A - 7 Teilbarkeit und partielle Ordnungen

Lemma A.70 (Eigenschaften der Teilbarkeit)

Für $a, b, c \in \mathcal{M} = \mathbb{N}$ gilt:

(i) $a|b \;\wedge\; b|c \quad \Longrightarrow \quad a|c$ **Transitivität**

(ii) $a|b \;\wedge\; b|a \quad \Longrightarrow \quad a = b$ **Antisymmetrie**

(iii) $a|a$ **Reflexivität**

Bemerkung:

Offenbar folgt aus $a|b$ daß $a \leq b$.
Die Umkehrung gilt aber nicht da z.B. weder $3|7$ noch $7|3$.
Teilbarkeit repräsentiert eine partielle Ordnung im Sinne der folgenden Definition.

Definition A.71 (Ordnungsrelation)

(i) Die durch eine Menge $\mathcal{R} \subset \mathcal{M} \times \mathcal{M}$, definierte Beziehung

$$a \prec b \quad \Longleftrightarrow \quad b \succ a \quad \Longleftrightarrow \quad (a, b) \in \mathcal{R},$$

heißt **Ordnungsrelation** falls

$$a \prec b \;\wedge\; b \prec c \quad \Longrightarrow \quad a \prec c \qquad \textbf{Transitivität}$$
$$a \prec b \;\wedge\; b \prec a \quad \Longrightarrow \quad a = b \qquad \textbf{Antisymmetrie}$$

(ii) Die Ordnungsrelation heißt **streng** falls für alle $a \in \mathcal{M}$ die folgenden äquivalenten Aussagen gelten

$$a \not\prec a \quad \Longleftrightarrow \quad \neg(a \prec a).$$

Dann wird durch

$$a \preceq b \quad \Longleftrightarrow \quad a \prec b \;\vee\; a = b$$

eine **reflexive** Ordnungsrelation definiert, so daß $a \preceq a$ für alle $a \in \mathcal{M}$. Umgekehrt ergibt sich strenge Ordnung durch

$$a \prec b \quad \Longleftrightarrow \quad a \preceq b \;\wedge\; a \neq b$$

(iii) Die Relation heißt **vollständig** oder eine **Wohlordnung** von $\mathcal{M}$, falls für alle $a, b \in \mathcal{M}$ gilt

$$a \prec b \;\vee\; b \prec a \;\vee\; a = b.$$

Nicht vollständige Ordnungen heissen **partiell**.

Beispiel A.72

Die übliche *Kleiner*-Relation $<$ in $\mathbb{R}$ und Untermengen ist eine strenge Ordnung und $\leq$ die entsprechende reflexive Variante. Beide sind vollständig.

Beispiel A.73

Koordinatenvektoren (x, y) in Ebene werden durch

$$a \;=\; (x_1, y_1) \;\leq\; b \;=\; (x_2, y_2) \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 \leq x_2 \;\wedge\; y_1 \leq y_2$$

partiell geordnet.

Beispiel A.74

Die Enthaltenenseinsbeziehung von Mengen

$$\mathcal{M} \prec \mathcal{N} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{M} \subset \mathcal{N}$$

ist eine partielle nichtstrenge, d.h. reflexive Ordnung.

Definition A.75

Das Alphabet $\mathcal{A} = \{a, b, c, \ldots, x, y, z\}$ ist vollständig geordnet durch Reihenfolge der Buchstaben in obiger Auflistung der Menge $\mathcal{A}$, z.B $c \prec x$.
Diese Ordnung kann erweitert werden zur **lexikographische Ordnung** auf der Menge $\mathcal{A}^*$ aller Worte, die aus dem Alphabet $\mathcal{A}$ gebildet werden können.

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad \prec \quad (b_1, b_2, \ldots, b_m)$$

gilt genau dann wenn ein $k \leq \min(m, n)$ existiert so dass

$$a_i = b_i \text{ für } i \leq k \qquad \text{und} \qquad (\; a_{k+1} < b_{k+1} \quad \text{oder} \quad k = n < m\,).$$

Beispiel A.76 (Telefonbuch)

$\ldots$ $\texttt{griewank} \prec \texttt{grünewald} \prec \quad \ldots \quad \prec \texttt{meier} \prec \texttt{meiers} \prec \ldots$

Graphische Interpretation:

Betrachte die Elemente einer Menge $\mathcal{M}$ mit strenger Ordnung $\prec$ als Knoten eines Graphen mit der Kantenmenge $\mathcal{K}$
Zwei Knoten $a, b \in \mathcal{M}$ werden durch eine gerichtete Kante $(a, b) \in \mathcal{K}$ verbunden wenn a bzgl. der Ordnung $\prec$ vor b kommt und kein Knoten c dazwischen liegt, d.h.

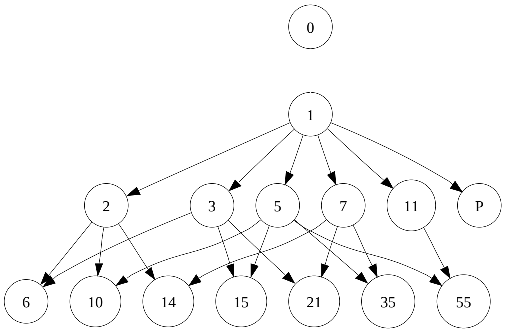
$$(a, b) \in \mathcal{K} \quad \Longleftrightarrow \quad a \prec b \wedge a \neq b \ \wedge \ (a \prec c \prec b \Longrightarrow c = a \ \vee \ c = b)\,.$$

Dann erhalten wir einen

DAG $\equiv$ **Directed Acyclic Graph**.

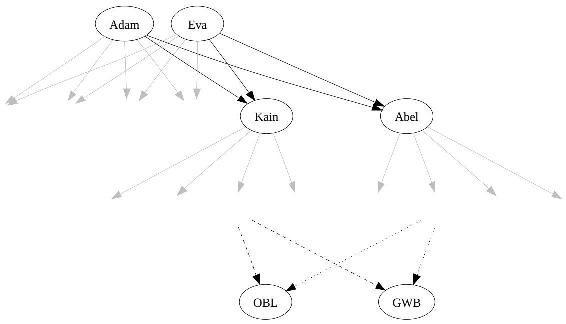
Dieser lässt sich immer so zeichnen daß alle Kanten eine negative vertikale Komponente haben.

Beispiel A.77 (Teilbarkeit in $\mathbb{N}$)



Beispiel A.78 (Stammbaum der Menscheit)

$a \prec b$ bedeutet: a ist Vorfahre von b
(a, b) bedeutet: b ist Kind von a, es gibt eine Kante von a zu b im DAG.



Bemerkung:

Im Stammbaum der Menschheit ist die Frage zweier Personen:

„Wer war unser letzter gemeinsamer Vorfahre?“im allgemeinen nicht eindeutig beantwortbar.

Theoretisch könnten z.B. sowohl Adam wie auch Eva letzte gemeinsame Vorfahren sein.

Diese Möglichkeit wird in *Verbände* genannten partiellen Ordnungen ausgeschlossen.