Basistransformation

Umrechnung eines Vektors auf eine neue Basis

Ausgangspunkt

Gegeben sei eine Basis $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} = \{\mathbf{v}_i\}_{i=1\ldots n}$ des linearen Vektorraumes $\mathcal{V}$. Mittels des *Gram-Schmidtschen* - Orthogonali- sierungsverfahrens sei eine neue **orthonormale Basis** $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\} = \{\mathbf{b}_i\}_{i=1\ldots n}$ erzeugt worden. Die dabei erzeugten Zwischengrössen $\tilde{\mathbf{b}}_i$, $i = 1\ldots n$, und α_{ij}, $i = 1\ldots n$, $j = 1\ldots(i-1)$, seien verfügbar.

Ziel

Es soll eine Formel ermittelt werden, mit deren Hilfe jeder bezüglich der Basis $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1\ldots n}$ gegebene Vektor $u_{[\mathbf{v}]} \in \mathcal{V}$ in eine Darstellung $u_{[\mathbf{b}]}$ bezüglich der Basis $\{\mathbf{b}_i\}_{i=1\ldots n}$ umgewandelt werden kann.

Verfahren

Der Ansatz des *Gram-Schmidtschen*-Orthogonalisierungsverfahrens

$$\tilde{\mathbf{b}}_i = \mathbf{v}_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij}\mathbf{b}_j \qquad i = 1, \ldots, n$$

kann nach $\mathbf{v}_i$ umgestellt werden. Mit $\mathbf{b}_i = \tilde{\mathbf{b}}_i / \|\tilde{\mathbf{b}}_i\|$ erhält man

$$\mathbf{v}_i = \|\tilde{\mathbf{b}}_i\|\mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij}\mathbf{b}_j \qquad i = 1, \ldots, n\,.$$

Mit dem Übergang von α_{ij} zu $\tilde{\alpha}_{ij} = -\alpha_{ij}$, $i = 1\ldots n$, $j = 1\ldots i-1$, und durch zusätzliche Einführung von $\tilde{\alpha}_{ii} = \|\tilde{\mathbf{b}}_i\|$, $i = 1\ldots n$, folgt

$$v_i = \tilde{\alpha}_{ii}\mathbf{b}_{ii} + \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{\alpha}_{ij}\mathbf{b}_j = \boxed{\sum_{j=1}^{i} \tilde{\alpha}_{ij}\mathbf{b}_j = \mathbf{v}_i} \qquad i = 1, \ldots, n\,.$$

Damit hat man eine Darstellung der Basisvektoren $\mathbf{v}_i$, $i = 1\ldots n$, als Linearkombination der neuen Basisvektoren $\mathbf{b}_i$.

Ersetzt man nun die Basisvektoren $\mathbf{v}_i$ in einem gegebenen Vektor

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{[v]} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)^T_{[\mathbf{v}]} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i\mathbf{v}_i$$

durch die neue Basis $\{\mathbf{b}_i\}_{i=1\ldots n}$ erhält man

$$\mathbf{u}_{[v]} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i\mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \sum_{j=1}^{i} \tilde{\alpha}_{ij}\mathbf{b}_j = \boxed{\sum_{i=1}^{n} \mu_i \sum_{j=1}^{i} \tilde{\alpha}_{ij}\mathbf{b}_j = \mathbf{u}_{[\mathbf{b}]}}$$

also die gesuchte Formel zur Darstellung $\mathbf{u}_{[\mathbf{b}]}$ des Vektors $\mathbf{u}$ bezüglich der Basis $\{\mathbf{b}_i\}_{i=1\ldots n}$.

Beispiel

Alte Basis ($n = 3$):

$$\mathbf{v}_1 = (2, 2, 0)^T \qquad \mathbf{v}_2 = (1, 0, 2)^T \qquad \mathbf{v}_3 = (0, 2, 1)^T$$

Gegebener Vektor bezüglich Basis $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1\ldots 3}$:

$$\mathbf{u}_{[\mathbf{v}]} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)^T_{[\mathbf{v}]} = (1, -2, \tfrac{1}{2})^T_{[\mathbf{v}]}$$

Neue Basis aus *Gram-Schmidt*:

$$\mathbf{b}_1 = (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0)^T \qquad \mathbf{b}_2 = (\tfrac{\sqrt{2}}{6}, -\tfrac{\sqrt{2}}{6}, \tfrac{2\sqrt{2}}{3})^T \qquad \mathbf{b}_3 = (-\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3})^T$$

Koeffizienten α_{ij} aus *Gram-Schmidt*:

$$\begin{aligned} &\alpha_{21} = -\tfrac{1}{\sqrt{2}} \\ &\alpha_{31} = -\sqrt{2} \qquad \alpha_{32} = -\tfrac{\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

Neue Koeffizienten

$\tilde{\alpha}_{ij} = -\alpha_{ij}$, $i = 1\ldots n$, $j = 1\ldots i-1$, und $\tilde{\alpha}_{ii} = \|\tilde{\mathbf{b}}_i\|$, $i = 1\ldots n$:

$$\begin{aligned} &\tilde{\alpha}_{11} = 2\sqrt{2} \\ &\tilde{\alpha}_{21} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \qquad \tilde{\alpha}_{22} = \tfrac{3}{\sqrt{2}} \\ &\tilde{\alpha}_{31} = \sqrt{2} \qquad \tilde{\alpha}_{32} = \tfrac{\sqrt{2}}{3} \qquad \tilde{\alpha}_{33} = \tfrac{5}{3} \end{aligned}$$

Nun **Umrechnung** auf neue Basis $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}_{\mathbf{b}} &= \sum_{i=1}^{3} \mu_i \sum_{j=1}^{i} \tilde{\alpha}_{ij} \mathbf{b}_j \\
&= \mu_1 \tilde{\alpha}_{11} \mathbf{b}_1 + \mu_1 (\tilde{\alpha}_{21} \mathbf{b}_1 + \tilde{\alpha}_{22} \mathbf{b}_2) + \mu_3 (\tilde{\alpha}_{31} \mathbf{b}_1 + \tilde{\alpha}_{32} \mathbf{b}_2 + \tilde{\alpha}_{32} \mathbf{b}_3) \\
&= \underbrace{(\mu_1 \tilde{\alpha}_{11} + \mu_2 \tilde{\alpha}_{21} + \mu_3 \tilde{\alpha}_{31})}_{\substack{= 2\sqrt{2} - 2\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \boxed{\beta_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2}}}} \mathbf{b}_1 + \underbrace{(\mu_2 \tilde{\alpha}_{22} + \mu_3 \tilde{\alpha}_{32})}_{\substack{= -2\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \\ = -3\sqrt{2} + \frac{1}{6}\sqrt{2} \\ \boxed{\beta_2 = -\frac{17}{6}\sqrt{2}}}} \mathbf{b}_2 + \underbrace{\mu_3 \tilde{\alpha}_{33}}_{\substack{= \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} \\ \boxed{\beta_3 = \frac{5}{6}}}} \mathbf{b}_3
\end{aligned}
$$

und damit

$$
\mathbf{u}_{[\mathbf{v}]} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)^T_{[\mathbf{v}]} = (1, -2, \tfrac{1}{2})^T_{[\mathbf{v}]} = \boxed{(\tfrac{3\sqrt{2}}{2}, -\tfrac{17}{6}\sqrt{2}, \tfrac{5}{6})^T_{[\mathbf{b}]} = \mathbf{u}_{[\mathbf{b}]}} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T_{[\mathbf{b}]}
$$

Probe: Umrechnung in kartesische Koordinaten

$$
\mathbf{u}_{[\mathbf{v}]} = \sum_{i=1}^{3} \mu_i \mathbf{v}_i = 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2 + 0 \\ 2 - 0 + 1 \\ 0 - 4 + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -\frac{7}{2} \end{pmatrix} = \mathbf{u}}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}_{[\mathbf{b}]} &= \textstyle\sum_{i=1}^{3} \beta_i \mathbf{b}_i = \frac{3\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{17}{6}\sqrt{2} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{6} \\ -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix} + \frac{5}{6} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \frac{34}{36} - \frac{10}{18} \\ \frac{3}{2} + \frac{34}{36} + \frac{10}{18} \\ 0 - \frac{68}{18} - \frac{5}{18} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \frac{27}{18} \\ \frac{3}{2} + \frac{27}{18} \\ 0 - \frac{63}{18} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \\ 0 - \frac{7}{2} \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -\frac{7}{2} \end{pmatrix} = \mathbf{u}}
\end{aligned}
$$

und damit

$$
\mathbf{u}_{[\mathbf{v}]} = \mathbf{u}_{[\mathbf{b}]} = \mathbf{u}\,.
$$