Beispiel B.71

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \Longrightarrow \det(A) = \begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&1&1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix} = 2$$

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&1&1\end{vmatrix} = \tfrac{1}{2}\\
x_2 &= \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{vmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix} = -\tfrac{1}{2}\\
x_3 &= \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&0\end{vmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix} = \tfrac{1}{2}
\end{aligned}\right\} \quad \boxed{x = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}}$$

Man beachte:

Vertauschung von Zeilen- bzw. Spaltenindex in $b_{j\,k} = \frac{(-1)^{j+k}}{\det(A)}\det(\,A_{k\,j}\,)$

Zweckmäßigerweise ergibt sich Darstellung:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\left(\left((-1)^{i+j}\det(A_{i\,j})\right)_{i=1\ldots n}^{j=1\ldots n}\right)^T$$

$$= \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix}+\det(A_{11}) & -\det(A_{21}) & +\det(A_{31}) & \ldots\\ -\det(A_{12}) & +\det(A_{22}) & -\det(A_{32}) & \ldots\\ +\det(A_{13}) & -\det(A_{23}) & +\det(A_{33}) & \ldots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix}$$

Warnung:

Für rechteckige Matrizen läßt sich die Determinante nicht definieren.

Anwendung der Cramerschen Regel auf die Bestimmung der inversen Matrix A^{-1}

Bezeichnung $A^{-1} = B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n), \quad A\,B = I$
Die gesuchte Matrix $B = A^{-1}$ läßt sich schrittweise aus den Gleichungssystemen

$$A\mathbf{b}_k = \mathbf{e}_k = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{k\text{–te Position}}, 0, \ldots, 0)^T \qquad k = 1, \ldots, n$$

berechnen:

$$\boxed{\begin{aligned} b_{j\,k} &= \frac{1}{\det(A)}\det(A_j|\mathbf{e}_k)\\ &= \frac{(-1)^{j+k}}{\det(A)}\det(A_{k\,j})\end{aligned}}$$

$$\text{mit } A_j|\mathbf{e}_k = \begin{array}{c}\begin{bmatrix}\alpha_{1\,1} & \ldots & 0 & \ldots & \alpha_{1\,n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ \vdots & & 1 & & \vdots\\ \alpha_{n\,1} & \ldots & 0 & \ldots & \alpha_{n\,n}\end{bmatrix} \begin{array}{l}\\ \\ \longleftarrow k\\ \\ \end{array}\\ \mathbf{a}_1 \qquad\qquad \underset{\mathbf{e}_k}{\boxed{\mathbf{a}_j}}\end{array}$$

Beispiel B.72

$$A = \begin{bmatrix}1&0&2\\-1&2&0\\3&1&4\end{bmatrix} \Longrightarrow \det(A) = \begin{vmatrix}1&0&2\\0&2&2\\0&1&-2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2&2\\1&-2\end{vmatrix} = -6$$

$$A_{1\,1} = \begin{vmatrix}2&0\\1&4\end{vmatrix} = 8\,,\quad A_{1\,2} = \begin{vmatrix}-1&0\\3&4\end{vmatrix} = -4\,,\quad A_{1\,3} = \begin{vmatrix}-1&2\\3&1\end{vmatrix} = -7$$

$$A_{2\,1} = \begin{vmatrix}0&2\\1&4\end{vmatrix} = -2\,,\quad A_{2\,2} = \begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix} = -2\,,\quad A_{2\,3} = \begin{vmatrix}1&0\\3&1\end{vmatrix} = 1$$

$$A_{3\,1} = \begin{vmatrix}0&2\\2&0\end{vmatrix} = -4\,,\quad A_{3\,2} = \begin{vmatrix}1&2\\-1&0\end{vmatrix} = 2\,,\quad A_{3\,3} = \begin{vmatrix}1&0\\-1&2\end{vmatrix} = 2$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{6}\begin{bmatrix}8&4&-7\\2&-2&-1\\-4&-2&2\end{bmatrix}^T = \frac{-1}{6}\begin{bmatrix}8&2&-4\\4&-2&-2\\-7&-1&2\end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}-8&-2&4\\-4&2&2\\7&1&-2\end{bmatrix}$$

Probe: $A \cdot A^{-1} = I$