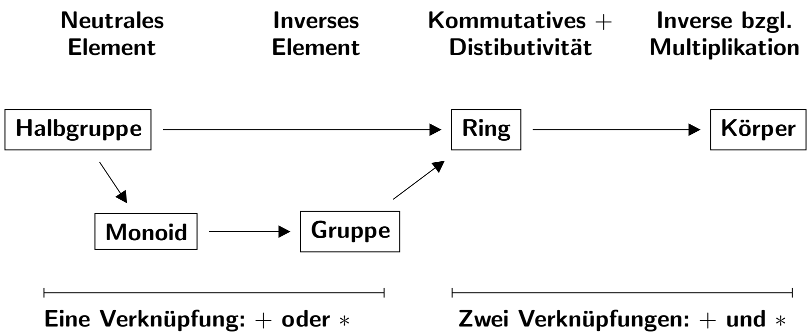
Hierarchie algebraischer Grundstrukturen



Definition A.31 (Äquivalenzrelationen)

Man nennt $\mathcal{R} \subset \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{M}$ und schreibt dann

$$x \sim y \Longleftrightarrow (x, y) \in \mathcal{R}$$

wenn für alle $x \in \mathcal{M}$ die folgenden Eigenschaften gelten :

$x \sim x$ **Reflexivität**

$x \sim y \wedge y \sim z \Longrightarrow \quad x \sim z$ **Transitivität**

$x \sim y \Longrightarrow y \sim x$ **Symmetrie**

Für jedes $x \in \mathcal{M}$ bezeichnet

$$[x]_{\mathcal{R}} \equiv \{y \in \mathcal{M} : x \sim y\}$$

die Äquivalenzklasse von x bezüglich $\sim$.

Falls $\mathcal{R}$ klar schreibt man einfach $[x]$.

A - 4 Äquivalenzrelationen und Quotientenstrukturen

Bemerkung

Die Menge der **unsigned char**s $\mathcal{B}$ basiert nicht direkt auf der Zahlenhierarchie, sie ergibt sich als sogenannter Quotientenring von $\mathbb{Z}$.

Entsprechend bilden die Drehungen in der Ebene S^1 eine Quotientengruppe von $\mathbb{R}$, wobei alle Drehwinkel φ_1, φ_2, deren Differenz ein ganzes Vielfaches von 2π ist, zusammengelegt werden, da sie als äquivalent betracht werden.

Beispiel A.32

Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$x \sim y \quad \Longleftrightarrow \quad x * x = y * y \Longrightarrow [x] = \{+x, -x\}$$

Beispiel A.33

Geraden in der Ebene sind äquivalent, wenn sie parallel sind. Äquivalenzmengen sind alle Geraden mit derselben Steigung.

Lemma A.34 (Quotientenäquivalenz)

Für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z} \times (\,\mathbb{Z} \setminus \{0\}\,) \ni y = (y_1, y_2)$ *gilt:*

$$x \sim y \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 * y_2 = y_1 * x_2$$

Lemma A.35 (Restklassen bezüglich Untergruppe)

$\mathcal{U} \subset \mathcal{G}$ kommutative Untergruppe impliziert, dass

$$x \sim y \quad \Longleftrightarrow \quad x - y \in \mathcal{U} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists z \in \mathcal{U} : x = y + z$$

eine Äquivalenzrelation ist.

Beispiel A.36

Für festes $m \in \mathbb{Z}$ gilt: $x \sim y \iff m$ teilt $x - y$.

Beispiel A.38

Für Beispiel A.36 nehme Repräsentant $0 \leq x < m$.

Beispiel A.39

Für Lemma A.34 nehme gekürzten Bruch wo x_1 und x_2 teilerfremd sind.

Beispiel A.40

Für Beispiel A.33 nehme Gerade durch Nullpunkt.

Lemma A.37 (Partitionierung)

Sei $\sim$ Äquivalenzrelation auf $\mathcal{M}$.

(i) $[x] = [y] \quad \Longleftrightarrow \quad x \sim y$

(ii) $[x] \cap [y] = \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad x \not\sim y$

(iii) *Es existiert eine Repräsentantenmenge $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$ so dass*

$$\forall y \in \mathcal{M},\ x \in \mathcal{M}' \cap [y] \ni z \quad \Longrightarrow \quad z = x$$

und somit

$$x, y \in \mathcal{M}' \wedge (x \neq y) \quad \Longrightarrow \quad [x] \neq [y]$$

sowie

$$\mathcal{M} = \bigcup_{x \in \mathcal{M}'} [x]$$

Definition A.41 (Quotientenmenge)

$$\mathcal{M}/R = \mathcal{M}/\sim\; = \{[x] : x \in \mathcal{M}\}$$

bezeichnet die Mengen aller **Äquivalenzklassen** von $\sim$ in $\mathcal{M}$. Ihre Elemente werden häufig mit denen von $\mathcal{M}'$ identifiziert.

Satz A.42 (Quotientengruppe)

Ist $\sim$ durch eine Untergruppe $\mathcal{U}$ der kommutativen Gruppe $\mathcal{G}$ induziert so definiert die additive Verknüpfung

$$[x] + [y] \equiv [x + y]$$

auf der Partitionierung $\mathcal{G}/\sim$ eine Gruppenstruktur, welche mit $\mathcal{G}/\mathcal{U}$ bezeichnet wird. Die Restklasse $[0]$ bildet die Null in $\mathcal{G}/\mathcal{U}$ und $[-x]$ das negative Element zu $[x]$.

Beispiele A.43 (Symmetrische Gruppe)

- $\mathcal{G} = \mathbb{R}$, $\mathcal{U} = \{2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$
- $\mathcal{S}^1 = \mathcal{G}/\mathcal{U} =$ Richtungen in Ebene $= \{-\pi \leq x < \pi\} \equiv \mathcal{M}'$

Beispiel A.44 (Restklassenringe)

$$\mathcal{G} = \mathbb{Z}, \quad \mathcal{U} = \{mx : x \in \mathbb{Z}\} = m\mathbb{Z},$$
$$\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/(m\mathbb{Z}) = \{x \in \mathbb{Z} : 0 \leq x < m\}$$

Bemerkung:

$\mathbb{Z}_m$ ist nicht nur Gruppe sondern sogar Ring, da $\mathcal{U}$ nicht nur Untergruppe sondern sogar Ideal im Ring $\mathbb{Z}$ ist.

Beispiel A.46

$m\mathbb{Z}$ ist Hauptideal in $\mathbb{Z}$.

Beispiel A.47

$\mathcal{M} = \mathbb{Z}[x] =$ Menge aller reellen Polynome enthält $x * \mathcal{M} \equiv x * \mathbb{Z}[x] =$ Menge aller Polynome, deren nullter Koeffizient ($=$ konstanter Term) verschwindet.

Definition A.45 (Ideal)

Eine Untergruppe $U \subset \mathcal{M}$ heisst **Ideal des kommutativen Ringes** $\mathcal{M}$ falls

$$a \in \mathcal{U} \wedge b \in \mathcal{M} \quad \Longrightarrow a * b \in \mathcal{U}$$

m.a.W. Produkte mit einem Faktor in $\mathcal{U}$ gehören auch zu $\mathcal{U}$.

Speziell ist für jedes $a \in \mathcal{M}$ die *Gruppe*

$$\mathcal{U} = a * \mathcal{M} = \{a * b : b \in \mathcal{M}\}$$

ein sogenanntes *Hauptideal* in $\mathcal{M}$.

Bemerkung:

Jedes Ideal ist insbesondere ein Unterrring. Körper haben keine Hauptideale außer sich selbst und $\{0\}$.

Satz A.48 (Quotientenringe)

Gilt Satz A.42 und ist $\mathcal{U}$ sogar Ideal im kommutativen Ring $\mathcal{G}$, dann macht die zusätzliche multiplikative Verknüpfung

$$[x] * [y] \equiv [x * y]$$

die Quotientengruppe $\mathcal{G}/\mathcal{U}$ selbst zu einem kommutativen Ring. Hat $\mathcal{G}$ die Eins 1, so ist die Äquivalenzklasse [1] die Eins im Quotientenring.

Schlussbemerkung

- $\mathcal{B} = \texttt{unsigned char} = \mathbb{Z}_{256} = \mathbb{Z}/256\mathbb{Z}$ ist ein endlicher kommutativer Ring mit Nullteilern. (z.B. $[32] * [8] = [256] = [0]$)
- Obwohl a/b für $b \neq 0$ auf dem Rechner immer ein Ergebnis liefert bedeutet dies nicht, dass $a/b = a * b^{-1}$ für ein Inverses Element b^{-1} in $\mathbb{Z}_{256}$ gilt. Vielmehr gilt $a/b = r_b(a)$ wie im Folgenden definiert.