



Übungsaufgaben zur Vorlesung Mathematik für Informatiker I
Serie 13. (Abgabe: bis 15.02.05)

Aufgabe 1: Betrachte ein lineares Gleichungssystem $Ax = b \in \mathbb{R}^m$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und seine Lösungsmenge $X \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$.

- (i) Zeige, dass $X \subset \mathbb{R}^n$ immer affin ist! (2 Punkte)
- (ii) Zeige, dass X ein linearer Unterraum ist gdw. $b = 0$, d.h. das Problem homogen ist! (2 Punkte)
- (iii) Zeige, dass X nie aus genau zwei Elementen bestehen kann! (2 Punkte)
- (iv) Konstruiere ein Beispiel, bei dem X leer ist! (2 Punkte)
- (v) **Zusatzaufgabe:** Speziell in der linearen Optimierung betrachtet man oft Systeme linearer Ungleichungen der Form

$$Ax \leq b \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \text{ für } i = 1, \dots, m$$

Zeige, dass die Menge der x , die diese Bedingung erfüllen, konvex ist. (2 Bonuspunkte)

Aufgabe 2: Löse das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- (i) mit Gauss Elimination. (2 Punkte)
- (ii) nach der Cramerschen Regel. (3 Punkte)

Aufgabe 3: Betrachte die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 12 & 5 \\ 2 & 0 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

- (i) Berechne die Determinante! (3 Punkte)
- (ii) Untersuche wie sich das Ergebnis verändert, wenn man die zweite Zeile mit einer reellen Zahl μ multipliziert! (2 Punkte)

Aufgabe 4: Berechne das charakteristische Polynom der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -9/7 & 1 & 2 \\ 10/7 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und berechne ihre Eigenwerte sowie zumindest einen Eigenvektor. (4 Punkte)