Beispiel B.71

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\Longrightarrow \det(A)=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}=2$$

$$\left.\begin{aligned}x_1&=\tfrac{1}{2}\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=\tfrac{1}{2}\\ x_2&=\tfrac{1}{2}\begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{vmatrix}=\tfrac{1}{2}\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}=-\tfrac{1}{2}\\ x_3&=\tfrac{1}{2}\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&0\end{vmatrix}=\tfrac{1}{2}\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=\tfrac{1}{2}\end{aligned}\right\}\quad\boxed{x=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}}$$

Anwendung der Cramerschen Regel auf die Bestimmung der inversen Matrix A^{-1}

Bezeichnung $A^{-1}=B=(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\ldots,\mathbf{b}_n),\quad AB=I$
Die gesuchte Matrix $B=A^{-1}$ läßt sich schrittweise aus den Gleichungssystemen

$$A\mathbf{b}_k=\mathbf{e}_k=(0,\ldots,0,\underset{\uparrow}{1},0,\ldots,0)^T\qquad k=1,\ldots,n$$
$$\text{└ } k\text{–te Position}$$

berechnen:

$$\boxed{\begin{aligned}b_{jk}&=\frac{1}{\det(A)}\det(A_j|\mathbf{e}_k)\\&=\frac{(-1)^{j+k}}{\det(A)}\det(A_{kj})\end{aligned}}\quad\text{mit } A_j|\mathbf{e}_k=\begin{bmatrix}\alpha_{11}&\ldots&0&\ldots&\alpha_{1n}\\\vdots&&\vdots&&\vdots\\\vdots&&\textcircled{1}&&\vdots\\\alpha_{n1}&\ldots&0&\ldots&\alpha_{nn}\\\mathbf{a}_1&&\boxed{\mathbf{a}_j}&&\end{bmatrix}\longleftarrow k$$
$$\uparrow$$
$$\mathbf{e}_k$$

Man beachte:
Vertauschung von Zeilen- bzw. Spaltenindex in $b_{jk}=\frac{(-1)^{j+k}}{\det(A)}\det(A_{kj})$

Zweckmäßigerweise ergibt sich Darstellung:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\left(((-1)^{i+j}\det(A_{ij}))_{i=1\ldots n}^{j=1\ldots n}\right)^T$$
$$=\frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix}+\det(A_{11})&-\det(A_{21})&+\det(A_{31})&\ldots\\-\det(A_{12})&+\det(A_{22})&-\det(A_{32})&\ldots\\+\det(A_{13})&-\det(A_{23})&+\det(A_{33})&\ldots\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix}$$

Warnung:
Für rechteckige Matrizen läßt sich die Determinante nicht definieren.

Beispiel B.72

$$A=\begin{bmatrix}1&0&2\\-1&2&0\\3&1&4\end{bmatrix}\Longrightarrow\det(A)=\begin{vmatrix}1&0&2\\0&2&2\\0&1&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&2\\1&-2\end{vmatrix}=-6$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2&0\\1&4\end{vmatrix}=8,\quad A_{12}=\begin{vmatrix}-1&0\\3&4\end{vmatrix}=-4,\quad A_{13}=\begin{vmatrix}-1&2\\3&1\end{vmatrix}=-7$$
$$A_{21}=\begin{vmatrix}0&2\\1&4\end{vmatrix}=-2,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=-2,\quad A_{23}=\begin{vmatrix}1&0\\3&1\end{vmatrix}=1$$
$$A_{31}=\begin{vmatrix}0&2\\2&0\end{vmatrix}=-4,\quad A_{32}=\begin{vmatrix}1&2\\-1&0\end{vmatrix}=2,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1&0\\-1&2\end{vmatrix}=2$$

$$A^{-1}=\frac{-1}{6}\begin{bmatrix}8&4&-7\\2&-2&-1\\-4&-2&2\end{bmatrix}^T=\frac{-1}{6}\begin{bmatrix}8&2&-4\\4&-2&-2\\-7&-1&2\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-8&-2&4\\-4&2&2\\7&1&-2\end{bmatrix}$$

Probe: $A\cdot A^{-1}=I$