

## A-8 Verbandstruktur und größter gemeinsamer Teiler

### Definition A.79 ( Verbandstruktur)

Eine partiell geordnete Menge  $\mathcal{M}$  heisst **Verband**, wenn es zu jedem Paar  $a, b \in \mathcal{M}$  eine **größte untere Schranke**  $c = \inf(a, b)$  und **kleinste obere Schranke**  $d = \sup(a, b)$  gibt, so daß für alle  $c', d' \in \mathcal{M}$  gilt

$$(c \prec a \wedge c \prec b) \wedge (c' \prec a \wedge c' \prec b \implies c' \prec c)$$

und

$$(d \succ a \wedge d \succ b) \wedge (d' \succ a \wedge d' \succ b \implies d' \succ d)$$

In der Literatur wird oft abgekürzt:

$$a \wedge b = \inf(a, b) \quad \text{und} \quad a \vee b = \sup(a, b)$$

Wir werden wegen der Gefahr der Verwechslung mit logischen Operationen diese Schreibweise vermeiden.



### Beispiel A.81

$$\mathcal{M} = \mathcal{P}(A) = \{B : B \subset A\}, \quad |\mathcal{M}| = 2^A$$

**Potenzmenge von A**

Für  $B, C \in \mathcal{P}(A)$  gilt:

$$\blacktriangleright B \prec C \iff B \subset C$$

**Inklusion**

$$\blacktriangleright \inf(B, C) = B \cap C$$

**Schnittmenge**

$$\blacktriangleright \sup(B, C) = B \cup C$$

**Vereinigung**



### Lemma A.80 (Rechenregeln in Verbänden)

$$(i) \quad \inf(a, a) = a \quad \wedge \quad \sup(a, a) = a \quad \text{Idempotenz}$$

$$(ii) \quad \inf(b, a) = \inf(a, b) \quad \wedge \quad \sup(b, a) = \sup(a, b) \quad \text{Kommutativität}$$

$$(iii) \quad \inf(a, \inf(b, c)) = \inf(\inf(a, b), c) \quad \text{Assoziativität} \\ \sup(a, \sup(b, c)) = \sup(\sup(a, b), c)$$

$$(iv) \quad \inf(a, \sup(a, b)) = a \quad \wedge \quad \sup(a, \inf(a, b)) = a \quad \text{Absorption}$$

$$(v) \quad a \preceq b \iff \inf(a, b) = a \iff \sup(a, b) = b \quad \text{Konsistenz}$$



### Beispiel A.82

$\mathcal{M} = \{0, 1\}$  mit Booleschen Verknüpfung  $\begin{cases} \inf = \text{Konjunktion } \wedge \\ \sup = \text{Disjunktion } \vee \end{cases}$

inf	0	1
0	0	0
1	0	1

sup	0	1
0	0	1
1	1	1



### Beispiel A.83

$$\mathcal{M} = \mathbb{N}_+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}:$$

$$a < b \iff a|b$$

$$\inf(a, b) = GGT(a, b) = \max\{c \in \mathbb{N} : c|a \wedge c|b\}$$

$$\sup(a, b) = KGV(a, b) = \min\{c \in \mathbb{N} : a|c \wedge b|c\}$$

Hierbei kann Maximieren bzw. Minimieren bezüglich der üblichen Größenordnung in  $\mathbb{N}$  oder der Teilbarkeitsordnung vorgenommen werden.

### Beobachtung:

Falls ein größter gemeinsamer Teiler **GGT(a, b)** zweier Zahlen  $a, b \in \mathbb{N}_+$  tatsächlich existiert, erfüllt  $c = GGT(a, b)$  für alle  $c' \in \mathbb{Z}$

$$(c|a \wedge c|b) \wedge (c'|a \wedge c'|b \implies c'|c)$$

und ist dann wegen der Antisymmetrie der Teilbarkeitsrelation eindeutig.

## A-9 Euklidischer Algorithmus und Anwendungen

### Lemma A.85

$$(i) \quad 0 < a \implies GGT(0, a) = a$$

$$(ii) \quad 0 < a < b \implies GGT(a, b) = GGT(b \bmod a, a)$$

### Euklidischer Algorithmus:

**Input:**  $a, b \in \mathbb{N}_+$  mit  $0 < a < b$

$r := b \bmod a$

WHILE ( $0 \neq r$ )

$b := a$

$a := r$

$r := b \bmod a$

**Output:**  $a$

### Lemma A.86 (Endlicher Abbruch)

Für alle Eingaben  $a, b \in \mathbb{N}_+$  mit  $a \leq b$  ergibt der Algorithmus nach endlichen vielen Durchläufen der WHILE-Schleife den  $GGT(a, b)$  als Ergebnis.

### Satz A.84 (Existenz des GGT)

Für  $a, b \in \mathbb{N}_+$  gibt es  $s, t \in \mathbb{Z}$ , so daß

$$GGT(a, b) = s * a + t * b$$

### Bemerkung:

Der obige Existenzsatz ist nicht konstruktiv, da er kein Verfahren angibt, das den  $GGT$  berechnet.

Dazu benutzt man **Euklid's Algorithmus**, welcher rekursiv das vorgegebene Berechnungsproblem auf ein "kleineres" Problem reduziert.

### Frage:

Läßt sich die Zahl der Schritte a priori, d.h. durch die Größe von  $a$  und  $b$ , beschränken?

### Lemma A.87

Die maximale Schrittzahl  $k$  erfüllt die Bedingung

$$(3/2)^k \leq a + b \quad (\text{initial})$$

wobei äquivalent ist zu

$$k \leq \frac{1}{\lg_2(3/2)} \lg_2(a + b)$$

wobei  $\frac{1}{\lg_2(3/2)} \approx 1.71$

### Beispiel A.88

Für Beispiel  $GGT(228, 612) = 12$  gilt:  $3 \leq k_{max} \leq 16.6$ , was zeigt, dass die Schranke nicht sehr scharf (d.h. nicht sehr gut) ist.