

Durch

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \bar{\mathbf{a}}^T \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n \bar{\alpha}_i \beta_i \in \mathbb{C}$$

wird nun ein inneres Produkt (oder Skalarprodukt) definiert, welches im Gegensatz zum reellen Falle nicht kommutativ ist, d.h. es ist von der Reihenfolge der Faktoren abhängig:

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = \bar{\mathbf{b}}^T \mathbf{a} = \overline{\bar{\mathbf{a}}^T \mathbf{b}} = \overline{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}$$

Da nun (\mathbf{a}, \mathbf{a}) immer reell und nicht negativ ist läßt sich damit die innere Produktnorm

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \left[\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

definieren.



Es gelten die üblichen Normeigenschaften

$$\|\mathbf{a}\| \geq 0, \quad \|\mathbf{a}\| = 0 \iff \mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad \|\gamma \mathbf{a}\| = |\gamma| \|\mathbf{a}\|$$

für beliebiges $\gamma \in \mathbb{C}$, sowie die Dreiecksungleichungen

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|, \quad \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| \geq \|\mathbf{a}\| - \|\mathbf{b}\|.$$

Erweitert man den Körper der Skalare von \mathbb{R} auf \mathbb{C} , so bleiben fast alle Definitionen und Sätze gültig. Das gilt insbesondere für die Begriffe

- Linearkombination
- Linearer Unterraum
- Dimension
- Lineare Unabhängigkeit
- Basis
- Lineare Abbildung

sowie Matrizen und ihre speziellen Formen.



Unterschiede ergeben sich lediglich dort, wo das innere Produkt eine wesentliche Rolle spielt:

Eine Familie von Vektoren $\mathbf{v}_i \in \mathbb{C}^n$, $i = 1 \dots r$, heißt **orthogonal**, wenn

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \bar{\mathbf{v}}_i^T \mathbf{v}_j = 0 \quad \text{für } i \neq j,$$

was weiterhin lineare Unabhängigkeit impliziert. Eine quadratische Matrix

$$A = (\alpha_{ij})_{i,j=1 \dots n} \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

heißt **orthogonal**, wenn ihre Spalten paarweise orthogonal sind und ihre Norm jeweils gleich 1 ist. Mittels der **konjugiert transponierten Matrix**

$$\bar{A}^T = \begin{pmatrix} \bar{\alpha}_{11} & \dots & \bar{\alpha}_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{\alpha}_{1n} & \dots & \bar{\alpha}_{nn} \end{pmatrix}$$

läßt sich die Orthogonalität von A durch die Beziehungen

$$\bar{A}^T A = I = A \bar{A}^T$$

beschreiben, wobei I weiterhin die Einheitsmatrix bezeichnet:

$$I = \text{diag}(1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{n \times n} \subset \mathbb{C}^{n \times n}$$

Abgesehen von der Orthogonalität erfährt auch der Begriff der **Symmetrie** bei der Erweiterung auf komplexe Matrizen eine Veränderung. Man kann zwar eine Matrix $A = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ immer noch symmetrisch nennen, wenn $\alpha_{ji} = \alpha_{ij}$ gilt, diese Eigenschaft ist aber wesentlich weniger interessant als die Erfüllung der Bedingung

$$\bar{\alpha}_{ji} = \alpha_{ij} \Rightarrow \bar{A}^T = A.$$

Solche Matrizen nennt man **hermitesch** und die entsprechenden linearen Abbildungen auch **selbstadjungiert**, da für beliebige Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$

$$\mathbf{a} \cdot (A\mathbf{b}) = \bar{\mathbf{a}}^T A\mathbf{b} = (\bar{A}^T \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = (A\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$$

gilt. Für uns wird nur von Bedeutung sein, daß hermitesche Matrizen (wie ihre Untermenge der reell symmetrischen Matrizen) nur reelle Eigenwerte haben.



Definition B.73 (Eigenwerte und Eigenvektoren)

Eine komplexe Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt **Eigenwert** einer quadratischen Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ wenn es einen entsprechenden **Eigenvektor** $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ gibt, so daß gilt:

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad \text{mit} \quad \mathbf{v} \neq \mathbf{0}.$$

Folgerung B.74

Daraus folgt unmittelbar, daß \mathbf{v} eine nicht triviale Lösung des homogenen Systems

$$(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

ist. Eine solche existiert genau dann, wenn der Rang von $(A - \lambda I)$ kleiner als n ist, und damit äquivalenterweise gilt

$$P(\lambda) \equiv \det(A - \lambda I) = 0.$$

$P(\lambda)$ wird das **charakteristische Polynom** von A genannt.



Satz B.75 (Polynomeigenschaft von $P(A)$)

$P(\lambda)$ ist ein Polynom n -ten Grades und hat die spezielle Form

$$P(\lambda) = (-\lambda)^n + \text{Tr}(A)(-\lambda)^{n-1} + \dots + \det(A),$$

wobei

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ii}$$

die Spur (engl. trace) der Matrix A bezeichnet. Falls alle Elemente von A reell sind, so gilt dies auch für die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms (allerdings nicht für die Wurzeln).

Bemerkung:

Die spezielle Form des n -ten, $(n-1)$ -ten und konstanten Koeffizienten wird hier nicht bewiesen.



Beweis:

Durch Induktion nach n beweisen wir die etwas allgemeinere Behauptung:

$$P(\lambda) \equiv \det(A - \lambda B) \text{ ist für jedes Paar von Matrizen } A, B \in \mathbb{C}^{n \times n} \text{ mit } B = (\beta_{ij}) \text{ ein Polynom vom Grade kleiner oder gleich } n.$$

Induktionsanfang, $n = 1$: $\det(A - \lambda B) = \alpha_{11} - \lambda\beta_{11}$ ist offensichtlich ein Polynom vom Grade gleich 1.

Induktionsvoraussetzung: $\deg(\det(A - \lambda B)) \leq n$ sei erfüllt für n .

Induktionsschritt, $n \rightarrow n + 1$:

Nach dem Entwicklungssatz gilt für zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$

$$\det(A - \lambda B) = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{(j+1)} (\alpha_{1j} - \lambda\beta_{1j}) \det(A_{1j} - \lambda B_{1j})$$

wobei A_{1j} und B_{1j} die durch Weglassen der ersten Zeile und j -ten Spalte aus A bzw. B gebildeten $n \times n$ Matrizen darstellen. Nach Induktionsvoraussetzung sind die Determinanten $\det(A_{1j} - \lambda B_{1j})$ Polynome vom Grade höchstens n , so daß die Multiplikation mit den linearen Faktoren $(\alpha_{1j} - \lambda\beta_{1j})$ den Grad höchstens auf $n + 1$ erhöhen kann. □



Algebraische Vielfachheit

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra gibt es $k \leq n$ verschiedene Nullstellen λ_i der Vielfachheit p_i , so daß das charakteristische Polynom geschrieben werden kann als

$$P(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{p_1} (\lambda_2 - \lambda)^{p_2} \dots (\lambda_k - \lambda)^{p_k}$$

mit $\sum_{i=1}^k p_i = n$. Daraus folgt

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i = \text{Tr}(A), \quad \prod_{i=1}^k \lambda_i^{p_i} = \det(A).$$

Die Zahl $p_i > 0$ heißt die **algebraische Vielfachheit** des Eigenwertes λ_i .



Beispiel B.76

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

hat das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda^2 + 1 = (i - \lambda)(-i - \lambda) \end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind also $\lambda_1 = i$ und $\lambda_2 = -i$, beide mit der algebraischen Vielfachheit $p_1 = p_2 = 1$. Man prüft leicht die Identitäten

$$\text{Tr}(A) = 0+0 = 0 = i-i \quad \text{und} \quad \det(A) = 1 = i(-i) = -i^2 = -(-1)$$

Dabei ist i die *imaginäre Einheit* der komplexen Zahlen.



Berechnung der Eigenvektoren

Die zu einem Eigenwert λ_i gehörenden Eigenvektoren \mathbf{v}_i lassen sich als Lösungen des homogenen Gleichungssystems

$$(A - \lambda_i I)\mathbf{v} = 0$$

bestimmen. Sie bilden einen linearen Unterraum der Dimension

$$q_i \equiv \dim(\text{kern}(A - \lambda_i I)) = n - \text{rang}(A - \lambda_i I)$$

Die Zahl $q_i > 0$ heißt die **geometrische Vielfachheit** des Eigenwertes λ_i und ist immer kleiner oder gleich der algebraischen Vielfachheit p_i von λ_i :

$$q_i \leq p_i \quad \text{für} \quad i = 1 \dots k.$$

Eigenwerte λ_i mit $q_i < p_i$ heißen **defekt**.

Zum Eigenwert λ_i kann man immer q_i linear unabhängige Vektoren finden, die den Unterraum $\text{kern}(A - \lambda_i I)$ aufspannen. Weiterhin gilt die folgende Aussage bezüglich verschiedener Eigenwerte.



Lemma B.77

Die zu r verschiedenen Eigenwerten $\lambda_i, i = 1 \dots r$, gehörenden Eigenvektoren $(\mathbf{v}_i)_{i=1 \dots r}$ sind linear unabhängig.

Beweis:

Induktionsanfang, $r=1$: \mathbf{v}_1 ist wie jeder Eigenvektor definitionsgemäß ungleich Null und deshalb linear unabhängig, d.h. $\gamma_1 \mathbf{v}_1 = 0$ kann nur mit $\gamma_1 = 0$ erfüllt werden.

Induktionsvoraussetzung, r : Die Menge der Eigenvektoren $(\mathbf{v}_i)_{i=1 \dots r}$ sei linear unabhängig, d.h.

$$\sum_{i=1}^r \gamma_i \mathbf{v}_i = 0 \implies \gamma_1 = \dots = \gamma_r = 0.$$

Induktionsschritt, $r \rightarrow r+1$: Es gelte für geeignete Koeffizienten γ_i

$$\sum_{i=1}^{r+1} \gamma_i \mathbf{v}_i = 0.$$



Fortsetzung Beweis

Multiplikation mit der Matrix A bzw. dem Skalar λ_{r+1} liefert

$$0 = A \cdot 0 = A \cdot \sum_{i=1}^{r+1} \gamma_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{r+1} \gamma_i A \mathbf{v}_i = \boxed{\sum_{i=1}^r \gamma_i \lambda_i \mathbf{v}_i} + \boxed{\gamma_{r+1} \lambda_{r+1} \mathbf{v}_{r+1}}$$

bzw.

$$0 = \lambda_{r+1} \cdot 0 = \lambda_{r+1} \cdot \sum_{i=1}^{r+1} \gamma_i \mathbf{v}_i = \boxed{\sum_{i=1}^r \gamma_i \lambda_{r+1} \mathbf{v}_i} + \boxed{\gamma_{r+1} \lambda_{r+1} \mathbf{v}_{r+1}}$$

Aus der Differenz dieser beiden Gleichungen fällt der letzte Term mit \mathbf{v}_{r+1} ganz heraus:

$$0 = \sum_{i=1}^r \gamma_i (\lambda_{r+1} - \lambda_i) \mathbf{v}_i.$$

Laut Induktionsannahme sind die $\mathbf{v}_i, i = 1 \dots r$, linear unabhängig, also müssen die zusammengesetzten Koeffizienten $\gamma_i (\lambda_{r+1} - \lambda_i)$ alle gleich Null sein. Da die λ_i verschieden sind, gilt $\lambda_{r+1} - \lambda_i \neq 0, i = 1 \dots r$. Dies kann aber nur bedeuten, daß die Koeffizienten γ_i für $i = 1 \dots r$ und damit auch γ_{r+1} gleich Null sind. Also ist auch die um einen Eigenvektor erweiterte Familie $\mathbf{v}_i, i = 1 \dots r+1$, linear unabhängig.



Eigenwertzerlegung von Matrizen

Sind nun alle Eigenwerte einfach oder zumindest nicht defekt, so kann man einen vollen Satz von n linear unabhängigen Eigenvektoren \mathbf{v}_i finden. Diese faßt man als Spalten zu einer quadratischen Matrix

$$V = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n] \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

zusammen, welche auf Grund der linearen Unabhängigkeit ihrer Spaltenvektoren eine Inverse V^{-1} besitzt. Nun kann man die n Vektorgleichungen $A\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i$ mit Hilfe der Diagonalmatrix $\Lambda = \text{diag}(\lambda_i)_{i=1 \dots n}$ zur Matrixgleichung

$$AV = V\Lambda$$

kombinieren. Multipliziert man von links bzw. von rechts mit V^{-1} so erhält man die Darstellung

$$\Lambda = V^{-1}AV \quad \text{bzw.} \quad A = V\Lambda V^{-1}.$$



Eigenwerte bei speziellen Matrizen

Definition B.78 (Ähnlichkeitstransformation)

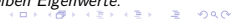
Gibt es für zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine reguläre Matrix T , so daß $TA = TB$ und damit auch $A = TBT^{-1}$ bzw. $B = T^{-1}AT$ gilt, so sagt man, die Matrizen A und B sind **ähnlich**. Die Überführung der Matrix B in A durch TBT^{-1} heisst **Ähnlichkeitstransformation**.

Daraus folgt mit $\det(T)\det(T^{-1}) = 1$ unmittelbar:

Folgerung B.79 (Eigenwerte ähnlicher Matrizen)

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det(TBT^{-1} - \lambda TT^{-1}) \\ &= \det(T(B - \lambda I)T^{-1}) \\ &= \det(T)\det(B - \lambda I)\det(T^{-1}) \\ &= \det(B - \lambda I) \end{aligned}$$

Also haben zueinander ähnliche Matrizen genau dasselbe charakteristische Polynom und damit auch dieselben Eigenwerte.



Verschiebung (Shift)

Addiert man zu einer Matrix A ein Vielfaches der Einheitsmatrix, so verschieben sich die Eigenwerte entsprechend, da

$$\det((A + \mu I) - \lambda I) = \det(A - (\lambda - \mu)I),$$

so daß λ genau dann ein Eigenwert von $(A + \mu I)$ ist, wenn $\lambda - \mu$ ein Eigenwert von A ist.

Transponierung

Selbst bei komplexen Matrizen läßt die Transponierung den Determinantenwert unverändert, so daß

$$\det(A^T - \lambda I) = \det((A - \lambda I)^T) = \det(A - \lambda I).$$

Also haben A und A^T genau dieselben Eigenwerte, wobei die dazugehörigen Eigenvektoren im allgemeinen allerdings verschieden sind.



Konjugierte und symmetrische Matrizen

Da die Konjugierung von komplexen Zahlen sich auf Faktoren und Summanden überträgt, gilt

$$\overline{\det(A - \lambda I)} = \det(\overline{A - \lambda I}) = \det(\bar{A} - \bar{\lambda}I) = \det(\bar{A} - \bar{\lambda}I),$$

so daß $\bar{\lambda}$ genau dann ein Eigenwert von \bar{A} und damit auch \bar{A}^T ist, wenn λ ein Eigenwert von A ist.

Da für reelle Matrizen $A = \bar{A}$ gilt, ist für diese mit jedem λ auch $\bar{\lambda}$ ein Eigenwert. Das heißt:

Folgerung B.80 (Eigenwerte reeller Matrizen)

Alle Eigenwerte reeller Matrizen sind entweder reell oder treten als konjugiert-komplexe Paare $(\lambda, \bar{\lambda})$ auf.



Hermitesche Matrizen

Für diese Klasse von Matrizen sind alle Eigenwerte reell und die Eigenvektoren können sogar orthogonal zueinander gewählt werden. Es gilt nämlich

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Leftrightarrow \bar{\mathbf{v}}^T A^T = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}}^T,$$

und somit folgt durch Multiplikation der linken Gleichung von links mit $\bar{\mathbf{v}}^T$ und entsprechend der rechten Gleichung mit \mathbf{v} von rechts, daß

$$\bar{\mathbf{v}}^T A\mathbf{v} = \lambda\bar{\mathbf{v}}^T\mathbf{v} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}}^T\mathbf{v},$$

wobei wir die Voraussetzung $\bar{A}^T = A$ benutzt haben. Da nun $\bar{\mathbf{v}}^T\mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2$ nicht Null ist, gilt $\lambda = \bar{\lambda}$, und der Eigenwert λ muß deshalb reell sein.



Praktische Berechnung der Eigenwerte

Der offensichtliche Weg Eigenwerte und die entsprechende Eigenvektoren zu berechnen, führt über das charakteristische Polynom $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Bei grösseren Dimensionen ist jedoch schon die Berechnung der Koeffizienten von $P(\lambda)$ sehr aufwendig. Ausserdem erhält man dann die Eigenwerte als Nullstellen von $P(\lambda)$ mit nur geringer Genauigkeit, da sie stark durch numerische Rundungsfehler beeinträchtigt werden.

Stattdessen führt man beim sogenannten **QR-Algorithmus** eine Folge von orthogonalen Ähnlichkeitstransformationen durch, die A sukzessive auf diagonale Form reduzieren (falls A wirklich diagonalisierbar ist). Der Gesamtaufwand dafür ist normalerweise mindestens $5n^3$ skalare Multiplikationen und damit ein Vielfaches der Kosten für eine **LU-Faktorisierung**. Deswegen wird die Eigenwertzerlegung nur in ganz speziellen Fällen zur Lösung linearer Systeme $Ax = b$ herangezogen.



Nutzung der Diagonalisierung

Eigenwertzerlegungen spielen besonders bei der Analyse sogenannter dynamischer Systeme eine zentrale Rolle.

Betrachtet man zum Beispiel eine lineare Evolutionsgleichung

$$x_{neu} = Ax_{alt} + b$$

so ergibt deren wiederholte Anwendung den k -ten Zustand von x beginnend mit $x = 0$ als einen Ausdruck der Form $Q_k(A)b$ mit

$$Q_k(A) = \sum_{j=0}^{k-1} q_j A^j = V \sum_{j=0}^{k-1} q_j \Lambda^j V^{-1} = V Q_k(\Lambda) V^{-1}.$$

Hierbei gilt das Gleichheitszeichen unter der Voraussetzung dass $A = V\Lambda V^{-1}$ so dass insbesondere $A^j = V\Lambda^j V^{-1}$. Mit anderen Worten: Man kann V aus dem Matrixpolynom $Q_k(A)$ herausziehen, so dass dessen Verhalten gerade fuer grosse k durch $Q_k(\Lambda) = \text{diag}(Q_k(\lambda_j))_{j=1\dots n}$ beschrieben ist.



Kanonische Jordanform

Einige Matrizen (wie zum Beispiel $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$) lassen sich nicht in die Form $A = V\Lambda V^{-1}$ mit Diagonalmatrix Λ bringen. Vielmehr bleiben in Λ noch einige Elemente in der Superdiagonalen zurück, die einen sogenannten **Jordanblock** bilden. Die vollständige Diagonalisierung gelingt hier nicht, weil der Eigenwert ($\lambda_1 = 1$) eine höhere algebraische ($p_1 = 2$) als geometrische Vielfachheit ($q_1 = 1$) besitzt, dh. defekt ist.

Dieser Effekt ist sehr speziell, da für ein beliebig kleines $\epsilon \neq 0$ die gestörte Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+\epsilon \end{bmatrix}$$

zwei unterschiedlichen Eigenwerte (1 und $1 + \epsilon$) hat und deshalb diagonalisierbar ist. Allerdings ist die entsprechende Matrix V^{-1} dann sehr gross und explodiert, wenn man ϵ immer kleiner macht.

Zusammenfassend bleibt festzustellen, dass die Eigenwertzerlegung $A = V\Lambda V^{-1}$ ein wesentlich kniffligeres Problem darstellt als die Lösung linearer Gleichungssysteme $Ax = b$.

