-1}$$

gilt $\mathbf{w} = \mathbf{F}(\mathbf{v})$ genau dann, wenn

$$\omega_i = i\, \nu_{i+1} \quad \text{für} \quad i = 1 \ldots n-1$$

und $\omega_n = 0$. Ein beliebiges $\mathbf{w} \in \mathcal{V}$ ist also genau dann das Bildelement $\mathbf{F}(\mathbf{v})$ für ein geeignetes $\mathbf{v}$, wenn der höchste Koeffizient ω_n verschwindet.

Folgerung B.47

Wir haben dann im $n-1$ dimensionalen Bildbereich den Wertevorrat

$$Range(\mathbf{F}) \;=\; \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i x^{i-1} \;\middle|\; \omega_i \in \mathbb{R} \right\} \;=\; \mathcal{P}_{n-1} \;.$$

Umgekehrt fällt der Koeffizient ν_1 der konstanten Funktion $x^0 = 1$ bei der Differentiation weg, und wir haben den eindimensionalen Kern

$$Kern(\mathbf{F}) \;=\; \{\nu_1 x^0 | \nu_1 \in \mathbb{R}\} \;=\; \mathcal{P}_1 \;.$$

Mit anderen Worten, die Differentiation bildet genau diejenigen Funktionen auf die Nullfunktion ab, die konstant sind. Wie in diesem speziellen Fall, gilt für beliebige lineare Abbildungen zwischen endlich dimensionalen Räumen

$$\dim(Range(\mathbf{F})) \;=\; \dim(Dom(\mathbf{F})) - \dim(Kern(\mathbf{F})) \;,$$

wobei $Dom(\mathbf{F}) = \mathcal{V}$ den **Definitionsbereich** von $\mathbf{F}$ bezeichnet.

Falls sie überhaupt existiert, ist die Inverse einer linearen Abbildung auch immer linear, d.h. es gilt für $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in W$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \;&=\; \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{v}) + \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{w}) \\ \mathbf{F}^{-1}(\lambda \mathbf{w}) \;&=\; \lambda \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{w}) \;. \end{aligned}$$

Das Auffinden von $\mathbf{v} = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{w})$ für gegebenes $\mathbf{w}$ bezeichnet man auch als **Lösen** der Vektorgleichung $\mathbf{F}(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Im Gegensatz zu skalaren Gleichungen bezeichnet man Vektorgleichungen auch als Gleichungssysteme, vor allem wenn sie bezüglich geeigneter Basen komponentenweise dargestellt werden können.

Die effektive und genaue Lösung von linearen Gleichungssystemen bei gleichzeitiger Untersuchung ihrer Regularität ist nach wie vor eine zentrale Aufgabe im sogenannten Wissenschaftlichen Rechnen. Dabei werden Ergebnisse und Methoden der Informatik und Numerischen Mathematik eingesetzt, um Systeme mit Tausenden oder sogar Millionen von Unbekannten zumindest näherungsweise zu lösen.

Von besonderem Interesse sind Abbildungen, die **regulär** sind in dem Sinne, daß ihr Kern trivial ist, d.h. nur aus dem Nullvektor $\mathbf{0}$ besteht. Diese Voraussetzung ist äquivalent zu der Eigenschaft, daß es für jedes $\mathbf{w} \in Range(\mathbf{F})$ genau ein Urbild $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ gibt mit $\mathbf{w} = \mathbf{F}(\mathbf{v})$. Dieser Zusammenhang ergibt sich aus der Linearität wie folgt:

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{F}(\mathbf{v}) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{F}(\mathbf{v}) - \mathbf{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{F}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v} - \mathbf{u} \in Kern(\mathbf{F}) \;.$$

Mit anderen Worten: die Lösung der sogenannten **inhomogenen** Gleichung $\mathbf{F}(\mathbf{v}) \;=\; \mathbf{w}$ ist eindeutig genau dann, wenn die entsprechende **homogene** Gleichung $\mathbf{F}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ nur die triviale Lösung $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ hat. Im regulären Falle bezeichnet man die Zuordnung des Urbildes $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ zum gegebenen Bilde $\mathbf{w} = \mathbf{F}(\mathbf{v}) \in \mathcal{W}$ als die Umkehrabbildung oder die inverse Abbildung

$$\mathbf{F}^{-1} \;:\; Range(\mathbf{F}) \mapsto Dom(\mathbf{F}) \;.$$

Eine zweite für die Anwendung sehr wichtige Aufgabe ist die Lösung sogenannter Eigenwertprobleme, d.h. die Berechnung von aus einem Vektor $\mathbf{v}$ und einem Skalar λ bestehenden Paaren mit der Eigenschaft

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}) \;=\; \lambda \mathbf{v} \quad \text{und} \quad \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \;.$$

Gilt diese Gleichung, so nennt man λ einen **Eigenwert** und $\mathbf{v}$ einen **Eigenvektor** der linearen Abbildung $\mathbf{F}$. Die Lösung des Eigenwertproblems wird dadurch erschwert, daß die Eigenwerte und -vektoren oft komplex sind und $\mathbf{F}$ deswegen auf einer komplexen Erweiterung von $\mathcal{V}$ definiert werden muß.
Die praktische Lösung von linearen Gleichungen und Eigenwertproblemen verlangt die komponentenweise Darstellung linearer Abbildungen mittels Matrizen genannter Felder von Skalaren.