Dualität

Primales Problem

$$\begin{aligned}&\max c^T x\\ &Ax \le b\end{aligned} \qquad \text{(P)}$$

äquivalent: ($z \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned}&\max z\\ &z - c^T x \le 0\\ &Ax \le b\end{aligned}$$

$$P_z := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{pmatrix} -c^T \\ A \end{pmatrix} x \le \begin{pmatrix} -z \\ b \end{pmatrix} \right\}$$

Lemma E.9 (Farkas-Lemma)

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt entweder

$$\exists x \in \mathbb{R}^n : \; Ax \le b$$

oder

$$\exists u \in \mathbb{R}^m : \; u \ge 0, \; u^T A = 0, \; u^T b < 0.$$

$$\begin{aligned}
&\max\{c^T x : \; Ax \le b\}\\
&\quad = \; \max\{z : \; z - c^T x \le 0, \; Ax \le b\}\\
&\quad = \; \max\{z : \; P_z \ne \{\}\}\\
&\quad \le \; \min\{z : \; P_z = \{\}\}\\
&\quad = \; \min\{z : \; \exists u \ge 0, \lambda \ge 0 : \; -\lambda c^T + u^T A = 0, \; -\lambda z + u^T b < 0\}
\end{aligned}$$

Wenn Lösung mit $\lambda = 0$ existiert, ist $P_z = \{\} \; \forall z$.

Wenn Lösung mit $\lambda > 0$ existiert:

$$\begin{aligned}
&= \; \min\{z : \; \exists u \ge 0 : \; u^T A = c^T, \; u^T b < z\}\\
&= \; \min\{u^T b : \; u^T A = c^T, \; u \ge 0\}
\end{aligned}$$

Resultat: das Maximum von Problem (P) ist kleinergleich als das Minimum von Problem

$$\begin{aligned}&\min u^T b\\ &u^T A = c^T\\ &u \ge 0\end{aligned} \qquad (D)$$

($u \in \mathbb{R}^m$)

(D) heißt das zu (P) gehörende **duale Problem**.

Folgerung E.10

1. *(P) ist unbeschränkt $\Longrightarrow$ (D) ist unzulässig.*
2. *(D) ist unbeschränkt $\Longrightarrow$ (P) ist unzulässig.*

Schwache Dualität:

x zulässig für (P), u zulässig für (D). Dann gilt

$$c^T x = u^T A x \leq u^T b$$

Satz E.11 (Dualitätssatz)

Die beiden linearen Programme (P) und (D) haben optimale Lösungen mit dem gleichen Zielfunktionswert genau dann, wenn beide zulässige Lösungen haben.

(Beweis mit Farkas-Lemma)

Folgerungen:

1. (P) hat endliches Optimum $\iff$ (D) hat endliches Optimum, beide haben den gleichen Zielfunktionswert.
2. (P) ist unbeschränkt $\Longrightarrow$ (D) ist unzulässig.
3. (D) ist unbeschränkt $\Longrightarrow$ (P) ist unzulässig.
4. (P) ist unzulässig $\Longrightarrow$ (D) ist unzulässig oder unbeschränkt.
5. (D) ist unzulässig $\Longrightarrow$ (P) ist unzulässig oder unbeschränkt.

Komplementarität

Im Optimum gilt:

1. Primale Zulässigkeit: $Ax \leq b$
2. Duale Zulässigkeit: $u^T A = c^T$, $u \geq 0$
3. ZF-Werte sind gleich: $c^T x = u^T b$

$$0 = u^T b - c^T x = u^T b - u^T A x = u^T (b - Ax) = \sum_{i=1}^{m} u_i \cdot (b - Ax)_i$$

Wegen $u_i \geq 0$ und $(b - Ax)_i \geq 0$ gilt also:

1. Wenn $u_i \neq 0$, ist $(b - Ax)_i = 0$.
2. Wenn $(b - Ax)_i \neq 0$. ist $u_i = 0$.

Dies bezeichnet man mit **Komplementarität**.

Im Simplex-Algorithmus, Schritt 1:

berechne Dualvariable:

$$u^T := c^T A_B^{-1}$$

Teste, ob

$$u \geq 0$$

$\Longrightarrow$ duale Zulässigkeit
$+$ primale Zulässigkeit
$\Longrightarrow$ Optimalität

Wir sind also immer primal zulässig und im Lösungspunkt auch dual zulässig.

Variante: Starte mit dualer Zulässigkeit, iteriere, bis auch primale Zulässigkeit erfüllt ist.

→ **Dualer Simplex-Algorithmus**

Anwendung: Re-Optimierung mit Warm-Start, Vermeidung erneuter Phase I

d. h. nach erfolgter Optimierung: modifiziere Problem, optimiere erneut

- zusätzliche Variablen: setze zugehörige x-Werte auf 0, bleibt primal zulässig → weiter mit primalem Simplex
- zusätzliche Nebenbedingungen: setze zugehörige u-Werte auf 0, bleibt dual zulässig → weiter mit dualem Simplex (wichtig für Schnittebenenverfahren)

Simplex-Software

Kommerziell:

- CPLEX (ILOG)
- Xpress (Dash)
- ...

Akademisch:

- SoPlex (ZIB Berlin)
- lpsolve
- ...

Lineare ganzzahlige Optimierung

Alle oder einige der Variablen müssen eine zusätzliche Ganzzahligkeitsbedingung erfüllen, typischerweise

$$x_i \in \{0; 1\} \text{ oder } x_i \in \mathbb{Z} \text{ oder } \dots$$

Modellierung von: Anzahlen, Entscheidungen, usw.

Durch die Ganzzahligkeitsbedingung erhalten wir Kombinatorische Optimierungsprobleme.

Traveling Salesman Problem (TSP)

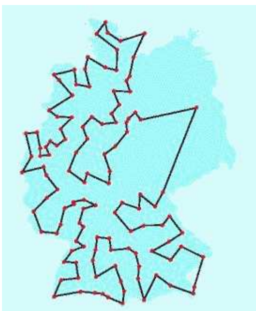
gegeben: Graph (V,E) mit Ecken V (Städten) und Kanten $E \subset V \times V$ (Straßen) und Kantengewichten c_e (Streckenlängen)

gesucht: die kürzeste Rundreise, d. h. die geschlossene Tour mit kürzester Länge durch alle Knoten

ordne jeder Kante $e \in E$ eine 0-1-Variable zu:

$$x_e = \begin{cases} 1 & \text{Kante } e \text{ gehört zur Tour} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(x: Inzidenzvektor)



Zielfunktion:

$$\min \sum_{e \in E} c_e x_e$$

Nebenbedingungen:

1. zu jedem Knoten gehen zwei Kanten der Tour

$$\sum_{e \in \delta(v)} x_e = 2 \quad \forall v \in V$$

mit $\delta(v) := \{e \in E : \exists v \neq u : \; e = uv \vee e = vu\}$
(Degree Equation)

2. auf geschlossenen Strecken (Kreisen) mit Länge $< |V|$ dürfen nicht alle Kanten zur Tour gehören

$$\sum_{e \in C} x_e \leq |C| - 1 \quad \forall \text{ Kreise } C \subset E, \; |C| < |V|$$

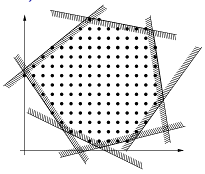
(Subcircle Elimination Constraint)

0-1-LP für das TSP

$$\min \sum_{e \in E} c_e x_e$$
$$\sum_{e \in \delta(v)} x_e = 2 \quad \forall v \in V$$
$$\sum_{e \in C} x_e \leq |C| - 1 \quad \forall \text{ Kreise } C \subset E, \; |C| < |V|$$
$$x_e \in \{0; 1\} \quad \forall e \in E$$

Allgemeines Mixed-Integer-LP (MILP)

$\min c^T x$
$Ax \leq b$
x_j ganzzahlig, $j \in J \subset \{1, \ldots, n\}$



mit der zulässigen Menge

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, \; x_j \text{ ganzzahlig}, \; j \in J \subset \{1, \ldots, n\}\}$$

Bemerkung: Wenn man einen Punkt x^* hat, der (MILP) löst, gibt es keine Kriterien, mit denen man die Optimalität leicht nachweisen könnte. Schlimmstenfalls muß man alle zulässigen Punkte untersuchen.
$\rightarrow$ Exponentielle Laufzeit.

(MILP) ist ein $\mathcal{NP}$**-schweres Problem**.

Lösungsstrategien

- **Relaxierungen:** Vergrößere die zulässige Menge.
  z. B. lasse die Ganzzahligkeitsbedingungen weg $\rightarrow$ LP.
- **Teilprobleme:** Zerlege die zulässige Menge.
  z. B. links: $x_i \leq \lfloor x_i^S \rfloor$, rechts: $x_i \geq \lfloor x_i^S \rfloor + 1$
- **Heuristiken:** Finde schnell zulässige Punkte.
  z. B. Runden, Greedy-Heuristik

Diese Strategien müssen an das konkrete Problem angepasst sein!

- **Relaxierungen** liefern lokale untere Schranken:

$$\bar{S}_i \supseteq S_i \Longrightarrow \min_{x \in \bar{S}_i} c^T x \le \min_{x \in S_i} c^T x$$

- Lösungen von **Teilproblemen** liefern globale obere Schranken:

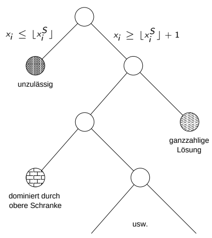
$$S = S_1 \cup S_2 \Longrightarrow \min_{x \in S_i} c^T x \ge \min_{x \in S} c^T x$$

- **Zulässige Punkte** liefern globale obere Schranken:

$$\bar{x} \in S \Longrightarrow c^T \bar{x} \ge \min_{x \in S} c^T x$$

Das Branch-&-Bound-Verfahren

1. Initialisiere die Liste der aktiven Subprobleme mit dem gegebenen Problem (MILP), $x^* :=$ NULL.
2. Wenn die Liste leer ist, Stop: Problem (MILP) ist gelöst, Lösung: x^*.
3. Entferne ein Subproblem (SUB) aus der Liste, und arbeite es wie folgt ab.
4. Löse die LP-Relaxierung von (SUB).
5. (SUB) ist unzulässig, gehe zu (10).
6. Lösung x^S ist schlechter als bisher gefundener bester Punkt x^*, gehe zu (10).
7. x^S ist zulässig für (MILP), neuer bester Punkt: $x^* := x^S$, gehe zu (10).
8. Wende Heuristik an, um zulässigen Punkt x^H zu finden. Ist dieser besser als x^*: Setze $x^* := x^H$.
9. Teile (SUB) in zwei (oder mehr) neue Subprobleme auf, schreibe diese in die Liste.
10. (SUB) ist abgearbeitet, gehe zu (2).



Konvexe Hülle

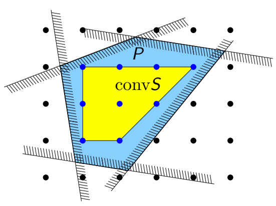
Polyeder: $P = \{x \in \mathbb{R}^n : \; Ax \le b\}$ (Annahme: $\dim P = n$)

Zulässige Menge von (MILP): $S := P \cap \mathbb{Z}^{|J|}$

Die konvexe Hülle von S ist die kleinste konvexe Menge, die S enhält.

$$\mathrm{conv} S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \; x = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i x^i, \; \sum_{i=1}^{q} \lambda_i = 1, \; \lambda_i \ge 0, \right.$$
$$\left. \{x^1, \ldots, x^q\} \text{ ist eine beliebige endliche Menge von Punkten aus } S \right\}$$

Konvexe Hülle



Satz E.12

$\mathrm{conv} S$ ist ein Polyeder mit Punkten von S als Ecken.

Die komplette Beschreibung von $\mathrm{conv} S$ erfordert u. U. sehr viele ($\sim \exp n$) Ungleichungen. Deshalb arbeitet man besser mit Schnittebenen.

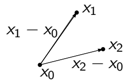
Gültige Ungleichungen und Facetten

Gültige Ungleichungen für $\mathrm{conv}S$ sind Ungleichungen, für die gilt:

$$\alpha^T x \leq \beta \; \forall x \in \mathrm{conv}S$$

Eine **Seitenfläche** von $\mathrm{conv}S$ der Dimension k wird beschrieben durch eine gültige Ungleichung für $\mathrm{conv}S$, die von genau $k+1$ affin unabhängigen Punkten aus $\mathrm{conv}S$ mit Gleichheit erfüllt wird.

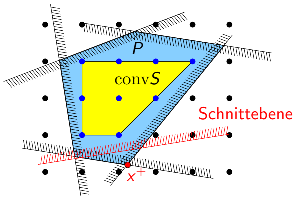
$x_0, x_1, \ldots, x_k$ affin unabhängig
$\iff$ $x_1 - x_0, \ldots, x_k - x_0$ linear unabhängig:



Seitenflächen der Dimension 0 heißen Ecken
Seitenflächen der Dimension 1 heißen Kanten
...
Seitenflächen der Dimension $n-1$ heißen **Facetten**.

Schnittebenen

(eigentlich Schnitthyperebenen)



Abschneiden eines Punktes $x^+ \notin S$:

1. $\alpha^T x \leq \beta \; \forall x \in S$
2. $\alpha^T x^+ > \beta$

Separationsproblem: Finde eine Ungleichung (aus einer Familie von möglichen Ungleichungen), die x^+ abschneidet.

Am besten: Facetten von $\mathrm{conv}S$ als Schnittebenen.

Schnittebenenalgorithmus

für das Problem $\min\{c^T x : x \in P \cap \mathbb{Z}^{|J|}\}$

1. $t := 1$. $P^1 := P$.
2. Löse die LP-Relaxierung
$$c^T x^t := \min\{c^T x : x \in P^t\}.$$
Falls $x_j^t \in \mathbb{Z} \; \forall j \in J$, STOP: (MILP) gelöst.
3. Generiere eine odere mehrere Schnittebenen
$$\alpha^{j^T} x \leq \beta^j,$$
die x^t von P^t abschneiden.
4. Definiere P^{t+1} durch Hinzufügen der Ungleichung(en) $\alpha^{j^T} x \leq \beta^j$ zu P^t (und evtl. durch Entfernen einiger vorher hinzugefügter Ungleichungen).
5. Setze $t := t + 1$, und gehe zu (2).

Generieren von Schnittebenen

- **Problemspezifische Facetten**
z. B. Facetten des TSP-Polytops
Problem: Separation in polynomialer Laufzeit
- **Lift-&-Project-Cuts** für 0-1-Probleme
Betrachte Facetten von
$$\begin{aligned}&\min c^T x\\&Ax \leq b\\&x_j \in [0;1] \; \forall j \in J\\&x_i = 0 \vee x_i = 1\end{aligned}$$
Farkas-Lemma $\longrightarrow$ Charakterisierung der Facetten als Ecken eines Polyeders (Polare). Generierung von Facetten durch Lösung von LPs, die im wesentlichen doppelt so groß sind wie $Ax \leq b$.
- **Gomory-Cuts**
Runden von Koeffizienten, so daß die Ungleichung für ganzzahlige Punkte erfüllt bleibt, aber für nichtganzzahlige Punkte verschärft wird.

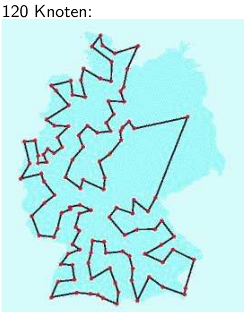
Branch & Cut

Kombiniere Branch & Bound und Schnittebenenalgorithmus.

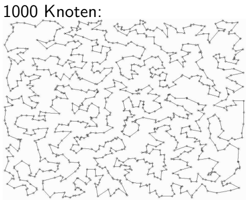
Generiere Schnittebenen in (einigen, vor allem frühen) Knoten, um (schnell) bessere Schranken zu erhalten.

TSP Beispiele

120 Knoten:

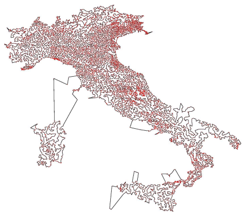


1000 Knoten:



TSP Beispiele

8246 Knoten:



15112 Knoten: